Master 2 MFA Recherche – 2023/24
Quatre cours sur la géométrie non commutative et l'analyse sur les variétés

Université de Lorraine

Topologie différentielle

Jean-François Grosjean et Tilmann Wurzbacher; Samuel Tapie et Philippe Bonneau

Premier semestre : 36 h Cours magistraux et 18 h Travaux dirigés

Description générale : Le but de ce cours fondamental est d'introduire et d'étudiér les variétés différentiables sans imposer des structures géométriques supplémentaires. En début du cours le calcul différentiel et intégral sur des variétés sera revu/expliqué. Ensuite, on va étudier la cohomologie de de Rham et les fibrés vectoriels sur des variétés, et si le temps le permet, introduire la K-théorie topologique. On fera le lien avec la géométrie non commutative en expliquant certaines constructions de façon algébrique, par exemple en caractérisant des variétés par leurs algèbres de fonctions et les fibrés vectoriels par le théorème de Serre-Swan. Pendant le cours entier, on traitera beaucoup d'exemples.

Horaire prevu : Cours : mercredi 14h-17h et TD : vendredi 13h30-15h

Chapitres :

1. Variétés différentiables
2. Formes différentielles
3. Le théorème de Stokes
4. Le flot d'un champ de vecteurs
5. La cohomologie de de Rham
6. Fibrés vectoriels

Prérequis : Calcul différentiel et intégral en plusieurs variables, équations différentielles ordinaires dans $\mathbb{R}^n$, algèbre linéaire, topologie générale.

Bibliographie :

Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble 1996.

John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer 2013.

Loring W. Tu, *An introduction to manifolds*, Springer 2011.

Algèbres d'opérateurs

Alexandre Afgoustidis Hervé Oyono-Oyono

Premier semestre : 36 h Cours magistraux et 18 h Travaux dirigés

Description générale :

Ce cours a pour but d'introduire les outils d'algèbres d'opérateurs nécessaires au cours du S10 "Théorie de l'indice et géométrie non commutative". Nous donnons une premiére approche de la théorie de l'indice via le théoréme de l'indice de Toeplitz. Les notions abordées sont aussi très utiles pour les cours d'équations aux dérivées partielles.

Horaire prevu : Mardi 14h-16h15 et vendredi 9h45-12h00

Chapitres :

1. Algèbres de Banach
   Inversibilité dans les algèbres de Banach ; Spectre et rayon spectral ; Idéaux et caractères d'une algèbre de Banach commutative.

2. C^*-algèbres
   Définitions, premières propriétés et exemples ; Spectre dans les C^*-algèbres ; C^*-algèbres commutatives ; Calcul fonctionnel ; Positivité ; Représentations.

3. Théorie de Fredholm
   Opérateurs de Fredholm ; L'algèbre de Calkin ; Opérateurs de Toeplitz et indices.

Prérequis :

- Connaissances en topologie général et analyse fonctionnelle linéaire
- Etudiants de l'Université de Lorraine : Cours d'analyse du S7 et cours d'analyse fonctionnelle du S8.

Bibliographie :

- Nicolas Bourbaki, Théories spectrales. Chapitres 1 et 2 ;
- Jacques Dixmier, Les C^*-algèbres et leurs représentations ;
- Gerd Pedersen, C^*-algebras and their automorphism groups ;
- Walter Rudin, Functional Analysis.

Théorie de l'indice et géométrie non commutative

Victor Nistor et Robert Yuncken

Deuxième semestre : 30 h Cours magistraux

Description générale : On étudiera les outils analytiques, géométriques, et algébriques sous-jacents à la théorie de l'indice du point de vue de la géométrie non commutative. On présentera la théorie des opérateurs différentiels elliptiques, avec les exemples classiques comme les opérateurs de signature et de Dirac, et la théorie des opérateurs pseudo-différentiel. Pour étudier l'indice, on suivra l'approche, initiée par Alain Connes, du groupoïde tangent (et ainsi on fera le lien avec le cours de S10 sur les groupoïdes et feuilletages). Cette approche utilise de manière importante la K-théorie et la K-homologie des C^*-algébras. À la fin du cours, on démontrera le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer : l'égalité des indices analytique et topologique d'un opérateur différentiel elliptique via la K-théorie et la K-homologie.

Thèmes :

1. Opérateurs différentiels elliptiques : exemples géométriques (signature, Dirac), espaces de Sobolev, Lemme de Rellich et Inégalité de Gårding, propriétés spectrales, indice analytique.
2. K-théorie et K-homologie : définitions, propriétés, accouplement.
3. Groupoïdes de Lie, groupoïde tangent, C^*-algèbres des groupoïdes, l'isomorphisme de Connes-Thom.
4. Les opérateurs pseudodifférentiels : définitions, propriétés, régularité elliptique.
5. Théorie de l'indice : le théorème d'Atiyah-Singer pour un opérateur différentiel elliptique. (Éléments de la preuve ou preuve complète selon le temps disponible.)

Prérequis : Les cours du S9 *Topologie différentielle* et *Algèbres d'opérateurs* ou connaissances équivalentes.

Bibliographie :

- M. Atiyah & I. Singer, *The index of elliptic operators. I*, Ann. Math. (2) 87, 484-530 (1968);
- N. Higson & E. van Erp, *Index Theory*, notes en ligne:
  URL: `https://nigel.higson.ca/uploads/1/2/1/4/121496570/2016_09_impan_lectures.pdf`
- N. Higson & J. Roe, *Lectures on the Index Theorem*, livre non publié:
  URL: `https://nigel.higson.ca/uploads/1/2/1/4/121496570/higson_roe_-_lectures_on_the_index_theorem_draft_2008_.pdf`
- C. Debord & J.-M. Lescure, *Index theory and groupoids*,
  URL: `https://arxiv.org/pdf/0801.3617.pdf`

Groupoïdes et feuilletages

Camille Laurent-Gengoux

Deuxième semestre : 30 h Cours magistraux

Description générale : Ce cours parlera des *feuilletages* singuliers, c'est-à-dire de toutes les façons raisonnables de faire d'une variété une union disjointe de sous-variétés, par exemple de faire d'un ouvert d'un espace de de dimension 3 l'union disjointe de courbes et de points isolés. Amenée par la théorie du contrôle, c'est une notion ancienne : de grands débats pour savoir quelle définition était préférable eurent lieu il y a une quarantaine d'années. Un temps oubliés, les feuilletages singuliers connaissent aujourd'hui un renouveau, poussé en partie par la géométrie non-commutative, et en partie par la physique mathématique.

Ce cours se propose à la fois de donner les fondements de la théorie, et de motiver celle-ci. Elle s'appuiera essentiellement sur un cours dont un des trois co-rédacteurs est l'enseignant de ce cours.

Prérequis : Le cours du S9 *Topologie différentielle* ou connaissances équivalentes.

Chapitres :

I Les feuilletages singuliers comme unions disjointes de sous-variétés

(a) Rappels sur les notions de variétés et de sous-variétés. Notion de variété analytique réelle. Rappels sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

(b) Feuilletages réguliers : distributions involutives.

(c) Motivation venue de la théorie du contrôle et théorème de Chow.

(d) Exemples et contre-exemples à propos des feuilletages singuliers.

II Les feuilletages singuliers comme modules de champs de vecteurs

(a) Groupes de Lie et groupoïdes de Lie

(b) Une seconde définition des feuilletages singuliers, algèbres de Lie, algébroïdes de Lie et groupoïdes de Lie associées. Le théorème de splitting et l'existence des feuilles.

(c) Construction du groupoïde d'holonomie de Androulidakis-Skandalis. Cela sera l'occasion d'étudier en détail la notion de bisubmersion.

Bibliographie :

Alberto Candel and Lawrence Conlon, *Foliations I*, Publ. of AMS, (1999).

Marius Crainic, Rui Loja Fernandes and Ioan Mărcuţ, *Lectures on Poisson geometry.*, Graduate Studies in Mathematics **217**.

Camille Laurent-Gengoux, Ruben Louis and Leonid Ryvkin, *The geometry of singular foliations*, to appear.

Ieke Moerdijk and Janez Mrcun, *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **91**, (2003).