Exercice 0. 1ère méthode, on revient à la définition de la différentiabilité.

Pour x et $h \in \mathbb{R}$, $u(x+h) = f(x+h, x+h)$

$$= f(x,x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,x)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)h + o(|h|)$$

$$= f(x,x) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)h + o(|h|)$$

On en déduit que $u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$.

2ème méthode : on utilise la formule de différentiation de

$u(x) = f \circ \varphi(x)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$x \mapsto (x,x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$.

Alors $u'(x) = df_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x)), \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x))\right)\begin{pmatrix}\varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x)\end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x), \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x).$$

Application : Pour $f(x,y) = x - y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 1 = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$

et ainsi $u'(x) = 0$.

Remarque ; pour $f(x,y) = x - y$, $u(x) = 0$.

Exercice 1. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, les dérivées partielles existent et sont continues ; f est donc C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

De même $\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Or $y^2 \leq x^2+y^2$ et $x^2 \leq x^2+y^2$ donc $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 4|x|$ et $\lim_{(x,y)\to} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. On montre de la même façon que $\lim_{(x,y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$. On en déduit que f est C^1 en $(0,0)$, puis C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t\vec{u}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1 u_2^2}{(t^2u_1^2 + t^4 u_2^2)t}$$

$$= \frac{u_2^2}{u_1} \text{ si } u_1 \neq 0.$$

Pour $\vec{u} = (0, u_2)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,tu_2) - f(0,0)}{t} = 0$

Donc f admet des dérivées en $(0,0)$ dans toutes les directions, avec $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1} & \text{si } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } u_1 = 0 \end{cases}$

Cependant pour $y \neq 0$, $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$

$\lim_{y\to 0} f(y^2, y) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$; f n'est pas continue en $(0,0)$. Elle n'est donc pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.

La fonction $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 4\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Pour $(x,y) = (0,0)$,

$$|f(x,y)| \leq |xy| \leq x^2+y^2 = o\|(x,y)\|^2;$$ f est différentiable en $(0,0)$ et $df_{(0,0)} = 0$.

On vérifie maintenant si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$$

Exercice 3 suite

On évalue de la même façon $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{xy(-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2))}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Cela entraîne que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de Schwarz.

Question supplémentaire : f est-elle deux fois différentiable en $(0,0)$.

Commençons par calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ si elles existent.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)\times\frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{y \to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\times \frac{1}{y} = 0$$

d'après les calculs précédents.

Si f était deux fois différentiable en $(0,0)$, on aurait alors

$$f(h,k) = f(0,0) + df_{(0,0)}(h,k) + \frac{1}{2} d^2f_{(0,0)}((h,k),(h,k)) + o(\|(h,k)\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)k^2\right) + o(\|(h,k)\|^2)$$

$$= o(\|(h,k)\|^2)$$

Or $\frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|^2} = hk\frac{h^2-k^2}{(h^2+k^2)^2}$. En posant $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$

$$\frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r^2} = \cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos(2\theta) \underset{r\to 0}{\not\to} 0$$

Exercice 4.

Différentielle du déterminant en la matrice Id.

1ère méthode.

L'application $M \mapsto \det M$ est un polynôme en fonction des coefficients de M, c'est donc une application C^∞.

Il suffit de calculer les dérivées partielles.

Soit E_{ij} la matrice avec des 0 partout mis à part le coefficient de la ligne i, colonne j qui est égal à 1

$$\begin{array}{cc} & \text{col. } j \\ E_{ij} = \text{ligne } i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

. Si $i=j$, $\det(Id + hE_{ii}) = 1+h$ vu que $Id + hE_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1+h & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

. Si $i \neq j$, $Id + hE_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & h & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par $j > i$, en développant selon la 1ère colonne à chaque étape, on trouve

$$\det(Id + hE_{ij}) = \dots = \det\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

De même par $i > j$, $\det(Id + hE_{ij}) = \det(Id + hE_{ij})^t$

$$= \det(Id + hE_{ji}) = 1$$

Ainsi, $\det(Id + H) = 1 + \sum_{i=1}^{n} h_{ii} + o(\|H\|)$

La différentielle du déterminant en Id est $d\det_{Id}(H) = Tr(H)$ où Tr est la trace de H.

2ème méthode : avec les dérivées vectorielles et les valeurs propres.

On utilise le fait que le déterminant est le produit des valeurs propres d'une matrice.

Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres éventuellement complexes.

Alors les valeurs propres de $Id + tH$ sont $1+t\lambda_1, \dots, 1+t\lambda_n$.

Suite de l'exercice 4.

$$\det(I_d + tH) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i) = 1 + t\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + O(t^2)$$
$$= 1 + t\,\mathrm{tr}(H) + O(t^2).$$

On en déduit que $d\det_{Id}(H) = \mathrm{tr}(H)$.

Différentielle du déterminant en une matrice quelconque.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

<u>1ère méthode</u> : on calcule.

Soit α_{ij} le cofacteur de A associé à a_{ij} : α_{ij} est $(-1)^{i+j} \times$ déterminant de la matrice extraite de A obtenue en rayant la ième ligne et la jème colonne.

alors $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$ si on développe suivant la ième ligne.

On en déduit que $\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det(A) = \alpha_{ij}$

Ainsi pour $H \in M_n(\mathbb{R})$, $d\det_A(H) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} h_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_{ji} h_{ij}\right)$

où $\tilde{\alpha}_{ji} = \alpha_{ij}$ $\qquad = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(A)\,H)$ où on a noté

$\mathrm{Com}(A)$, la comatrice de A, c'est-à-dire la matrice des cofacteurs.

<u>2ème méthode</u> : on utilise la 1ère question.

On fait alors apparaître la matrice Id :

- On suppose que A est inversible.

$$\det(A+H) = \det(A(\cancel{I} + A^{-1}H)) = \det A \det(I + A^{-1}H)$$
$$= (\det A)\left(1 + \mathrm{tr}(A^{-1}H)\right) + o(\|H\|)$$

Mais $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$ donc $\det(A+H) = \det A + \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(A)\,H) + o(\|H\|)$

- Cas où A n'est pas inversible. Soit G l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$

$G = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, c'est donc un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ (car $M \mapsto \det M$ est continue).

Montrons que G est un ouvert dense. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

$\det(A - \varepsilon_k I_d) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \varepsilon_k)$. On choisit une suite (ε_k) de réels qui tend vers 0

mais telle que $\varepsilon_k \neq \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Les matrices $A - \varepsilon_k Id$ sont alors inversibles et la suite $(A - \varepsilon_k Id)$ converge vers A, vu que les coefficients des matrices de cette suite convergent vers ceux de A.

Comme det est de classe C^1 (et même C^∞),

$$d\,\det_A = \lim_{k\to\infty} d\det_{A-\varepsilon_k Id} \text{ et ainsi } d\det_A(H) = tr\left({}^t Com(A)\, H\right).$$

Exercice 5. Soit (E). $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Soit $g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$. Comme f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$, g l'est aussi.

Rappel : pour h et $\varphi = (\varphi_1, .., \varphi_p)$, $\dfrac{\partial (h\circ\varphi)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial h}{\partial y_j}(\varphi(x_0)) \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0)$ $1\leq i\leq n$.

On en déduit pour cet exercice

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\times\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

On passe maintenant aux dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(u,v) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\right]$$

$= 0$ si f vérifie (E)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Si f est une solution de (E), alors g vérifie $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0 = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(u,v)$

Cela veut dire que $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ est constante en v, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = c_2(v)$

Suite de l'exercice 5

De même $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = 0$ signifie que $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ ne dépend pas de v,

$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = C_1(u)$

puis $g(u,v) = g_1(u) + g_2(v)$ où g_1 et g_2 sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Mais si $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, alors $u = x+y$ et $v = x-y$

$g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \Longleftrightarrow f(x,y) = g(x+y, x-y) = g_1(x+y) + g_2(x-y)$.

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $f(x,y) = g_1(x+y) + g_2(x+y)$ où g_1, g_2 sont des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

Exercice 6

Soit $\Phi : (\mathbb{R}^{+*})^2 \longrightarrow (\mathbb{R}^{+*})^2$ Montrons que Φ est un C^1 difféomorphisme

$(u,v) \longmapsto (x,y) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$

$\begin{cases} x = \sqrt{uv} \\ y = \sqrt{\frac{u}{v}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v = x/y \\ u = xy \end{cases}$ (pour $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$)

Donc Φ est un C^1 difféomorphisme avec $\Phi^{-1}(x,y) = (xy, x/y)$ pour $x, y > 0$.

Pour résoudre le système d'équations différentielles de l'exercice 6, on commence par exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$ avec $g(u,v) = f \circ \Phi(u,v)$.

1ère méthode

$f(x,y) = g \circ \Phi^{-1}(x,y) = g(xy, x/y)$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$

$= \sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$.

puis $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{x}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \sqrt{uv}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{v^{3/2}}{u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$

2ème méthode

On utilise les formules de dérivées de fonctions composées.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v), \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) J_\Phi(u,v)^{-1}$$

où $J_\Phi(u,v)$ est le jacobien :

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v^{3/2}} \end{pmatrix} \quad ; \det J_\Phi = -\frac{1}{2v}$$

On en déduit que $$\left(J_\Phi\right)^{-1} = -2v \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{u}}{2v^{3/2}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v} \\ -\frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $$\left(J_\Phi(u,v)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{v}} & \sqrt{uv} \\ \sqrt{\frac{v}{u}} & -\frac{v^{3/2}}{u} \end{pmatrix}$$

puis $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v), \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{v}} & \sqrt{uv} \\ \sqrt{\frac{v}{u}} & -\frac{v^{3/2}}{u} \end{pmatrix}$$

On retrouve le résultat obtenu par la 1ère méthode.

- On reporte cela dans la 1ère équation

$$\sqrt{uv}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) + \sqrt{\frac{u}{v}}\left(\sqrt{uv}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{v^{3/2}}{u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$
$$= 2\sqrt{uv}\sqrt{\frac{u}{v}} \sin\left(\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\frac{u}{v}}}\right)$$

c'est-à-dire $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \sin v$. On en déduit que $g(u,v) = u\sin v + h_1(v)$ (*)

- On travaille maintenant avec la 2ème équation.

$$\sqrt{uv}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) - \sqrt{\frac{u}{v}}\left(\sqrt{uv}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{v^{3/2}}{u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) = 2uv\cos v$$

c'est-à-dire : $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = u\cos v$. On "intègre" : $g(u,v) = u\sin v + h_2(u)$

En comparant avec (*), on en déduit que $h_2(u) = h_1(v) = cte$.

Les fonctions cherchées sont de la forme $g(u,v) = u\sin v + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $f(x,y) = g(\Phi^{-1}(x,y)) = g(xy, x/y)$, les solutions du systèmes sont les fonctions f de la forme $f(x,y) = xy\sin(x/y) + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 a)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x+y, xy)$ est de classe C^1 car chacune de ses composantes l'est

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le jacobien de f est $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$
Soit $P \in \mathbb{R}^2$, $P = (x,y)$

- Si $x \neq y$, $\det J_f(x,y) \neq 0$, on peut appliquer le théorème d'inversion locale.
Il existe un voisinage ouvert V_P de P tel que $f : V_P \to f(V_P)$ soit un C^1-difféomorphisme et donc entre autre une bijection.

- Si P appartient à la diagonal, P est de la forme $P = (x,x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Soit V un voisinage de (x,x). Il existe alors $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $(a,b) \in V$ et $(b,a) \in V$ avec $a \neq b$.
$f(a,b) = f(b,a)$; $f_{|V}$ n'est pas injective.

7 b) Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$
$A \mapsto A + Tr(A) I_n + A^2 + A^3$.

f est de classe C^1 car chaque "composante" de f l'est.
Notons O_{M_n} la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$. Alors $f(O_{M_n}) = O_{M_n}$.

Pour $H \in M_n(\mathbb{R})$, $f(H) = H + Tr(H) I_n + \underbrace{O(\|H\|^2)}_{\text{qui est un } o(\|H\|)}$

On en déduit que $df_{O_{M_n}}(H) = H + Tr(H) I_n$

Vérifions si $df_{O_{M_n}}$ est un isomorphisme.

Pour $H \in M_n(\mathbb{R})$, $H = h_{ij}$, $df_{O_{M_n}}(H) = \begin{pmatrix} h_{11} + Tr(H) & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} + Tr(H) & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & & & \\ h_{n1} & & & h_{nn} + Tr(H) \end{pmatrix}$

$df_{O_{M_n}}(H) = 0 \iff \begin{cases} h_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ h_{ii} + Tr(H) = 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n \end{cases}$

Ainsi $-Tr(H) = h_{ii}$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$ si bien que $Tr(H) = h_{11} + \cdots + h_{nn} = -n Tr(H)$
$(n+1) Tr(H) = 0$; $h_{ii} = 0$. Cela prouve que $\operatorname{Ker} df_{O_{M_n}} = \{O_{M_n}\}$; f est injective.
Cela entraîne en fait que f soit un isomorphisme.
D'après le théorème d'inv. locale, il existe V un voisinage ouvert de O_{M_n} tel que

$f : V \to f(V)$ soit un C^1-difféomorphisme.

De plus $f(V)$ est alors un voisinage ouvert de $O_{M_n} = f(O_{M_n})$.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $W_\varepsilon = \{ B \in M_n(\mathbb{R}) : \|B\| < \varepsilon \} \subset V$.

Pour tout $B \in$, il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $B = f(A)$, c'est-à-dire tel que $B = A + Tr(A) I_n + A^2 + A^3$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

f est clairement C^1 et pour tout $r \neq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\det J_f(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

$= r \neq 0$.

le théorème d'inversion locale s'applique il existe un voisinage V_P de $P = (r, \theta)$ tel que $f : V_P \to V_P$ soit un C^∞-difféomorphisme.

Soit $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. $f_{|U}$ est injective. D'après le théorème d'inversion globale, $f_{|U}$ est alors un C^∞-difféomorphisme de $U \to f(U)$.

Cet ouvert U est le plus grand possible pour que $f_{|U}$ soit injective.

Exercice 8.
Comme h est C^1, φ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Montrons que φ est injective.

Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x,y) = \varphi(x',y')$. On a alors $\begin{cases} x - h(y) = x' - h(y') \\ y - h(x) = y' - h(x') \end{cases}$.

Cela donne $\begin{cases} x - x' = h(y) - h(y') \\ y - y' = h(x) - h(x') \end{cases}$. Comme h est contract.

D'après l'inégalité des accroissements finis, $|h(y) - h(y')| \leq k|y - y'|$.

Ainsi $|x - x'| = |h(y) - h(y')| \leq k|y - y'| = k|h(x) - h(x')| \leq k^2|x - x'|$.

Comme $k^2 \in [0,1[$, cela entraîne que $x = x'$ puis que $y = y'$: φ est injective.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\det J\varphi_{(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -h'(y) \\ -h'(x) & 1 \end{vmatrix} = 1 - h'(x)h'(y) \geq 1 - k^2 > 0$.

D'après le théorème d'inversion globale, φ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

Il reste à déterminer $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 8 suite

Soit $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. On cherche s'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x,y) = z$.

On considère $g_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$(x,y) \mapsto (z_1 + h(y), z_2 + h(x))$$

g_z est C^1 et pour $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $g_z(x,y) - g_z(x',y') = (h(y) - h(y'), h(x) - h(x'))$

Mais $|h(y) - h(y')| \leq k\,|y - y'|$ et $|h(x) - h(x')| \leq k\,|x - x'|$.

$\| g_z(x,y) - g_z(x',y') \|_2 \leq k \, \| (x,y) - (x',y') \|_2$ où $\| \, \|_2$ est la norme euclidienne

(on aurait pu prendre une autre norme)

La fonction g_z est k-contractante. Comme $k \in [0,1[$ et que $(\mathbb{R}^2, \| \, \|_2)$ est complet, il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g_z(x,y) = (x,y)$.

Ce point fixe (x,y) vérifie $\begin{cases} x = z_1 + h(y) \\ y = z + h(y) \end{cases}$ c'est-à-dire $(z_1, z_2) = \varphi(x,y)$.

On a montré que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective.

Conclusion φ est un C^1-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9.

Soit $x \in U$. Comme $df(x) \in GL(\mathbb{R}^n)$, on peut appliquer le théorème d'inversion locale. Il existe V_x un voisinage ouvert de x, $V_x \subset U$ tel que $f : V_x \to f(V_x)$ soit un C^1-difféomorphisme. En particulier, f s'annule au plus une fois sur V_x.

. f est continue et ne s'annule pas sur $\overline{U} \setminus U$. Pour tout $y \in \overline{U} \setminus U$, il existe $r_y > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $W_y := B(y, r_y) \cap \overline{U}$ où $B(y, r_y)$ est la boule ouverte de centre y et de rayon r_y ; W_y est bien un ouvert de $\overline{U}$.

Alors $\overline{U} = \left(\bigcup_{x \in U} V_x \right) \cup \left(\bigcup_{y \in \overline{U} \setminus U} W_y \right)$. Comme $\overline{U}$ est compact, on peut extraire un recouvrement fini $\overline{U} = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \cup \bigcup_{j=1}^{m} W_{y_j}$. Par construction f ne s'annule pas sur $\bigcup_{j=1}^{m} W_{y_j}$ et s'annule au plus une fois sur chaque V_{x_i}.

Donc f s'annule au plus n fois

Ex 10

a) pour $x=1=y$, $z=0$, on a bien $e^{x^2-zy}\ln(x+y^2)=e\ln 2$; $(1,1,0)$ est solution.

Soit f : $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto e^{x^2-zy}\ln(x+y^2)$ $\quad f$ est C^∞

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -z e^{x^2-zy}\ln(x+y^2) + \frac{2y}{x+y^2}e^{x^2-zy}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = e \neq 0$. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Il existe $U \subset \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et $V\subset\mathbb{R}$ deux ouverts tels que $(1,0)\in U$, $1\in V$ et une fonction $\varphi : U\longrightarrow V$ telle que $y=\varphi(x,z) \Longleftrightarrow f(x,y,z)=e\ln 2$.

b) La fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z)\longmapsto (xy+e^{-yz}+x^2z,\ z^3+\sin((x-z)y))$ est C^∞.

$f(2,0,1) = (1+4, 1+0) = (5,1)$; $(2,0,1)\in\mathcal{D}$.

Soit $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f_2(y,z) = f(2,y,z)$

$$\det \operatorname{Jac} f_2(y,z) = \begin{vmatrix} 2-ze^{-yz} & -ye^{-yz}+4 \\ (x-z)\cos((x-z)y) & 3z^2+y\cos((x-z)y)\end{vmatrix}$$

$$\det\operatorname{Jac} f_2(0,1) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3\end{vmatrix} = 7 \neq 0$$ On peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

Il existe $\varepsilon>0$, V un voisinage ouvert de $(0,1)$, $\varphi :]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[\longrightarrow V$ de classe C^1

$x \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$

tels que $\begin{cases} f(x,y,z)=(5,1) \\ (x,y,z)\in\ ]2-\varepsilon,2+\varepsilon[\times V\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\varphi_1(x) \\ z=\varphi_2(x)\end{cases}$

Pour déterminer $\varphi_1'(2)$ et $\varphi_2'(2)$ on dérive l'équation $f(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x)) = (5,1)$

Pour la 1ère coordonnée $x\varphi_1(x) + e^{-\varphi_1(x)\varphi_2(x)} + x^2\varphi_2(x) = 5 \quad \forall x\in\ ]2-\varepsilon,2+\varepsilon[$

On obtient $\varphi_1(x) + x\varphi_1'(x) - (\varphi_1'(x)\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\varphi_2'(x))e^{-\varphi_1(x)\varphi_2(x)} + 2x\varphi_2(x) + x^2\varphi_2'(x) = 0$

Pour $x=2$, $\varphi_1(2)=0$, $\varphi_2(2)=1$ $\quad 2\varphi_1'(2) - \varphi_1'(2) + 4 + 4\varphi_2'(2) = 0$

On en déduit une première équation $\varphi_1'(2) + 4\varphi_2'(2) = -4$

suite de l'exercice 10 b)

On procède de la même manière pour la deuxième coordonnée :

$\forall x \in]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[, \ \varphi_2^3(x) + \sin\left(\left(x - \varphi_2(x)\right)\varphi_1(x)\right) = 1$

On dérive : $\forall x \in]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[, \ 3\varphi_2^2(x)\,\varphi_2'(x) + \left[\left(1-\varphi_2'(x)\right)\varphi_1(x) + \left(x - \varphi_2(x)\right)\varphi_1'(x)\right]\cos\left(\left(x-\varphi_2(x)\right)\varphi_1(x)\right) = 0$

Pour $x=2$, on obtient $3\,\varphi_2'(2) + \varphi_1'(2) = 0$

$\varphi_1'(2)$ et $\varphi_2'(2)$ vérifient le système $\begin{cases} \varphi_1'(2) + 4\varphi_2'(2) = 4 \\ \varphi_1'(2) + 3\varphi_2'(2) = 0 \end{cases}$

$\varphi_2'(2) = 4$ puis $\varphi_1'(2) = -12$.

c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. f est C^∞

$(x,y) \mapsto x^3+y^3-3xy$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ pour $x = y^2$.

En reportant dans l'équation de F on obtient $y^6 + y^3 - 3y^4 = 0$

C'est-à-dire $y^3(y^3 - 3y + 1) = 0$.

De même, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ s'annule pour .

Les deux dérivées s'annulent simultanément pour $\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 = y^4 \end{cases}$

$y = y^4 \iff y = 0$ ou $y = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) = (0,0)$ ou $(1,1)$. Or $(1,1) \notin F$.

Donc si $(x,y) \in F \setminus \{(0,0)\}$ au moins l'un des dérivées partielles de f ne s'annule pas en ce point. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

• supposons que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ (avec $(x_0,y_0) \in F$). Il existe alors un voisinage U de x_0 par exemple un intervalle de la forme $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ avec $\alpha > 0$, un voisinage V de y_0 et une application $\varphi : U \to V$ tq φ soit C^1 et $y = \varphi(x) \iff f(x,\varphi(x)) = 0 \ \forall (x,y) \in U \times V$

On considère alors $\psi : U \to (U\times V)$. ψ est un C^1 difféomorphisme de U sur $\psi(U)$

$x \mapsto (x, \varphi(x))$

Exercice 11 a)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin y + xy^4 + x^2$; f est C^∞ et $f(0,0) = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y + 4xy^3$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0,0)$. Il existe deux voisinages ouverts de 0, U et V et une fonction ϕ de classe C^∞ telle que $\forall x \in U$, $y = \phi(x) \Longleftrightarrow f(x,y) = 0$.

(b) Développement limité à l'ordre 10 de ϕ au voisinage de 0.

Pour $x \in U$, $\sin(\phi(x)) + x(\phi(x))^4 + x^2 = 0$. (1)

Dérivons cette équation $\phi'(x)\cos(\phi(x)) + \phi(x)^4 + 4x\,\phi(x)^3\phi'(x) + 2x = 0$

en $x = 0$ on trouve $\phi'(0) = 0$.

On dérive une 2ème fois : $\phi''(x) \ldots - \phi'(x)^2 \sin\phi(x) + 4\phi^3(x)\phi'(x) + 12x\phi^2(x)\phi'(x)^2 + 4x\,\phi^3(x)\phi''(x) + 2 = 0$

En $x=0$, on obtient $\phi''(0) = -2$. On en déduit que $\varphi(x) = -x^2 + O(x^3)$

Puis $\sin\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)^3}{6} + \frac{\varphi(x)^5}{120} + O(\varphi(x)^6)$ (*)

Mais $\phi(x)^6 = O(x^{12})$.

Le développement limité de ϕ au voisinage de 0 est de la forme $\phi(x) = -x^2 + \sum_{j=3}^{10} c_j x^j + O(x^{11})$

On reporte dans (1) en remplaçant $\sin\phi(x)$ par la partie droite de (*)

$$\left(-x^2 + \sum_{j=3}^{10} c_j x^j\right) - \frac{1}{6}\left(\sum_{j=3}^{10} c_j x^j - x^2\right)^3 + \frac{1}{120}\left(-x^2 + \sum_{j=3}^{10} c_j x^j\right)^5 + x\left(-x^2 + \sum_{j=3}^{10} c_j x^j\right)^4 + x^2 = 0 + O(x^{11}).$$

On "développe" en mettant les termes en x^ℓ avec $\ell \geq 11$ dans le terme d'erreur $O(x^{11})$.

$$\left(-x^2 + \sum_{j=3}^{10} c_j x^j\right) + \frac{x^6}{6} - \frac{3c_3}{6}x^7 + \ldots$$ cela fait beaucoup de calculs. Pour s'alléger le travail, on identifie les termes de même degré :

termes de degré 2 : $-x^2 + x^2$; termes de degré 3 : $c_3 x^3 = 0$ $c_3 = 0$

degré 4 : $c_4 = 0$, degré 5 : $c_5 = 0$; degré 6 : $c_6 + \frac{1}{6} = 0$ i.e $c_6 = -1/6$

degré 7 $c_7 = 0$, degré 8 : $c_8 = 0$, degré 9 $c_9 + 1 = 0$ $c_9 = -1$

degré 10 : $c_{10} - \frac{3}{6}c_6 - \frac{1}{120} = 0$, $c_{10} = \frac{c_6}{2} + \frac{1}{120} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{-9}{120} = -\frac{3}{40}$

On obtient $\varphi(x) = -x^2 - \frac{x^6}{6} - x^9 - \frac{3x^{10}}{40} + O(x^{11})$

(Il y a peut-être une erreur de calcul)

Exercice 13 Soit $a \in \mathbb{R}$

La fonction $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + ay^2 + \sin^3(xy)$ est C^∞.

Une condition nécessaire pour que $(0,0)$ soit un extremum local de f_a est que $\frac{\partial f_a}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f_a}{\partial y}(0,0) = 0$.

On calcule : $\frac{\partial f_a}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y + 3y\cos(xy)\sin^2(xy)$; $\frac{\partial f_a}{\partial x}(0,0) = 0$

$\frac{\partial f_a}{\partial y}(x,y) = -2x + 2ay + 3x\cos(xy)\sin^2(xy)$; $\frac{\partial f_a}{\partial y}(0,0) = 0$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(0,0)$ est un point critique de f_a.

On détermine la matrice Hessienne en $(0,0)$.

$\frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}(x,y) = 2 + y*$; $\frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}(0,0) = 2$

$\frac{\partial^2 f_a}{\partial y \partial x}(x,y) = -2 + 3\cos(xy)\sin^2(xy) + y(\dots)$; $\frac{\partial^2 f_a}{\partial y \partial x}(0,0) = -2$

$\frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(x,y) = 2a + x(\dots)$; $\frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(0,0) = 2a$.

La matrice Hessienne en $(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2a \end{pmatrix} = \mathrm{Hess}_{(0,0)}(f)$

On a alors $f_a(h,k) = f_a(0,0) + \frac{\partial f_a}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_{(0,0)}(f)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h,k)\|^2)$

$\frac{1}{2}\mathrm{Hess}_{(0,0)} f\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h^2 - 2hk + ak^2$

$= (h-k)^2 + (a-1)k^2$

Cette forme est définie positive pour $a > 1$. Dans ce cas $(0,0)$ est un minimum local.

Si $a < 1$, $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

Si $a = 1$, $f_1(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + \sin^3(xy) = (x-y)^2 + \sin^3(xy)$, la situation est plus difficile

Comme nous sommes au voisinage de $(0,0)$, on peut supposer que $\max(|x|,|y|) < 1$.

Si $xy \geq 0$, alors $\sin(xy) \geq 0$ (car $0 \leq xy < 1$) et alors $f_1(x,y) = (x-y)^2 + \sin^3(xy) \geq 0$.

Si $xy < 0$ alors $|x-y| \geq \max(|x|,|y|)$

Quitte à échanger les rôles de x et y, on peut supposer que $|x| \geq |y|$.

Alors $|\sin^3(xy)| \leq |xy|^3 \leq x^6$ et $f(x,y) \geq x^2 - x^6 \geq 0$ quand $|x| < 1$.

Donc au voisinage de $(0,0)$, $f_1(x,y) \geq 0$.

Conclusion. $(0,0)$ est un minimum local de f_a si $a \geq 1$.

Si $a < 1$, $(0,0)$ n'est pas un extremum local (ou plutôt un point d'extremum local)

Remarque : si on considère $g_a(x,y) = x^2 - 2xy + ay^2 - \sin^3(xy)$

Alors $(0,0)$ est un minimum local de g_a si $a > 1$.

$(0,0)$ n'est pas un extremum local de g_a quand $a \leq 1$.

Exercice 14.

* Comme q est une forme quadratique définie positive de $\mathbb{R}^n$, $q(\underline{0}) = 0$ et $q(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$.

Donc $f(x) > 0$ si $x \neq \underline{0}$ et $f(\underline{0}) = 0$. On en déduit que $\underline{0} = (0,\dots,0)$ est un minimum global de f.

* Il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de q. Soient $v_1,\dots,v_n$ ces vecteurs propres, $a_1,\dots,a_n$ les valeurs propres associées avec $a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ $x = \sum_i x_i v_i = \sum x_i' e_i$ où $e_1,\dots,e_n$ est la base canonique,

$$f(\underline{x}) = q\left(\sum x_i' e_i\right) \exp\left(-\sum_i {x_i'}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2\right) \exp\left(-\sum_i x_i^2\right).$$

car $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n {x_i'}^2$.

On peut maintenant déterminer plus facilement les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \left(2a_i x_i - 2x_i q(\underline{x})\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

Les points critiques de f sont ceux tels que $x_i = 0$ ou $a_i = q(\underline{x})$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$.

Exercice 14 suite.

Si $\underline{x} \neq \underline{0}$ est un point critique,

$$g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = \sum_{\substack{1\le k\le n \\ x_k \neq 0}} a_k x_k^2 = \sum_{\substack{1\le k\le n \\ x_k\neq 0}} g(\underline{x}) x_k^2$$ car $\underline{x}$ est tel que $g(\underline{x}) = a_k$ si $x_k \neq 0$

$$= g(\underline{x}) \sum_{1\le k\le n} x_k^2 = g(\underline{x}) \|\underline{x}\|^2$$

Comme $g(\underline{x}) \neq 0$, on en déduit que $\|x\|^2 = 1$. Les points critiques non nuls sont sur la sphère unité.

Si $\underline{x}$ est un point critique $\neq \underline{0}$, $f(\underline{x}) = e^{-1} g(\underline{x})$.

Or $g(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2 \le \max_{1\le k\le n} a_k \cdot \|x\|^2 = \max_{1\le k\le n} a_k$ (car $\|x\|=1$)

$$= a_1$$

Puis $g(v_1) = a_1$, ce maximum est atteint.

Comme $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, f a un maximum global. Ce maximum est atteint en tout vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre a_1.

Ce maximum vaut a_1/e.

Exercice 15.

- Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{array}$.

Comme f est continue sur C qui est compact, $\min_{(x,y)\in C} f(x,y)$ est atteint en un point de C.

Soit $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2+y^2 \end{array}$. Pour tous $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$dg_{x_0}(h,k) = h\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 2x_0h + 2y_0k.$$

Pour tout $(x_0,y_0) \in C$, $\mathrm{rg}(dg_{x_0}) = 1$ où $\mathrm{rg}(dg_{x_0})$ est le rang de l'application linéaire dg_{x_0}.

$df_{(x_0,y_0)}(h,k) = y_0 h + x_0 k$. Si (x_0,y_0) est un extremum de f sur C, alors

$\mathrm{rg}(df_{(x_0,y_0)}, dg_{(x_0,y_0)}) = 1$, autrement dit les vecteurs $\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ sont liés

Or $\begin{vmatrix} 2x_0 & y_0 \\ 2y_0 & x_0 \end{vmatrix} = 0$ pour $x_0^2 - y_0^2 = 0$, i.e $x_0 = \pm y_0$. (ex 15 suite)

En reportant dans l'équation de C, on obtient $2x_0^2 = 1$, $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Les extremas possibles de f le long de C sont atteints parmi les points $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Concluons $\min\{xy : x^2+y^2=1\} = -\frac{1}{2}$.

• On détermine $\min\{x : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et vérifie $x^2+y^2+z^2=1$ et $x^3+y^3+z^3=0\}$.

Là encore on applique le théorème des extrema liés mais avant cela, on remarque que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1,\ x^3+y^3+z^3=0\} = V$ est compact ; $\min\limits_{(x,y,z)\in V} x$ est donc atteint en un point de V.

On considère les 3 fonctions C^∞ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x$, $g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$, $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^3+y^3+z^3$

• on étudie $\operatorname{rg}(d_x g_1, d_x g_2)$ pour $x = (x_0, y_0, z_0) \in V$.

$$\operatorname{rg}(d_x g_1, d_x g_2) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2x_0 & 3x_0^2 \\ 2y_0 & 3y_0^2 \\ 2z_0 & 3z_0^2 \end{pmatrix}$$ Ce rang est différent de 0 car (x_0,y_0,z_0)

Ce rang vaut 1 si et seulement si tous les mineurs 2×2 de cette matrice sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & 3x_0^2 \\ 2y_0 & 3y_0^2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 2y_0 & 3y_0^2 \\ 2z_0 & 3z_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_0 & 3x_0^2 \\ 2z_0 & 3z_0^2 \end{vmatrix}$$

$$6x_0y_0^2 - 6x_0^2y_0 = 0$$
$$6y_0z_0^2 - 6y_0^2z_0 = 0$$
$$6z_0x_0^2 - 6z_0^2x_0 = 0$$

$$\begin{cases} x_0y_0(y_0-x_0) = 0 \\ y_0z_0(z_0-y_0) = 0 \\ x_0z_0(z_0-x_0) = 0 \end{cases}$$

• Si $y_0 = 0$ alors $g_2(x_0, 0, z_0) = 0$ pour $x_0^3 = -z_0^3$, c'est-à-dire pour $x_0 = -z_0$

mais $g_1(x_0, 0, -x_0) = 1 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 1$, $x_0 = \pm 1/\sqrt{2}$. Cependant $(x_0, z_0) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ne sont pas solution de l'équation $x_0z_0(z_0-x_0) = 0$.

On en déduit que y_0 ne peut pas être nul.

On vérifie de la même manière que $x_0z_0 \neq 0$.

Ex 15 (suite)

Il reste à étudier le cas $x_0 = y_0 = z_0$. Mais $g_2(x_0, x_0, x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^3 = 0$
$\Leftrightarrow x_0 = 0$

Mais $(0,0,0) \in V$ vu que $g_1(0,0,0) = 0 \neq 1$.

On vient donc de vérifier que $rg\left(d_{(x_0,y_0,z_0)}\, g_1 ,\ d_{x_0,y_0,z_0}\, g_2\right) = 2$ pour tout $(x_0,y_0,z_0) \in V$.

D'après le théorème des extrema liés, si (x_0,y_0,z_0) est un point d'extremum de $f_{|V}$ alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$d_{(x_0,y_0,z_0)} f = \lambda_1 d_{x_0,y_0,z_0}\, g_1 + \lambda_2 d_{x_0,y_0,z_0}\, g_2$$

En comparant les gradients associés, on obtient le système

$$\begin{cases} 1 = 2x_0\lambda_1 + 3x_0^2\lambda_2 \\ 0 = 2y_0\lambda_1 + 3y_1^2\lambda_2 \\ 0 = 2z_0\lambda_1 + 3z_0^2\lambda_2 \end{cases} \qquad \left(\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

De plus le déterminant associé à ces 3 différentielles est nul : $\begin{vmatrix} 1 & 2x_0 & 3x_0^2 \\ 0 & 2y_0 & 3y_0^2 \\ 0 & 2z_0 & 3z_0^2 \end{vmatrix} = 0$

c'est-à-dire $6y_0z_0(z_0 - y_0) = 0$.

Pour $y_0 = 0$, on a vu que les solutions possibles sont $(x_0, y_0, z_0) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -1/\sqrt{2}\right)$.

De même si $z_0 = 0$, on obtient les points $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Pour $z_0 = y_0 \neq 0$ $(x_0, y_0, y_0) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2y_0^2 = 1 \\ x_0^3 + 2y_0^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2^{1/3} y_0 \\ (2^{2/3} + 2) y_0^2 = 1 \end{cases}$

$y_0 = \pm\left(\frac{1}{2 + 2^{2/3}}\right)^{1/2}$ et ensuite $x_0 = -\text{signe}(y_0)\left(\frac{2^{2/3}}{2 + 2^{2/3}}\right)^{1/2}$

Finalement $\min\{x : (x,y,z) \in V\} = \min\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\left(\frac{2^{2/3}}{2 + 2^{2/3}}\right)^{1/2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

En effet, $\frac{2^{2/3}}{2 + 2^{2/3}} = \frac{1}{1 + 2^{1/3}} < \frac{1}{2}$ car $2^{1/3} > 1$

Ex 18 sur les fonctions convexes.

a) * On suppose que f est convexe.

Alors pour tous $x, y \in U$, $t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + t f(y)$,

c'est-à-dire : $f(x + t(y-x)) \leqslant (1-t) f(x) + t f(y)$, puis $f(x+t(y-x)) - f(x) \leqslant t(f(y) - f(x))$.

Or, en utilisant le fait que f soit différentiable en x (ce qui n'est pas clairement indiqué dans l'énoncé ...), on a

$$f(x + t(y-x)) = f(x) + t\, d_x f(y-x) + t\|y-x\|\, \varepsilon(t(y-x))\|$$

avec $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.

En reportant dans la $1^{\text{ère}}$ inégalité et en simplifiant par t, on obtient :

$$d_x f(y-x) + \|y-x\|\, \varepsilon(t(y-x)) \leqslant f(y) - f(x).$$

Il reste à faire tendre t vers 0 : $d_x f(y-x) \leqslant f(y) - f(x)$.

* Réciproquement, on suppose que $\forall a, b \in U$, $f(b) \geqslant f(a) + d_a f(b-a)$.

En prenant $b = y$, $a = x + t(y-x)$, puis $b = x$ et $a = x + t(y-x)$ on a :

$f(y) \geqslant f(x + t(y-x)) + d_{x+t(y-x)}((y-x)(1-t))$

et $f(x) \geqslant f(x + t(y-x)) + d_{x+t(y-x)}(-t(y-x))$

On multiplie la $1^{\text{ère}}$ inégalité par t, la $2^{\text{ème}}$ par $(1-t)$ et on fait la somme : $t f(y) + (1-t) f(x) \geqslant f(x + t(y-x))$.

b) D'après a) $\forall x \in U$, $f(y) \geqslant f(x_0) + d_{x_0} f(y - x_0)$ $\forall y \in U$

Donc $f(x_0)$ est minimal si et seulement si $d_{x_0} f(y - x_0) \geqslant 0$ pour tout y au voisinage de x_0

Mais $d_{x_0} f$ étant une application linéaire, cela a lieu si et seulement si $d_x f \equiv 0$.

Ex 18 suite

c) On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 en x. Il existe $t \in]0,1[$ tel que $f(y) = f(x) + d_x f(y-x) + \frac{1}{2} d^2_{x+t(y-x)} f(y-x, y-x)$.

. Si $d^2_{x+t(y-x)} \geqslant 0$, alors $f(y) \geqslant f(x) + d_x f(y-x)$, f est convexe d'après a).

. Réciproquement, si f est convexe, alors $\forall h \in \mathbb{R}^2$, $\forall t$ tel que $x+th \in U$,

$f(x+th) \geqslant f(x) + d_x f(th)$.

Or $f(x+th) = f(x) + d_x f(th) + \frac{1}{2} t^2 d_x f(h,h) + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th)$

Donc $d^2_x f(h,h) + 2\|h\|^2 \varepsilon(th) \geqslant 0$

En faisant tendre t vers 0, on a bien $d^2_x f(h,h) \geqslant 0$