Cohomologie sur les feuilletages riemanniens et étude spectrale des opérateurs du type laplacien

Georges Habib

▶ **To cite this version:**

Georges Habib. Cohomologie sur les feuilletages riemanniens et étude spectrale des opérateurs du type laplacien. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Lorraine, 2021. tel-03224940

HAL Id: tel-03224940

https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-03224940

Submitted on 12 May 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAEM
Université de Lorraine
D.F.D. Mathématiques

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Université de Lorraine

Spécialité : Mathématiques

présenté par :

Georges HABIB

Cohomologie sur les feuilletages riemanniens et étude spectrale des opérateurs du type laplacien

Soutenu le 4 mai 2021 devant le jury composé de

Rapporteurs :	**Ilka Agricola**	Professeur, Marbourg
	Liviu Ornea	Professeur, Bucarest
	Robert Wolak	Professeur, Cracovie
Examinateurs :	**Vicente Cortés**	Professeur, Hambourg
	Benoît Daniel	Professeur, Nancy
	Nadine Große	Professeur, Fribourg-en-Brisgau
	Andrei Moroianu	Directeur de recherche, CNRS
	Alessandro Savo	Professeur, Rome (invité)
	Yuri Kordyukov	Professeur, Oufa

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Benoît Daniel d'avoir accepté de me parrainer scientifiquement. Je remercie chaleureusement Ilka Agricola, Liviu Ornea et Robert Wolak de me faire l'honneur d'être les rapporteurs de mon mémoire. Je souhaite remercier les autres membres du jury de participer et consacrer du temps pour mon travail, Vicente Cortès, Nadine Große, Yuri Kurdyukov, Andrei Moroianu et Alessandro Savo. Merci aussi pour leurs remarques pertinentes.

Après ma thèse, j'ai collaboré avec plusieurs chercheurs dont l'expérience m'a été profitable et qui ont tellement influencé mon parcours scientifique. Merci à : Ihab Al Alam, Fida El Chami, Loic Gaillard, Nicolas Ginoux, Ayman Kachmar, Ines Kath, Pascal Lefèvre, Fares Maalouf, Ola Makhoul, Roger Nakad, Mihaela Pilca, Simon Raulot, Julien Roth, Ken Richardson, Uwe Semmelmann et Luigi Vezzoni.

Un grand merci à Nicolas Ginoux non seulement pour notre collaboration mais aussi pour notre amitié dont j'en suis fier. Son enthousiasme et son intuition scientifique ont grandement contribué à la richesse de ce mémoire. Je le remercie, ainsi que Fida El Chami et Ola Makhoul, pour avoir mis du temps pour la lecture attentive du manuscrit.

Je remercie également Anne Gégout-Petit directrice de l'IECL pour son soutien et aussi Gianluca Pacienza chef de l'équipe de Géométrie à l'IECL pour avoir accepté mon affiliation à l'IECL.

J'exprime mes sincères remerciements à Sylvie Paycha et Ines Kath de m'encadrer pendant ma bourse de recherche Humboldt que j'ai pu profiter grâce à leur soutien. Merci aussi à Isabelle Chalendar, Florian Bertrand et Sylvie Paycha avec qui j'ai monté des projets de recherche inter-universitaires. Je remercie également la fondation Humboldt pour son soutien financier pendant une grande partie de mon parcours.

Tout au long de ces années, j'ai eu la chance de discuter avec plusieurs mathématiciens qui ont enrichi mes connaissances et plus particulièrement : Lashi Bandara, Christian Bär, Volker Branding, Alfonso Garmendia, Sergiu Moroianu, Paul-Andi Nagy, Barbara Nelli, Norbert Peyerimhoff, Evangelia Samiou. Surement, j'en ai oublié d'autres que je remercie vivement.

J'adresse aussi mes vifs remerciements à Isabelle Maréchal Vaillant pour son aide admnistrative et son dynamisme. Aussi je tiens à remercier les membres du département de mathématiques de l'Université Libanaise de Beyrouth.

Enfin, une pensée particulière pour ma famille : Linda et mes deux enfants Elia et Marina, mes parents et mes frères. Je crois que sans leur soutien moral, je n'aurai pas franchir cette étape. Puisse ce travail leur témoigner ma profonde reconnaissance.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, je présente une partie des travaux effectués après ma thèse soutenue en 2006. Les deux chapitres présentés dans ce mémoire regroupent deux grands axes de recherche, notamment, la théorie des feuilletages et l'étude spectrale des opérateurs du type laplacien. Dans le premier chapitre, j'étudie la notion de cohomologie sur des variétés feuilletées et son influence sur la géométrie et la topologie de la variété. Le deuxième chapitre concerne des estimations des valeurs propres du laplacien et de l'opérateur de Dirac dans le cadre des hypersurfaces et des variétés à bord.

Pour présenter les résultats du chapitre 1, nous commençons par rappeler brièvement le contexte géométrique (voir section 1.1 pour plus de détails). Sur une variété riemannienne donnée (M, g), nous supposons l'existence d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. Ceci veut dire que M se décompose en des sous-variétés, appelées feuilles, qui sont localement données par des submersions riemanniennes [123, 140, 164]. La variété de base de ces submersions est désignée souvent par la variété "transverse" aux feuilles et ainsi, la géométrie transversale peut se voir à travers cette variété. Dans cet esprit, un objet est dit basique si, localement, il est constant le long des feuilles et, par conséquent, dépend uniquement de la géométrie transverse. Nous notons par $\Omega(M, \mathcal{F})$ l'espace des formes différentielles basiques sur M, c'est-à-dire l'ensemble des formes différentielles α sur M qui vérifient les identités $X \lrcorner \alpha = 0$ et $X \lrcorner d\alpha = 0$ où X est un champ de vecteurs tangent aux feuilles et d est la différentielle extérieure sur M.

Il n'est pas difficile de vérifier que d envoie l'espace $\Omega(M, \mathcal{F})$ vers lui-même et, donc, la restriction de cette différentielle sur cet espace est utilisée pour définir le groupe de cohomologie basique $H_d(M, \mathcal{F})$ comme dans le cas classique. Notons ici que ces groupes coïncident avec les groupes de cohomologie de de Rham de la variété dans le cas où le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par des points. Parmi les différentes propriétés qui ont été montrées sur ces groupes [43, 46, 99], nous nous intéressons à la dualité de Poincaré, qui n'est en général pas vérifiée, et ce même si la variété M est supposée compacte et le feuilletage est transversalement orienté [25]. En effet, il est montré dans [99, 44, 132] qu'une décomposition de Hodge basique de l'espace $\Omega(M, \mathcal{F})$ existe et que ces groupes de cohomologie sont isomorphes au noyau du laplacien basique défini par $\Delta_b := d\delta_b + \delta_b d$. Ici δ_b désigne l'adjoint formel de d, restreint aux formes basiques, pour la norme L^2. De plus, il est prouvé que l'étoile de Hodge basique $\bar{*}$ (voir l'égalité (1.1.4) pour la définition) ne commute avec Δ_b que si une certaine contrainte géométrique est imposée sur le feuilletage [44]. Cela explique l'échec de la dualité de Poincaré en général. Cette condition se traduit par le fait que la métrique g doit être modifiée de sorte que les feuilles du feuilletage soient des sous-variétés minimales [97]. Grâce à ce fait, on montre dans [44, 116] la correspondance entre cette famille de feuilletages, appelés minimalisables, et la dualité de Poincaré de ces groupes (voir [150] pour une présentation détaillée).

Pour mieux comprendre la dualité de Poincaré basique, K. Richardson et moi-même sommes revenus à l'expression de l'opérateur de Dirac basique défini sur un $\mathcal{F}$-fibré vectoriel $E \to M$ [45, 96] qui est, en plus, un fibré de modules en algèbres de Clifford $\mathbb{C}\mathrm{l}(Q)$ (Q étant le fibré vectoriel normal au feuilletage). Rappelons qu'un tel fibré est muni d'une connexion métrique ∇^E telle que $X \lrcorner R^{\nabla^E} = 0$ pour tout $X \in \Gamma(L)$ et $\mathbb{C}\mathrm{l}(Q)$ agit sur les sections de E par multiplication de Clifford, notée par " $\cdot$ ". L'opérateur de Dirac basique s'écrit comme (voir équation (1.1.5))

$$D_b = \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \nabla^E_{e_i} - \frac{1}{2}\kappa_b^\sharp \cdot .$$

Ici $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ désigne un repère orthornormé du fibré normal Q, de rang q, et κ_b est la projection de la courbure moyenne des feuilles aux formes basiques. Ainsi en considérant E comme $\Lambda^* Q$ et en identifiant la multiplication de Clifford par $\alpha^\sharp \cdot = \alpha \wedge - \alpha^\sharp \lrcorner$ pour toute 1-forme basique α, nous nous sommes ramenés à écrire l'opérateur de Dirac basique comme

$$D_b = d + \delta_b - \frac{1}{2}\kappa_b \wedge - \frac{1}{2}\kappa_b \lrcorner = \widetilde{d} + \widetilde{\delta}_b,$$

où $\widetilde{d} := d - \frac{1}{2}\kappa_b \wedge$ et $\widetilde{\delta}_b := \delta_b - \frac{1}{2}\kappa_b^\sharp \lrcorner$ est l'adjoint de $\widetilde{d}$ pour la norme L^2. Rappelons ici que, sur les formes basiques, la différentielle et la codifférentielle sont données par les formules $d = \sum_{i=1}^q e_i \wedge \nabla_{e_i}$ et $\delta_b = -\sum_{i=1}^q e_i \lrcorner \nabla_{e_i} + \kappa_b^\sharp \lrcorner$ [4, 132] où ∇ est la connexion de Levi-Civita transversale (voir équation (1.1.1) pour la définition). Maintenant, par le fait que κ_b est une 1-forme basique fermée [4, 132], nous en avons déduit que $\widetilde{d}^2 = 0, \widetilde{\delta}_b^2 = 0$ et, dans ce cas, le carré de l'opérateur de Dirac basique n'est pas le laplacien basique Δ_b mais plutôt le laplacien tordu $D_b^2 = \widetilde{\Delta}_b := \widetilde{d}\widetilde{\delta}_b + \widetilde{\delta}_b\widetilde{d}$. Ainsi une nouvelle cohomologie est à définir à partir de cette différentielle $\widetilde{d}$ que nous notons par $\widetilde{H}(M,\mathcal{F})$ et que nous appelons le groupe de cohomologie tordue.

L'objet de la section 1.3 est donc d'étudier ces cohomologies tordues et de regarder les propriétés qu'elles vérifient sur un feuilletage riemannien. Dans un premier temps, nous montrons leur indépendance par rapport à un choix de métrique contrairement à la définition de la différentielle tordue $\widetilde{d}$ où le terme en fonction de κ_b en dépend. Ensuite, nous établissons une décomposition de Hodge basique tordue pour l'espace $\Omega(M,\mathcal{F})$ et prouvons que le noyau du laplacien tordu est isomorphe au groupe de cohomologie tordue, ce qui permet de déduire la finitude de la dimension de ces groupes. Dans un deuxième temps, nous montrons que le terme en κ_b rend vraies les identités entre $\widetilde{d}$, $\widetilde{\delta}_b$ et l'étoile de Hodge basique $\bar{*}$ comme dans le cas classique contrairement au cas de d et δ_b, qui ne sont pas valables. Ceci mène, en particulier, à montrer que $\bar{*}$ commute avec $\widetilde{\Delta}_b$ et, par suite, la dualité de Poincaré est bien satisfaite pour ces groupes. Aussi, nous établissons, sur les feuilletages minimalisables, un isomorphisme entre les cohomologies basiques $H_d(M,\mathcal{F})$ et celles tordues. Ceci permet de retrouver, d'une manière directe, la dualité de Poincaré (et d'autres résultats aussi) sur les groupes de cohomologie basiques sur cette famille de feuilletage comme déjà mentionnée avant.

Comme nous l'avons remarqué, les groupes de cohomologie tordue forment le cadre naturel pour caractériser la géométrie et la topologie des feuilletages riemanniens. À partir de ce point de vue, nous définissons dans la section 1.4 la signature basique d'un feuilletage riemannien comme étant l'indice du laplacien tordu $\widetilde{\Delta}_b$. Cette notion, qui est la version transversale de la signature sur les variétés, a été d'abord définie dans [45] juste pour les feuilletages minimalisables. Elle a été ensuite étudiée par Benameur et Rey-Alcantara dans [19] qui ont montré qu'une équivalence d'homotopie feuilletée entre deux variétés compactes M et M' munies de feuilletages riemanniens minimalisables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ fournit les mêmes signatures basiques. Donc il était assez naturel de généraliser le résultat de [19] à tous les feuilletages riemanniens en tenant compte de notre définition de la signature basique. C'est donc le travail fourni dans la section 1.4.

Toujours dans le même esprit que précédemment, de nouvelles questions se posent : comment se comporte le spectre de l'opérateur de Dirac basique quand la métrique sur la variété M varie le long des feuilles ? Est-il vrai que le spectre de Dirac de M converge vers celui de Dirac basique suite à un effondrement de la métrique de M tout au long des feuilles ? Ces questions semblent naturelles dans le contexte des feuilletages riemanniens car elles se rapprochent des travaux antérieurs concernant le comportement du spectre du laplacien et de l'opérateur de Dirac sur des submersions riemanniennes ou sur des fibrés en cercles quand la longueur des fibres converge vers zéro [30, 58, 61, 6]. Nous, K. Richardson et moi-même, répondons à ces questions dans les sections 1.2 et 1.5 où nous montrons d'une part, que le spectre de l'opérateur de Dirac basique reste invariant pour tout changement de métrique préservant la métrique transverse. Ce résultat est surprenant en lui-même car l'opérateur de Dirac basique change avec la métrique en raison du terme en κ_b. D'autre part, nous nous restreignons aux flots riemanniens (feuilletages de dimension 1) pour montrer que le spectre de l'opérateur de Dirac de M, restreint aux spineurs basiques, converge vers celui de Dirac basique quand la métrique s'effondre et diverge sinon. Notons ici que notre étude n'exige pas l'existence d'un fibré en cercles et généralise celles des submersions riemanniennes.

Dans tout ce qui précède, nous avons regardé les formes basiques d'un feuilletage riemannien mais aucune information n'est fournie sur les formes antibasiques, c'est-à-dire l'orthogonal pour la norme L^2 des formes basiques. Rappelons que la différentielle extérieure d préserve les formes basiques et, par conséquent, la codifférentielle δ de M préserve les formes antibasiques. Ainsi, par le fait que $\delta^2 = 0$, cette dernière restreinte aux formes antibasiques permet de définir le groupe de cohomologie antibasique $H_a(M, \mathcal{F})$. Il est donc naturel de caractériser la géométrie du feuilletage à l'aide de ces groupes de cohomologie et voir les propriétés qu'elles fournissent. C'est donc l'objet de la section 1.6. Il s'avère que ces cohomologies définissent de nouveaux invariants (indépendance par rapport à un choix de la métrique) sur les feuilletages qui ne coïncident pas forcément avec la cohomologie de de Rham de la variété ni avec la cohomologie basique. Outre la décomposition de Hodge antibasique qui existe sur l'espace des formes antibasiques, ces groupes imposent des obstructions géométriques et topologiques sur la variété et sur le feuilletage. À titres d'exemples, l'annulation du groupe de cohomologie $H_a^1(M, \mathcal{F})$ permet d'établir un isomorphisme entre les groupes $H_d^1(M, \mathcal{F})$ et $H^1(M)$ et, par conséquent, toute 1-forme harmonique est forcément basique. Aussi, sur les flots riemanniens non minimalisables, le groupe $H_a^1(M, \mathcal{F})$ doit toujours s'annuler.

Le chapitre 2 de ce mémoire concerne des résultats d'estimation des valeurs propres du laplacien et de l'opérateur de Dirac dans différents contextes géométriques. Les estimations obtenues comprennent notamment des minorations et des majorations et utilisent différentes techniques selon le cadre géométrique où nous nous plaçons. Pour mieux détailler, nous commençons par rappeler quelques majorations de ces valeurs propres. Étant donnée une hypersurface compacte (M^n, g) dans l'un des espaces formes de courbure k, il est montré dans [84, 138, 48] que la première valeur propre du laplacien scalaire $\Delta := -\mathrm{trace}_g(\mathrm{Hess}_g)$ est majorée par l'intégrale $\frac{n}{\mathrm{vol}(M)} \int_M (H^2 + k) dv_g$ où H désigne la courbure moyenne de l'hypersurface. La preuve de cette inégalité, connue sous le nom d'inégalité de Reilly, repose essentiellement sur un choix d'une fonction test induite par l'espace forme qui est utilisée dans le quotient de Rayleigh. L'inégalité se déduit ensuite à l'aide du principe de min-max. Cette technique est standard et a été utilisée pour d'autres généralisations du laplacien (p-laplacien, Steklov, etc) afin d'obtenir des majorations en termes des invariants, comme les courbures moyennes d'ordres supérieures, la courbure scalaire, etc (voir par exemple [72]).

Parmi les majorations qui concernent les valeurs propres de l'opérateur de Dirac, nous nous intéressons aux travaux de C. Bär [14] et de N. Ginoux [64]. En effet, étant données d'hypersurfaces comme celles citées ci-dessus, C. Bär a prouvé que, pour $k = 0$ ou 1, la première valeur propre de l'opérateur de Dirac $\lambda_1(D_M^2)$ est majorée par l'intégrale $\frac{n^2}{4\mathrm{vol}(M)} \int_M (H^2 + k) dv_g$ et N. Ginoux a montré que, pour $k = -1$, la borne supérieure est $\frac{n^2}{4} \sup_M (H^2 - 1)$. La technique de la preuve de ces estimations est toujours basée sur la même idée que celle du laplacien en considérant cette fois-ci des spineurs parallèles, de Killing ou de Killing imaginaire comme section-test de l'espace forme. Cependant, avoir une formule intégrale dans l'espace hyperbolique comme c'est le cas avec le laplacien est toujours un problème ouvert. La différence entre les estimations du laplacien et de l'opérateur de Dirac concerne notamment le cas limite de ces inégalités où plus d'exemples, outre que la sphère ronde, sont fournis dans le cas de l'opérateur de Dirac. En effet, ceci est dû à la nature topologique des structures spinorielles.

Regardons maintenant de près le cas limite de ces inégalités pour l'opérateur de Dirac. Il n'est pas difficile de vérifier, par un calcul direct, que les sphères géodésiques réalisent le cas d'égalité. Cependant, il n'est pas clair si ces dernières sont les seules hypersurfaces à satisfaire cette propriété. Cette question a été abordée par N. Ginoux qui, dans [65, 66], fournit une famille d'exemples d'hypersurfaces non minimales de la sphère ronde, parmi lesquelles les tores de Clifford, vérifiant le cas d'égalité. À ce jour, aucune classification n'existe concernant les variétés limites dans le cas où $k = 1$ et, pour le moment, c'est toujours un problème ouvert. Dans [92], O. Hijazi et S. Montiel ont montré que les sphères rondes de l'espace euclidien sont les seules variétés qui vérifient le cas d'égalité de l'estimation de C. Bär. La technique utilisée s'appuie sur un problème de variation de l'hypersurface pour montrer qu'une variété limite est un point critique d'une certaine fonctionnelle définie à partir de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de M. Ainsi, ils ont déduit que tout spineur propre est la restriction d'un spineur parallèle sur l'espace euclidien et, par suite, l'hypersurface doit être totalement ombilique. L'objet de la section 2.1, qui est en collaboration avec N. Ginoux et S. Raulot, est de compléter la classification dans l'espace hyperbolique. En adaptant la preuve de Hijazi et Montiel à notre contexte, nous nous sommes ramenés à classifier les variétés limites et montrer que les sphères géodésiques sont les seules variétés. La preuve suit essentiellement les mêmes étapes que dans le cas euclidien mais il faut prendre en considération des termes d'ordre imaginaire pur en provenance de l'existence des spineurs de Killing imaginaire sur l'espace hyperbolique.

Quant aux minorations des valeurs propres du laplacien et de l'opérateur de Dirac, cette partie est le sujet abordé dans les sections 2.2 et 2.3 où on s'intéresse aux variétés à bord. Rappelons que les minorations des valeurs propres du laplacien sont souvent obtenues à l'aide de la formule de Bochner-Weitzenböck où ce dernier est relié au tenseur de courbure de la variété. Sur une variété à bord, l'intégration de cette dernière formule combinée avec la formule de Stokes donne lieu à des estimations sur le laplacien de Dirichlet ou de Neumann en imposant des conditions sur les quantités extrinsèques de la variété comme la courbure moyenne ou la deuxième forme fondamentale du bord [139]. Dans cet esprit, A. Kachmar et moi-même avons utilisé cette technique pour établir, dans la section 2.2, une minoration des valeurs propres d'un certain opérateur différentiel, appelé laplacien magnétique, qui est défini à partir d'une modification de la différentielle extérieure dans la direction d'une 1-forme différentielle à valeurs imaginaires pures. Quant à la condition au bord, nous imposons sur ce laplacien une condition de type Robin, c'est-à-dire la dérivée normale d'une fonction propre est proportionnelle à la fonction elle-même. L'estimation ainsi fournie exige non seulement des conditions sur les courbures de la variété en termes du paramètre provenant de la condition de Robin imposée mais aussi un certain contrôle de la forme différentielle à partir de laquelle le laplacien magnétique est défini.

Dans la section 2.3, F. El Chami, N. Ginoux et moi-même nous sommes intéressés à d'autres types de minorations que celles établies précédemment. Toujours dans le contexte d'une variété à bord (M, g), nous fournissons une inégalité qui relie l'intégrale sur M d'une fonction f à valeurs réelles à son intégrale sur le bord ∂M. Ici f désigne une fonction positive qui satisfait $\Delta f \leq \lambda f$ pour un certain $\lambda > 0$. La technique, que nous utilisons, se base sur le lemme des valeurs moyennes établi par A. Savo dans [152] qui exprime une certaine inégalité différentielle d'ordre deux de la fonction $F(r) = \int_{\{\rho > r\}} f dv_g$. Ici ρ désigne la fonction distance au bord. Nous analysons cette inégalité différentielle et établissons le résultat qui s'exprime en termes des fonctions de Bessel. Notons ici que des conditions sur le tenseur de Ricci de la variété et la courbure moyenne du bord sont exigées pour pouvoir établir l'inégalité. Comme application de notre résultat, nous retrouvons plusieurs minorations à la Faber-Krahn [26, 35] pour le laplacien de Dirichlet et de Robin et produisons d'autres pour l'opérateur de Dirac, qui améliorent celle de Friedrich classique [56].

Finalement, plusieurs questions restent en suspens dans ce mémoire, parmi lesquelles des problèmes se situent à l'intersection des deux chapitres 1 et 2. Je présente en détail ces problèmes dans le dernier chapitre où je détaille le contexte géométrique de chaque projet et les questions qui en sont issues.

Chapitre 1

Études de la cohomologie sur un feuilletage riemannien

Ce chapitre regroupe les résultats des articles [75, 76, 77, 79, 80] qui sont réalisés en collaboration avec Ken Richardson de Texas Christian University aux États-Unis. Ces travaux traitent principalement la notion de cohomologie et ses interactions avec la structure d'un feuilletage riemannien.

Plusieurs travaux ont été dédiés à l'étude de la cohomologie basique d'un feuilletage riemannien. Le but est de donner une version des résultats standards et connus de la cohomologie de de Rham définie sur une variété riemannienne ([142, 155]) adaptée au contexte des feuilletages. Citons les exemples auxquels nous nous intéressons dans ce chapitre. À l'aide des théorèmes de structures des feuilletages riemanniens [52, 123], une décomposition de Hodge basique est établie, dans [43, 44], de l'espace des formes différentielles basiques qui fait essentiellement appel au laplacien basique. En particulier, il est montré que les cohomologies basiques sont de dimension finie (voir aussi [99]) et vérifient la dualité de Poincaré sous la condition que la cohomologie en degré la codimension du feuilletage soit non nulle. Rappelons ici que Y. Carrière a fourni dans [25] un exemple de feuilletages riemanniens où la dualité de Poincaré n'est pas forcément satisfaite. Cette condition imposée sur la cohomologie fournit une obstruction sur la géométrie du feuilletage, à savoir que la métrique riemannienne doit être choisie de façon que les feuilles soient des sous-variétés minimales [151, 160]. Cette famille de feuilletages est connue sous le nom de feuilletages minimalisables [44, 60, 97, 116]. D'autres résultats concernant les cohomologies basiques ont été obtenus et qui s'expriment en termes de la géométrie transverse. En particulier, J. Hebda a montré dans [82] que si le tenseur de courbure transversal est supposé strictement positif, alors ceci force les groupes de cohomologie basique à s'annuler (voir aussi

[121]). Ainsi, le feuilletage se restreint à ce qu'il soit encore une fois minimalisable [4, 122].

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux notions de cohomologie sur un feuilletage riemannien. La première, dont les classes sont composées de formes basiques, est définie à partir d'une modification de la différentielle extérieure (voir section 1.3). La deuxième, agissant sur les formes antibasiques, est définie à partir de la codifférentielle extérieure de la variété (voir section 1.6). Notons ici qu'une forme différentielle est dite antibasique si elle est orthogonale pour la norme L^2 à toute forme différentielle basique. Nous étudions les propriétés de ces deux groupes de cohomologie et donnons les obstructions qu'elles fournissent sur la variété. Nous établissons aussi plusieurs résultats de rigidité qui s'expriment en terme de la géométrie transverse du feuilletage.

Pour motiver notre présentation, nous revenons à l'expression de l'opérateur de Dirac transversal. En le faisant agir sur les formes différentielles basiques, il apparaît que cet opérateur n'est pas celui de de Rham $d + \delta_b$ comme dans le cas ordinaire mais plutôt tordu par le terme de la courbure moyenne du feuilletage. Dans ce cas, le carré de l'opérateur de Dirac est un certain laplacien basique auquel une nouvelle cohomologie est associée ; que nous appelons cohomologie tordue. Notons que la cohomologie tordue se réduit à celle basique pour les feuilletages minimalisables. Nous montrons que ces groupes de cohomologie tordue ne dépendent pas du choix de la métrique et ceci résulte de l'invariance du spectre de l'opérateur de Dirac transversal (voir section 1.2). En plus, ils permettent de définir la notion de signature basique qui est invariante par une équivalence d'homotopie feuilletée comme nous montrons dans la section 1.4. Dans la section 1.5, nous relions, sur un flot riemannien, le spectre de l'opérateur de Dirac de la variété ambiante à celui transversal. Finalement, nous terminons le chapitre par donner quelques exemples sur le calcul de ces cohomologies.

1.1 Rappel sur les feuilletages riemanniens

Soit $(M^n, \mathcal{F})$ une variété de dimension n munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ donné par un sous-fibré intégrable $L \subset TM$ de rang p avec $n = p + q$. Ceci signifie que le feuilletage $\mathcal{F}$ est une décomposition de M en des sous-variétés immergées de dimension p, appelées *feuilles*, qui sont localement données par l'image inverse des submersions d'un point de la variété de base. Les fonctions de transition de ces submersions locales sont des difféomorphismes. Le fibré $L = T\mathcal{F}$ est ainsi le fibré tangent du feuilletage, c'est-à-dire en tout point $x \in M, L_x = T_x\mathcal{F}$ est l'espace tangent à la feuille passant par x.

Sur une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$, nous appellons les *formes basiques* comme étant les formes différentielles définies sur M, qui dépendent localement des variables transverses, c'est-à-dire des variables de la variété de base des submersions. L'espace des formes différentielles basiques, noté par $\Omega(M, \mathcal{F})$, est ainsi défini, dans [123, 140, 164], par

$$\Omega(M, \mathcal{F}) = \{\alpha \in \Omega(M) |\ X \lrcorner \alpha = X \lrcorner d\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad X \in \Gamma(L)\}.$$

Ici d désigne la différentielle extérieure et $\lrcorner$ est le produit intérieur. Il est facile de voir, par le fait que $d^2 = 0$, que les formes basiques sont préservées par d et sont utilisées pour définir la notion de la *cohomologie basique* $H_d^*(M, \mathcal{F})$ via

$$H_d^k(M, \mathcal{F}) = \frac{\mathrm{Ker}\{d : \Omega^k(M, \mathcal{F}) \to \Omega^{k+1}(M, \mathcal{F})\}}{\mathrm{Image}\{d : \Omega^{k-1}(M, \mathcal{F}) \to \Omega^k(M, \mathcal{F})\}}.$$

Ces groupes de cohomologie constituent la version feuilletée de la cohomologie de de Rham ordinaire car, au cas où le feuilletage est réduit à un point, elles se coïncident. Mais contrairement au cas classique, les cohomologies basiques peuvent être de dimension infinie et, en général, elles ne satisfont pas la dualité de Poincaré même si la variété M est compacte [25, 97] et le feuilletage est transversalement orienté. Cependant, nous allons voir plus tard qu'il existe des obstructions topologiques et géométriques sur le feuilletage pour réaliser la finitude et la dualité de Poincaré.

Dans la suite, nous nous intéressons à une famille particulière de feuilletages, à savoir celle des *feuilletages riemanniens*. Un feuilletage de codimension q est dit riemannien s'il existe une métrique riemannienne g_Q sur le fibré normal $Q = TM/L$, qui est de rang q, vérifiant la condition *d'invariance d'holonomie*. Cette condition se traduit par le fait que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X g_Q$ s'annule le long de tout vecteur $X \in \Gamma(L)$ [141]. Elle est en effet caractérisée par l'existence d'une unique connexion métrique ∇ sur le fibré Q à torsion nulle [123, 141, 164]. Notons ici que la notion de torsion est définie pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$ par

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X \pi(Y) - \nabla_Y \pi(X) - \pi[X, Y],$$

où $\pi : TM \to Q$ est la projection canonique. Une des propriétés intéressantes d'un feuilletage riemannien est que la courbure R^∇ de la connexion ∇ satisfait $X \lrcorner R^\nabla = 0$ pour tout $X \in \Gamma(L)$. Ainsi, cette dernière identité permet d'associer à ∇ toutes les notions standards de courbure comme la courbure de Ricci transversale, la courbure scalaire transversale et ceci en les évaluant aux sections de Q.

Désormais, nous supposons que la variété M est munie d'une métrique *quasi-fibrée* g [141], c'est-à-dire la restriction de g au fibré $Q \simeq L^{\perp}$ définit un feuilletage riemannien sur M. En d'autres termes, la métrique $g_Q := g|_Q$ vérifie la condition d'invariance d'holonomie. Dans ce cas, la projection $\pi : TM \to Q$ n'est autre que la projection orthogonale et la connexion ∇, appelée *connexion de Levi-Civita transversale*, s'exprime explicitement en terme de celle ∇^M de M par

$$\nabla_X Y = \begin{cases} \pi([X,Y]), & \forall X \in \Gamma(L), \\ \\ \pi(\nabla^M_X Y), & \forall X \in \Gamma(Q). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Notons que tout feuilletage riemannien admet une métrique quasi-fibrée compatible avec la structure transverse donnée du fait que la métrique sur les feuilles peut être choisie arbitrairement. Aussi l'existence d'une métrique quasi-fibrée impose des restrictions sur le feuilletage, par exemple la distance entre les feuilles doit rester localement constante et toute géodésique orthogonale au feuilletage en un point reste orthogonale au feuilletage en tout point (voir aussi [99, 96, 123]). Une autre propriété géométrique sur les métriques quasi-fibrées est la suivante : Lorsque M est supposée compacte, la projection orthogonale

$$P : L^2(\Omega(M)) \to L^2(\Omega(M,\mathcal{F})) \tag{1.1.2}$$

envoie l'espace des formes différentielles lisses sur les formes différentielles basiques lisses [132]. Cette propriété n'est pas vraie en général pour n'importe quel feuilletage.

Étant donnée une variété riemannienne $(M, g, \mathcal{F})$ munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension q et d'une métrique quasi-fibrée g, le champ de *courbure moyenne* κ est défini comme étant la 1-forme différentielle sur M associée au vecteur

$$H = \sum_{i=1}^{p} \pi(\nabla^M_{f_i} f_i),$$

où $\{f_i\}_{i=1,\cdots,p}$ est un repère orthonormé local de $T\mathcal{F}$. Si la variété M est supposée compacte, alors la projection $\kappa_b := P\kappa$ est une 1-forme basique fermée [4, 132] et donc elle définit une classe de cohomologie, appelée *classe d'Álvarez*, dans $H^1_d(M,\mathcal{F})$. Il est montré dans [4] que cette classe est invariante sous n'importe quel changement de métrique quasi-fibrée et tout élément de cette classe est la courbure moyenne d'une certaine métrique quasi-fibrée (voir aussi [127, 128] pour d'autres résultats sur cette classe).

Il est intéressant de noter que la classe d'Álvarez a joué un rôle important dans la compréhension de la cohomologie basique. En effet, Y. Carrière a fourni dans [25] un contre-exemple à la dualité de Poincaré pour les cohomologies basiques, énoncée initialement dans [142], où il a montré que la classe d'Álvarez du feuilletage considéré ne peut jamais être nulle. Cependant, F. Kamber et Ph. Tondeur ont établi une *dualité de Poincaré tordue* en considérant la différentielle modifiée $d_\kappa := d - \kappa_b \wedge$ sur les formes basiques. En effet, ils ont montré dans [98] que $H_d^*(M, \mathcal{F}) \simeq H_{d_\kappa}^{q-*}(M, \mathcal{F})$ et donc pour un feuilletage minimal, i.e. $\kappa = 0$, la dualité de Poincaré est bien satisfaite. Plus tard, la dualité de Poincaré a été établie pour une famille plus large que celle des feuilletages minimaux, à savoir les *feuilletages minimalisables* [44, 97], c'est-à-dire quand il existe une métrique quasi-fibrée sur la variété M (autre que celle déjà fixée) de sorte que les feuilles soient minimales. Dans ce cas, la classe d'Álvarez doit s'annuler [4]. La famille des feuilletages minimalisables a été étudiée dans plusieurs travaux. Par exemple, E. Ghys a montré, dans [60], que tout feuilletage riemannien sur une variété simplement connexe est minimalisable. Plus tard, X. Masa [116] a établi une correspondance entre les feuilletages minimalisables de codimension q et le fait que la cohomologie basique de plus haut degré $H_d^q(M, \mathcal{F})$ ne s'annule pas. Il existe aussi d'autres conditions géométriques qui forcent les feuilletages à être minimalisables. Par exemple, J. Hebda a montré dans [82] que si la courbure de Ricci transversale satisfait est strictement positive alors le feuilletage est minimalisable.

Il est bien connu, à travers la théorie de Hodge classique, que la cohomologie d'une variété riemannienne est liée à l'étude spectrale du laplacien. Dans cet esprit, nous allons revoir quelques opérateurs particuliers qui se manifestent dans le contexte des feuilletages, notamment *le laplacien basique* [4, 99, 164, 132] et *l'opérateur de Dirac basique* [38, 70] et s'intéresser aux propriétés qui en fournissent. Commençons tout d'abord par rappeler le laplacien basique. Cet opérateur agit sur l'espace des formes différentielles basiques $\Omega(M, \mathcal{F})$ et est défini comme suit

$$\Delta_b = d\delta_b + \delta_b d : \Omega(M, \mathcal{F}) \to \Omega(M, \mathcal{F}),$$

où δ_b est l'adjoint pour la norme L^2 de la différentielle d restreinte aux formes basiques. Le laplacien basique est un opérateur transversalement elliptique, essentiellement auto-adjoint et possède un spectre discret formé de valeurs propres au cas où la variété M est supposée compacte [45, 47]. Il joue en effet un rôle similaire à celui du laplacien ordinaire sur les variétés et permet d'établir des versions feuilletées des résultats connus en géométrie riemannienne [110, 111, 144, 145]. Rappelons ici que δ_b s'écrit en fonction de la codifférentielle δ sur M comme [4, 132]

$$\delta_b = P\delta = \pm\bar{*}d\bar{*} + \kappa_b\lrcorner \tag{1.1.3}$$

où $\bar{*}$ est l'étoile de Hodge basique définie pour toute k-forme différentielle basique γ par :

$$\bar{*}\gamma = (-1)^{p(q-k)} * (\gamma \wedge \chi_{\mathcal{F}}), \tag{1.1.4}$$

où $\chi_{\mathcal{F}}$ désigne la forme volume longitudinale (c'est-à-dire celle des feuilles) et $*$ est l'opérateur de Hodge de la variété M.

Il est montré dans [99] (voir aussi [132]) que Δ_b est la restriction aux formes basiques d'un certain opérateur elliptique d'ordre deux défini sur l'espace de toutes les formes différentielles mais qui n'est pas forcément symétrique. Une décomposition de Hodge basique en est ainsi déduite dans [99, 132] qui montre en particulier que les groupes de cohomologie basique sont isomorphes au noyau de Δ_b et sont de dimension finie (voir aussi [44, 43] pour une autre approche). Notons aussi que, sur les feuilletages minimalisables, le laplacien basique commute avec l'étoile de Hodge basique, ce qui explique la dualité de Poincaré sur cette famille de feuilletages.

Maintenant, nous allons discuter la construction de l'opérateur de Dirac basique. Pour cela, nous considérons sur une variété riemannienne $(M, g, \mathcal{F})$ munie d'une métrique quasi-fibrée g, un $\mathcal{F}$-fibré vectoriel $E \to M$ qui est un $\mathbb{C}\mathrm{l}(Q)$-fibré de Clifford muni d'une connexion compatible ∇^E. Rappelons qu'un $\mathcal{F}$-fibré est un fibré vectoriel basé sur une variété feuilletée telle que l'identité $X\lrcorner R^{\nabla^E} = 0$ est satisfaite pour tout $X \in \Gamma(L)$ [45, 96]. Comme dans le cas ordinaire, l'opérateur de Dirac transversal est la composition des applications

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\left(\nabla^E\right)^{\mathrm{tr}}} \Gamma(Q^* \otimes E) \xrightarrow{\cong} \Gamma(Q \otimes E) \xrightarrow{\mathrm{Cliff}} \Gamma(E),$$

où la dernière application est la multiplication de Clifford, notée par " $\cdot$ ", et l'opérateur $\left(\nabla^E\right)^{\mathrm{tr}}$ est la projection de ∇^E. Ainsi l'opérateur de Dirac transversal est donné par

$$D_{\mathrm{tr}} = \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \nabla^E_{e_i},$$

où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ désigne un repère orthonormé de $\Gamma(Q)$. Il est facile de vérifier que $D_{\rm tr}$ préserve l'espace des sections basiques $\Gamma_b(E)$ de E (i.e. $\Gamma_b(E) = \{s \in \Gamma(E)|\, \nabla^E_X s = 0$ pour tout $X \in \Gamma(L)\}$) mais il n'est pas symétrique sur cet espace. Cette dernière propriété est dûe à la formule de Stokes transversale établie dans [163] qui fait intervenir le terme de la courbure moyenne dans la divergence. Pour le rendre auto-adjoint, nous modifions la définition de $D_{\rm tr}$ pour la considérer comme suit :

$$D_b = \frac{1}{2}(D_{\rm tr} + D^*_{\rm tr}) = \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \nabla^E_{e_i} - \frac{1}{2}\kappa_b^\sharp \cdot \ . \qquad (1.1.5)$$

Un calcul direct montre que D_b préserve les sections basiques et est transversalement elliptique. D'où par la théorie spectrale des opérateurs définis sur les $\mathcal{F}$-fibrés, l'opérateur de Dirac basique possède un spectre discret formé de valeurs propres de multiplicité finie [38, 45, 70].

1.2 Invariance du spectre de l'opérateur de Dirac basique

Cette section résume les résultats de l'article [75]. Dans ce travail, nous nous donnons une variété riemannienne compacte $(M, g, \mathcal{F})$ munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ et d'une métrique quasi-fibrée g. Nous étudions l'invariance du spectre de l'opérateur de Dirac basique par rapport à un certain changement de métrique quasi-fibrée. En fait, nous modifions la métrique g dans la direction des feuilles de manière à ce que sa restriction sur le fibré normal reste invariante. Dans ce cadre, la nouvelle métrique obtenue reste toujours quasi-fibrée ayant la même connexion de Levi-Civita transversale. Le champ de courbure moyenne change avec la métrique et, dans ce cas, l'expression de l'opérateur de Dirac basique change elle aussi.

Ainsi, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 (G. Habib et K. Richardson, [75]) *Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété compacte munie d'un feuilletage riemannien et d'une métrique quasi-fibrée. Soit $E \to M$ un $\mathcal{F}$-fibré de Clifford. Alors le spectre de l'opérateur de Dirac basique reste invariant par tout changement de métrique quasi-fibrée préservant la métrique transverse.*

La preuve du théorème 1.2.1 se base sur le fait que pour n'importe quel changement g' de la métrique g, les formes volumes sont reliées par $dv_{g'} = h dv_g$

pour une certaine fonction strictement positive h. Ainsi, l'opérateur de Dirac basique D'_b associé à la nouvelle métrique g', préservant la métrique transverse, est donné par $D'_b = \alpha^{-1/2} D_b(\alpha^{1/2})$ où $\alpha = Ph$ est la projection orthogonale de h sur les fonctions basiques définie dans (1.1.2) qui est toujours strictement positive. Étant donnés que ces deux opérateurs sont conjugués, nous en déduisons alors qu'ils possèdent le même spectre. Ceci achève la preuve.

Il est bien connu que le laplacien basique dépend du choix de la métrique quasi-fibrée. En effet, il est montré dans [145, Cor. 3.8] que le spectre du laplacien basique sur les fonctions détermine la norme L^2 de la courbure moyenne d'un feuilletage transversalement orienté de codimension 1. C'est l'une des raisons pourquoi l'invariance du spectre de l'opérateur de Dirac basique est surprenante.

Une des applications de ce résultat concerne le calcul du spectre de l'opérateur de Dirac basique associé à une structure spinorielle transverse [74, 95]. En effet, il est montré dans [37, 115, 117] que toute métrique quasi-fibrée peut être modifiée en une autre métrique quasi-fibrée ayant la même restriction transverse et à courbure moyenne basique et harmonique. Ainsi, en travaillant avec cette nouvelle métrique, le spectre de l'opérateur de Dirac reste le même. D'où, à l'aide de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz transversale [70, 74, 95], plusieurs estimations des valeurs propres peuvent être déduites comme dans le cas ordinaire.

1.3 Différentielle modifiée et cohomologie basique associée

Cette partie résume les résultats de l'article [76]. Nous considérons tout au long de cette section une variété riemannienne compacte $(M, g, \mathcal{F})$ munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension q et d'une métrique quasi-fibrée g.

En considérant le fibré $\Lambda^* Q$ comme un fibré de modules en algèbres de Clifford $\mathbb{C}l(Q)$ muni de la multiplication de Clifford

$$\alpha^\sharp \cdot = \alpha \wedge -\alpha \lrcorner$$

pour les 1-formes basiques α, l'opérateur de Dirac basique s'écrit sur les formes basiques comme

$$D_b = d + \delta_b - \frac{1}{2}\kappa_b \wedge - \frac{1}{2}\kappa_b \lrcorner,$$

où nous rappelons que δ_b est donné par (1.1.3). Donc, en posant $\widetilde{d} := d - \frac{1}{2}\kappa_b \wedge$ et son L^2-adjoint $\widetilde{\delta}_b := \delta_b - \frac{1}{2}\kappa_b \lrcorner$, l'opérateur de Dirac s'exprime comme la somme $D_b = \widetilde{d} + \widetilde{\delta}_b$. Ainsi par le fait que κ_b est une 1-forme basique fermée, nous en déduisons que $\widetilde{d}^2 = 0, \widetilde{\delta}_b^2 = 0$ et que le carré de l'opérateur de Dirac basique n'est pas le laplacien basique Δ_b mais plutôt le *laplacien tordu* $D_b^2 = \widetilde{\Delta}_b := \widetilde{d}\widetilde{\delta}_b + \widetilde{\delta}_b\widetilde{d}$.

Dans ce travail, nous nous intéressons à regarder de près cette nouvelle différentielle $\widetilde{d}$ et nous y associons le groupe de cohomologie basique

$$\widetilde{H}^k(M, \mathcal{F}) = \frac{\mathrm{Ker}\, \widetilde{d}^k}{\mathrm{Image}\ \widetilde{d}^{k-1}}$$

que nous appelons le *groupe de cohomologie tordue*. Ici $\widetilde{d}^k$ est la restriction de $\widetilde{d}$ sur les k-formes basiques ($0 \leq k \leq q$). Nous étudions cette cohomologie tordue et montrons qu'elle satisfait la dualité de Poincaré. Nous prouvons aussi que, pour les feuilletages minimalisables, cette cohomologie tordue est isomorphe à la cohomologie basique $H_d^*(M, \mathcal{F})$. Ceci permet de retrouver plusieurs résultats sur les cohomologies basiques mentionnés dans la section 1.1. Toujours dans le même contexte, nous établissons une formule de Bochner-Weitzenböck pour le laplacien tordu pour en déduire des résultats de rigidité sur les cohomologies tordues et basiques.

Pour détailler ces résultats, nous commencons par établir une décomposition de Hodge basique tordue. Pour cela, notons $\widetilde{\delta}_b^k$ et $\widetilde{\Delta}_b^k$ les restrictions respectives de $\widetilde{\delta}_b$ et $\widetilde{\Delta}_b$ sur les k-formes basiques.

Proposition 1.3.1 (G. Habib et K. Richardson, [76]) *Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq q$, l'espace des k-formes différentielles basiques se décompose en une L^2-somme orthogonale*

$$\Omega^k(M, \mathcal{F}) = \mathrm{Image}(\widetilde{d}^{k-1}) \oplus \mathrm{Image}(\widetilde{\delta}_b^{k+1}) \oplus \mathrm{Ker}(\widetilde{\Delta}_b^k).$$

De plus, $\mathrm{Ker}(\widetilde{\Delta}_b^k) \simeq \widetilde{H}^k(M, \mathcal{F})$ *est de dimension finie.*

La preuve de la proposition 1.3.1 est similaire au cas du laplacien basique établie dans [99, 132, 164] où l'idée consiste à montrer que $\widetilde{\Delta}_b$ est la restriction d'un certain opérateur elliptique sur l'espace de toutes les formes différentielles.

Une propriété intéressante de ces groupes de cohomologie tordue est, comme pour les cohomologies basiques, leur indépendance par rapport à un choix d'une métrique quasi-fibrée. En effet, étant données deux telles métriques g et g', nous savons d'après [4] que les composantes basiques des courbures moyennes diffèrent par une 1-forme basique exacte, c'est-à-dire $\kappa_b' = \kappa_b + df$ pour une certaine fonction basique f. D'où, par un calcul direct, nous avons que $(\widetilde{d})' = e^{f/2}\widetilde{d}\left(e^{-f/2}\right)$ et, ainsi, l'application $\widetilde{H}^k(M,\mathcal{F}) \to (\widetilde{H}^k(M,\mathcal{F}))'; [\beta] \mapsto [e^{f/2}\beta]$ induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie tordue. Alors, nous obtenons

Théorème 1.3.2 (G. Habib et K. Richardson, [76]) *La dimension de chaque groupe de cohomologie tordue $\widetilde{H}^k(M,\mathcal{F})$ est indépendante du choix de la métrique quasi-fibrée. De plus, le spectre du laplacien tordu $\widetilde{\Delta}_b$ reste invariant par tout changement de métrique quasi-fibrée gardant la même métrique transverse.*

L'invariance du spectre de $\widetilde{\Delta}_b$ est directe du fait que celui de D_b l'est aussi par le théorème principal de le section 1.2. En ce qui concerne la dualité de Poincaré pour la cohomologie tordue, nous montrons

Théorème 1.3.3 (G. Habib et K. Richardson, [76]) *Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq q$, l'étoile de Hodge basique $\bar{*}$ induit un isomorphisme entre $\widetilde{H}^k(M,\mathcal{F})$ et $\widetilde{H}^{q-k}(M,\mathcal{F})$.*

La preuve du théorème 1.3.3 est basée sur le fait que l'étoile de Hodge basique commute avec le laplacien tordu $\widetilde{\Delta}_b$ en raison des relations $\bar{*}\widetilde{d} = (-1)^{k+1}\widetilde{\delta}_b\bar{*}$ et $\widetilde{d}\bar{*} = (-1)^k\bar{*}\widetilde{\delta}_b$ qui ne sont pas vraies en général pour d et δ_b. Ensuite, elle utilise la décomposition de Hodge basique tordue pour identifier les cohomologies tordues au noyau du laplacien tordu $\widetilde{\Delta}_b$. En conséquence, nous obtenons

Corollaire 1.3.4 (G. Habib et K. Richardson, [76]) *Soit $(M,g,\mathcal{F})$ une variété compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension impaire et d'une métrique quasi-fibrée g. Les caractéristiques d'Euler basiques associées respectivement à $\widetilde{H}^*(M,\mathcal{F})$ et $H_d^*(M,\mathcal{F})$ s'annulent.*

Le fait que la caractéristique d'Euler basique associée à $\widetilde{H}^*(M,\mathcal{F})$ s'annule est une conséquence directe du théorème 1.3.3. Pour celle de $H_d^*(M,\mathcal{F})$, rappelons d'abord qu'elle est définie comme étant l'indice basique de l'opérateur de de Rham $D_0 = d+\delta_b : \Omega^{\text{pair}}(M,\mathcal{F}) \to \Omega^{\text{impair}}(M,\mathcal{F})$ (voir [18, 24, 38, 45]). La propriété cruciale est que la caractéristique d'Euler basique est invariante le long des perturbations de D_0 par n'importe quel champ basique [18, Prop. 3.13]. Donc, l'indice basique de $D_b = D_0 - \frac{1}{2}\kappa_b\wedge - \frac{1}{2}\kappa_b\lrcorner$ est le même que celui de D_0 qui doit ainsi s'annuler.

Pour relier les cohomologies tordues aux cohomologies basiques, nous nous restreignons aux feuilletages minimalisables. En effet, sur de tels feuilletages, la classe de la courbure moyenne $[\kappa_b]$ s'annule (voir [4]) et, dans ce cas, il existe une fonction basique f telle que $\kappa_b = df$. Ainsi la différentielle $\widetilde{d}$ n'est autre que $e^{f/2}d\left(e^{-f/2}\right)$ et l'application $[\beta] \mapsto [e^{f/2}\beta]$ définit un isomorphisme entre $H_d^*(M,\mathcal{F})$ et $\widetilde{H}^*(M,\mathcal{F})$. Aussi, nous caractérisons cette famille de feuilletages par le résultat suivant

Théorème 1.3.5 (G. Habib et K. Richardson, [76]) *Un feuilletage $(M, g, \mathcal{F})$ de codimension q est minimalisable si et seulement si nous avons $\widetilde{H}^0(M,\mathcal{F}) \simeq \widetilde{H}^q(M,\mathcal{F}) \neq 0$.*

La preuve du théorème 1.3.5 est basée sur le fait que pour un feuilletage minimalisable (c'est-à-dire $\kappa_b = df$ pour une certaine fonction basique f), la cohomologie $\widetilde{H}^0(M,\mathcal{F})$ ne peut pas être nulle car $\widetilde{d}(e^{f/2}) = e^{f/2}d(1) = 0$. Réciproquement supposons que $\widetilde{H}^0(M,\mathcal{F}) \neq 0$, alors il existe une fonction basique non nulle h telle que $dh = \frac{1}{2}h\kappa_b$. En particulier, en choisissant la métrique quasi-fibrée de manière à ce que la courbure moyenne soit basique-harmonique (i.e. $\kappa = \kappa_b$) [37, 117, 115], un calcul direct mène à $\Delta_b h = -\frac{1}{4}|\kappa|^2 h$. Ainsi, en multipliant cette dernière identité par h et en l'intégrant sur M nous obtenons que $\kappa = 0$ et le feuilletage est bien minimalisable.

Nous terminons cette section par l'établissement d'autres conditions qui forcent la cohomologie à s'annuler. Il est bien connu que la formule de Bochner-Weitzenböck pour le laplacien de Hodge-de Rham défini sur une variété riemannienne permet de déduire des résultats d'annulation de la cohomologie sous certaines conditions sur la courbure de ladite variété [59]. Pour adapter ce type de résultats aux cohomologies basiques et tordues, nous établissons une formule du type *Bochner-Weitzenböck transversale* pour le laplacien tordu. En effet, nous avons

Théorème 1.3.6 (G. Habib et K. Richardson, [76]) *Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension q et* *d'une métrique quasi-fibrée. Supposons que la courbure moyenne κ est basique-harmonique. Alors, sur les k-formes basiques, nous avons*

$$\widetilde{\Delta} = \nabla^*\nabla + \mathcal{B}^{[k]} + \frac{1}{4}|\kappa|^2,$$

où $\mathcal{B}^{[k]} = \sum_{i,j} e_j^* \wedge (e_i \lrcorner R^\nabla(e_i, e_j))$ est l'opérateur de Bochner. Ici R^∇ désigne le tenseur de courbure associé à la connexion de Levi-Civita transversale et $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ est un repère orthonormé local de $\Gamma(Q)$.

À partir de cette formule, qui se montre par un calcul long mais pas difficile, nous déduisons d'une manière directe plusieurs résultats de rigidité sur les cohomologies basiques (voir aussi [82, 121]). En effet,

Corollaire 1.3.7 (G. Habib et K. Richardson, [76]) *Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte munie d'un feuilletage riemannien de codimension q et d'une métrique quasi-fibrée. Si l'opérateur de Bochner $\mathcal{B}^{[k]}$ est strictement positif sur les k-formes basiques, alors les groupes de cohomologie basique $H_d^k(M, \mathcal{F})$ et tordue $\widetilde{H}^k(M, \mathcal{F})$ s'annulent.*

Pour montrer ce résultat sur les cohomologies basiques, il suffit de remarquer que pour toute k-forme basique ω fermée et co-fermée, i.e. $d\omega = 0$ et $\delta_b\omega = 0$, nous avons que $|\widetilde{d}\omega|^2 + |\widetilde{\delta}_b\omega|^2 = \frac{1}{4}|\kappa|^2|\omega|^2$. Ainsi, en appliquant la formule de Bochner-Weitzenböck à ω et en prenant le produit scalaire avec la forme ω elle-même, nous obtenons le résultat après intégration sur la variété M. Ce qui achève la preuve. Comme une conséquence, nous fournissons une preuve directe du résultat suivant

Corollaire 1.3.8 ([43]) *Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte munie d'un feuilletage riemannien de codimension q et d'une métrique quasi-fibrée. Alors la cohomologie basique $H_d^q(M, \mathcal{F})$ est isomorphe à 0 ou $\mathbb{R}$.*

La caractérisation établie dans le théorème 1.3.5 et le corollaire 1.3.8 permettent de retrouver d'une manière directe le résultat de X. Masa [116] : Un feuilletage riemannien est minimalisable si et seulement si $H_d^q(M, \mathcal{F}) \neq 0$. En effet, étant donné un feuilletage minimalisable, nous avons vu que les cohomologies basiques et tordues sont isomorphes et, par suite, nous obtenons par le théorème 1.3.5

$$0 \neq \widetilde{H}^0(M, \mathcal{F}) \simeq \widetilde{H}^q(M, \mathcal{F}) \simeq H_d^q(M, \mathcal{F}).$$

Nous en déduisons ainsi que la cohomologie $H_d^q(M, \mathcal{F})$ est non nulle. Pour la réciproque, si le feuilletage n'est pas minimalisable alors également par le théorème 1.3.5, nous avons d'une part que $\widetilde{H}^q(M,\mathcal{F})=0$. D'autre part, si nous prenons $\alpha \in H^q(M,\mathcal{F}); \alpha \neq 0$ (c'est-à-dire α est une q-forme Δ_b-harmonique non nulle) alors, nous pouvons écrire $\alpha = c\nu$ pour une constante c non nulle par le corollaire 1.3.8. Ici ν désigne la forme volume transversale du fibré normal. Or, par le fait que $0=\delta_b\alpha = c\delta_b\nu$, il est facile de vérifier que $\kappa \lrcorner \nu = 0$ et, dans ce cas, nous obtenons que α est $\widetilde{d}$-fermé et $\widetilde{\delta}$-fermé. Donc nous en déduisons que α est un élément de $\widetilde{H}^q(M,\mathcal{F})=0$, ce qui mène à une contradiction.

1.4 Invariance d'homotopie et signature basique

Cette partie résume les résultats de l'article [79]. Un des problèmes intéressants en théorie des feuilletages est de calculer *l'indice basique* d'un opérateur de type Dirac transverse en termes d'invariants topologiques. Cette question, qui est une généralisation du théorème d'Atiyah-Singer, a été d'abord abordée par A. El Kacimi dans [45] et par Kamber-Glazebrook dans [70] et a intéressée les chercheurs depuis de nombreuses années.

Dans ce travail, nous nous intéressons à étudier la *signature basique* d'un feuilletage riemannien qui est une version transversale de la signature définie sur les variétés de dimension paire. Elle est définie, sur les feuilletages minimalisables, comme étant l'indice de l'opérateur de de Rham basique $d+\delta_b$. Le fait que le feuilletage soit minimalisable est une condition nécessaire pour la définition car, en général, l'opérateur de de Rham n'envoie pas les formes basiques duales sur les antiduales. Plusieurs résultats, concernant cette signature, ont été obtenus. À titres d'exemples, Lott et Gorokhovsky dans [71] ont montré que la signature basique d'un feuilletage est la signature de l'espace des feuilles fermées d'orbites maximales. Dans [24], Brüning, Kamber et Richardson ont obtenu une formule générale de l'indice basique d'un opérateur transversalement elliptique et ont trouvé une formule de la signature basique en fonction d'invariants transverses du feuilletage. Dans [19], Benameur et Rey-Alcantara ont montré qu'une équivalence d'homotopie feuilletée entre deux variétés compactes M et M' munies de feuilletages riemanniens minimalisables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ fournit les mêmes signatures basiques. L'idée de la preuve est basée sur le fait qu'une telle équivalence induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie basique de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

Dans la suite, nous allons donner la définition de la signature basique pour n'importe quel feuilletage riemannien et montrer qu'elle est invariante par une équivalence d'homotopie feuilletée. L'avantage de cette étude est qu'elle n'exige pas que le feuilletage soit minimalisable et ceci en utilisant la cohomologie basique tordue introduite dans la section précédente.

Soit $(M, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension q paire et d'une métrique quasi-fibrée g. Soit

$$\bigstar = i^{k(k-1)+\frac{q}{2}} \bar{*},$$

l'opérateur défini sur les k-formes basiques où $\bar{*}$ est l'étoile de Hodge basique définie par l'équation (1.1.4). Il est facile de vérifier que cet opérateur est symétrique, son carré vaut 1 et que $\bigstar\widetilde{d} = -\widetilde{\delta}_b\bigstar$ [76]. Rappelons ici que $\widetilde{d} = d - \frac{1}{2}\kappa_b\wedge$ et $\widetilde{\delta}_b = \delta_b - \frac{1}{2}\kappa_b\lrcorner$ sont les différentielles et codifférentielles basiques tordues définies dans la section précédente. Ainsi, si nous notons $\Omega^{\pm}(M, \mathcal{F})$ les espaces propres associés aux valeurs propres ± 1 de $\bigstar$, l'opérateur de Dirac basique $D_b = \widetilde{d} + \widetilde{\delta}_b$ envoie $\Omega^{\pm}(M, \mathcal{F})$ vers $\Omega^{\mp}(M, \mathcal{F})$. D'où la définition suivante

Définition 1.4.1 *Sur un feuilletage riemannien transversalement orienté de codimension paire, la signature basique $\sigma(M, \mathcal{F})$ du feuilletage est l'indice*

$$\sigma(M, \mathcal{F}) = \dim\ker\left(\widetilde{\Delta}_b\Big|_{\Omega^+(M,\mathcal{F})}\right) - \dim\ker\left(\widetilde{\Delta}_b\Big|_{\Omega^-(M,\mathcal{F})}\right).$$

Notons que cette définition n'est pas possible pour l'opérateur $d + \delta_b$ du fait que les formules de commutation avec $\bigstar$ ne sont pas valables à cause du terme de la courbure moyenne.

Pour montrer l'invariance d'homotopie de la signature basique, nous allons rappeler quelques définitions que nous pouvons trouver dans [42, 81]. Étant données deux variétés feuilletées $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$, une application $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$ est dite *feuilletée* si f envoie les feuilles de $\mathcal{F}$ dans les feuilles de $\mathcal{F}'$, c'est-à-dire $f_*(T\mathcal{F}) \subset T\mathcal{F}'$. Il est facile de voir que le tiré en arrière par une application feuilletée des formes basiques de $(M', \mathcal{F}')$ est un sous-ensemble des formes basiques de $(M, \mathcal{F})$. Les deux applications $f : M \to M'$ et $g : M \to M'$ sont dites *feuilletées homotopes* s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times M \to M'$ telle que $H(0, x) = f(x), H(1, x) = g(x)$ et telle que pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $H(t, \cdot)$ est lisse et feuilletée. Finalement, une application feuilletée $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$ est dite une *équivalence d'homotopie feuilletée* s'il existe une application feuilletée $g : M' \to M$ telle que $f \circ g$ est feuilletée homotope à $\mathrm{Id}_{M'}$ et $g \circ f$ est feuilletée homotope à Id_M.

Pour montrer que la signature basique ainsi définie est un invariant d'homotopie feuilletée, nous montrons d'abord qu'elle est la signature d'une certaine forme dégénérée définie sur les cohomologies tordues. En effet, nous avons

Théorème 1.4.2 (G. Habib et K. Richardson, [79]) *Soit $(M, g, \mathcal{F})$ un feuilletage riemannien de codimension q. Alors pour tous entiers $0 \leq r, s \leq q$, il existe une application*

$$A_{\mathcal{F}} : \widetilde{H}^r(M, \mathcal{F}) \times \widetilde{H}^s(M, \mathcal{F}) \to H_d^{q-r-s}(M, \mathcal{F}),$$

définie comme suit. Pour $[\alpha] \in \widetilde{H}^r(M, \mathcal{F})$ et $[\beta] \in \widetilde{H}^s(M, \mathcal{F})$, $[\alpha \wedge \beta]$ est une classe dans $H^{r+s}_{d-\kappa_b\wedge}(M, \mathcal{F})$, et donc $\overline{*}[\alpha \wedge \beta]$ est une classe dans le groupe de cohomologie basique $H_d^{q-r-s}(M, \mathcal{F})$. En particulier pour $q = 2l, r = s = l$, la signature basique est la signature de la forme quadratique

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{H}^l(M, \mathcal{F}) \times \widetilde{H}^l(M, \mathcal{F}) & \to & \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) & \longmapsto & A_{\mathcal{F}}([\alpha], [\beta]) = \displaystyle\int_M \alpha \wedge \beta \wedge \chi_{\mathcal{F}}, \end{array}$$

où $\chi_{\mathcal{F}}$ est la forme volume longitudinale.

La preuve du théorème 1.4.2 consiste d'abord à montrer que pour une r-forme basique α et une s-forme β telles que $\widetilde{d}\alpha = 0$ et $\widetilde{d}\beta = 0$, nous avons que $d(\alpha \wedge \beta) = \kappa_b \wedge \alpha \wedge \beta$. Donc, nous en déduisons que $\alpha \wedge \beta$ définit une classe dans $H^{r+s}_{d-\kappa_b\wedge}(M, \mathcal{F})$. Ensuite, nous utilisons l'isomorphisme entre $H_d^*(M, \mathcal{F})$ et $H^{q-*}_{d-\kappa_b\wedge}(M, \mathcal{F})$, établi à l'aide de l'étoile de Hodge basique, pour obtenir un élément dans $H_d^{q-r-s}(M, \mathcal{F})$. Il est à noter que $[\alpha \wedge \beta]$ est indépendante du choix de la classe $[\alpha]$ et de la classe de $[\beta]$ et ceci se fait par un calcul direct.

Dans la suite, nous allons noter par $H^*_{d+\theta\wedge}(M, \mathcal{F})$ la cohomologie basique associée à la différentielle $d + \theta\wedge$ où θ est une 1-forme basique fermée sur M. Cette cohomologie est connue sous le nom de la cohomologie de Lichnerowicz basique ou de Morse-Nokinov basique [3, 13, 93, 131, 165]. Nous montrons ainsi qu'une équivalence d'homotopie feuilletée $f : M \to M'$ induit un isomorphisme entre les cohomologies de Lichnerowicz basiques qui va, par la suite, induire un isomorphisme entre les cohomologies tordues (voir aussi [46] pour les homéomorphismes feuilletés). Nous avons,

Théorème 1.4.3 (G. Habib et K. Richardson, [79]) *Soit $f : M \to M'$ une équivalence d'homotopie feuilletée et θ' une 1-forme basique fermée sur M',* *alors f^* induit un isomorphisme entre $H^*_{d+\theta'\wedge}(M',\mathcal{F}')$ et $H^*_{d+f^*\theta'\wedge}(M,\mathcal{F})$. En particulier, $f^*:\widetilde{H}^k(M',\mathcal{F}')\to\widetilde{H}^k(M,\mathcal{F})$ est bien défini et est un isomorphisme pour tout entier $k\leq q$.*

La preuve du théorème 1.4.3 est longue et technique. La première partie est basée sur une adaptation de la preuve ordinaire à celle des feuilletages pour établir l'isomorphisme f^*. En conséquent, nous déduisons que les variétés M et M' ont la même dimension et les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ont la même codimension. Quant à la deuxième partie, nous prenons d'abord $\theta'=-\kappa'_b$ dans l'isomorphisme entre $H^k_{d-\kappa'_b\wedge}(M',\mathcal{F}')$ et $H^k_{d-f^*\kappa'_b\wedge}(M,\mathcal{F})$, pour tout k, de la première partie. En particulier, pour $k=q$, nous montrons que $f^*\kappa'_b$ et κ_b définissent une même classe de cohomologie dans $H^1_d(M,\mathcal{F})$. Ceci est dû, d'une part, au fait que $H^q_{d-\kappa'_b\wedge}(M',\mathcal{F}')\simeq H^0_d(M',\mathcal{F}')\simeq\mathbb{R}$ et, d'autre part, à un résultat de dualité de Poincaré pour les groupes de cohomologie de Lichnerowicz basique. Pour conclure, nous modifions la métrique quasi-fibrée g de façon à ce que $f^*\kappa'_b=\kappa_b$ et ceci en multipliant la métrique sur les fibres par un facteur conforme. Ainsi, en considérant cette fois-ci $\theta'=-\frac{1}{2}\kappa'_b$, nous trouvons l'isomorphisme souhaité entre les cohomologies basiques tordues.

Nous terminons cette section par établir le résultat principal de cette partie. Nous montrons

Théorème 1.4.4 (G. Habib et K. Richardson, [79]) *Soit $f:M\to M'$ une équivalence d'homotopie feuilletée entre deux feuilletages riemanniens $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ de codimension $2l$. Alors $\sigma(M,\mathcal{F})=\sigma(M',\mathcal{F}')$ si f préserve l'orientation transverse et $\sigma(M,\mathcal{F})=-\sigma(M',\mathcal{F}')$ sinon.*

La preuve du théorème 1.4.4 utilise essentiellement la caractérisation de la signature basique dans le théorème 1.4.2 et l'isomorphisme du théorème 1.4.3 pour montrer pour tous $\alpha'_1,\alpha'_2\in\widetilde{H}^l(M',\mathcal{F}')$, la relation

$$A_{\mathcal{F}}(f^*\alpha'_1,f^*\alpha'_2)=\lambda\frac{\mathrm{Vol}(M)}{\mathrm{Vol}(M')}A_{\mathcal{F}'}(\alpha'_1,\alpha'_2),$$

pour un certain nombre réel λ.

1.5 Limite adiabatique sur les flots riemanniens

Cette partie résume les résultats de l'article [77]. Plusieurs chercheurs ont étudié le spectre du laplacien et des opérateurs de type Dirac sur des variétés où la métrique s'effondre (appelée *limite adiabatique*). En particulier, les travaux [30, 58, 61] décrivent le comportement du spectre du laplacien sur des submersions riemanniennes quand la métrique le long des fibres s'effondre (voir aussi [168, 7, 20] pour l'opérateur de Dirac). Dans [118], Mazzeo et Melrose ont relié, sous la limite adiabatique, les propriétés des valeurs propres du laplacien d'une fibration riemannienne à la suite spectrale de Leray. Ce résultat a été généralisé par Álvarez-López et Kordyukov dans le cadre des feuilletages riemanniens dans [5] (voir aussi [103] pour un survol général du sujet).

Dans [6], Ammann et Bär ont étudié le comportement des valeurs propres de l'opérateur de Dirac d'un fibré en cercles au-dessus d'une variété $M/\mathbb{S}^1$. Ils ont ainsi montré que si la métrique sur M est changée de façon à ce que les longueurs des cercles convergent vers zéro, les valeurs propres se distinguent en deux catégories : celles qui convergent vers les valeurs propres de la variété de base $M/\mathbb{S}^1$ correspondant aux *spineurs projetables* [125], c'est-à-dire la dérivée de Lie de ces spineurs s'annule le long des fibres, et celles qui convergent vers l'infini, correspondant aux spineurs non-projetables. L'idée principale de la preuve est de décomposer la dérivée de Lie d'un champ de spineurs en des sous-espaces propres V_k ($k \in \mathbb{Z}$) de dimension finie et de montrer que cette dérivée de Lie commute avec l'opérateur de Dirac horizontal et anticommute avec la partie verticale. Ces deux opérateurs correspondent à une certaine décomposition de l'opérateur de Dirac en utilisant la structure de la submersion. Ainsi cette étude a permis de calculer explicitement le spectre de l'opérateur de Dirac sur chaque sous-espace V_k en fonction de k (voir aussi d'autres résultats dans cette direction dans [114]).

Dans ce travail, nous nous intéressons à considérer la limite adiabatique sur un *flot riemannien*. Rappelons qu'un flot riemannien $(M^n, g, \mathcal{F})$ est un feuilletage riemannien de dimension 1 donné par les courbes intégrales d'un champ de vecteurs unitaire ξ [25]. Ainsi, nous considérons une métrique de la forme

$$g_f = f^2 g_\xi \oplus g_{\xi^\perp},$$

où f est une fonction basique positive sur M. Nous généralisons le résultat de [6] en montrant que les valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur (M, g_f) correspondant aux spineurs basiques convergent vers celles de l'opérateur de Dirac basique et les autres valeurs propres convergent vers l'infini. Notons ici qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une action d'un cercle sur la variété comme dans [6] pour établir le résultat (voir aussi [94] pour d'autres résultats sur les valeurs propres du laplacien).

Dans la suite, nous allons rappeler brièvement quelques notions sur les flots riemanniens spinoriels [74]. Étant donnée une variété spinorielle $(M^n, g, \mathcal{F})$, munie d'un flot riemannien, la décomposition orthogonale $TM = \mathbb{R}\xi \oplus \mathbb{R}\xi^\perp$ permet d'induire à partir de la structure spinorielle sur M une structure spinorielle sur le fibré normal $Q = \mathbb{R}\xi^\perp$. Ainsi, suivant la parité de n, le fibré des spineurs ΣM de M s'identifie à celui de Q, noté ΣQ, ou à une double copie $\Sigma Q \oplus \Sigma Q$. Dans ce cas, la connexion de Levi-Civita spinorielle sur M est reliée à celle sur Q en faisant appel au tenseur d'O'Neill $\nabla^M \xi$ du flot [130] et à la courbure moyenne κ, supposée basique tout au long de cette section. En effet, pour tout $Z \in \Gamma(Q)$, ces relations sont les suivantes [74, Eq. 4.8]

$$
\begin{aligned}
\nabla_\xi^{\Sigma M} &= \nabla_\xi^{\Sigma Q} + \frac{1}{2}\Omega \cdot + \frac{1}{2}\xi \cdot \kappa \cdot, \\
\nabla_Z^{\Sigma M} &= \nabla_Z^{\Sigma Q} + \frac{1}{2}\xi \cdot \left(\nabla_Z^M \xi\right) \cdot,
\end{aligned}
$$

où Ω est la 2-forme définie pour $Y, Z \in \Gamma(Q)$ par $\Omega(Y,Z) = g(\nabla_Y^M \xi, Z)$. Ici $\nabla^{\Sigma Q}$ désigne la connexion de Levi-Civita transversale spinorielle étendue de ∇ au fibré des spineurs ΣQ et "$\cdot$" est la mutiplication de Clifford sur M. Grâce à ces équations, l'opérateur de Dirac de M s'exprime en termes de $D_Q := D_{\mathrm{tr}} - \frac{1}{2}\kappa\cdot$ et de l'opérateur longitudinal $D_{\mathcal{F}} = \xi \cdot \nabla_\xi^{\Sigma Q}$ par les formules suivantes

$$
\begin{aligned}
D_M &= D_Q + D_{\mathcal{F}} - \frac{1}{2}\xi \cdot \Omega \cdot \text{ pour } n \text{ impair}, \\
D_M &= \xi \cdot (D_Q \oplus (-D_Q)) - \frac{1}{2}\xi \cdot \Omega \cdot + (D_{\mathcal{F}} \oplus D_{\mathcal{F}}) \text{ pour } n \text{ pair}.
\end{aligned}
\tag{1.5.6}
$$

Notons ici que ces équations sont valables pour toutes les sections de ΣM. Une des propriétés intéressantes des flots riemanniens est que le tenseur d'O'Neill est un tenseur basique, ainsi que la 2-forme Ω associée. D'où, à partir des équations (1.5.6), nous pouvons en déduire que l'opérateur de Dirac de M préserve les sections basiques ainsi que les sections antibasiques (c'est-à-dire l'orthogonal pour la norme L^2). Par conséquent, le spectre de l'opérateur de Dirac de M est constitué des valeurs propres qui correspondent aux spineurs propres basiques et antibasiques. Nous montrons

Théorème 1.5.1 (G. Habib et K. Richardson, [77]) *Soit $(M^n, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte spinorielle munie d'un flot riemannien donné par un champ de vecteurs unitaire ξ. Supposons que la courbure moyenne κ du flot est basique. Soit $D_{M,f}$ l'opérateur de Dirac associé à la métrique g_f.*

Les valeurs propres de $D_{M,f}$ *sont* $\{\lambda_j(f)\}_{j=1}^{\infty} \cup \{\mu_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$*, correspondant à la restriction de* $D_{M,f}$ *à* $L^2(\Gamma_b(\Sigma Q))$ *et* $L^2(\Gamma_b(\Sigma Q))^{\perp}$*, respectivement. Alors ces valeurs propres sont indexées de la manière suivante :*

1. *(a) (n impair) quand* $f \to 0$*,* $\lambda_j(f)$ *convergent vers les valeurs propres de l'opérateur de Dirac basique* D_b*.*

   (b) (n pair) quand $f \to 0$*,* $\lambda_j(f)$ *convergent vers les valeurs propres de l'opérateur de Dirac basique* $\pm D_b$*.*

   Dans les deux cas, la convergence est uniforme en j*.*

2. *Si* $\mathcal{F}$ *est minimalisable, les valeurs propres non nulles dans* $\{\mu_k(f)\}$ *tendent vers* $\pm\infty$ *quand* $f \to 0$ *uniformément tout en gardant* $\frac{df}{f}$ *uniformément bornée.*

Rappelons ici que $\Gamma_b(\Sigma Q)$ est l'ensemble des sections basiques du fibré ΣQ défini dans la section 1.1. La preuve de la partie 1 s'appuie sur les relations (1.5.6) appliquées à la métrique g_f. En effet, pour n impair, nous montrons que $||D_{M,f} - D_{b,f}||_{\mathrm{Op}} \to 0$ quand f converge vers 0 uniformément. Donc, par l'invariance du spectre de l'opérateur de Dirac basique $D_{b,f}$ déjà vue dans la section 1.2 et le fait que le spectre est continu comme étant une fonction de la norme d'opérateur, nous en déduisons le résutlat. La partie 2 du théorème repose sur la définition d'un certain opérateur elliptique et auto-adjoint (pour la métrique g) L_f qui est défini à partir de $D_{\mathcal{F}}$ et D_Q. En utilisant des formules de commutation entre $D_{\mathcal{F}}$ et D_Q, nous montrons que $D_{\mathcal{F}}$ commute avec $L_f^* L_f$; Ici L_f^* désigne l'adjoint formel de L_f pour la métrique g_f. Par conséquent, en se restreignant à un espace propre de $D_{\mathcal{F}}$ qui correspond aux spineurs antibasiques, nous prouvons que les valeurs propres de L_f convergent vers l'infini quand f converge vers 0 uniformément. Ensuite, nous observons que la quantité $||D_{M,f} - L_f||_{\mathrm{Op}}$ reste bornée quand $\frac{df}{f}$ est uniformément borné. Ceci permet d'en déduire que les valeurs propres de Dirac tendent vers l'infini.

1.6 Nouveaux invariants cohomologiques sur les feuilletages

Cette partie résume les résultats de l'article [80]. Étant donnée une variété riemannienne compacte (M^n, g), il est bien connu que la décomposition de Hodge permet d'établir un isomorphisme entre l'espace des formes harmoniques et la cohomologie de de Rham. Une façon alternative de définir une nouvelle cohomologie consiste à utiliser la codifférentielle δ à la place de d.

En effet, par le fait que $\delta^2 = 0$, nous pouvons définir, pour $0 \leq k \leq n$,

$$H_\delta^k(M) = \frac{\operatorname{Ker}\delta^k}{\operatorname{Image}\delta^{k+1}}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier, par le théorème de Hodge, que $H_\delta^k(M)$ est isomorphe à l'espace des formes harmoniques et donc à $H_d^k(M)$. Donc cette nouvelle cohomologie ne fournit aucune information supplémentaire et exige l'existence d'une métrique riemannienne.

Dans ce travail, nous supposons que la variété est munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ et nous considérons le sous-espace des *formes différentielles antibasiques*, c'est-à-dire la partie lisse de l'orthogonal, pour la norme L^2, des formes différentielles basiques. Notamment, pour tout $k \leq n$,

$$\Omega_a^k(M,\mathcal{F}) = \Omega^k(M,\mathcal{F})^\perp := \{\alpha \in \Omega^k(M) |\ \langle\alpha,\beta\rangle = 0 \text{ pour tout } \beta \in \Omega^k(M,\mathcal{F})\},$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire L^2 sur $\Omega(M)$. Il est facile de voir que la codifférentielle δ sur M préserve l'espace des formes antibasiques et ceci est dû au fait que d préserve les formes basiques. Ainsi, comme dans le cas ordinaire, nous définissons le groupe de *cohomologie antibasique* par

$$H_a^k(M,\mathcal{F},g) = \frac{\operatorname{Ker}(\delta : \Omega_a^k(M,\mathcal{F}) \to \Omega_a^{k-1}(M,\mathcal{F}))}{\operatorname{Image}(\delta : \Omega_a^{k+1}(M,\mathcal{F}) \to \Omega_a^k(M,\mathcal{F}))}.$$

Il est donc une question naturelle d'étudier ces cohomologies et voir leurs particularités dans le contexte des feuilletages. Il s'avère que ces cohomologies définissent de nouveaux invariants sur le feuilletage qui ne sont pas nécessairement isomorphes aux cohomologies de de Rham ordinaires ou basiques de la variété. Nous nous sommes intéressés à voir si ces invariants fournissent des obstructions sur la structure géométrique de la variété et du feuilletage. Aussi si l'existence de feuilletages particuliers, comme riemanniens, peut mener à des résultats de rigidité sur ces cohomologies.

Pour cela, nous commençons par regarder l'invariance de ces groupes de cohomologie par rapport au choix d'une métrique sur la variété M. Nous montrons

Théorème 1.6.1 (G. Habib et K. Richardson, [80]) *Soit $(M^n, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Les groupes de cohomologie antibasique ne dépendent pas du choix de la métrique et donc sont des invariants sur $(M,\mathcal{F})$.*

La preuve du théorème 1.6.1 consiste à montrer que, pour deux métriques g et g' sur M, l'application $H_a^r(M, \mathcal{F}, g) \to H_a^r(M, \mathcal{F}, g'); [\psi] \mapsto [B^r \psi]$ est un isomorphisme. Ici $B^r = *' *^{-1} : \Omega^r(M) \to \Omega^r(M)$ où $*$ et $*'$ sont les opérateurs de Hodge associés à g et g'. Supposons maintenant que $F : M \to M'$ est un difféomorphisme. Alors si nous considérons le feuilletage $\mathcal{F}'$ tiré en arrière du feuilletage $\mathcal{F}$ par F^{-1}, nous obtenons, pour toutes métriques g et g' sur M et M' respectivement, que $H_a^k(M, \mathcal{F}, g) \simeq H_a^k(M', \mathcal{F}', g')$. Ainsi, nous pouvons dorénavant écrire $H_a^k(M, \mathcal{F})$ à la place de $H_a^k(M, \mathcal{F}, g)$.

Dans la suite, nous allons considérer une variété riemannienne compacte $(M^n, g, \mathcal{F})$ munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension q et d'une métrique quasi-fibrée g. Rappelons que la projection $P = P_b : L^2(\Omega(M)) \to L^2(\Omega(M, \mathcal{F}))$ envoie les formes différentielles lisses sur les formes basiques lisses. Grâce à ce fait, il est aussi vrai que

$$P_a = (\mathrm{Id} - P_b) : L^2(\Omega(M)) \to L^2(\Omega_a(M, \mathcal{F}))$$

envoie les formes différentielles lisses sur les formes antibasiques lisses. D'où par les formules $d_b := d|_{\Omega(M,\mathcal{F})} = dP_b$ et $\delta_b = P_b\delta$, nous avons que $\delta_a := \delta|_{\Omega_a(M,\mathcal{F})} = \delta P_a$ et son L^2-adjoint $d_a = P_a d$. Ainsi, les relations $d_a^2 = 0$ et $\delta_a^2 = 0$ permettent de définir les opérateurs de *de Rham* et du *laplacien antibasique* par

$$D_a := d_a + \delta_a \quad \text{et} \quad \Delta_a := d_a\delta_a + \delta_a d_a = D_a^2.$$

Afin d'étudier les propriétés analytiques de ces deux opérateurs, nous adaptons les techniques d'analyse fonctionelle utilisées dans [146, Chap. 5 et 6]. D'abord, il s'avère que ces deux opérateurs ne sont pas les restrictions des opérateurs pseudo-différentiels sur les formes antibasiques mais plutôt une translation des opérateurs de de Rham (respectivement du laplacien) par des termes bornés. Donc, en utilisant la théorie de Sobolev standard sur ces opérateurs et plusieurs lemmes d'estimation et de régularité, nous montrons qu'ils ont des propriétés similaires à celles des opérateurs de de Rham et du laplacien ordinaires. Ainsi, nous montrons

Théorème 1.6.2 (G. Habib et K. Richardson, [80]) *Le spectre du laplacien et de Rham antibasique consiste des valeurs propres réelles de multiplicité finie avec des points d'accumulation à l'infini. Les formes propres de D_a sont celles de Δ_a et peuvent être choisies de façon à former une base orthonormée complète de $L^2(\Omega_a(M, \mathcal{F}))$.*

Comme une conséquence, nous établissons la décomposition de Hodge antibasique de l'espace des formes différentielles antibasiques. Pour cela, notons par $d_a^{k-1}, \delta_a^{k+1}$ et Δ_a^k les restrictions respectives de d_a, δ_a et Δ_a aux k-formes antibasiques. Nous avons

Théorème 1.6.3 (G. Habib et K. Richardson, [80]) *Soit $(M^n, g, \mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte munie d'un feuilletage de codimension q et d'une métrique quasi-fibrée g. On a, pour tout $0 \leq k \leq n$, la décomposition orthogonale*

$$\Omega_a^k(M, \mathcal{F}) = \mathrm{Image}(d_a^{k-1}) \oplus \mathrm{Image}(\delta_a^{k+1}) \oplus \mathrm{Ker}(\Delta_a^k),$$

où $\mathrm{Ker}(\Delta_a^k) \simeq H_a^k(M, \mathcal{F})$ *est de dimension finie.*

Par le théorème 1.6.3, nous pouvons ainsi déduire, comme dans le cas ordinaire, que

$$H_a^k(M, \mathcal{F}) \simeq \frac{\mathrm{Ker}(d_a : \Omega_a^k(M, \mathcal{F}) \to \Omega_a^{k+1}(M, \mathcal{F}))}{\mathrm{Image}(d_a : \Omega_a^{k-1}(M, \mathcal{F}) \to \Omega_a^k(M, \mathcal{F}))}.$$

Cet isomorphisme permet de montrer l'invariance d'homotopie de ces groupes de cohomologie sur un feuilletage riemannien. Nous avons

Théorème 1.6.4 (G. Habib et K. Richardson, [80]) *Soit $f : M \to M'$ une équivalence d'homotopie feuilletée entre deux variétés M et M' munies de feuilletages riemanniens $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ respectivement, alors leur groupes de cohomologie antibasique sont isomorphes.*

La preuve suit les mêmes étapes que dans le cas ordinaire en considérant l'application $P_a f^* P'_a$ comme l'isomorphisme entre les cohomologies.

Dans la suite, nous allons établir quelques propriétés des cohomologies de de Rham antibasiques sur des feuilletages particuliers qui peuvent servir à calculer les nombres de Betti antibasiques. D'abord nous remarquons que, sur les fonctions basiques, le laplacien Δ de la variété M se restreint au laplacien basique. Aussi, il est facile de vérifier que le laplacien antibasique est lui-même la restriction du laplacien sur les fonctions antibasiques. D'où Δ est la somme directe orthogonale de ses restrictions aux fonctions basiques et antibasiques. Ainsi, nous en déduisons que $H^0(M) = H_d^0(M, \mathcal{F}) \oplus H_a^0(M, \mathcal{F})$ et, pour une variété connexe, $H_a^0(M, \mathcal{F}) = \{0\}$. Cette technique se généralise de la même manière aux formes différentielles de tous degrés au cas où le fibré normal est intégrable. Dans ce cas, nous obtenons $H^k(M) = H_d^k(M, \mathcal{F}) \oplus H_a^k(M, \mathcal{F})$. Cependant cette dernière relation n'est pas vraie, en général, comme nous allons voir plus tard. Aussi, il n'est pas difficile de voir que toute forme différentielle de degré strictement supérieur à q est automatiquement antibasique. D'où les cohomologies $H_a^k(M,\mathcal{F})$ se réduisent à $H^k(M)$ pour $k>q$ et $H_a^q(M,\mathcal{F})$ s'identifie à un sous-espace de $H^q(M)$.

Pour les cohomologies de degré 1, la situation est différente. En effet, étant donnée une 1-forme Δ-harmonique α, il est facile de vérifier que sa projection antibasique $P_a\alpha$ est Δ_a-harmonique. Ainsi, l'application $\alpha\mapsto P_a\alpha$ envoie les 1-formes Δ-harmoniques sur les 1-formes antibasiques Δ_a-harmoniques et le noyau de cette application n'est autre que $H_d^1(M,\mathcal{F})$. Nous déduisons ainsi l'inégalité

$$\mathrm{dim}H^1(M)\leq \mathrm{dim}H_d^1(M,\mathcal{F})+\mathrm{dim}H_a^1(M,\mathcal{F}).$$

En particulier, si $H_a^1(M,\mathcal{F})=\{0\}$, alors par le fait que $H_d^1(M,\mathcal{F})$ s'injecte dans $H^1(M)$ nous en tirons que $H_d^1(M,\mathcal{F})\simeq H^1(M)$. Ceci veut dire que tout 1-forme harmonique est nécessairement basique.

Maintenant, nous allons nous restreindre au cas d'un flot riemannien $(M,g,\mathcal{F})$, défini par un champ de vecteurs unitaire ξ, où plus d'informations peuvent être obtenues sur les cohomologies antibasiques. En effet, la correspondance $H_d^k(M,\mathcal{F})\to H_a^{k+1}(M,\mathcal{F})$, qui, à chaque α associe $\xi^*\wedge\alpha$, définit une application injective, si nous supposons de plus que le flot est minimalisable. Ceci est basé sur un calcul long qui montre que la $(k+1)$-forme $\xi^*\wedge\alpha$ est antibasique Δ_a-harmonique si la k-forme basique α est Δ_b-harmonique. En particulier, nous en tirons que $\mathrm{dim}H_a^{k+1}(M,\mathcal{F})\geq \mathrm{dim}H_d^k(M,\mathcal{F})$ et dans ce cas, pour $k=0$,

$$\mathrm{dim}H_a^1(M,\mathcal{F})\geq 1.$$

Afin de calculer la dimension de $H_a^1(M,\mathcal{F})$ selon que le flot sera minimalisable ou non, nous montrons

Théorème 1.6.5 (G. Habib et K. Richardson, [80]) *Soit $(M^n,g,\mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte munie d'un flot riemannien donné par un champ de vecteurs unitaire ξ. Si $H^1(M)=\{0\}$, alors*

$$\mathrm{dim}H_a^1(M,\mathcal{F})=1.$$

Si la classe d'Álvarez $[\kappa]$ est non nulle dans $H_d^1(M,\mathcal{F})\subset H^1(M)$, alors

$$\mathrm{dim}H_a^1(M,\mathcal{F})=0.$$

Notons ici que, dans le cas où $H^1(M)=0$, nous avons également que $H_d^1(M,\mathcal{F})=0$ par le fait que la cohomologie basique s'injecte dans celle de la variété. Par conséquent, la somme des groupes de cohomologie basiques et antibasiques ne s'identifie pas à la cohomologie de M. La preuve du théorème 1.6.5 est basée sur le calcul, pour toute 1-forme antibasique α, de $\langle\Delta_a\alpha,\alpha\rangle$ en fonction de la courbure moyenne du flot et de $\langle\Delta\alpha_1,\alpha_1\rangle$ pour une certaine 1-forme antibasique α_1. En effet, en écrivant $\alpha = f\xi^* + \beta$ pour une fonction f et une 1-forme antibasique $\beta \in \Gamma(Q)$, nous trouvons

$$\langle\Delta_a\alpha,\alpha\rangle = \langle\Delta\alpha_1,\alpha_1\rangle + \int_M \left(f_b^2|\kappa|^2 + |df_b|^2\right) dv_g,$$

où $\alpha_1 = f_a\xi^* + \beta$ et f_b (resp. f_a) est la partie basique (resp. antibasique) de f. Ainsi le premier cas du théorème, correspondant au flot minimalisable, se déduit de l'égalité ci-dessus en utilisant le fait $\dim H_a^1(M,\mathcal{F}) \geq 1$. La deuxième partie du théorème utilise principalement la suite exacte de Gysin [149] pour montrer que, pour un flot non minimalisable, nous avons $H_d^1(M,\mathcal{F}) \simeq H^1(M)$. Ainsi, également par l'égalité ci-dessus, toute forme antibasique Δ_a-harmonique α induit une forme Δ-harmonique α_1 qui doit être basique par l'isomorphisme. Ceci entraîne l'annulation de la forme α. D'où, $H_a^1(M,\mathcal{F}) = \{0\}$.

1.7 Exemples

Pour finir ce chapitre, nous allons présenter quelques exemples afin d'illustrer le calcul des cohomologies de de Rham, basiques et antibasiques. Pour faciliter cette présentation, nous notons les nombres de Betti comme suit :

$$h^j = \dim H^j(M),\ h_b^j = \dim H_d^j(M,\mathcal{F}),\ h_a^j = \dim H_a^j(M,\mathcal{F}).$$

Exemple 1. La fibration de Hopf $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}P^1$ est définie par $(z_0,z_1) \mapsto [z_0,z_1]$. Les feuilles du feuilletage sont les orbites de l'action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^3$ par $e^{it}\cdot(z_0,z_1) = (e^{it}z_0, e^{it}z_1)$. Le flot ainsi défini est riemannien et minimalisable. Nous avons

$$\begin{aligned}
(h^0,h^1,h^2,h^3) &= (1,0,0,1)\\
(h_b^0,h_b^1,h_b^2) &= (1,0,1)\\
(h_a^0,h_a^1,h_a^2,h_a^3) &= (0,1,0,1).
\end{aligned}$$

Les cohomologies tordues $\widetilde{H}^*(M,\mathcal{F})$ sont les mêmes que celles basiques du fait que le flot est minimalisable.

Exemple 2. Soit le tore euclidien $M = \mathbb{T}^3$ muni du flot linéaire constant $\xi = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z$ avec $a^2+b^2+c^2 = 1$. Le flot ainsi défini est riemannien, intégrable et minimal. Nous avons

$$\begin{array}{rcl}(h^0, h^1, h^2, h^3) & = & (1,3,3,1)\\ (h_b^0, h_b^1, h_b^2) & = & (1,2,1)\\ (h_a^0, h_a^1, h_a^2, h_a^3) & = & (0,1,2,1).\end{array}$$

Afin de vérifier le théorème 1.5.1 de la section 1.5, nous allons procéder un calcul direct du spectre de l'opérateur de Dirac de M et celui de Dirac basique. Il est facile de vérfier que la métrique $g_f = f^2 g_\xi \oplus g_{\xi^\perp}$ est donnée, pour $f(t) = t$, par

$$g_t = dx^2 + dy^2 + (t^2-1)(adx + bdy + cdz)^2.$$

Pour la structure spinorielle triviale, le fibré des spineurs est $\Sigma M = M \times \mathbb{C}^2$ et nous avons la décomposition $L^2(\Sigma M) = \bigoplus_{m,n,k\in\mathbb{Z}} V_{m,n,k}$ où

$$V_{m,n,k} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \exp\left(i\left(mx + ny + kz\right)\right) : r, s \in \mathbb{C} \right\}.$$

L'opérateur de Dirac $D_{M,t}$, associé à g_t, n'est autre que

$$\begin{pmatrix} i\partial_z & -\partial_x + i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & -i\partial_z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{t} - 1\right) \begin{pmatrix} ic & -a+bi \\ a+bi & -ic \end{pmatrix} (a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z).$$

Un calcul direct montre que les valeurs propres de $D_{M,t}$, restreint aux sections de $V_{m,n,k}$, sont données par

$$\pm\sqrt{k^2 + n^2 + m^2 + \frac{(1-t^2)}{t^2}(am + bn + ck)^2}.$$

et celles de $D_b = D_M$ sont $\pm\sqrt{k^2+n^2+m^2}$. Rappelons que les sections basiques sont les éléments de $V_{m,n,k}$ tels que $am + bn + ck = 0$. Ainsi, quand $t \to 0$, nous voyons facilement que les valeurs propres de $D_{M,t}$, correspondant aux spineurs basiques, convergent vers celles de D_b et pour les spineurs non basiques elles convergent vers l'infini.

Exemple 3. (Tore hyperbolique [25]) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Notons respectivement par V_1 et V_2 les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\lambda} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ de A respectivement. Le tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^3$ est défini comme le quotient de $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence qui identifie (m,t) à $(A(m), t+1)$. Le flot généré par le vecteur V_2 est transversalement de Lie du groupe affine. Nous choisissons la métrique quasi-fibrée

((x, s, t) désigne les coordonnées locales dans la V_2-direction, V_1-direction, et $\mathbb{R}$-direction, respectivement) comme

$$g = \lambda^{-2t} dx^2 + \lambda^{2t} ds^2 + dt^2.$$

La courbure moyenne du flot est $\kappa = \kappa_b = \log(\lambda)\, dt$ et le flot est non minimalisable ayant un fibré normal intégrable. Nous avons

$$\begin{aligned} (h^0, h^1, h^2, h^3) &= (1, 1, 1, 1) \\ (h_b^0, h_b^1, h_b^2) &= (1, 1, 0) \\ (h_a^0, h_a^1, h_a^2, h_a^3) &= (0, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Les cohomologies tordues $\widetilde{H}^*(M, \mathcal{F})$ sont toutes nulles.

Chapitre 2

Estimations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac et du laplacien

Ce chapitre regroupe les résultats de l'article [69] qui est réalisé en collaboration avec Nicolas Ginoux de l'Université de Lorraine et Simon Raulot de l'Université de Rouen, de l'article [78] qui est réalisé en collaboration avec Ayman Kachmar de l'Université Libanaise et de l'article [41] réalisé en collaboration avec Fida El Chami de l'Université Libanaise et Nicolas Ginoux de l'Université de Lorraine. Dans ces travaux, nous établissons de nouvelles estimations des valeurs propres du laplacien et de l'opérateur de Dirac dans différents contextes géométriques.

Une des techniques utilisées pour majorer les valeurs propres de l'opérateur de Dirac ou du laplacien (scalaire ou celui de Hodge-de Rham) sur une sous-variété se base sur le principe de min-max. L'idée consiste à calculer le quotient de Rayleigh pour une section-test provenant de la variété ambiante. À titres d'exemples, cette méthode a été utilisée dans [11, 48, 138] pour le laplacien et dans [14, 62] pour l'opérateur de Dirac. Elle fournit des estimations en termes de la géométrie extrinsèque, comme la courbure moyenne de l'immersion, la deuxième forme fondamentale et d'autres quantités. Quant à la minoration des valeurs propres, plusieurs techniques existent. La façon la plus standard se fait à l'aide de la formule de Bochner-Weitzenböck pour le laplacien (ou bien Schrödinger-Lichnerowicz pour Dirac) soit en minorant le terme $\nabla^*\nabla$ par une quantité strictement positive comme dans l'estimation d'Obata-Lichnerowicz [113, 129] soit en minorant l'opérateur de courbure de Bochner comme dans l'estimation de Gallot-Meyer [59] ou comme dans [153] pour les immersions isométriques. Nous nous référons aux articles

[56, 86, 87, 89, 90, 102, 169] pour des minorations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac qui se font dans le même esprit que le laplacien.

Dans ce chapitre, nous présentons de nouvelles estimations des valeurs propres de ces deux opérateurs suivant le contexte géométrique où nous nous plaçons. Dans la section 2.1, nous considérons une hypersurface compacte d'une variété spinorielle portant un spineur twisteur. Nous montrons que la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de l'hypersurface est majorée par la première valeur propre d'un certain opérateur elliptique défini à partir de ce spineur. L'idée est toujours basée sur le principe de min-max comme nous avons mentionné ci-dessus. Cette estimation va permettre de retrouver plusieurs majorations connues des valeurs propres ([14], [64]) ; parmi lesquelles on peut en trouver une sur les hypersurfaces de l'espace hyperbolique (2.1.3) dont nous caractérisons le cas limite. La section 2.2 traite une minoration des valeurs propres d'un opérateur du type laplacien, appelé laplacien magnétique, sur les variétés à bord. Cet opérateur est défini à l'aide d'une modification de la différentielle extérieure dans la direction d'une certaine 1-forme complexe, connue sous le nom de potentiel magnétique. Nous établissons ainsi une inégalité de type Lichnerowicz pour la première valeur propre sous la condition de Robin au bord, qui fait essentiellement appel au champ magnétique et à une borne inférieure du tenseur de Ricci. La section 2.3 est aussi consacrée aux minorations des valeurs propres sur les variétés à bord. Cette fois-ci, la technique diffère de celle utilisée précédemment et se base essentiellement sur le lemme des valeurs moyennes établi par A. Savo dans [152]. Pour une fonction f donnée satisfaisant une certaine inégalité impliquant le laplacien sur une variété M à bord, nous trouvons une relation reliant l'intégrale de f sur M à l'intégrale de f sur le bord ∂M en termes des fonctions de Bessel et de la courbure moyenne du bord. Cette estimation va nous permettre de retrouver les minorations connues du laplacien sous les différentes conditions au bord (Dirichlet, Robin) et d'en produire d'autres pour le Dirac et le laplacien sur les formes différentielles.

2.1 Une nouvelle majoration de l'opérateur de Dirac sur les hypersurfaces

Cette partie résume les résultats de l'article [69]. Étant donnée une immersion isométrique $(M, g) \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} (\widetilde{M}, h)$ d'une variété riemannienne compacte (M^n, g) de dimension n dans une autre variété $\widetilde{M}$ de dimension m qui est conformément isométrique à un ouvert de la sphère ronde, A. El Soufi et

S. Ilias [48, Thm. 2] ont établi une estimation de la première valeur propre $\lambda_1(\Delta)$ du laplacien $\Delta := -\mathrm{trace}_g(\mathrm{Hess}_g)$ sur M. En effet, ils ont montré l'inégalité

$$\lambda_1(\Delta) \leq \frac{n}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M (H^2 + R(\iota)) dv_g, \tag{2.1.1}$$

où H est la courbure moyenne normalisée de l'immersion et $R(\iota)$ est la trace normalisée de la courbure sectionnelle de $\widetilde{M}$ restreinte aux plans tangents de M. Au cas où $\widetilde{M}$ est l'un des espaces formes $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$, l'inégalité (2.1.1) se réduit à celle de Reilly classique [84, 138] suivant que $R(\iota)$ est $0, 1$ ou -1.

Maintenant nous supposons que la variété M est une hypersurface de $\widetilde{M}$, c'est-à-dire $m = n + 1$, et que cette dernière variété est munie d'une structure spinorielle. Alors, la variété M porte également une structure spinorielle induite de celle de $\widetilde{M}$ à laquelle nous associons le fibré des spineurs ΣM et l'opérateur de Dirac D_M. Quand la variété $\widetilde{M}$ est l'un des espaces formes de courbure sectionnelle $k \in \{0, 1, -1\}$, C. Bär a montré dans [14] que

$$\lambda_1(D_M^2) \leq \frac{n^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M (H^2 + k) dv_g, \tag{2.1.2}$$

pour $k = 0, 1$ et N. Ginoux a prouvé dans [64, Thm. 1] que, pour $k = -1$,

$$\lambda_1(D_M^2) \leq \frac{n^2}{4} \sup_M (H^2 - 1). \tag{2.1.3}$$

Ces estimations résultent de la caractérisation du min-max de $\lambda_1(D_M^2)$, comme déjà mentionné dans l'introduction, en considérant comme spineur-test sur la variété ambiante un spineur parallèle, de Killing ou de Killing imaginaire suivant la valeur de k. Notons ici que l'inégalité, correspondante à $k = 0$, reste valable pour les hypersurfaces compactes de variétés de Calabi-Yau, de variétés hyper-Kähler et d'autres variétés spéciales en dimension 7 et 8, du fait que ces variétés portent également des spineurs parallèles [166]. Il n'est pas difficile de vérifier que, dans le cas limite de ces estimations, la courbure moyenne H doit être une constante et que les sphères géodésiques sur chaque espace forme $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$ réalisent le cas d'égalité de ces estimations. Ainsi la question de classifier les variétés spinorielles, dont la première valeur propre de l'opérateur de Dirac satisfait l'égalité, semble être un problème naturel dans ce contexte.

Cependant, il est montré dans [92] que les sphères rondes dans l'espace euclidien sont les seules hypersurfaces qui satisfont le cas d'égalité. La preuve est basée sur un problème variationnel de l'immersion qui prend en considération un changement conforme de la métrique g par la courbure moyenne H. En effet, une hypersurface limite est un *point critique* d'une certaine fonctionnelle définie à partir de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de M. Ceci a permis de déduire que tout spineur propre associé à la valeur propre réalisant le cas limite est la restriction d'un spineur parallèle sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour $k = 1$, la situation est différente. En fait, N. Ginoux a trouvé dans [65, 66] une famille d'hypersurfaces non minimales de la sphère qui satisfont le cas limite. Il se trouve que ce cas est toujours un problème ouvert pour le moment et est considéré comme l'analogue spinoriel de la conjecture de Yau sur la première valeur propre du laplacien pour les hypersurfaces minimales de la sphère ronde.

Dans une première partie de ce travail, nous donnons une nouvelle majoration des valeurs propres de l'opérateur de Dirac de M dans le cas où $\widetilde{M}$ porte un *spineur twisteur*. La borne supérieure de cette estimation coïncide avec la première valeur propre d'un certain opérateur elliptique, auto-adjoint et qui est défini à partir du spineur twisteur. En plus, nous montrons que la majoration obtenue améliore les inégalités établies par C. Bär et N. Ginoux dans le cas où le spineur twisteur est parallèle, de Killing ou de Killing imaginaire. Dans une deuxième partie, nous adaptons l'approche développée par O. Hijazi et S. Montiel dans [92] dans le cadre de l'espace hyperbolique pour montrer que les seules hypersurfaces réalisant le cas limite de l'estimation (2.1.3) sont les sphères rondes.

Pour détailler tous ces résultats, nous commençons par rappeler quelques préliminaires sur la restriction des structures spinorielles aux hypersurfaces. Pour plus de détails, nous nous référons à [14], [68, Chap. 1] ou [109].

Étant donnée une hypersurface (M^n, g) d'une variété riemannienne spinorielle $\widetilde{M}^{n+1}$, nous désignons par ν le vecteur normal unitaire induit par les deux orientations, c'est-à-dire $(e_1, \cdots, e_n, \nu)$ est une base orthonormée directe de $T\widetilde{M}|_M$ si et seulement si $(e_1, \cdots, e_n)$ l'est aussi pour TM. La structure spinorielle sur $\widetilde{M}$ induit une structure spinorielle sur M de façon que le fibré des spineurs ΣM de M s'identifie à $\Sigma\widetilde{M}|_M$ si n est pair et, pour n impair, nous avons $\Sigma M \oplus \Sigma M \simeq \Sigma\widetilde{M}|_M$. À l'aide de cette identification, les produits hermitiens des deux fibrés des spineurs coïncident et les multiplications de Clifford sont reliées par

$$X \cdot \nu \cdot \simeq \begin{cases} X \cdot_M & \text{si } n \text{ est pair} \\ X \cdot_M \oplus - X \cdot_M & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

pour tout $X \in TM$. De plus, les connexions de Levi-Civita spinorielles $\widetilde{\nabla}$ sur $\Sigma\widetilde{M}$ et ∇^M sur ΣM (resp. $\nabla^M \oplus \nabla^M$ sur $\Sigma M \oplus \Sigma M$) sont reliées par la formule de Gauß spinorielle

$$\widetilde{\nabla}_X\varphi = \nabla^M_X\varphi + \frac{1}{2}II(X)\cdot\nu\cdot\varphi, \quad (\text{resp. } \nabla^M \oplus \nabla^M + \frac{1}{2}II(X)\cdot\nu\cdot),$$

pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$ (resp. $\Sigma M \oplus \Sigma M$). Ici $II := -\widetilde{\nabla}\nu$ désigne le tenseur de Weingarten de l'immersion.

En utilisant cette formule, l'opérateur de Dirac D_M (resp. $D_M \oplus -D_M$) de M s'exprime en fonction de celui de *Dirac-Witten* $\hat{D} := \sum_{i=1}^n e_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e_i}$, où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ est un repère orthonormé local de TM, par l'identité suivante

$$D_M = -\nu\cdot\hat{D} + \frac{1}{2}nH, \ (\text{resp. } D_M \oplus -D_M) \tag{2.1.4}$$

où $H := \frac{1}{n}\mathrm{trace}(II)$ est la courbure moyenne de l'immersion. Les carrés de ces deux opérateurs sont aussi liés par la formule

$$D_M^2 = \hat{D}^2 + \frac{1}{4}n^2H^2 + \frac{n}{2}dH\cdot\nu \tag{2.1.5}$$

qui, par la suite, va nous permettre d'évaluer le quotient de Rayleigh.

Pour un spineur donné ψ sur $\widetilde{M}$ qui n'a pas de zéros sur l'hypersurface M, nous définissons l'opérateur différentiel L_ψ agissant sur les fonctions lisses de M par

$$L_\psi(f) := \Delta f - 2g(d\ln|\psi|, df) + \frac{n^2}{4}(H^2 + R(\iota))f,$$

où $f \in C^\infty(M)$ et $R(\iota) := \frac{1}{n(n-1)}(\widetilde{S} - 2\widetilde{\mathrm{ric}}(\nu,\nu))$ défini précédemment. Ici $\widetilde{S}$ et $\widetilde{\mathrm{ric}}$ désignent respectivement la courbure scalaire et le tenseur de Ricci de la variété $\widetilde{M}$. L'opérateur L_ψ dépend évidemment du spineur en question ψ sauf si ce dernier a une norme constante (par exemple, parallèle ou de Killing). Bien que cet opérateur ne soit pas symétrique pour le produit scalaire L^2 sur (M, g), il possède une propriété analytique intéressante :

Proposition 2.1.1 (N. Ginoux, G. Habib et S. Raulot, [69]) *L'opérateur L_ψ est elliptique, et si la variété M est compacte, alors il est auto-adjoint pour le produit scalaire L^2 sur $(M^n, \bar{g})$, où $\bar{g} := |\psi|^{4/n}g$.*

La preuve est directe et s'appuie essentiellement sur une intégration par parties en utilisant la relation $dv_{\bar{g}} = |\psi|^2 dv_g$ entre les formes volumes. En nous basant sur cette proposition, nous pouvons conclure que le spectre de l'opérateur L_ψ est discret et est formé de valeurs propres de multiplicité finie. De plus, la première valeur propre est caractérisée par le quotient de Rayleigh suivant

$$\lambda_1(L_\psi) = \inf_{f \in C^\infty(M)\setminus\{0\}} \left(\frac{\displaystyle\int_M f(L_\psi f)dv_{\bar{g}}}{\displaystyle\int_M f^2 dv_{\bar{g}}} \right).$$

Avant de fournir l'estimation sur la première valeur propre de l'opérateur de Dirac en terme de $\lambda_1(L_\psi)$, nous allons rappeler la définition des spineurs twisteurs qui se trouve dans [17] (voir aussi [68] pour une présentation). Étant donnée une variété spinorielle $(\widetilde{M}^{n+1}, g)$, un spineur twisteur est une section du fibré des spineurs $\psi \in \Gamma(\Sigma\widetilde{M})$ qui satisfait l'équation

$$\widetilde{\nabla}_X \psi = -\frac{1}{n+1} X \cdot D_{\widetilde{M}} \psi,$$

pour tout $X \in T\widetilde{M}$. Ici, $D_{\widetilde{M}}$ désigne l'opérateur de Dirac de $\widetilde{M}$. Il est à noter que les spineurs parallèles, de Killing ou de Killing imaginaires sont des spineurs twisteurs et qui, en même temps, sont des spineurs propres de l'opérateur de Dirac $D_{\widetilde{M}}$ associés respectivement à la valeur propre nulle, réelle ou imaginaire pure.

Maintenant, nous établissons la première partie principale de ce travail.

Théorème 2.1.2 (N. Ginoux, G. Habib et S. Raulot, [69]) *Soit (M^n, g) une hypersurface compacte d'une variété spinorielle $(\widetilde{M}^{n+1}, g)$. Supposons qu'il existe un spineur twisteur ψ sur $\widetilde{M}$ avec $\psi_x \neq 0$ pour tout $x \in M$. Alors, nous avons la majoration*

$$\lambda_1(D_M^2) \leq \lambda_1(L_\psi).$$

La preuve du théorème 2.1.2 utilise essentiellement la relation (2.1.5) que nous appliquons au spineur test $f\psi$ sur $\widetilde{M}$, où f est une fonction propre de L_ψ associée à la valeur propre $\lambda_1(L_\psi)$, pour en déduire l'inégalité avec le principe de min-max. Aussi, plusieurs identités d'intégrabilité sur les spineurs twisteurs sont redonnées dans la preuve (voir [62, Prop. A.2.1]).

En prenant maintenant $f = 1$ dans le quotient de Rayleigh de $\lambda_1(L_\psi)$, il n'est pas difficile de voir que, si $|\psi|$ est constant, alors

$$\lambda_1(L_\psi) \leq \frac{n^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \big(H^2 + R(\iota)\big) dv_g$$

et que sinon,

$$\lambda_1(L_\psi) \leq \frac{n^2}{4} \sup_M \big(H^2 + R(\iota)\big).$$

En combinant ainsi ces inégalités avec le résultat principal du théorème 2.1.2, nous retrouvons les inégalités (2.1.2) et (2.1.3) montrées par C. Bär et N. Ginoux. Aussi, en prenant $f = |\psi|^{-1}$ toujours dans le quotient de Rayleigh, nous retrouvons l'inégalité suivante

$$\lambda_1(D_M^2) \leq \frac{n^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \big(H^2 + R(\iota)\big) dv_g + \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M \big|d \ln |\psi|\big|^2 dv_g,$$

déjà montrée dans [63, Thm. 1]. Donc l'estimation trouvée dans le théorème 2.1.2 contient toutes les majorations *à la Reilly* connues pour $\lambda_1(D_M^2)$.

Il est important de signaler que l'estimation dans le théorème 2.1.2 ne donne malheureusement pas une inégalité intégrale du type (2.1.1) sur l'espace hyperbolique. Pour le moment, ça reste une question ouverte de trouver l'analogue spinorielle de l'estimation (2.1.1) pour l'opérateur de Dirac. Cependant, la condition sur $\widetilde{M}$ d'avoir un spineur twisteur fournit une famille plus large des variétés que celle des espaces formes. Nous nous référons à [105] pour la classification des variétés spinorielles ayant des spineurs twisteurs.

Dans la suite, nous allons regarder de près le cas limite de l'estimation du théorème 2.1.2. Nous commençons par montrer la proposition suivante

Proposition 2.1.3 (N. Ginoux, G. Habib et S. Raulot, [69]) *Sous les mêmes conditions du théorème 2.1.2, supposons de plus que l'égalité est atteinte dans l'estimation. Alors*

1. *Si ψ est un spineur parallèle sur $\widetilde{M}^{n+1}$, nous avons*

$$II(\nabla \ln |f|) = -\frac{n}{2}\nabla H$$

pour toute fonction propre f de L_ψ associée à $\lambda_1(L_\psi)$;

2. *Si ψ est un spineur de Killing réel sur $\widetilde{M} = \mathbb{S}^{n+1}$, la courbure moyenne H est constante et en particulier $\lambda_1(D_M^2) = \frac{n^2}{4}(H^2+1)$.*
3. *Si ψ est un spineur de Killing imaginaire de constante de Killing $i\varepsilon/2$ ($\varepsilon \in \{\pm 1\}$) sur $\widetilde{M}$, nous obtenons la relation*

$$\left(II(\nabla f) + \frac{1}{2} n f \nabla H\right) \cdot \nu \cdot \psi - i\varepsilon \nabla f \cdot \psi + a\psi = 0,$$

où $a := 2g(d\ln|\psi|, df)$ est une fonction réelle sur M.

Les preuves de la première et la troisième partie de la proposition 2.1.3 sont basées sur le fait que si l'égalité est atteinte et ψ est parallèle ou de Killing imaginaire, alors le principe de min-max mène à $D_M^2(f\psi) = \lambda_1(D_M^2)f\psi$. Ainsi un calcul direct permet d'établir les relations respectives. Pour la deuxième partie, et si prenons un spineur de Killing réel ψ de constante de Killing $\frac{\varepsilon}{2}$ pour un certain $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, un calcul similaire au cas précédent donne la relation

$$\left(II(\nabla f) + \frac{1}{2}nf\nabla H\right) \cdot \nu \cdot \psi - \varepsilon \nabla f \cdot \psi = 0.$$

Du fait que l'opérateur L_ψ ne dépend pas de ψ (ψ étant de norme constante), la relation ci-dessus reste vraie pour tout spineur de Killing. Or, sur la sphère ronde $\mathbb{S}^{n+1}$, il y a un nombre maximal (c'est-à-dire $2^{[\frac{n+1}{2}]}$) de spineurs de Killing de constante $\frac{\varepsilon}{2}$ qui sont linéairement indépendants. Ainsi la relation reste valable pour n'importe quel spineur ψ de $\Sigma_x\widetilde{M}$. Maintenant la représentation spinorielle de l'algèbre de Clifford complexe permet de montrer que chaque terme de l'identité ci-dessus doit s'annuler et ainsi f et H doivent être des constantes. Dans ce cas, nous obtenons que $\lambda_1(D_M^2) = \frac{n^2}{4}(H^2+1)$. Ce qui permet d'achever la preuve.

Dans la suite, nous allons caractériser l'estimation (2.1.3) et montrer que les sphères rondes totalement ombiliques dans $\mathbb{H}^{n+1}$ sont les seules hypersurfaces qui réalisent le cas limite. Si l'hypersurface est plongée, alors ce résultat résulte du théorème d'Alexandrov [124]. Cependant, si l'hypersurface est seulement supposée immergée, alors nous allons adopter une méthode variationnelle introduite par O. Hijazi et S. Montiel [92] pour montrer que de telles hypersurfaces sont les points critiques d'une fonctionnelle associée à un opérateur de type Dirac. Nous avons

Théorème 2.1.4 (N. Ginoux, G. Habib et S. Raulot, [69]) *Les seules hypersurfaces M orientées, compactes, immergées dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n+1}$ telles que $\lambda_1(D_M^2) = \frac{n^2}{4}(H^2-1)$ sont les sphères rondes totalement ombiliques.*

La preuve de ce théorème se décompose en plusieurs étapes. La première étape consiste à montrer que toute immersion pour laquelle $\lambda_1(D_M^2) = \frac{n^2}{4}(H^2-1)$ réalise un *maximum* de la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_1^+ : \mathrm{Imm}^+(M, \widetilde{M}) \to \mathbb{R};\ \iota \to \lambda_1(D_+^{H_\iota}).$$

Ici $\mathrm{Imm}^+(M, \widetilde{M})$ désigne l'espace des immersions isométriques de M dans $\widetilde{M}$ à courbure moyenne non nulle et D_+^H est le changement, par la métrique conforme $g_H := H^2 g$, de l'opérateur $D_+ := D_M - \frac{in}{2}\nu\cdot$ provenant de l'équation (2.1.4). Pour montrer cela, il suffit de voir que la restriction sur M d'un $(i/2)$-spineur de Killing imaginaire ψ est propre pour l'opérateur D_+ associé à la valeur propre $\frac{n}{2}H$. Ainsi, par le changement conforme, le spineur $\overline{\psi}_H := H^{-(n-1)/2}\overline{\psi}$ est propre pour D_+^H pour la valeur propre $\frac{n}{2}$ et donc $\lambda_1(D_+^H) \leq \frac{n}{2}$. De plus, dans le cas où la courbure moyenne H est constante, nous avons l'équivalence entre $\lambda_1(D_+^H) = \frac{n}{2}$ et $\lambda_1(D_M^2) = \frac{n^2}{4}(H^2 - 1)$ qui se montre par un calcul direct. Rappelons ici que le symbole "$\bar{\cdot}$" est l'isomorphisme entre les fibrés des spineurs associés aux deux métriques conformes g et g_H.

La deuxième étape consiste à calculer la dérivée de la fonctionnelle $\mathcal{F}_1^+$ dans une direction particulière qui, par la suite, doit s'annuler en vertu de la première étape. Pour cela, nous déformons l'immersion ι le long des géodésiques normales, c'est-à-dire nous considérons la famille d'immersions $F(t,\cdot) : M \to \widetilde{M}$; $x \to \exp_{\iota(x)}(t\nu_x)$ où $|t| < \varepsilon$, pour un certain $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (en particulier $F(0,\cdot) = \iota$). Nous notons par $g_t := F(t,\cdot)^* g$ la métrique induite sur M et, comme avant, nous prenons $\overline{g}_t := H_t^2 g_t$ où H_t est la courbure moyenne de l'immersion $F(t,\cdot)$, qui peut être supposée positive pour tout t. Étant donnée que l'immersion est perturbée analytiquement, les opérateurs $D_+^{H_t}$ sont analytiques, auto-adjoints et non-bornés. Ainsi, le spectre peut être décrit par une suite $(\mu_k^+(t))_{k\in\mathbb{N}}$ qui dépend analytiquement du t et les spineurs propres correspondants dépendent aussi analytiquement du t à leur tour [101]. Donc, si nous considérons une famille analytique $(\overline{\Phi}_t)_t$ de spineurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1^+(t)$, avec la condition $\lambda_1^+(0) = \lambda_1(D_+^H) = \frac{n}{2}$, nous avons

$$\lambda_1^+(t)\int_M |\overline{\Phi}_t|^2 dv_{\overline{g}_t} = \int_M \Re e\langle D_+^{H_t}\overline{\Phi}_t, \overline{\Phi}_t\rangle dv_{\overline{g}_t}.$$

Maintenant, en dérivant cette expression en $t = 0$ et en notant par $\tau_0^t : \overline{\Sigma}_0 M = \overline{\Sigma} M \to \overline{\Sigma}_t M$ le transport parallèle le long de la courbe $s \to (s,x)$ dans le cylindre généralisé $(]-\varepsilon,\varepsilon[\times M, dt^2 \oplus \overline{g}_t)$ comme dans [15], nous obtenons

$$\frac{d\lambda_1^+}{dt}(0)\int_M |\overline{\Phi}_0|^2 dv_{\overline{g}_0} = \int_M \Re e\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\tau_t^0 D_+^{H_t}\tau_0^t\overline{\Phi}_0\right), \overline{\Phi}_0\rangle dv_{\overline{g}_0}.$$

Par la formule de variation de l'opérateur de Dirac établie par J.-P. Bourguignon et P. Gauduchon [22] et la dérivée de la métrique $\overline{g}_t$ [124], nous trouvons après un calcul long et technique et en utilisant la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et la formule de Gauß entre les courbures scalaires de M et $\widetilde{M}$

que

$$\frac{d\lambda_1^+}{dt}(0) = -\int_M \left(|\widehat{\nabla}^+\Psi_0|^2 + \frac{\widetilde{S} + n(n+1)}{4}|\Psi_0|^2 \right) dv_g.$$

Ici $\widehat{\nabla}^+_X := \widetilde{\nabla}_X - (i/2)X\cdot$, pour $X \in \Gamma(TM)$, est une nouvelle connexion sur ΣM, $\widetilde{S}$ est la courbure scalaire sur $\widetilde{M}$ et Ψ_0 est un spineur propre de D_+ associé à la valeur propre $\frac{n}{2}H$. Dans ce calcul, nous avons aussi utilisé l'équivalence entre $D_+\Psi_0 = \frac{n}{2}H\Psi_0$ et $D_+^H\overline{\Phi}_0 = \frac{n}{2}\overline{\Phi}_0$ avec $\overline{\Psi}_0 = H^{\frac{n-1}{2}}\overline{\Phi}_0$ qui se fait par un calcul direct.

La dernière étape consiste à considérer un $-(i/2)$-spineur de Killing imaginaire Φ sur $\widetilde{M} = \mathbb{H}^{n+1}$. En utilisant le fait que H est une constante, un calcul direct montre que le spineur $\widetilde{\Phi} := H\Phi - i\nu\cdot\Phi$ satisfait l'équation $D_+\widetilde{\Phi} = \frac{n}{2}H\widetilde{\Phi}$. Donc, par la deuxième étape, nous obtenons que $\widehat{\nabla}^+\widetilde{\Phi} = 0$, c'est-à-dire $\widetilde{\Phi}$ est la restriction d'un $(i/2)$-spineur de Killing imaginaire. Ainsi, en remplaçant l'expression de $\widetilde{\Phi}$ dans cette dernière équation, nous arrivons à montrer que l'hypersurface M est totalement ombilique. Ceci permet de conclure la preuve.

2.2 Valeurs propres du laplacien de Robin avec un champ magnétique

Cette partie résume les résultats de l'article [78]. Dans tout ce travail, nous considérons une variété riemannienne (M^n, g) de dimension n et notons par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire hermitien associé à la métrique g étendu au fibré tangent $TM \otimes \mathbb{C}$ ou au fibré cotangent $T^*M \otimes \mathbb{C}$. Rappelons l'isomorphisme musical entre $T^*M \otimes \mathbb{C}$ et $TM \otimes \mathbb{C}$ qui est donné par

$$\begin{array}{ccc} T^*M \otimes \mathbb{C} & \longrightarrow & TM \otimes \mathbb{C} \\ w & \longmapsto & w^\sharp \end{array}$$

tel que $w(X) = \langle X, \overline{w^\sharp}\rangle$ pour tout champ de vecteurs $X \in TM \otimes \mathbb{C}$. Étant donnée une 1-forme différentielle réelle α sur M, nous définissons, pour tous champs de vecteurs X, Y sur le fibré tangent complexifié $TM \otimes \mathbb{C}$, la *connexion magnétique* par $\nabla^\alpha_X Y := \nabla^M_X Y + i\alpha(X)Y$ où ∇^M est la connexion de Levi-Civita sur M. Notons ici que ∇^M et α sont étendus par linéarité au fibré complexe $TM \otimes \mathbb{C}$. La *hessienne magnétique* d'une fonction à valeurs complexes $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ est définie par $\mathrm{Hess}^\alpha f(X,Y) := \langle \nabla^\alpha_X (d^\alpha f)^\sharp, Y\rangle$ où $d^\alpha f := d^M f + if\alpha$ est la différentielle associée à la connexion ∇^α. Il n'est pas difficile de vérifier que la connexion ∇^α satisfait des propriétés de Leibniz et de compatibilité avec le produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Aussi, la hessienne magnétique n'est pas un tenseur symétrique, comme dans le cas classique, mais vérifie une certaine formule de commutativité qui s'exprime en termes du *champ magnétique* $d^M\alpha$ (voir par exemple [39, Lem. 3.2 et 3.6]). Pour une fonction donnée $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, le *laplacien magnétique* Δ^α de f est défini comme étant la trace réelle de la hessienne magnétique, c'est-à-dire,

$$\Delta^\alpha f := -\mathrm{trace}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Hess}^\alpha f) = -\mathrm{div}^\alpha (d^\alpha f)^\sharp,$$

où $\mathrm{div}^\alpha X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla^\alpha_{e_i} X, e_i \rangle$, pour tout $X \in TM \otimes \mathbb{C}$. Ici $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ désigne un repère orthonormé local réel de TM.

Dans toute la suite, nous supposons que la variété M est compacte et, pour le moment, sans bord. Notons par $L^2(M, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable, muni du produit scalaire hermitien suivant : Pour tous $f_1, f_2 \in L^2(M, \mathbb{C})$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_M f_1 \overline{f_2}\, dv_g,$$

où dv_g est la forme volume de M. Dans ce contexte, il n'est pas difficile de vérifier, à partir de la formule $\langle d^M f, X \rangle = \langle f, \delta^M X \rangle$ qui est vraie pour toute fonction $f \in L^2(M, \mathbb{C})$ et $X \in TM \otimes \mathbb{C}$, que $-\mathrm{div}^\alpha$ est l'adjoint formel de d^α. D'où, le laplacien magnétique est essentiellement auto-adjoint par rapport à ce produit scalaire et admet un spectre discret formé d'une suite croissante des *valeurs propres réelles* positives $(\lambda_k(\alpha))_k$ de multiplicité finie.

L'étude du spectre du laplacien magnétique a attiré l'attention de plusieurs chercheurs en analyse qui l'ont investi dans différents contextes [49, 157, 85, 133, 158, 159, 161, 12, 108]. Une des propriétés intéressantes du spectre du laplacien magnétique est qu'il coïncide avec celui du laplacien usuel quand α est une 1-forme exacte. Ceci résulte de l'identité $\Delta^\alpha e^{-if} = e^{-if}\Delta^{\alpha + d^M f}$, connue sous le nom de *l'invariance de jauge*, qui est vraie pour toute fonction f de M à valeurs réelles et qui, en particulier, montre que Δ^α et $\Delta^{\alpha + d^M f}$ sont unitairement équivalents. Aussi, I. Shigekawa a montré dans [157] que la première valeur propre $\lambda_1(\alpha)$ s'annule si et seulement si la forme α est fermée et le *flux* de α défini par

$$\Phi^\alpha_c := \oint_c \alpha$$

est un entier naturel autour de toute courbe fermée c de M.

Dans [39, Thm. 1.1], les auteurs ont établi une estimation *à la Lichnerowicz* des valeurs propres en supposant que le tenseur de Ricci de M est minoré par un nombre positif K et que le champ magnétique $d^M\alpha$ est majoré par K, à une constante près. En particulier, ils ont fourni une estimation de l'écart entre les deux premières valeurs propres en termes de K et $||d^M\alpha||_\infty$. La preuve est, comme dans le cas ordinaire, basée sur une intégration d'une formule de type Bochner sur la variété M et sur un contrôle de tous les termes faisant intervenir $d^M\alpha$. Cette formule est la suivante :

Théorème 2.2.1 ([39]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension n et α une 1-forme différentielle réelle sur M. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, nous avons*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Delta^M(|d^\alpha f|^2) &= |\mathrm{Hess}^\alpha f|^2 - \Re\langle d^\alpha f, d^\alpha(\Delta^\alpha f)\rangle + \mathrm{Ric}^M(d^\alpha f, d^\alpha f) \\ &+ i(d^M\alpha(d^\alpha f, \overline{d^\alpha f}) - d^M\alpha(\overline{d^\alpha f}, d^\alpha f)) \\ &+ \frac{i}{2}(\langle \bar{f} d^\alpha f, \delta^M d^M\alpha\rangle - \langle f\overline{d^\alpha f}, \delta^M d^M\alpha\rangle), \end{aligned}$$

où δ^M désigne l'adjoint formel de d^M dans (M, g).

Dans ce travail, nous nous intéressons au laplacien magnétique muni des *conditions de Robin* au bord dans le cas où (M, g) est désormais supposée une variété riemannienne compacte à bord ∂M. C'est-à-dire, nous supposons l'existence sur M d'une fonction f à valeurs complexes qui est une solution de l'équation $\Delta^\alpha f = \lambda f$ sur M avec la condition $(d^\alpha f)(\nu) = \tau f$ sur le bord ∂M pour un certain nombre réel positif τ. Ici ν désigne le champ de vecteurs normal unitaire rentrant en tout point du bord. Il est standard de montrer que le spectre d'un tel problème à bord est discret et est formé d'une suite croissante des valeurs propres réelles positives $(\lambda_k(\tau, \alpha))_k$ de multiplicité finie. Aussi, quand $\tau \to 0$, le laplacien magnétique de Robin se réduit au laplacien magnétique de Neumann et quand $\tau \to \infty$, il n'est autre que celui de Dirichlet. Dans la suite, nous allons intégrer la formule de Bochner dans le théorème 2.2.1 sur la variété à bord M afin de donner une estimation de type Lichnerowicz pour la première valeur propre $\lambda_1(\tau, \alpha)$ qui va s'exprimer en termes d'une borne inférieure du tenseur de Ricci et du champ magnétique $d^M\alpha$. L'estimation fournie exige des conditions sur la deuxième forme fondamentale et sur la courbure moyenne du bord. Ce résultat généralise l'estimation de Lichnerowicz pour le laplacien de Robin ordinaire (c'est-à-dire, pour $\alpha = 0$) établie dans [28, 143].

Avant d'établir l'estimation de Lichnerowicz, nous allons présenter une double inégalité des valeurs propres $\lambda_k(\tau, \alpha)$, pour $k \in \mathbb{N}$, en termes de la première valeur propre du laplacien de Robin $\lambda_1(\tau) := \lambda_1(\tau, 0)$ et des valeurs propres du problème de Neumann $\lambda_k^N(\alpha) := \lambda_k(0, \alpha)$. L'avantage de ces estimations est qu'elles mesurent l'écart entre $\lambda_k(\tau, \alpha)$ et $\lambda_1(\tau)$ pour tout k et améliorent l'inégalité diamagnétique [53, Thm. 2.1.1]

$$\lambda_1(\tau, \alpha) \geq \lambda_1(\tau),$$

entre les premières valeurs propres, pour toute forme différentielle α. Pour cela, nous considérons une fonction propre normalisée positive $f_\tau : M \to \mathbb{R}$ associée à la première valeur propre $\lambda_1(\tau) > 0$ du laplacien de Robin. Nous posons ainsi la quantité

$$C(\tau) = \frac{\min\limits_{x \in M} f_\tau^2(x)}{\max\limits_{x \in M} f_\tau^2(x)}.$$

Nous montrons le résultat suivant

Théorème 2.2.2 (G. Habib et A. Kachmar, [78]) *Pour tout $\tau > 0$ et $k \geq 1$, nous avons*

$$\lambda_1(\tau) + C(\tau)\lambda_k^N(\alpha) \leq \lambda_k(\tau, \alpha) \leq \lambda_1(\tau) + \frac{1}{C(\tau)}\lambda_k^N(\alpha).$$

La preuve de ce théorème est basée sur le calcul du quotient de Rayleigh de la caractérisation variationnelle des valeurs propres dans le principe de min-max. En effet, pour toute fonction $f : M \to \mathbb{C}$, nous posons la fonction $u := \frac{f}{f_\tau}$ et nous trouvons après un calcul direct que

$$\frac{\displaystyle\int_M |d^\alpha f|^2 dv_g + \tau \int_N |f|^2 dv_g}{\displaystyle\int_M |f|^2 dv_g} = \lambda_1(\tau) + \frac{\displaystyle\int_M f_\tau^2 |d^\alpha u|^2 dv_g}{\displaystyle\int_M |u|^2 f_\tau^2 dv_g}. \tag{2.2.6}$$

En majorant le dernier terme à droite par $\frac{1}{C(\tau)} \frac{\displaystyle\int_M |d^\alpha u|^2 dv_g}{\displaystyle\int_M |u|^2 dv_g}$ et en le minorant par $C(\tau)\frac{\displaystyle\int_M |d^\alpha u|^2 dv_g}{\displaystyle\int_M |u|^2 dv_g}$, nous en déduisons le résultat en minimisant (2.2.6) sur f et u.

La double inégalité que nous avons établie a une propriété intéressante. En effet, il est facile de voir que $\lambda_1(\tau,\alpha)=\lambda_1(\tau)$ si et seulement si $\lambda_1^N(\alpha)=0$. Ainsi, en combinant ce résultat avec l'analogue du résultat de Shigekawa sur les variétés à bord [85], nous en déduisons que $\lambda_1(\tau,\alpha)=\lambda_1(\tau)$ si et seulement si α est une 1-forme fermée et le flux de α autour de n'importe quelle courbe fermée de M est un entier naturel. D'où, pour une 1-forme α qui n'est pas fermée, nous avons que $\lambda_1(\tau,\alpha)>\lambda_1(\tau)$. Une autre propriété utile de cette double inégalité est qu'elle fournit une estimation des valeurs propres $\lambda_k(\tau,\alpha)$ en utilisant des minorations (ou des majorations) des valeurs propres du problème de Neumann $\lambda_k^N(\alpha)$ (voir par exemple [40, 54, 34, 31, 32, 33]).

Maintenant, nous allons établir le résultat principal de ce travail. Rappelons d'abord que la deuxième forme fondamentale d'une variété à bord (M^n,g) est donnée par $II=-\nabla^M\nu$ et la courbure moyenne comme étant $H:=\frac{1}{n-1}\mathrm{trace}(II)$.

Théorème 2.2.3 (G. Habib et A. Kachmar, [78]) *Soit (M^n,g) une variété riemannienne compacte à bord $\partial M=N$ et soit α une 1-forme différentielle réelle sur M. Supposons que $\mathrm{Ric}^M\geq K$ et $II+2\tau>0$, pour un réel $\tau>0$. Si de plus $(n-1)\tau H_{min}\geq K$ et α satisfait*

$$||d^M\alpha||_\infty\leq\left(1+2\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)^{-1}K,$$

alors toute valeur propre $\lambda(\tau,\alpha)$ du laplacien Δ^α vérifie

$$\lambda(\tau,\alpha)\geq a_+(K,||d^M\alpha||_\infty,n),$$

où

$$a_+(K,||d^M\alpha||_\infty,n)=n\frac{(K-||d^M\alpha||_\infty)+\sqrt{(K-||d^M\alpha||_\infty)^2-4(\frac{n-1}{n})||d^M\alpha||_\infty^2}}{2(n-1)}.$$

La preuve de cette estimation s'appuie sur l'intégration de la formule de Bochner dans le théorème 2.2.1. Ainsi, par un calcul technique et long qui utilise essentiellement la formule de Stokes et une décomposition en des parties tangentielles et normales de la différentielle magnétique, nous arrivons à montrer la formule intégrale

$$\int_M|\mathrm{Hess}^\alpha f+\frac{1}{n}(\Delta^\alpha f)g|^2dv_g=$$

$$\frac{n-1}{n}\int_M |\Delta^\alpha f|^2 dv_g - \int_M \mathrm{Ric}^M(d^\alpha f, d^\alpha f) dv_g + \int_M \Im m\left((d^M\alpha)(d^\alpha f, \overline{d^\alpha f})\right) dv_g$$
$$+\int_M |f|^2 |d^M\alpha|^2 dv_g - (n-1)\int_{\partial M} H|\langle d^\alpha f, \nu\rangle|^2 dv_g - 2\int_{\partial M} \Re(\langle \nu, d^\alpha f\rangle \Delta_N^\alpha f) dv_g$$
$$-\int_{\partial M} \langle II(d_N^\alpha f), d_{\partial M}^\alpha f\rangle dv_g$$

pour toute fonction f sur M à valeurs complexes. Ici $d_{\partial M}^\alpha f := d^{\partial M} f + if\alpha^T$ désigne une différentielle sur les fonctions de ∂M et α^T est la partie tangentielle de α en tout point du bord.

D'où en prenant une fonction f propre du laplacien de Robin magnétique et en contrôlant les termes en $d^M\alpha$ par la norme infinie, nous arrivons à la fin, après avoir utilisé les conditions supposées dans le théorème, à une inégalité du type

$$0 \leq \frac{n-1}{n}\lambda(\tau,\alpha)^2 - (k - ||d^M\alpha||_\infty)\lambda(\tau,\alpha) + ||d^M\alpha||_\infty^2.$$

Ce polynôme du second degré en $\lambda(\tau,\alpha)$ a en effet deux racines distinctes $a_-(K, ||d^M\alpha||_\infty, n)$ et $a_+(K, ||d^M\alpha||_\infty, n)$, vu que son discriminant est positif. Or, en remplaçant α par $\varepsilon\alpha$ pour ε suffisamment petit, il est facile de voir que les conditions du théorème ne changent pas et ainsi nous trouvons

$$\lambda_1(\tau,\varepsilon\alpha) \leq a_-(K, \varepsilon||d^M\alpha||_\infty, n) \quad \text{ou} \quad \lambda_1(\tau,\varepsilon\alpha) \geq a_+(K, \varepsilon||d^M\alpha||_\infty, n).$$

Mais $\lambda_1(\tau,\varepsilon\alpha)$ et $a_-(K, \varepsilon||d^M\alpha||_\infty, n)$ sont des fonctions continues en ε, donc en faisant tendre ε vers 0 et en utilisant le fait que $a_-(K, \varepsilon||d^M\alpha||_\infty, n) \to 0$ et $\lambda_1(\tau, 0) > 0$, nous en déduisons que

$$\lambda_1(\tau,\varepsilon\alpha) \geq a_+(K, \varepsilon||d^M\alpha||_\infty, n)$$

pour tout ε petit. Finalement, en posant

$$\varepsilon^* := \sup\{\varepsilon \in]0,1[\mid \lambda_1(\tau,\varepsilon\alpha) \geq a_+(K, \varepsilon||d^M\alpha||_\infty, n)\},$$

nous utilisons encore une fois un argument de continuité de $\lambda_1(\tau,\varepsilon\alpha)$ par rapport à ε pour montrer que $\varepsilon^* = 1$. Ceci achève la preuve du théorème.

2.3 Estimations des valeurs propres à l'aide des fonctions de Bessel

Cette partie résume les résultats de l'article [41]. Sur une variété riemannienne compacte (M^n, g) à bord lisse, nous rappelons le problème de Dirichlet sur les fonctions : $\Delta f = \lambda f$ sur M et $f = 0$ sur ∂M. Ici $\Delta = -\mathrm{trace}_g(\mathrm{Hess}_g)$ désigne comme avant le laplacien scalaire sur M. La fameuse inégalité de Faber-Krahn [51, 104] minore, pour un domaine borné connexe M de $\mathbb{R}^n$, la première valeur propre $\lambda_1^D(M)$ de ce problème par celle de la boule euclidienne du même volume (voir [26, Thm. 2 p. 87]). Le cas d'égalité de cette estimation caractérise la boule euclidienne.

Cette inégalité a depuis été généralisée à d'autres problèmes à bord, parmi lesquels le *problème de Robin*. En effet, il s'agit de considérer les solutions du problème suivant : $\Delta f = \lambda f$ sur M et $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \tau f$ sur ∂M. Ici ν est le vecteur normal unitaire rentrant au bord et τ est un nombre réel fixé. Quand $\tau > 0$, la première valeur propre $\lambda_1(\tau, M)$ du problème de Robin est minorée par celle de la boule euclidienne du même volume et cette dernière est la seule qui réalise le cas d'égalité (voir Bossel pour les domaines de $\mathbb{R}^2$ [21] et Daners [35] pour tous les domaines de $\mathbb{R}^n$). Pour $\tau < 0$, la situation est différente. En effet, il est montré dans [55] que, pour τ suffisamment grand, les anneaux sphériques ayant le même volume que les boules ont des valeurs propres plus grandes que celles-ci (voir aussi [16] pour la conjecture originelle). Récemment, une version de l'inégalité de Faber-Krahn a été établie pour les variétés riemanniennes ayant une courbure de Ricci minorée par $(n-1)K$ et une courbure moyenne minorée par H_0. Sous l'une des conditions suivantes, $K > 0$ et $H_0 \in \mathbb{R}$, $K = 0$ et $H_0 > 0$, $K < 0$ et $H_0 > |K|$, A. Savo [154] a montré que

$$\lambda_1(\tau, M) \geq \lambda_1(\tau, B_{H_0}),$$

où B_{H_0} est la boule géodésique de courbure moyenne H_0 dans un espace-forme de courbure sectionnelle constante égale à K. Le cas d'égalité est atteint si et seulement si M est isométrique à cette boule.

Ce travail a deux volets : Le premier volet est d'étudier le spectre de quelques opérateurs différentiels sur une variété à bord (M^n, g) et qui sont reliés au laplacien. Le deuxième volet est de généraliser le problème de Robin aux formes différentielles. Dans cet esprit, nous établissons le premier résultat principal qui consiste à estimer le quotient $\dfrac{\displaystyle\int_{\partial M} f dv_g}{\displaystyle\int_M f dv_g}$, pour une fonction positive f satisfaisant l'inégalité $\Delta f \leq \lambda f$ où λ est un certain réel positif, en termes des *fonctions de Bessel* de λ. L'idée de la preuve est basée sur le *lemme des valeurs moyennes* établie par A. Savo dans [152, Thm. 2.5] et sur quelques propriétés des fonctions de Bessel. L'estimation trouvée exige des conditions sur le tenseur de Ricci de M et sur la courbure moyenne du bord et possède plusieurs conséquences intéressantes. En effet, en choisissant une fonction propre f du laplacien, elle permet de retrouver et caractériser des inégalités de type Faber-Krahn des problèmes de Dirichlet et Robin déjà mentionnées ci-dessus. Aussi, de nouvelles estimations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac peuvent être dérivées sous les différentes conditions à bord. Les estimations établies améliorent celles trouvées antérieurement dues à D. Chen [27, Thm. 3.1] pour la condition à bord gAPS (généralisant [88, Thm. 4] pour la condition à bord APS), à O. Hijazi, S. Montiel et X. Zhang pour la condition à bord CHI [91, Thm. 3] et la condition MIT bag [91, Thm. 4] et à D. Chen [27, Thm. 3.3] pour la condition à bord mgAPS (généralisant [91, Thm. 5] pour la condition à bord mAPS). Il est à noter que, même si la courbure scalaire de M s'annule, nous pouvons toujours en tirer des informations sur les valeurs propres, contrairement aux estimations établies par les auteurs ci-dessus.

Pour revenir au problème de Robin, nous montrons qu'il peut être généralisé aux formes différentielles en imposant les conditions à bord suivantes :

$$\iota^*(\nu \lrcorner d\omega) = \tau \iota^* \omega \quad \text{et} \quad \iota^*(\nu \lrcorner \omega) = 0,$$

pour une forme propre ω du laplacien de Hodge-de Rham $\Delta = d\delta_g + \delta_g d$ sur M. Ici $\iota : \partial M \to M$ désigne l'injection canonique. En fixant $\tau > 0$, nous étudions l'ellipticité de ce problème à bord en se basant sur le critère de Lopatinskiĭ-Shapiro [156, Sec. 1.6]. Nous montrons ainsi que le spectre de ce laplacien est formé de valeurs propres strictement positives de multiplicité finie et qui tendent vers l'infini. Aussi, nous donnons une caractérisation variationnelle de la première valeur propre $\lambda_{1,p}(\tau)$ en adaptant les techniques utilisées dans [162, Ch. 5, Sec. 9] et prouvons qu'elle est toujours comprise entre celles correspondantes aux conditions absolues (c'est-à-dire l'analogue de Neumann sur les fonctions) et de Dirichlet. Finalement, à l'aide de la formule de Bochner sur les formes, nous fournissons, d'une part, une estimation de $\lambda_{1,p}(\tau)$ en termes des fonctions de Bessel en se basant sur le résultat principal, et d'autre part, une estimation du type Gallot-Meyer au cas où la courbure de M est supposée positive.

Pour détailler tous ces résultats, nous commençons tout d'abord par introduire les préliminaires nécessaires et rappeler les notations. Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord ∂M. Nous désignons par $\rho : M \to [0, \infty[$ la fonction $\rho(x) = d(x, \partial M)$ et $\mathrm{Cut}(\partial M)$ le *lieu de coupure* de ∂M, c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels plus d'une géodésique minimisante au bord existe. Rappelons quelques propriétés de la fonction ρ que nous trouvons dans [152] (ou bien [73, 137] pour plus de détails). Il n'est pas difficile de montrer, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que la fonction ρ est Lipschitz ayant un gradient de norme 1 presque partout sur M. De plus, elle est lisse sur $\rho^{-1}([0, \mathrm{inj}(\partial M)[)$ où $\mathrm{inj}(\partial M) = d(\partial M, \mathrm{Cut}(\partial M))$ est le rayon d'injectivité du bord. En d'autres termes, la fonction ρ est lisse sur le complément du $\mathrm{Cut}(\partial M)$, souvent appelé ensemble des *points réguliers*, qui est un ensemble fermé de mesure nulle ([152, Thm. D.1]). Le laplacien de ρ n'existe pas en tant que fonction lisse mais il est montré dans [152, Sect. 3.2], qu'au sens des distributions, il se décompose en une somme de deux parties, une régulière et une singulière, qui se calculent explicitement à l'aide des coordonnées normales [152, Eq. 5]. En effet, si (r, x) désigne les coordonnées normales d'un point régulier (r est la distance de ce point à un point $x \in \partial M$), alors nous avons $\Delta_{\mathrm{reg}}\rho(r, x) = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r}(r, x)$, où θ est la densité du tiré en arrière de la forme volume (via la carte exponentielle normale) en coordonnées normales.

Soit maintenant f une fonction lisse sur M. Nous définissons la fonction

$$F(r) := \int_{\{\rho>r\}} f dv_g,$$

pour tout $r > 0$. La fonction F est clairement Lipschitz et est lisse sur $[0, \mathrm{inj}(\partial M)[$. Par la formule de la co-aire, sa dérivée est donnée par $F'(r) = -\displaystyle\int_{\{\rho=r\}} f dv_g$ pour presque tout $r \in [0, +\infty[$ (voir [152, Lem. 2.4]). Le lemme des valeurs moyennes exprime la dérivée seconde $F''(r)$ en termes du laplacien de f à l'aide d'une équation différentielle valable au sens des distributions. Cette relation est la suivante [152, Thm. 2.5]

$$F''(r) = -\left(\int_{\{\rho>r\}} \Delta f dv_g\right) + \rho_*(f\Delta\rho)(r), \tag{2.3.7}$$

où $\rho_*(f\Delta\rho)$ est la distribution poussée en avant de $f\Delta\rho$ par ρ. En d'autres termes, pour toute fonction test ψ sur $[0, +\infty[$, nous avons

$$(\rho_*(f\Delta\rho), \psi) := \int_0^\infty \psi(r)\left(\int_{\{\rho=r\}} \Delta\rho(r, x) f(x) dv_g\right) dr. \tag{2.3.8}$$

Afin d'estimer la distribution $f\Delta\rho$ par des quantités géométriques, nous allons désormais imposer des conditions supplémentaires sur la variété M, à savoir le tenseur de Ricci de M est minoré par $(n-1)K$, pour un réel K, et la courbure moyenne du bord par un nombre H_0. Dans ce cas et par les inégalités de Heintze-Karcher [83], nous avons

$$\Delta\rho \geq -\frac{\Theta'}{\Theta} \circ \rho, \tag{2.3.9}$$

où Θ est la fonction définie par $\Theta(r) = (s'_K(r) - H_0 s_K(r))^{n-1}$ et

$$s_K(r) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(r\sqrt{K}) & \text{si } K > 0, \\ r & \text{si } K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(r\sqrt{|K|}) & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

Donc si f est supposée positive, alors il résulte de (2.3.8) (voir aussi [137, p. 10]) que

$$\rho_*(f\Delta\rho) \geq \frac{\Theta'}{\Theta} F'. \tag{2.3.10}$$

Il est à noter que si M est une boule géodésique dans l'espace forme M_K de courbure constante K, alors l'égalité dans (2.3.10) est atteinte (ainsi que (2.3.9)) pour toute fonction f. De plus, soient $R := \max\{d(x, \partial M) | \ x \in M\}$ le *rayon interne* de M et $\bar{R}$ le *premier zéro strictement positif* de la fonction $r \mapsto s'_K(r) - H_0 s_K(r)$. Alors nous avons l'inégalité $R \leq \bar{R}$ et l'égalité est réalisée si et seulement si M est une boule dans M_K [100, Thm. A]. Ceci permet ainsi de déduire que la fonction Θ définie ci-dessus est strictement positive sur $[0, R[$ et que $\Theta(R) \geq 0$ avec $\Theta(R) = 0$ si et seulement si M est la boule dans M_K.

Si maintenant nous appliquons l'équation (2.3.7) à une fonction f positive qui vérifie l'inégalité $\Delta f \leq \lambda f$ pour un réel $\lambda \geq 0$, alors, à l'aide de l'inégalité (2.3.8), nous déduisons au sens des distributions l'inégalité

$$F''(r) - \frac{\Theta'}{\Theta} F'(r) + \lambda F(r) \geq 0, \tag{2.3.11}$$

avec $F(0) = \int_M f dv_g$ et $F'(0) = -\int_{\partial M} f dv_g$. Il est standard, par la théorie générale des équations différentielles du second ordre, que la solution F de (2.3.11) est toujours supérieure ou égale à celle de l'équation différentielle correspondante, c'est-à-dire quand (2.3.11) est une égalité, avec les mêmes conditions initiales. Cependant, une telle équation différentielle ne se résout pas explicitement, en général, vu que le terme en Θ est difficile à contrôler. Une première méthode pour manipuler ce terme a été développée par P. Guérini et A. Savo qui ont calculé le minimum de la fonction $r \mapsto -\frac{\Theta'}{\Theta}(r)$ où

$r \in [0, R]$. Rappelons ici que F' est négative du fait que la fonction f est choisie positive. Donc, sous des conditions supplémentaires sur K et H_0 [73, Eq. 3.1], ils ont montré que ce minimum vaut $(n-1)H_0$ et par la suite l'inégalité (2.3.11) se réduit à une inégalité différentielle à coefficients constants. Par conséquent, ils ont trouvé une minoration du quotient $\dfrac{\displaystyle\int_{\partial M} f dv_g}{\displaystyle\int_M f dv_g}$ en termes de H_0 et du rayon interne R [73, Thm. 3.1]. Ainsi, ils ont retrouvé des estimations connues [73, Cor. 3.2] sur le laplacien de Dirichlet, comme celles de McKean [119] et Li-Yau [112].

Une deuxième méthode, réalisée par S. Raulot et A. Savo, consiste à considérer des fonctions sous-harmoniques, c'est-à-dire lorsque $\lambda = 0$. Dans ce contexte, l'équation différentielle correspondant à (2.3.11) est de premier ordre en F' et la solution se calcule explicitement en termes de Θ. En effet, ils ont montré que le quotient $\dfrac{\displaystyle\int_{\partial M} f dv_g}{\displaystyle\int_M f dv_g}$ est minoré par $\dfrac{1}{\displaystyle\int_0^R \Theta(r) dr}$ [137, Thm. 10]. Ce résultat a mené à des estimations de la première valeur propre de l'opérateur de Steklov biharmonique [106, 134].

Dans ce travail, nous allons nous restreindre au cas où $K = 0$ et $H_0 > 0$. En effet, le terme $\frac{\Theta'}{\Theta}$ devient $-\frac{(n-1)H_0}{1-rH_0}$. Donc, en faisant un changement de variable approprié, nous montrons que l'équation différentielle correspondante à (2.3.11) devient une équation du type Bowman qui peut être résolue explicitement en termes de fonctions de Bessel. Si nous notons par J_ν (resp. Y_ν) les fonctions de Bessel de premier (resp. deuxième) ordre et par $j_{\nu,k}$ le k-ième zéro strictement positif de J_ν, nous prouvons

Théorème 2.3.1 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord lisse. Supposons que la courbure de Ricci de M est positive ou nulle et la courbure moyenne du bord est minorée par $H_0 > 0$. Supposons aussi qu'il existe une fonction f positive ou nulle satisfaisant $\Delta f \leq \lambda f$ avec $\lambda > 0$. Alors, si $\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0} < j_{\frac{n}{2},1}$, nous avons*

$$\int_{\partial M} f dv_g \geq \sqrt{\lambda} \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0})}{J_{\frac{n}{2}}(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0})} \int_M f dv_g. \tag{2.3.12}$$

Si l'égalité est atteinte dans (2.3.12), alors (M^n, g) est isométrique à la boule géodesique dans $\mathbb{R}^n$ de rayon $R = \frac{1}{H_0}$. Inversement, si M est une boule *géodésique de rayon* $\frac{1}{H_0}$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une fonction lisse sur la boule qui satisfait* $\Delta f = \lambda f$ *avec* $\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0} < j_{\frac{n}{2},1}$*, alors nous avons l'egalité dans* (2.3.12).

Pour montrer le théorème 2.3.1, nous utilisons le fait que le terme $\frac{\Theta'}{\Theta}$ est $-\frac{(n-1)H_0}{1-rH_0}$ et dans ce cas l'équation différentielle correspondante est

$$y''(r) + \frac{(n-1)H_0}{1-rH_0}y'(r) + \lambda y(r) = 0,$$

avec les mêmes conditions initiales que celles de F. En faisant donc le changement $s := 1 - rH_0$, les solutions de cette équation sont données, pour n impair, par

$$y(r) = (1-rH_0)^{\frac{n}{2}}\left(AJ_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}(1-rH_0)\right) + BJ_{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}(1-rH_0)\right)\right),$$

et, pour n pair, par

$$y(r) = (1-rH_0)^{\frac{n}{2}}\left(AJ_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}(1-rH_0)\right) + BY_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}(1-rH_0)\right)\right).$$

Les constantes A et B sont cherchées en termes des conditions initiales $y(0) = \int_M f dv_g$ et $y'(0) = -\int_{\partial M} f dv_g$. Ainsi nous trouvons, pour n impair, que

$$A = \frac{\pi}{2H_0\sin(\frac{\pi n}{2})}\left(J_{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}\right)\int_{\partial M} f d\mu_g + \sqrt{\lambda}J_{-\frac{n}{2}+1}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}\right)\int_M f d\mu_g\right),$$

et,

$$B = \frac{\pi}{2H_0\sin(\frac{\pi n}{2})}\left(-J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}\right)\int_{\partial M} f d\mu_g + \sqrt{\lambda}J_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}\right)\int_M f d\mu_g\right).$$

Dans ce calcul, nous utilisons quelques propriétés connues des fonctions de Bessel et de leurs dérivées. La suite de la preuve se poursuit à partir de l'inégalité $F(r) \geq y(r)$ qui est vraie au sens des distributions et qui, en particulier, mène à $R \geq R_0$ où R_0 est le premier zéro positif de y. Ainsi, nous distinguons les deux cas suivants : $\Theta(R_0) = 0$ et $\Theta(R_0) > 0$. Le premier cas, en raison du résultat de A. Kasue [100, Thm. A] (voir aussi [137, Prop. 14]), force M à être isométrique à la boule géodésique de $\mathbb{R}^n$ de rayon $R = R_0 = \frac{1}{H_0}$. Donc, en faisant tendre r vers R_0 dans $y(r)$, nous arrivons à déduire que

$B = 0$ et nous obtenons l'égalité dans (2.3.12). Quant au deuxième cas, nous utilisons la monotonicité stricte de la fonction $x \mapsto \frac{J_{-\frac{n}{2}}}{J_{\frac{n}{2}}}(x)$, sur l'ensemble $(0,\infty) \setminus \{j_{\frac{n}{2},k} |\ k > 0\}$ afin de majorer l'égalité $-\frac{A}{B} = \frac{J_{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}(1-R_0H_0)\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}(1-R_0H_0)\right)}$, qui se déduit directement du fait que $y(R_0) = 0$, par le quotient $\frac{J_{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}\right)}$. Ceci permet d'achever la preuve du théorème 2.3.1, pour n impair. Il reste à noter que la double inégalité,

$$0 < \frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}\Theta(R_0)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}(1 - R_0H_0) < \frac{\sqrt{\lambda}}{H_0} < j_{\frac{n}{2},1}$$

assure que $J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}(1 - R_0H_0)\right) \neq 0$ et $J_{\frac{n}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0}\right) \neq 0$. Le cas où n est pair est analogue.

Rappelons maintenant quelques propriétés sur les fonctions de Bessel que nous allons utiliser par la suite. Le quotient de deux fonctions de Bessel consécutives J_ν et $J_{\nu+1}$ est donné par la série [167, p. 498]

$$\frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)} = \sum_{k\geq 1} \frac{2x}{j_{\nu,k}^2 - x^2},$$

pour tout $\nu > -1$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{j_{\nu,k} |\ k > 0\}$. Elle est aussi positive sur l'intervalle $]0, j_{\nu,1}[$ et est négative sur $]j_{\nu,1}, j_{\nu+1,1}[$. Rappelons de [1, 167] que les zéros de J_ν et $J_{\nu+1}$ vérifient $j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < \cdots$. Aussi, pour tout $\nu \geq 0$, nous avons $\frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)} \approx \frac{x}{2(\nu+1)}$ pour x petit [107, p. 192].

À l'aide de ces propriétés, nous déduisons que l'inégalité (2.3.12) est triviale si $\frac{\sqrt{\lambda}}{H_0} \in]j_{\frac{n}{2}-1,1}, j_{\frac{n}{2},1}[$. Aussi, si nous appliquons le théorème 2.3.1 à une fonction positive et sous-harmonique f (c'est-à-dire $\Delta f \leq 0$), alors nous trouvons $\frac{\int_{\partial M} f dv_g}{\int_M f dv_g} \geq H_0 x \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(x)}{J_{\frac{n}{2}}(x)}$ qui est vraie pour tout $x := \frac{\sqrt{\lambda}}{H_0} \in]0, j_{\frac{n}{2}-1,1}[$. D'où, en faisant tendre x vers 0, nous déduisons l'inégalité

$$\int_{\partial M} f dv_g \geq nH_0 \int_M f dv_g. \tag{2.3.13}$$

L'égalité est atteinte si et seulement si la variété M est isométrique à la boule géodésique de rayon $\frac{1}{H_0}$. Par conséquent, pour $f = 1$, nous avons

$$\frac{\mathrm{Vol}(\partial M)}{\mathrm{Vol}(M)} \geq nH_0, \tag{2.3.14}$$

et l'égalité est toujours caractérisée par la boule euclidienne. Cependant, les deux inégalités (2.3.13) et (2.3.14) sont plus faibles que celles établies par Raulot-Savo dans [137, Thm. 10] et par Heintze-Karcher-Ros dans [83, 147]. Ceci est dû aux différentes solutions, correspondantes à $\lambda = 0$, de l'équation différentielle (2.3.11) qui ne font pas appel aux fonctions de Bessel.

Le théorème 2.3.1 permet de retrouver d'une manière directe une inégalité de type Faber-Krahn [26] pour le laplacien de Dirichlet scalaire.

Corollaire 2.3.2 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne compacte à bord non vide telle que* $\mathrm{Ric}^M \geq 0$ *et* $H \geq H_0$ *sur* ∂M *avec* $H_0 > 0$. *Soit* B_{H_0} *la boule euclidienne de rayon* $\frac{1}{H_0}$. *Alors la première valeur propre* $\lambda_1^D(M)$ *du laplacien de Dirichlet scalaire de* M *satisfait* $\lambda_1^D(M) \geq \lambda_1^D(B_{H_0}) = H_0^2 j^2_{\frac{n}{2}-1,1}$. *L'égalité a lieu si et seulement si* M *est isométrique à la boule* B_{H_0}.

En effet, nous appliquons le théorème 2.3.1 à une fonction propre positive f associée à la première valeur propre $\lambda_1^D(M)$ du laplacien de Dirichlet. Alors, il est facile de voir que, si $\sqrt{\lambda_1^D(M)} < H_0 j_{\frac{n}{2}-1,1}$, le terme de gauche de l'inégalité (2.3.12) s'annule et le terme de droite est strictement positif. Ceci mène donc à une contradiction. Le cas d'égalité se déduit également du même théorème.

Revenons maintenant au laplacien de Robin scalaire, c'est-à-dire $\Delta f = \lambda f$ sur M et $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \tau f$ sur ∂M pour un réel $\tau > 0$. Ici ν désigne le vecteur normal rentrant au bord. Il est bien connu que le spectre de ce problème est discret et est formé de valeurs propres $(\lambda_k(\tau, M))_k$ de multiplicité finie. Quand τ tend vers 0, le laplacien de Robin se réduit au laplacien de Neumann et quand $\tau \to \infty$, il n'est autre que celui de Dirichlet. À l'aide du théorème 2.3.1, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 2.3.3 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne compacte à bord lisse. Supposons que la courbure de Ricci de* M *est positive ou nulle et la courbure moyenne du bord* ∂M

est minorée par $H_0 > 0$. *Fixons un nombre positif* $\tau_0 < j_{\frac{n}{2}-1,1}$ *et posons* $\alpha = \sum_{k\geq 1} \frac{2\tau_0^2}{j^2_{\frac{n}{2}-1,k} - \tau_0^2}$. *Si* $\tau \geq \alpha H_0$, *alors*

$$\lambda_1(\tau, M) \geq H_0^2 \tau_0^2.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si M *est isométrique à* B_{H_0} *et* $\tau = \alpha H_0$.

Pour montrer ce résultat, nous utilisons le fait que toute fonction propre f du laplacien de Robin, associée à la valeur propre λ, satisfait $\lambda \displaystyle\int_M f dv_g = \tau \int_{\partial M} f dv_g$. Ceci se démontre par une simple intégration par parties du problème de Robin. Ainsi, si nous appliquons le théorème 2.3.1 à une fonction propre f associée à la première valeur propre $\lambda_1(\tau, M)$ en supposant aussi que $\sqrt{\lambda_1(\tau, M)} < H_0\tau_0 < H_0 j_{\frac{n}{2}-1,1}$, nous arrivons, après avoir utilisé la monotonicité stricte de la fonction $x \mapsto x\frac{J_{\frac{n}{2}}(x)}{J_{\frac{n}{2}-1}(x)} = \sum_k \frac{2x^2}{j^2_{\frac{n}{2}-1,k} - x^2}$ sur l'intervalle $]0, j_{\frac{n}{2}-1,1}[$, à l'inégalité $\tau < \alpha H_0$. Ce qui contredit l'hypothèse. Le cas limite est une simple conséquence du même théorème 2.3.1.

Maintenant, en prenant $\tau_0 := \frac{\sqrt{\lambda_1(\tau, B_{H_0})}}{H_0} < j_{\frac{n}{2}-1,1}$ (voir [9, Rem. 2.9], [10, p. 4] pour plus de détails) dans le théorème 2.3.3, nous retrouvons une inégalité de type Faber-Krahn (voir [35, 154]) :

Corollaire 2.3.4 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne compacte à bord lisse. Supposons que la courbure de Ricci de* M *est positive ou nulle et la courbure moyenne de* ∂M *est minorée par* $H_0 > 0$. *Soit* B_{H_0} *la boule euclidienne de courbure moyenne* H_0. *Alors*

$$\lambda_1(\tau, M) \geq \lambda_1(\tau, B_{H_0}).$$

L'égalité est réalisée si et seulement si M *est isométrique à la boule* B_{H_0}.

Dans la suite, nous allons établir de nouvelles estimations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur les variétés compactes à bord. Ces estimations s'expriment en termes des zéros des fonctions de Bessel et de la courbure scalaire de la variété ambiante. Elles améliorent les inégalités de type Friedrich [56] établies sur les variétés à bord, voir [91], [68, Ch. 4] pour les références.

Rappelons quelques préliminaires sur les variétés à bord spinorielles et les conditions à bord. Nous nous référons à [17], [57], [109, Ch. 1&2], [23, Ch. 1], [68, Ch. 1] pour plus de détails. Étant donnée une variété riemannienne spinorielle (M^n, g) à bord, alors il existe un fibré vectoriel complexe ΣM sur M, appelé fibré des spineurs, sur lequel TM agit par multiplication de Clifford notée "$\cdot$". Le fibré ΣM est aussi muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'une dérivée covariante $\nabla^{\Sigma M}$ qui est compatible avec ce produit hermitien. L'opérateur de Dirac est défini comme étant la trace de Clifford de la connexion $\nabla^{\Sigma M}$. Notamment, pour toute section $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$, nous avons $D\psi = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla^{\Sigma M}_{e_i} \psi$ où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ est un repère orthonormé local de (M, g). Rappelons aussi que la structure spinorielle sur M induit une structure spinorielle sur le bord via le champ de vecteurs unitaire normal rentrant ν le long du bord ∂M. Ainsi, le fibré des spineurs $\Sigma M|_{\partial M}$ s'identifie à celui du bord $\Sigma \partial M$ pour n impair et à une double copie de $\Sigma \partial M$ pour n pair. Dans ce cas, à l'aide de la formule de Gauß spinorielle, nous avons la relation

$$D\psi = \nu \cdot \nabla^{\Sigma M}_{\nu} \psi + \nu \cdot \left(D^{\partial M} \psi - \frac{(n-1)H}{2} \psi \right), \tag{2.3.15}$$

où $H := \frac{1}{n-1}\mathrm{trace}(II)$ désigne la courbure moyenne du bord ∂M dans M et $D^{\partial M}$ est l'opérateur de Dirac (resp. son symétrisé) du bord ∂M pour n impair (resp. n est pair). Ici $II := -\nabla^M \nu$ est le tenseur de Weingarten du bord.

Il est connu que, sur une variété à bord (M, g), l'opérateur de Dirac admet quatre conditions à bord elliptiques : CHI, MIT bag, gAPS et mgAPS (voir [91], [68, Sec. 1.5]). Rappelons qu'un problème de Dirac à bord est une solution de l'équation $D\psi = \lambda\psi$ où ψ vit dans le noyau de l'opérateur à bord qui correspond à l'une des conditions citées ci-dessus. Dans [91], il est montré que, sous ces quatres conditions, le spectre de l'opérateur de Dirac consiste en une suite discrète des valeurs propres de multiplicité finie. Cependant, ce spectre est réel pour CHI, gAPS et mgAPS et est contenu dans le demi-plan des nombres complexes à parties imaginaires strictement positives pour la condition MIT bag.

Rappelons maintenant ces conditions à bord. La condition CHI est associée à *l'opérateur de chiralité*, défini par l'endomorphisme $B_{\mathrm{CHI}} := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - \nu \cdot \mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est la restriction au bord de l'endomorphisme $\mathcal{G} : \Sigma M \to \Sigma M$ qui est involutif, unitaire, parallèle et qui anticommute avec la multiplication de Clifford (il correspond à la forme volume complexe pour n pair). La condition MIT bag est définie par l'opérateur $B_{\mathrm{MIT}} := \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - i\nu \cdot)$. Pour gAPS, connue sous le nom *Atiyah-Patodi Singer généralisée*, l'opérateur de bord B_{gAPS} est donné par la projection orthogonale L^2 sur le sous-espace engendré par les vecteurs propres de l'opérateur de Dirac sur ∂M (si n est pair ou de son symétrisé si n est impair) correspondant aux valeurs propres qui sont supérieures ou égales à un certain nombre $\beta \leq 0$. Finalement, l'opérateur de bord B_{mgAPS}, pour la condition connue sous le nom *Atiyah-Patodi-Singer généralisée modifiée*, est défini par $B_{\mathrm{mgAPS}} := B_{\mathrm{gAPS}}(\mathrm{Id} + \nu\cdot)$.

Dans [91], les auteurs ont fourni une minoration du type Friedrich pour la première valeur propre de l'opérateur de Dirac pour chacune des conditions à bord ci-dessus et qui fait intervenir la courbure scalaire (voir aussi [27], [88]) dans la borne inférieure de l'estimation. Ils ont montré, selon la condition à bord imposée, que le cas limite n'est pas toujours atteint et au cas où l'égalité est réalisée, le bord doit être minimal. Notons ici que l'estimation de Friedrich établie exige la positivité de la courbure scalaire de la variété ambiante ainsi que celle de la courbure moyenne du bord. Dans la suite, nous allons établir de nouvelles estimations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sous les conditions à bord ci-dessus (à l'exception de MIT bag) en utilisant le résultat du théorème 2.3.1 pour une fonction f bien appropriée qui dépend du spineur propre. L'importance de notre résultat est que la borne inférieure de l'estimation ne dépend pas seulement de la courbure scalaire mais aussi des zéros des fonctions de Bessel. En particulier, nous pouvons toujours en tirer des informations sur cette estimation même si la courbure scalaire de la variété ambiante s'annule.

Théorème 2.3.5 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit* (M^n, g) *une variété compacte spinorielle à bord lisse* ∂M*. Supposons que* $\mathrm{Ric}^M \geq 0$ *sur* M *et* $H \geq H_0$ *sur* ∂M *pour une certaine constante positive* H_0*. Soit* λ *une valeur propre de l'opérateur de Dirac de* M *associée à l'une des conditions CHI, gAPS or mgAPS. Soit* τ_0 *l'unique zéro de la fonction* $x \mapsto x\frac{J_{\frac{n}{2}}(x)}{J_{\frac{n}{2}-1}(x)} - (n-1)$ *sur* $]0, j_{\frac{n}{2}-1,1}[$*. Alors*

$$\lambda^2 > \frac{n}{4(n-1)} \min_M(S) + \frac{nH_0^2\tau_0^2}{2(n-1)}, \tag{2.3.16}$$

où S *est la courbure scalaire de* (M^n, g)*.*

Pour montrer ce résultat, nous considérons un spineur propre ψ de l'opérateur de Dirac associé à la valeur propre λ et posons $f = \frac{1}{2}|\psi|^2$. À l'aide de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz, nous montrons que la fonction f vérifie l'inégalité $\Delta f \leq \mu f$ où $\mu = \frac{2(n-1)}{n}\left(\lambda^2 - \frac{n}{4(n-1)}\min_M(S)\right)$ est un nombre strictement positif par l'estimation de type Friedrich prouvée dans [91]. Ainsi si nous supposons que $\frac{\sqrt{\mu}}{H_0} < \tau_0$ où τ_0 est le premier zéro positif de la fonction $x \mapsto x\frac{J_{\frac{n}{2}}(x)}{J_{\frac{n}{2}-1}(x)} - (n-1)$, alors nous appliquons le théorème 2.3.1 à la fonction

f pour arriver, après avoir intégré $\Delta f \leq \mu f$, à l'inégalité $\frac{1}{n-1} \geq \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(\frac{\sqrt{\mu}}{H_0})}{\frac{\sqrt{\mu}}{H_0}J_{\frac{n}{2}}(\frac{\sqrt{\mu}}{H_0})}$. Dans ce calcul, nous utilisons la formule de Stokes, la formule de Gauß (2.3.15) et le fait que $\displaystyle\int_{\partial M}\langle D^{\partial M}\psi,\psi\rangle dv_g \leq 0$ pour toutes les conditions à bord considérées (see e.g. [68, Ch. 4]). Finalement, par la monotonie stricte de la fonction $x \mapsto \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(x)}{xJ_{\frac{n}{2}}(x)}$, nous en arrivons à une contradiction. Quant au cas limite de l'estimation, il est clair qu'il ne peut pas être atteint. En effet, supposons que c'est le cas, alors par le théorème 2.3.1, la variété M est isométrique à la boule géodésique et le spineur en question est de Killing de constante de Killing $-\frac{\lambda}{n}$. Mais, il est standard que l'existence d'un tel spineur force la variété M à être Einstein de constante $\frac{4}{n}(n-1)\lambda^2$. Par conséquent, la valeur λ doit être nulle. Ceci contredit la positivité de μ déjà montrée. La preuve du théorème 2.3.5 est ainsi achevée.

Maintenant, nous allons considérer le spectre de Dirac avec la condition à bord MIT bag. Rappelons dans ce cas que les valeurs propres de cet opérateur sont des nombres complexes ayant des parties imaginaires pures strictement positives. Si, comme avant, nous appliquons la formule de Schrödinger-Lichnerowicz à la fonction $f = \frac{1}{2}|\psi|^2$ pour un spineur propre ψ, nous trouvons toujours que $\Delta f \leq \mu f$ mais avec

$$\mu = \frac{2(n-1)}{n}\left(|\lambda|^2 - \frac{n}{4(n-1)}\min_M(S) - \frac{2n}{n-1}\mathrm{Im}(\lambda)^2\right).$$

Cette fois-ci le signe de μ ne peut pas être controlé comme avec les autres conditions de bord pour pouvoir utiliser le théorème 2.3.1. Pour surmonter ce problème, nous allons utiliser une autre méthode qui consiste à regarder un changement conforme de la métrique (voir [23, Sec. 2.3 et 5.4] ou [68, Sec. 3.3] pour une présentation) et utiliser le fait que le spectre de Dirac peut être relié au spectre de l'opérateur de Yamabe à l'aide de *l'inégalité d'Hijazi* [86]. Dans [135], S. Raulot a montré que, sous l'une des conditions CHI ou MIT bag, toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac satisfait

$$|\lambda|^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu_1(Y), \tag{2.3.17}$$

où l'inégalité est stricte pour MIT bag et, pour la condition CHI, le cas d'égalité caractérise l'hémisphère ronde. Ici $\mu_1(Y)$ désigne la première valeur propre de *l'opérateur de Yamabe* défini par Escobar dans [50] :

$$\begin{cases} Y(f) := \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta f + Sf = \mu_1(Y)f & \text{sur } M, \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{n-2}{2}Hf & \text{sur } \partial M. \end{cases} \tag{2.3.18}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que, si la courbure moyenne H est positive, alors $\mu_1(Y) \geq \min\limits_M(S)$ avec égalité si et seulement si $H = 0$ et S est constante. Dans la suite, nous allons utiliser cette inégalité pour établir une estimation de $\mu_1(Y)$ en termes des zéros des fonctions de Bessel à l'aide du théorème 2.3.1 afin de déduire de l'inégalité (2.3.17) une estimation des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sous l'une des conditions CHI ou MIT bag.

Théorème 2.3.6 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ à bord lisse. Supposons que la courbure de Ricci de M est positive ou nulle et la courbure moyenne est minorée par $H_0 > 0$. Soit τ_1 l'unique zéro strictement positif de la fonction $x \mapsto x\frac{J_{\frac{n}{2}}(x)}{J_{\frac{n}{2}-1}(x)} - \frac{n-2}{2}$ sur $]0, j_{\frac{n}{2}-1,1}[$. Alors*

$$\mu_1(Y) \geq \min_M(S) + \frac{4(n-1)}{n-2}\tau_1^2 H_0^2. \tag{2.3.19}$$

L'égalité est atteinte si et seulement si la variété M est isométrique à la boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

La preuve de ce résultat est toujours basée sur le théorème 2.3.1 que nous appliquons à une fonction propre du problème de Yamabe. En effet, pour une telle fonction f supposée positive, nous avons que $\Delta f \leq \mu f$ où $\mu := \frac{n-2}{4(n-1)}(\mu_1(Y) - \min_M(S)) > 0$. Rappelons ici que μ ne peut pas s'annuler du fait que la courbure moyenne H est strictement positive. Donc, si nous supposons par l'absurde que $\frac{\sqrt{\mu}}{H_0} < \tau_1$, alors nous trouvons, après avoir intégré l'inégalité $\Delta f \leq \mu f$, que $\frac{2}{n-2} \geq \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(\frac{\sqrt{\mu}}{H_0})}{\frac{\sqrt{\mu}}{H_0}J_{\frac{n}{2}}(\frac{\sqrt{\mu}}{H_0})}$. Ainsi la monotonicité stricte de la fonction $x \mapsto \frac{J_{\frac{n}{2}-1}(x)}{xJ_{\frac{n}{2}}(x)}$ sur $]0, j_{\frac{n}{2}-1,1}[$ permet de déduire la contradiction. Le cas d'égalité de (2.3.19) se déduit également du théorème 2.3.1 et du fait que, sur la boule euclidienne, le problème de Yamabe se réduit au problème de Robin pour $\tau := \frac{n-2}{2}H_0$. Ceci termine la preuve du théorème 2.3.6.

Maintenant, en combinant l'inégalité (2.3.17) avec (2.3.19), nous déduisons le résultat suivant

Corollaire 2.3.7 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit (M^n, g) une variété spinorielle compacte de dimension $n \geq 3$ à bord lisse. Supposons que la courbure de Ricci de (M^n, g) est positive ou nulle et la courbure moyenne du bord ∂M est minorée par $H_0 > 0$. Soit τ_1 l'unique zéro strictement positif de la fonction $x \mapsto x\frac{J_{\frac{n}{2}}(x)}{J_{\frac{n}{2}-1}(x)} - \frac{n-2}{2}$ sur $]0, j_{\frac{n}{2}-1,1}[$. Alors, sous* *l'une des conditions CHI ou MIT bag, toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac satisfait*

$$|\lambda|^2 > \frac{n}{4(n-1)}\min_M(S) + \frac{n}{n-2}\tau_1^2 H_0^2. \tag{2.3.20}$$

Notons ici que l'égalité ne peut pas être atteinte dans (2.3.20) du fait que, pour la condition MIT bag, l'inégalité (2.3.17) est stricte et, pour la condition CHI, l'égalité dans (2.3.17) implique la minimalité de ∂M dans M.

Maintenant, nous revenons au laplacien de Robin. Nous nous intéressons à généraliser ce problème aux formes différentielles. Pour cela, nous rappelons le critère de Lopatinskiĭ-Shapiro pour étudier l'ellipticité des problèmes à bord (voir [156, Sec. 1.6]). Étant donnés une variété riemanienne (M^n, g) à bord lisse ∂M et un opérateur différentiel P d'ordre k agissant sur les sections d'un fibré vectoriel (riemannien ou hermitien) $E \to M$, une condition à bord est considérée comme une somme directe $\bigoplus_{j=1}^{l} B_j$ d'opérateurs linéaires différentiels $B_j \colon \Gamma(M,E) \to \Gamma(\partial M, E_j)$ d'ordre $k_j < k$ où $E_j \to \partial M$ sont des fibrés vectoriels (riemanniens ou hermitiens) pour $1 \leq j \leq l$. Nous considérons le problème à bord suivant : pour toutes $f \in \Gamma(M,E)$ et $u_j \in \Gamma(\partial M, E_j)$, $1 \leq j \leq l$, trouvons une section $u \in \Gamma(M,E)$ qui résolve le système

$$\begin{cases} Pu &= f \quad \text{on } M \\ B_j u &= u_j \quad \text{on } \partial M,\ \forall\, 1 \leq j \leq l. \end{cases} \tag{2.3.21}$$

Afin de formuler les conditions de Lopatinskiĭ-Shapiro, nous définissons, pour tout $x \in \partial M$ et $v \in T_x\partial M$, l'espace

$$\mathcal{M}_v^+ := \{\text{solutions bornées } y = y(t) \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ de l'EDO }, \sigma_P((-iv, \partial_t))y = 0\}.$$

Ici σ_P est le symbole principal de l'opérateur P et $(-iv, \partial_t)$ est la 1-forme $-iv^\flat + \partial_t \cdot \nu^\flat$ où ν est le vecteur normal rentrant en x et ∂_t est vu comme un coefficient. Nous avons la définition suivante [156, Def. 1.6.1] :

Définition 2.3.8 *Le problème à bord* (2.3.21) *est dit* elliptique *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *L'opérateur P est elliptique, c'est-à-dire, pour tout $x \in M$ et $\xi \in T_x^*M$, l'application $\sigma_P(\xi) \colon E_x \to E_x$ est un isomorphisme.*
2. *Pour tout $x \in \partial M$ et $v \in T_x\partial M$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_v^+ & \longrightarrow & \bigoplus_{j=1}^{l}(E_j)_x \\ y & \longmapsto & (\sigma_{B_1}((-iv,\partial_t))y, \ldots, \sigma_{B_l}((-iv,\partial_t))y)\,(0) \end{array}$$

est un isomorphisme. Ici σ_{B_j} est le symbole principal de l'opérateur B_j pour tout j.

En considérant maintenant $E = \Lambda^p T^*M$, $E_1 = \Lambda^p T^*\partial M$, $E_2 = \Lambda^{p-1}T^*\partial M$, $P = \Delta = d\delta_g + \delta_g d$, $B_1\omega = \iota^*(\nu\lrcorner\, d\omega - \tau\omega)$ et $B_2\omega = \iota^*(\nu\lrcorner\,\omega)$ pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\tau \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega^p(M)$ où $\iota\colon \partial M \to M$ est l'inclusion, nous montrons le résultat suivant

Théorème 2.3.9 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord lisse. Pour un réel τ strictement positif, nous considérons le problème*

$$\begin{cases} \Delta\omega & = \lambda\omega \quad \text{sur } M \\ \iota^*(\nu\lrcorner\, d\omega - \tau\omega) & = 0 \quad \text{sur } \partial M \\ \iota^*(\nu\lrcorner\,\omega) & = 0 \quad \text{sur } \partial M. \end{cases} \tag{2.3.22}$$

Alors, nous avons

1. *Le problème à bord* (2.3.22) *est elliptique au sens de la définition 2.3.8 et auto-adjoint. Par conséquent, il existe une suite croissante non bornée de valeurs propres réelles de multiplicité finie $\lambda_{1,p}(\tau) \leq \lambda_{2,p}(\tau) \leq \cdots$*
2. *De plus, $\lambda_{1,p}(\tau) > 0$, en particulier le noyau de* (2.3.22) *est trivial.*
3. *La première valeur propre est caractérisée par*

$$\lambda_{1,p}(\tau) = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_M \left(|d\omega|^2 + |\delta_g\omega|^2\right) dv_g + \tau \int_{\partial M} |\iota^*\omega|^2 dv_g}{\displaystyle\int_M |\omega|^2 dv_g} \right\},$$

où ω vit sur l'ensemble des p-formes différentielles sur M telles que $\nu\lrcorner\omega = 0$ et $\omega \neq 0$.

La preuve de la première partie du théorème 2.3.9 s'appuie sur le calcul des symboles principaux σ_{B_1} et σ_{B_2} des deux conditions à bord B_1 et B_2 et sur le fait que

$$\mathcal{M}_v^+ = \left\{ e^{-t|v|} \cdot \omega_0,\ \omega_0 \in \Lambda^p T_x^* M \right\}.$$

Ainsi, nous montrons que l'application $\mathcal{M}_v^+ \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^2 (E_j)_x$ de la définition 2.3.8 est injective et, par la suite, elle est bijective par égalité des dimensions. Il est à noter que le paramètre τ n'intervient pas dans le calcul du symbole principal du fait que l'opérateur $\tau\iota^*\omega$ est d'ordre zéro. Pour montrer que le problème (2.3.22) est auto-adjoint et dont le noyau est trivial, nous utilisons une intégration par parties pour établir l'identité

$$\int_M \langle \Delta\omega, \omega' \rangle dv_g = \int_M \langle d\omega, d\omega' \rangle dv_g + \langle \delta_g\omega, \delta_g\omega' \rangle dv_g + \int_{\partial M} \tau \langle \iota^*\omega, \iota^*\omega' \rangle dv_g$$

pour toutes p-formes ω et ω' sur M. Ceci, en particulier, prouve que l'intégrale $\int_M \langle \Delta\omega, \omega' \rangle dv_g$ est symétrique en (ω, ω') et que, pour $\tau > 0$, les valeurs propres de Δ sont positives. Cependant 0 ne peut pas être une valeur propre car si c'est le cas, nous obtenons, pour une forme ω dans le noyau de Δ, que $d\omega = \delta_g\omega = 0$ sur M et $\iota^*\omega = 0$ sur ∂M. Or en utilisant l'identité $|\omega|^2 = |\iota^*\omega|^2 + |\nu \lrcorner \omega|^2$ en tout point du bord, nous déduisons que $\omega = 0$ sur ∂M. Maintenant par [8, p. 445], toute forme harmonique sur M s'annulant le long du bord ∂M doit partout s'annuler. Parsuite, $\omega = 0$ sur M. Quant à la dernière partie du théorème, l'identité ci-dessus montre la caractérisation variationnelle de la première valeur propre $\lambda_{1,p}$

$$\lambda_{1,p}(\tau) = \inf_{\substack{\omega \in \Omega^p(M) \setminus \{0\} \\ \iota^*(\nu \lrcorner d\omega) = \tau \iota^*\omega,\ \iota^*(\nu \lrcorner \omega) = 0}} \left\{ \frac{\int_M (|d\omega|^2 + |\delta_g\omega|^2) dv_g + \tau \int_{\partial M} |\iota^*\omega|^2 dv_g}{\int_M |\omega|^2 dv_g} \right\}.$$

Afin de montrer que la condition $\iota^*(\nu \lrcorner d\omega) = \tau\iota^*\omega$ dans l'infimum peut être éliminée, nous adaptons les techniques de l'analyse fonctionnelle utilisées dans [162, Ch. 5, Sec. 9] au contexte du laplacien de Robin sur les formes. Ce qui permet de terminer la preuve.

Maintenant, nous allons présenter quelques problèmes à bord définis sur les formes que nous comparons au problème de Robin. Étant donnée une variété M à bord lisse ∂M, les *conditions à bord absolues* sont les solutions du problème suivant [73]

$$\begin{cases} \Delta\omega & = \lambda^N \omega \quad \text{sur } M \\ \iota^*(\nu \lrcorner d\omega) & = 0 \quad \text{sur } \partial M \\ \iota^*(\nu \lrcorner \omega) & = 0 \quad \text{sur } \partial M. \end{cases} \tag{2.3.23}$$

Il est facile de voir que ce problème généralise le laplacien de Neumann sur les fonctions. Il admet un spectre discret formé d'une suite croissante de valeurs propres $(\lambda^N_{k,p})_k$ et la première valeur propre satisfait

$$\lambda^N_{1,p} = \inf \left\{ \frac{\int_M (|d\omega|^2 + |\delta_g\omega|^2) dv_g}{\int_M |\omega|^2 dv_g} \right\},$$

où ω vit sur l'ensemble des p-formes telles que $\nu \lrcorner \omega = 0$ et $\omega \neq 0$. Il est aussi à noter que $\lambda^N_{1,p}$ peut être nulle et sa multiplicité est donnée par la dimension de la *cohomologie de de Rham absolue*

$$H^p_A(M) = \{\phi \in \Omega^p(M) |\ d\phi = \delta_g\phi = 0 \text{ sur } M \text{ et } \nu \lrcorner \phi = 0 \text{ sur } \partial M\}.$$

Un autre problème qui nous intéresse aussi est celui de Dirichlet sur les formes. Il est en effet donné par

$$\begin{cases} \Delta\omega & = \lambda^D \omega \quad \text{sur } M \\ \omega & = 0 \quad \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Pour ce problème, la première valeur propre $\lambda^D_{1,p}$, qui est nécessairement positive par [8, Thm. p. 445], est caractérisée par

$$\lambda^D_{1,p} = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_M |d\omega|^2 dv_g + \int_M |\delta_g \omega|^2 dv_g}{\displaystyle\int_M |\omega|^2 dv_g},\ \omega \in \Omega^p(M) \setminus \{0\} \text{ et } \omega_{|\partial M} = 0 \right\}.$$

Quand $\tau \to 0$, le problème de Robin (2.3.22) se réduit aux conditions de bord absolues et quand, $\tau \to \infty$, le problème (2.3.22) se réduit au laplacien de Dirichlet. Maintenant, nous montrons le résultat suivant

Proposition 2.3.10 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord lisse. Alors, pour tout $\tau > 0$ et $p \in \{0, \cdots, n-1\}$, nous avons la double inégalité*

$$\lambda^N_{1,p} \leq \lambda_{1,p}(\tau) \leq \lambda^D_{1,p}.$$

La preuve de ce résultat est directe et s'appuie sur la caractérisation variationnelle des valeurs propres établie ci-dessus. Ainsi, à partir de cette double inégalité, une minoration de $\lambda^N_{1,p}$ ou une majoration de $\lambda^D_{1,p}$ fournit une estimation de $\lambda_{1,p}(\tau)$.

Dans la suite, nous allons donner une estimation de $\lambda_{1,p}(\tau)$ en termes des zéros des fonctions de Bessel, basée sur le théorème 2.3.1. Pour cela, nous notons par $\eta_1(x), \cdots, \eta_{n-1}(x)$ les courbures principales (c'est-à-dire les valeurs propres du tenseur de Weingarten II) en tout point $x \in \partial M$, que nous ordonnons comme suit $\eta_1(x) \leq \cdots \leq \eta_{n-1}(x)$. Pour tout $p \in \{1, \cdots, n-1\}$, nous définissons les *p-courbures* σ_p par $\sigma_p(x) := \eta_1(x) + \cdots + \eta_p(x)$. Il n'est pas difficile de vérifier que pour tous entiers naturels p, q tels que $p \leq q$, nous avons $\frac{\sigma_p(x)}{p} \leq \frac{\sigma_q(x)}{q}$ avec égalité si et seulement si $\eta_1(x) = \eta_2(x) = \cdots = \eta_q(x)$. Par conséquent, nous en déduisons que la courbure moyenne H du bord satisfait $H \geq \frac{\sigma_p(x)}{p}$ pour tout p. Le tenseur de Weingarten admet une extension canonique $II^{[p]}$ sur $\Lambda^p T^* \partial M$ par la formule

$$(II^{[p]}\varphi)(X_1, \cdots, X_p) = \sum_{i=1}^{p} \varphi(X_1, \cdots, II(X_i), \cdots, X_p), \tag{2.3.24}$$

où φ est une p-forme sur ∂M et X_i sont des champs de vecteurs sur ∂M pour $i = 1, \cdots, p$. Ainsi, par un calcul direct, l'inégalité

$$\langle II^{[p]}\varphi, \varphi\rangle_x \geq \sigma_p(x)|\varphi|_x^2,$$

est satisfaite ponctuellement. Dans ce qui suit, nous désignons par σ_p l'infimum de $\sigma_p(x)$ sur tous $x \in \partial M$. Nous montrons

Théorème 2.3.11 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne compacte à bord lisse, d'opérateur de courbure positif (ou nul) et telle que la p-courbure de* ∂M *soit minorée par* $\sigma_p > 0$ *pour un* $p \in \{1, \cdots, n-1\}$. *Soient* $0 < \tau_0 < j_{\frac{n}{2}-1,1}$ *et* $\alpha := \tau_0 \frac{J_{\frac{n}{2}}(\tau_0)}{J_{\frac{n}{2}-1}(\tau_0)} = \sum_{k\geq 1} \frac{2\tau_0^2}{j^2_{\frac{n}{2}-1,k} - \tau_0^2}$. *Alors il existe un* $\varepsilon > 0$ *tel que, si* $\tau > \sigma_p(\frac{\alpha}{2p} - 1) - \varepsilon$, *nous avons*

$$\lambda_{1,p}(\tau) > \frac{\sigma_p^2}{2p^2}\tau_0^2.$$

La preuve de ce théorème repose toujours sur le théorème 2.3.1. En effet, nous montrons, à l'aide de la formule de Bochner, l'inégalité $\Delta(|\omega|^2) \leq 2\lambda_{1,p}(\tau)|\omega|^2$ pour toute p-forme propre ω du laplacien de Robin associée à la valeur propre $\lambda_{1,p}(\tau)$ en tenant compte de la condition supposée sur le tenseur de courbure. La suite de la preuve suit les mêmes étapes que celles des théorèmes 2.3.5 et 2.3.6.

Dans ce qui suit, nous allons estimer l'écart entre les premières valeurs propres du laplacien de Robin pour des degrés successifs quand, en particulier, la variété est immergée isométriquement dans l'espace euclidien (voir [73, Thm. 2.3] pour des résultats similaires sur les conditions à bord absolues et [136, Thm. 4], [120] pour l'opérateur de Steklov sur les formes). Pour une variété M immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^{n+m}$, nous notons par $II_\nu : TM \to TM$ l'endomorphisme de Weingarten associé à un champ normal unitaire ν par

$$\langle II_\nu(X), Y\rangle = \langle \nu, II(X,Y)\rangle$$

pour tous $X, Y \in TM$. Comme dans la définition (2.3.24), nous étendons II_ν aux p-formes différentielles et définissons, pour tout repère orthonormé local $\{\nu_1, \cdots, \nu_m\}$ de $T^\perp M$, l'endomorphisme $T^{[p]}$ de $\Lambda^p T^* M$ par

$$T^{[p]} := \sum_{k=1}^{m} \left(II_{\nu_k}^{[p]}\right)^2.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $T^{[p]}$ est indépendant du choix du repère et est auto-adjoint et positif. Nous avons

Théorème 2.3.12 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit $M^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ une immersion isométrique où (M^n, g) est une variété riemannienne compacte à bord p-convexe, c'est-à-dire $\sigma_p \geq 0$ pour un $p \in \{1, \cdots, n-1\}$. Alors, pour tout $\tau > 0$, nous avons*

$$\lambda_{1,p}(\tau) - \lambda_{1,p-1}(\tau) \geq \frac{1}{p} \inf_M (W_M^{[p]} - T^{[p]}),$$

où $W_M^{[p]}$ est l'opérateur de Bochner. En particulier, pour un domaine p-convexe euclidien $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$, nous avons

$$\lambda_{1,p}(\tau) \geq \lambda_{1,p-1}(\tau).$$

La preuve de ce résultat est technique et s'appuie sur la caractérisation variationnelle dans le théorème 2.3.9 que nous appliquons à la $(p-1)$-forme $(\partial_{x_i})^T \lrcorner \omega$. Ici ω est une p-forme propre du laplacien de Robin associée à $\lambda_{1,p}(\tau)$ et $(\partial_{x_i})^T$ est la partie tangentielle sur TM du vecteur parallèle unitaire ∂_{x_i} du $\mathbb{R}^{n+m}$.

Indépendamment des résultats mentionnés, nous terminons cette partie par établir une estimation du type Gallot-Meyer pour la première valeur propre du laplacien de Robin. Pour cela, rappelons l'opérateur de Steklov (ou bien Dirichlet-to-Neumann) sur les p-formes différentielles [136, Sec. 1.1]. Étant donnée une p-forme ω sur ∂M, l'opérateur de Steklov est défini par

$$DN_p \omega := -\nu \lrcorner d\hat{\omega},$$

où $\hat{\omega} \in \Omega^p(M)$ est l'unique p-forme sur M telle que $\Delta \hat{\omega} = 0$ sur M avec les conditions à bord $\iota^* \hat{\omega} = \omega$ et $\nu \lrcorner \hat{\omega} = 0$ sur ∂M. Il est montré dans [136, Thm. 11] que l'opérateur DN_p est elliptique, essentiellement auto-adjoint et, en particulier, son spectre est formé de valeurs propres réelles de multiplicité finie. Nous montrons

Théorème 2.3.13 (F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, [41]) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord non vide d'opérateur de courbure minoré par $\gamma > 0$. Soit $\tau \geq -\frac{c}{c-1} \cdot \sigma_p$ pour un $p \in \{1, \cdots, n-1\}$, où σ_p est la p-courbure de ∂M et $c = \max(p+1, n-p+1)$. Alors*

$$\lambda_{1,p}(\tau) \geq p(n-p)\frac{c}{c-1}\gamma.$$

Si $\tau < -\frac{c}{c-1} \cdot \sigma_p$, alors

$$\lambda_{1,p}(\tau) \geq \frac{p(n-p)(\nu_{1,p} + \tau)}{\frac{c-1}{c}\nu_{1,p} - \sigma_p}\gamma,$$

où $\nu_{1,p}$ est la première valeur propre de l'opérateur de Steklov sur les p-formes.

Chapitre 3

Perspectives

Dans ce chapitre, nous exhibons quelques projets de recherche qui continuent les travaux présentés dans ce mémoire. Les cadres géométriques (feuilletages, immersions isométriques, variétés à bord) dans lesquels nous nous plaçons dans les deux chapitres 1 et 2 ouvrent la voie à différentes questions sur le spectre des opérateurs de type laplacien.

Pour cela, nous détaillons dans la suite les différents axes auxquels nous nous intéressons.

3.1 Nouvelles estimations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac à l'aide des flots riemanniens

Ce projet se situe dans l'intersection entre l'étude spectrale de l'opérateur de Dirac et la géométrie des flots riemanniens. Rappelons qu'un flot riemannien est un feuilletage riemannien d'une variété donnée telle que la dimension des feuilles soit égale à 1. L'idée principale de ce projet est de chercher une nouvelle estimation des valeurs propres de l'opérateur de Dirac par l'intermédiaire de ces flots. Plus précisement, nous supposons qu'une variété (M^n, g) donnée est immergée isométriquement dans une autre variété (N^{n+1}, g) et que cette dernière porte un flot riemannian ayant de plus des spineurs particuliers, appelés *spineurs de Killing transversaux* (voir [67, 2] pour plus de détails). Le but est de restreindre ces spineurs à M en tenant compte de l'immersion et du flot et de les considérer par la suite comme des spineurs-tests dans le quotient de Rayleigh de l'opérateur de Dirac de M. Ceci va permettre de déduire une estimation de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de M qui dépend évidemment de la structure de l'immersion et de celle du flot.

Ce type d'estimations se situe dans la continuité d'une série de travaux réalisés par différents auteurs où à chaque fois la variété N a une certaine particularité. À titres d'exemples, de tels résultats ont été établis dans [14, 64] quand N est isométrique à $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ et dans [36] quand N est isométrique au produit riemannien $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou à une sphère de Berger $\mathbb{S}^3_b$. Dans cette dernière situation, C. Desmont utilise essentiellement la notion de spineur de Killing généralisé définie dans [148] pour établir une estimation en termes de la courbure moyenne H de l'immersion et d'une fonction f qui est le produit scalaire entre le vecteur normal unitaire de l'immersion et le vecteur qui définit le flot. Il fournit ainsi une famille de tores à courbure moyenne constante réalisant le cas d'égalité. Dans ce projet, nous comptons ainsi généraliser les résultats de C. Desmonts en considérant les spineurs de Killing transversaux qui, dans certains cas, se réduisent à des spineurs de Killing généralisés (par exemple lorsque le flot est un produit riemannien ou Sasaki). Nous proposons par la suite de caractériser le cas limite de l'inégalité trouvée.

3.2 Comparaison des valeurs propres du laplacien basique sur les feuilletages riemanniens

Comme pour le laplacien, le spectre du laplacien basique fournit des informations subtiles sur la géométrie transverse du feuilletage. Du fait que cet opérateur n'est pas elliptique sur l'espace de toutes les formes, plusieurs résultats ne suivent pas les mêmes techniques que dans le cas ordinaire. Donc, une approche différente de celle du laplacien usuel doit être considérée pour donner une version feuilletée de quelques résultats en géométrie spectrale. Dans la suite, nous allons décrire l'aspect scientifique de ce projet.

Dans [110], J. Lee et K. Richardson ont établi des résultats de comparaison entre le spectre du laplacien basique d'un feuilletage et celui du laplacien défini sur un espace modèle. L'idée principale est d'obtenir de nouvelles estimations des valeurs propres qui ne dépendent pas de la structure du feuilletage. Pour mieux détailler, ils ont considéré autour de la fermeture d'une feuille, notée par L, d'une variété riemannienne feuilletée $(M, \mathcal{F})$ *le* *tube* défini, pour tout $r > 0$, par

$$\mathrm{Tube}(L, r) = \{x \in M | d(x, L) < r\}.$$

Ils ont ainsi montré que le bord de ce tube est une réunion de la fermeture des feuilles et le feuilletage $\mathcal{F}$ se restreint à un feuilletage riemannien sur le tube. Aussi, toute fonction de r seule est constante sur les feuilles de ce feuilletage. Quand le laplacien basique est restreint au tube et est muni des *conditions à bord de Dirichlet*, sa plus petite valeur propre λ_1 est caractérisée par le quotient

$$\lambda_1 = \inf_{f \in S; f \neq 0} \frac{\displaystyle\int_{\mathrm{Tube}(L,R)} |\nabla f|^2 dv_g}{\displaystyle\int_{\mathrm{Tube}(L,R)} f^2 dv_g},$$

où S est l'espace des fonctions basiques lisses à support compact à l'intérieur du tube $\mathrm{Tube}(L, R)$ et R est un réel positif strictement inférieur à la distance de L à son lieu de coupure.

Si maintenant la courbure sectionnelle de M est supposée minorée par un nombre réel α, J. Lee et K. Richardson ont montré dans [110, Thm. 6.1] que λ_1 est minorée par la première valeur propre du laplacien défini sur un voisinage tubulaire de rayon R autour d'une sous-variété de dimension l (l étant la dimension des feuilles du feuilletage) dans un espace forme de courbure constante égale à α. Dans un même contexte, ils ont affaibli l'hypothèse sur la courbure sectionnelle en prenant un minorant du tenseur de Ricci pour montrer que la première valeur propre est supérieure ou égale à celle du laplacien de Dirichlet défini sur le disque de rayon R d'un espace forme de courbure α [110, Thm. 6.2]. Quand le feuilletage est réduit à un point, ces résultats généralisent les théorèmes standards de Cheng [29].

Le but de ce projet est d'obtenir d'autres résultats de comparaison pour le laplacien basique en utilisant le lemme des valeurs moyennes comme dans la section 2.3 du chapitre 2. En effet, si nous appliquons l'équation (2.3.7) à une fonction propre du laplacien basique restreint au tube, alors cela donne lieu à une inégalité différentielle en $F(r) = \displaystyle\int_{\mathrm{Tube}(L,r)} f$ du second ordre. Nous souhaitons ainsi analyser cette inégalité comme dans [152], [41] afin d'obtenir une comparaison entre les intégrales $\displaystyle\int_{\mathrm{Tube}(L,r)} f$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{Cyl}(L,r)} f$. Ici f désigne une fonction propre du laplacien basique sur le tube. Cette comparaison pourrait faire appel à des termes qui ne dépendent pas du feuilletage (par exemple les fonctions de Bessel) et pourrait avoir plusieurs applications : Quand nous considérons les conditions à bord de Dirichlet pour f sur le tube, nous généralisons le travail de Lee et Richardson pour estimer les valeurs propres du laplacien de Dirichlet. Aussi, si nous prenons le problème à bord de Robin sur le tube nous souhaitons obtenir une estimation de la première valeur propre du laplacien de Robin en termes de celui du laplacien défini sur un espace modèle. Dans le même esprit, la comparaison pourrait envisager de produire de nouvelles estimations sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac basique défini sur le tube.

3.3 Opérateur de Dirac sur les hypersurfaces isoparamétriques de la sphère unité

Ce projet se focalise sur le cas d'égalité de l'estimation de C. Bär (2.1.2) dans la section 2.1 du chapitre 2. Rappelons brièvement le contexte géométrique de ce projet. Nous cherchons à trouver des exemples d'hypersurfaces compactes M^n à courbure moyenne constante H de la sphère ronde $\mathbb{S}^{n+1}$ tel que $\frac{n^2}{4}(H^2+1)$ soit exactement la plus petite valeur propre de l'opérateur de Dirac de M. Dans [65, 66], N. Ginoux a montré, par un calcul technique, que les *tores de Clifford généralisés* dans $\mathbb{S}^{n+1}$ et *l'espace homogène* $\mathbb{S}^3/Q_8$ (où $Q_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ est le groupe fini des quaternions) vu comme une hypersurface minimale de $\mathbb{S}^4$, fournissent de tels exemples de variétés limites.

Dans ce projet, nous nous intéressons aux hypersurfaces isoparamétriques de la sphère ronde $\mathbb{S}^{n+1}$, c'est-à-dire celles dont toutes les courbures principales sont constantes. Dans [126], H. Mutō a montré que si M est minimale dans $\mathbb{S}^{n+1}$, alors la plus petite valeur propre du laplacien scalaire de M coïncide avec la dimension n de l'hypersurface, ce qui est le cas limite dans la majoration de Reilly. Puisque nous nous attendons à ce que la famille où l'estimation des valeurs propres de l'opérateur de Dirac est optimale soit plus large que celle du laplacien, il est naturel de conjecturer que les hypersurfaces isoparamétriques satisfont le cas d'égalité de l'estimation de C. Bär. Ainsi, notre but dans ce projet est de montrer que cette conjecture est vraie.

L'idée est de se placer sur un voisinage tubulaire de cette hypersurface qui peut être vu comme une variété compacte à bord, et de tenter d'estimer de façon optimale les valeurs propres de ce domaine en fonction de celles de l'hypersurface, comme l'a fait H. Mutō pour le laplacien scalaire. La difficulté principale est que l'argument de Mutō ne peut pas être généralisé pour l'opérateur de Dirac, car il n'y a pas de moyen naturel d'étendre un spineur propre de l'opérateur de Dirac sur un voisinage de l'hypersurface, contrairement au cas du laplacien. En particulier, le point délicat de ce travail consiste à choisir des conditions à bord bien appropriées pour l'opérateur de Dirac qui puissent jouer le rôle de conditions de Dirichlet pour le laplacien scalaire.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz et I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series **55**, U.S. Goverment Printing Office, Washington, D.C. 1964.

[2] I. Agricola et Th. Friedrich, *3-Sasakian manifolds in dimension seven, their spinors and G_2 structures*, J. Geom. Phys. **60** (2010), 326–332.

[3] H. Ait-Hatout, *Foliations and Lichnerowicz basic cohomology*, Int. Math. Forum **2** (2007), 2437–2446.

[4] J. A. Álvarez-López, *The basic component of the mean curvature of Riemannian foliations*, Ann. Glob. Anal. Geom. **10** (1992), 179–194.

[5] J. A. Álvarez-López et Y. Kordyukov, *Adiabatic limits and spectral sequences for Riemannian foliations*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), 977–1027.

[6] B. Ammann et C. Bär, *The Dirac operator on nilmanifolds and collapsing circle bundles*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 221–253.

[7] B. Ammann, *The Dirac operator on collapsing $\mathbb{S}^1$-bundles*, Sém. Th. Spec. Géom. Inst. Fourier Grenoble **16** (1998), 33–42.

[8] C. Anné, *Principe de Dirichlet pour les formes différentielles*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), no. 4, 445–450.

[9] P. Antunes, P. Freitas et J. Kennedy, *Asymptotic behaviour and numerical approximation of optimal eigenvalues of the Robin Laplacian*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **19** (2013), no. 2, 438–459.

[10] P. Antunes, P. Freitas et D. Krejčiřík, *Bounds and extremal domains for Robin eigenvalues with negative boundary parameter*, Adv. Calc. Var. **10** (2017), 357–379.

[11] S. Assada, *On the first eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms*, Hokkaido Math. J. **9** (1980), 112–122.

[12] W. Ballmann, J. Brüning et G. Carron, *Eigenvalues and holonomy*, Int. Math. Res. Not. **12** (2003), 657–665.

[13] A. Bangaya, *Some properties of locally conformal symplectic structures*, Comment. Math. Helv. **77** (2002), 383–398.

[14] C. Bär, *Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 573–596.

[15] C. Bär, P. Gauduchon et A. Moroianu, *Generalized cylinder in semi-Riemannian and spin geometry*, Math. Zeit. **249** (2005), 545–580.

[16] M. Bareket, *On an isoperimetric inequality for the first eigenvalue of a boundary value problem*, SIAM J. Math. Anal. **8** (1977), 280–287.

[17] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald et I. Kath, *Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds*, Teubner-Texte zur Mathematik 124, Teubner, Stuttgart, 1991.

[18] V. Belfi, E. Park et K. Richardson, *A Hopf index theorem for foliations*, Diff. Geom. and Appl. **18** (2003), 319–341.

[19] M. Benameur et A. Ray-Alcantara, *La signature est un invariant d'homotopie feuilletée*, C. R. Acad. Sci. Sér. 1 Math. **349** (2011), 787–791.

[20] J. M. Bismut et J. Cheeger, *η-invariants and their adiabatic limits*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 33–70.

[21] M.-H. Bossel, *Membranes élastiquement liées : Extension du théorème de Rayleigh-Faber-Krahn et de l'inégalité de Cheeger*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. **302** (1986), 47–50.

[22] J.-P. Bourguignon et P. Gauduchon, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, Comm. Math. Phys. **144** (1992), 581–599.

[23] J.-P. Bourguignon, O. Hijazi, J.L. Milhorat, A. Moroianu et S. Moroianu, *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry*, EMS Monographs in Mathematics, 2015.

[24] J. Brüning, F. Kamber et K. Richardson, *Index theory for basic Dirac operators on Riemannian foliations*, In : Noncommutative Geometry and Global Analysis. Contemp. Math. **546** (2011), 39–81.

[25] Y. Carrière, *Flots riemanniens*, Astérisque **116** (1984), 31–52.

[26] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic Press, 1984.

[27] D. Chen, *Eigenvalue estimates for the Dirac operator with generalized APS boundary condition*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 379–386.

[28] X. Chen, M. Lai et F. Wang, *The Obata equation with Robin boundary condition*, to appear in Revi. Mat. Ibero.

[29] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Zeit. **143** (1975), 289–297.

[30] B. Colbois et J. Dodziuk, *Riemannian metrics with large* λ_1, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 905–906.

[31] B. Colbois et A. Savo, *Lower bounds for the first eigenvalue of the magnetic Laplacian*, J. Funct. Anal. **274** (2018), 2818–2845.

[32] B. Colbois et A. Savo, *Lower bounds for the first eigenvalue of the Laplacian with zero magnetic field in planar domains*, arxiv :2006.12762.

[33] B. Colbois et A. Savo, *Upper bounds for the ground state energy of the Laplacian with zero magnetic field in planar domains*, arxiv :2007.04661.

[34] B. Colbois, A. El Soufi, S. Ilias et A. Savo, *Eigenvalues upper bounds for the magnetic Schrödinger operator*, to appear in Comm. Anal. Geom.

[35] D. Daners, *A Faber-Krahn inequality for Robin problems in any space dimension*, Math. Ann. **335** (2006), 767–785.

[36] C. Desmonts, *Surfaces à courbure moyenne constante via les champs de spineurs*, Ph.D. thesis, Université de Lorraine, (2015).

[37] D. Domínguez, *A tenseness theorem for Riemannian foliations*, C. R. Acad. Sci. Sér. 1 Math. **320** (1995), 1331–1335.

[38] R. G. Douglas, J. F. Glazebrook, F. Kamber et G. Yu, *Index formulas for geometric Dirac operators in Riemannian foliations*, K-Theory **9** (1995), 407–441.

[39] M. Egidi, S. Liu, F. Münch et N. Peyerimhoff, *Ricci curvature and eigenvalue estimates for the magnetic Laplacian on manifolds*, to appear in Comm. Anal. Geom.

[40] T. Ekholm, H. Kovarik et F. Portmann, *Estimates for the lowest eigenvalue of magnetic Laplacians*, J. Math. Anal. Appl. **439** (2016), 330–346.

[41] F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, *New eigenvalue estimates involving Bessel functions*, à paraître dans Publ. Mat.

[42] A. El Kacimi-Alaoui, *Sur la cohomologie feuilletée*, Compos. Math. **49** (1983), 195–215.

[43] A. El Kacimi-Alaoui, G. Hector et V. Sergiescu, *La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie*, Math. Zeit. **188** (1985), 593–599.

[44] A. El Kacimi-Alaoui et G. Hector, *Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien*, Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 207–227.

[45] A. El Kacimi-Alaoui, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compos. Math. **73** (1990), 57–106.

[46] A. El Kacimi-Alaoui et M. Nicolau, *On the topological invariance of the basic cohomology*, Math. Ann. **295** (1993), 627–634.

[47] A. El Kacimi-Alaoui et B. Gmira, *Stabilité du caractère kählérien transverse*, Israel J. Math. **101** (1997), 323–347.

[48] A. El Soufi et S. Ilias, *Une inégalité du type Rayleigh pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique*, Comment. Math. Helv. **67** (1992), 167–181.

[49] L. Erdös, *Rayleigh-type isoparametric inequality with a homogeneous magnetic field*, Calc. Var. Partial Diff. Equa. **4** (1996), 283–292.

[50] J.F. Escobar, *The Yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 21–84.

[51] G. Faber, *Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Münch. Ber. 1923 (1923), 169–172.

[52] E. Fédida, *Sur les feuilletages de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris **272** (1971), 999–1002.

[53] S. Fournais et B. Helffer, *Spectral methods in surface superconductivity*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **77**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.

[54] S. Fournais et B. Helffer, *Inequalities for the lowest magnetic Neumann eigenvalue*, Lett. Math. Phys. **109** (2019), 1683–1700.

[55] P. Freitas et D. Krejcirik, *The first Robin eigenvalue with negative boundary parameter*, Adv. Math. **280** (2015), 322–339.

[56] Th. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannifaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung*, Math. Nachr. **335** (1980), 117–146.

[57] Th. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geometry*, Graduate Studies in Mathematics **25**, American Mathematical Society, 2000.

[58] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator*, Inven. Math. **87** (1987), 517–547.

[59] S. Gallot et D. Meyer, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemanienne*, J. Math. Pures. Appl. **54** (1975), 259–284.

[60] E. Ghys, *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*, Ann. Inst. Fourier **34** (1984), 203–223.

[61] P. Gilkey, J. V. Leahy et J. H. Park, *Eigenvalues of the form valued Laplacian for Riemannian submersions*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 1845–1850.

[62] N. Ginoux, *Opérateur de Dirac sur les sous-variétés*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, (2002).

[63] N. Ginoux, *Reilly type spinorial inequalities*, Math. Zeit. **241** (2002), 513–525.

[64] N. Ginoux, *Une nouvelle estimation extrinsèque du spectre de l'opérateur de Dirac*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **336** (2003), 829–832.

[65] N. Ginoux, *Remarques sur le spectre de l'opérateur de Dirac*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **337** (2003), 53–56.

[66] N. Ginoux, *The spectrum of the Dirac operator on* SU_2/Q_8, Manus. Math. **125** (2008), 383–409.

[67] N. Ginoux et G. Habib, *Geometric aspects of transversal Killing spinors on Riemannian flows*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **78** (2008), 69–90.

[68] N. Ginoux, *The Dirac spectrum*, Lecture notes in Mathematics **1976**, Springer, Berlin, 2009.

[69] N. Ginoux, G. Habib et S. Raulot, *A new upper bound for the Dirac operators on hypersurfaces*, Pacific J. Math. **278** (2015), 79–101.

[70] J.F. Glazebrook et F. Kamber, *Transversal Dirac families in Riemannian foliations*, Comm. Math. Phys. **140** (1991), 217–240.

[71] A. Gorokhovesky et J. Lott, *The index of a transverse Dirac-type operator : the case of abelian Molino sheaf*, J. Reine Angew. Math. **678** (2013), 125–162.

[72] J.F. Grosjean, *Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on compact submanifolds*, Pacific J. Math. **206** (2002), 93–111.

[73] P. Guérini et A. Savo, *Eigenvalue and gap estimates for the Laplacian acting on p-forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2003), 319–344.

[74] G. Habib, *Energy-momentum tensor on foliation*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 2234–2248.

[75] G. Habib et K. Richardson, *A brief note on the spectrum of the basic Dirac operator*, Bull. London. Math. Soc. **41** (2009), 683–690.

[76] G. Habib et K. Richardson, *Modified differentials and basic cohomology for Riemannian foliations*, J. Geom. Anal. **23** (2013), 1314–1342.

[77] G. Habib et K. Richardson, *Riemannian flows and adiabatic limits*, Inter. J. Math. **29** (2018), 1850011.

[78] G. Habib et A. Kachmar, *Eigenvalue bounds of the Robin Laplacian with magnetic field*, Arch. Math. **110** (2018), 501–513.

[79] G. Habib et K. Richardson, *Homotopy invariance of cohomology and signature of a Riemannian foliation*, Math. Zeit. **293** (2019), 579–595.

[80] G. Habib et K. Richardson, *New cohomological invariants of foliations*, (2019), arxiv.org/abs/1906.03746.

[81] A. Haefliger, *Homotopy, Integrability*, Amsterdam, Springer Lecture notes, 197.

[82] J. Hebda, *Curvature and focal points in Riemannian foliations*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), 321–331.

[83] E. Heintze et H. Karcher, *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **11** (1978), 451–470.

[84] E. Heintze, *Extrinsic upper bounds for λ_1*, Math. Ann. **280** (1988), 389–402.

[85] B. Helffer, M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof et M. P. Owen, *Nodal sets for ground states of Schrödinger operators with zero magnetic field in non-simply connected domains*, Comm. Math. Phys. **202** (1999), 629–649.

[86] O. Hijazi, *Opérateurs de Dirac sur les variétés riemanniennes : Minoration des valeurs propres*, Thèse de 3ème cycle, Ecole Polytechnique (1984).

[87] O. Hijazi, *Lower bounds for the eigenvalues of the Dirac operator*, J. Geom. Phys. **16** (1995), 27–38.

[88] O. Hijazi, S. Montiel et X. Zhang, *Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), 255–265.

[89] O. Hijazi et X. Zhang, *Lower bounds for the eigenvalues of the Dirac operator, part I. The hypersurface Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **19** (2001), 355–376.

[90] O. Hijazi et X. Zhang, *Lower bounds for the eigenvalues of the Dirac operator, part II. The submanifold Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **19** (2001), 163–181.

[91] O. Hijazi, S. Montiel et A. Roldán, *Eigenvalue boundary problems for the Dirac operator*, Comm. Math. Phys. **231** (2002), no. 3, 375–390.

[92] O. Hijazi et S. Montiel, *A spinorial characterization of hyperspheres*, Calc. Var. Part. Diff. Eq. **48** (2013), 527–544.

[93] C. Ida et P. Popescu, *On the stability of transverse locally conformally symplectic structures*, In : BSG Proc. 20, Balkan Soc, Geometers, Bucharest, pp. 1–8 (2013).

[94] P. Jammes, *Effondrement, spectre et propriétés diophantiennes des flots riemanniens*, Ann. Inst. Fourier **60** (2010), 257–290.

[95] S. D. Jung, *The first eigenvalue of the transversal Dirac operator*, J. Geom. Phys. **39** (2001), 253–264.

[96] F. Kamber et Ph. Tondeur, *Foliated Bundles and characteristic classes*, Lecture Notes in Math., vol. 493. Springer, Berlin (1975).

[97] F. Kamber et Ph. Tondeur, *Duality for Riemannian foliations*, Proc. Sympo. Pure Math. **40** (1983), 609–618.

[98] F. Kamber et Ph. Tondeur, *Duality theorems for foliations*, In : Transversal Structure of Foliations, Toulouse, 1982. Astérisque, vol. 116, pp. 108–116 (1984).

[99] F. Kamber et Ph. Tondeur, *De Rham-Hodge theory for Riemannian foliations*, Math. Ann. **277** (1987), 415–431.

[100] A. Kasue, *Ricci curvature, geodesics and some geometric properties of Riemannian manifolds with boundary*, J. Math. Soc. Japan **35** (1983), 117–131.

[101] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Reprint of the 1980 edition, Classics in Mathematics, Springer, 1995.

[102] K. D. Kirchberg, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds with positive scalar curvature*, Ann. Glob. Anal. Geom. **4** (1986), 291–326.

[103] Y. A. Kordyukov et A. A. Yakovlev, *Adiabatic limits and the spectrum of the Laplacian on foliated manifolds*, in C*-Algebras and Elliptic Theory II, Trends in Mathematics (Birkhäuser, Basel, 2008), pp. 123–144.

[104] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. **94** (1925), 97–100.

[105] W. Kühner et H. B. Rademacher, *Asymptotically Euclidean manifolds and twistor spinors*, Comm. Math. Phys. **196** (1998), 67–76.

[106] J.K. Kutler et V.G. Sigillito, *Inequalities for membrane and Steklov eigenvalues*, J. Math. Anal. Appl. **23** (1968), 148–160.

[107] L.J. Landau, *Ratios of Bessel functions and roots of* $\alpha J_\nu(x)+xJ'_\nu(x)=0$, J. Math. Anal. Appl. **240** (1999), 174–204.

[108] C. Lange, S. Liu, O. Post et N. Peyerimhoff, *Frustration index and Cheeger inequalities for discrete and continuous magnetic Laplacians*, Calc. Var. Partial Diff. Equa. **54** (2015), 4165–4196.

[109] H. B. Lawson et M. L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical series **38**, Princeton Univ. Press, 1989.

[110] J. Lee et K. Richardson, *Riemannian foliations and eigenvalues comparison*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 497–525.

[111] J. Lee et K. Richardson, *Lichnerowicz and Obata theorems for foliations*, Pacific J. Math. **206** (2002), 339–357.

[112] P. Li et S-T. Yau, *Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold*, Proc. Symp. Pure Math. **36** (1980), 205–239.

[113] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Travaux et recherches mathématiques, III, Dunod, Paris, 1958.

[114] J. Lott, *Collapsing and Dirac-type operators*, Geom. Dedicata **91** (2002), 175–196.

[115] P. March, M. Min-Oo et E. Ruh, *Mean curvature of Riemannian foliations*, Canad. Math. Bull. **39** (1996), 95–105.

[116] X. Masa, *Duality and minimality in Riemannian foliations*, Comm. Math. Helv. **67** (1992), 17–27.

[117] A. Mason, *An application of stochastic flows to Riemannian foliations*, Houston J. Math. **26** (2000), 481–515.

[118] R. Mazzeo et R. Melrose, *The adiabatic limit, Hodge cohomology, and Lerays spectral sequence for a fibration*, J. Diff. Geom. **31** (1990), 185–213.

[119] H.P. McKean, *An upper bound for the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature*, J. Diff. Geom. **4** (1970), 359–366.

[120] D. Michel, *Eigenvalue and gap estimates of isometric immersions for the Dirichlet-to-Neumann operator acting on p-forms*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **357** (2019), 180–187.

[121] M. Min-Oo, E. Ruh et Ph. Tondeur, *Vanishing theorems for the basic cohomology of Riemannian foliations*, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 167–174.

[122] M. Min-Oo, E. Ruh et Ph. Tondeur, *Transversal curvature and tautness for Riemannian foliations*, Proc. Conf. Global Anal. and Global Diff. Geom. Lecture notes in Math., Springer Verlag, **1481** (1991), 145–146.

[123] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Mathematics, vol. 73. Birkhäuser, Boston (1988).

[124] S. Montiel, *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 711–748.

[125] A. Moroianu, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes*, Comm. Math. Phys. **169** (1995), 373–384.

[126] H. Mutō, *The first eigenvalue of the Laplacian of an isoparametric minimal hypersurface in a unit sphere*, Math. Zeit. **197** (1988), 531–549.

[127] H. Nozawa, *Rigidity of the Álvarez class*, Manuscr. Math. **132** (2010), 257–270.

[128] H. Nozawa, *Continuity of the Álvarez class under deformations*, J. Reine Angew. Math. **673** (2012), 125–159.

[129] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 333–340.

[130] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Mich. Math. J. **12** (1966), 459–469.

[131] L. Ornea et V. Slesar, *Basic Morse Novikov cohomology for foliations*, Math. Zeit. **284** (2016), 469–489.

[132] E. Park et K. Richardson, *The basic Laplacian of a Riemannian foliation*, Amer. J. Math. **118** (1996), 1249–1275.

[133] G. P. Paternain, *Schrödinger operators with magnetic fields and minimal action functionals*, Israel J. Math. **125** (2001), 1–27.

[134] L.E. Payne, *Some isoperimetric inequalities for harmonic functions*, SIAM J. Math. Anal. **1** (1970), 354–359.

[135] S. Raulot, *The Hijazi inequality of manifolds with boundary*, J. Geom. Phys. **56** (2006), 2189–2202.

[136] S. Raulot et A. Savo, *On the first eigenvalue of the Dirichlet-to-Neumann operator on forms*, J. Func. Anal. **262** (2012), 889–914.

[137] S. Raulot et A. Savo, *Sharp bounds for the first eigenvalue of a fourth order Steklov problem*, J. Geom. Anal. **25** (2015), 1602–1619.

[138] R. C. Reilly, *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space*, Comment. Math. Helv. **52** (1977), 525–533.

[139] R. C. Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 459–472.

[140] B. Reinhart, *Harmonic integrals on almost product manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 243–276.

[141] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. Math. **69** (1959), 119–132.

[142] B. Reinhart, *Harmonic integrals on foliated manifolds*, Amer. J. Math. **81** (1959), 529–536.

[143] X. Ren et H. Xu, *A lower bound for the first eigenvalue with mixed boundary condition*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B **19** (2004), 223–228.

[144] K. Richardson, *The asymptotics of heat kernels on Riemannian foliations*, Geom. Func. Anal. **8** (1998), 356–401.

[145] K. Richardson, *Traces of heat operators on Riemannian foliations*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 2301–2337.

[146] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Second edition, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 395, Longman, Harlow, 1998.

[147] A. Ros, *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*, Rev. Mate. Ibero. **3** (1987), 447–453.

[148] J. Roth, *Spinorial characterizations of surfaces into three-dimensional homogeneous manifolds*, J. Geom. Phys. **60** (2010), 1045–1061.

[149] J. I. Royo Prieto, *The Gysin sequence for Riemannian flows*, Global differential geometry : the mathematical legacy of Alfred Gray (Bilbao, 2000), 415–419, Contemp. Math., 288, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[150] J. I. Royo Prieto, M. Saralegi-Aranguren et R. Wolak, *Cohomological tautness for Riemannian foliations*, Russ. J. Math. Phys. **16** (2009), 450–466.

[151] H. Rummler, *Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts*, Comm. Math. Helv. **54** (1979), 224–239.

[152] A. Savo, *A mean value lemma and applications*, Bull. Soc. Math. France **129** (2001), 505–542.

[153] A. Savo, *The Bochner formula for isometric immersions*, Pacific J. Math. **272** (2014), 395–422.

[154] A. Savo, *Optimal eigenvalue estimates for the Robin Laplacian on Riemannian manifolds*, J. Diff. Equa. **268** (2020), 2280–2308.

[155] G. Schwarz, *On the de Rham cohomology of the leaf space of foliation*, Topology **13** (1974), 185–187.

[156] G. Schwarz, *Hodge decomposition – a method for solving boundary value problems*, Lecture Notes in Mathematics **1607**, Springer, 1995.

[157] I. Shigekawa, *Eigenvalue problems for the Schrödinger operator with the magnetic field on a compact Riemannian manifold*, J. Funct. Anal. **75** (1987), 92–127.

[158] M. A. Shubin, *Discrete magnetic Laplacian*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), 259–275.

[159] M. A. Shubin, *Essential self-adjointness for semi-bounded magnetic Schrödinger operator on non-compact manifolds*, J. Funct. Anal. **186** (2001), 92–116.

[160] D. Sullivan, *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces*, Comm. Math. Helv. **54** (1979), 218–223.

[161] T. Sunada, *A discrete analogue of periodic magnetic Schrödinger operators*, Geometry of the spectrum (Seattle, WA, 1993), 283–299, Contemp. Math. **173**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[162] M.E. Taylor, *Partial differential equations I. Basic theory*, second edition, Applied Mathematical Sciences **115**, Springer, New York, 2011.

[163] T. Tanemura et S. Yorozu, *Green's theorem on a foliated Riemannian manifold and its applications*, Acta. Math. Hung. **56** (1990), 239–245.

[164] Ph. Tondeur, *Geometry of foliations*, Monographs in Mathematics, vol. 90. Birkhäuser, Basel (1997).

[165] I. Vaisman, *Remarkable operators and commutation formulas on locally conformal Kähler manifolds*, Compos. Math. **40** (1980), 287–299.

[166] McK. Wang, *Parallel spinors and parallel forms*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 59–68.

[167] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[168] E. Witten, *Global gravitational anomalies*, Comm. Math. Phys. **100** (1985), 197–229.

[169] X. Zhang, *Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators*, Math. Res. Lett. **5** (1998), 199–210.

Articles présentés dans ce mémoire

- F. El Chami, N. Ginoux et G. Habib, *New eigenvalue estimates involving Bessel functions*, à paraître dans Publ. Mat.
- N. Ginoux, G. Habib et S. Raulot, *A new upper bound for the Dirac operators on hypersurfaces*, Pacific J. Math. **278** (2015), 79–101.
- G. Habib et K. Richardson, *A brief note on the spectrum of the basic Dirac operator*, Bull. London. Math. Soc. **41** (2009), 683–690.
- G. Habib et K. Richardson, *Modified differentials and basic cohomology for Riemannian foliations*, J. Geom. Anal. **23** (2013), 1314–1342.
- G. Habib et K. Richardson, *Riemannian flows and adiabatic limits*, Inter. J. Math. **29** (2018), 1850011.
- G. Habib et A. Kachmar, *Eigenvalue bounds of the Robin Laplacian with magnetic field*, Arch. Math. **110** (2018), 501–513.
- G. Habib et K. Richardson, *Homotopy invariance of cohomology and signature of a Riemannian foliation*, Math. Zeit. **293** (2019), 579–595.
- G. Habib et K. Richardson, *New cohomological invariants of foliations*, (2019), arxiv.org/abs/1906.03746.