EXISTENCE ET ASYMPTOTIQUES OPTIMALES DES FONCTIONS DE GREEN DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES D'ORDRE DEUX

NOTES PERSONNELLES

FRÉDÉRIC ROBERT

Résumé. Dans ces notes, nous donnons une construction et des estimées ponctuelles sur le noyau de Green des opérateurs elliptiques d'ordre deux auto-adjoints. On se place dans le cadre général d'une variété riemannienne compacte, avec ou sans bord: ceci inclut les ouverts bornés réguliers de $\mathbb{R}^n$.

Tables des matières

Soit $(\overline{M}, g)$ une variété riemannienne compacte connexe C^∞ de dimension $n \geq 3$, éventuellement à bord ∂M. Si $\partial M \neq \emptyset$, on suppose que $\overline{M}$ et ∂M sont orientées et compatibles: on se donne alors $\vec{\nu}$ le vecteur normal unité extérieur. Si $\partial \overline{M} = \emptyset$, on pose $M = \overline{M}$. Si $\partial \overline{M} \neq \emptyset$, alors $\partial \overline{M}$ est une variété compacte de dimension $n-1$

Date: 18 avril 2010.

et on pose $M = \overline{M} \setminus \partial\overline{M}$. On a ainsi $\partial M = \partial\overline{M}$. En particulier, $\overline{M}$ coïncide avec la fermeture de M dans $\overline{M}$.

On suppose qu'il existe une variété sans bord (N, g') telle que $(\overline{M}, g) \hookrightarrow (N, g')$ isométriquement: pour simplifier, on note $g' = g$. Si $\partial\overline{M} = \emptyset$, on pose $N = M = \overline{M}$. En particulier, on englobe le cas des ouverts bornés réguliers de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (dans ce cas, $N = \mathbb{R}^n$, $M = \Omega$ et $\overline{M} = \overline{\Omega}$).

Pour $p \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on définit la norme $\|u\|_{H_k^p} := \sum_{i=0}^k \|\nabla^i u\|_p$. On note alors $H_k^p(M)$ (resp. $H_{k,0}^p(M)$) la fermeture dans $L^p(M)$ de $\{u \in C^k(M)/ \, \|u\|_{H_k^p} < \infty\}$ (resp. de $C_c^k(M)$) pour la norme $\| \cdot \|_{H_k^p}$.

Soit $a \in L^\infty(M)$. On cherche une fonction de Green adaptée au problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g u + au = f & \text{dans } M \\ u = 0 & \text{sur } \partial M. \end{array} \right.$$

où on a posé $\Delta_g := -\mathrm{div}_g(\nabla)$, le laplacien avec convention de signe moins.

On pose

$$K_a := \{u \in H_{1,0}^2(M)/ \, \Delta_g u + au = 0 \text{ au sens faible}\}. \tag{1}$$

L'espace K_a est de dimension finie (c'est une conséquence du Théorème de Riesz et de la régularité elliptique, voir [3]) et il suit de théorie elliptique standard que $K_a \subset C^{1,\theta}(\overline{M})$ pour tout $\theta \in (0,1)$. On munit $H_1^2(M)$ du produit scalaire L^2: $(u,v) \mapsto \int_M uv \, dv_g$. On pose alors $\pi_a : H_1^2(M) \to K_a$ la projection orthogonale sur K_a pour le produit scalaire L^2. Dans la suite, toutes les notions d'orthogonalité se rapporteront au produit scalaire L^2.

Definition 1 (Fonction de Green)**.** *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soit K_a et π_a comme ci-dessus. Soit $G : M \times M \setminus \{(x,x)/ \, x \in M\}$. On dit que G est une fonction de Green pour $\Delta_g + a$ avec condition de Dirichlet au bord si, en notant $G_x := G(x, \cdot)$, les trois assertions suivantes sont satisfaites pour tout $x \in M$:*

(i) $G_x \in L^1(M)$,
(ii) $G_x \perp K_a$
(iii) pour tout $\varphi \in C^2(\overline{M})$ telle que $\varphi_{|\partial M} = 0$, on a

$$\int_M G_x(\Delta_g \varphi + a\varphi) \, dv_g = (\varphi - \pi_a(\varphi))(x).$$

Ici, dv_g est l'élément de volume riemannien.

Les résultats principaux de cette note sont les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *Soit $a \in L^\infty(M)$. Alors il existe une unique fonction de Green G pour l'opérateur $\Delta_g + a$. De plus, elle est symétrique et se prolonge en $G \in C^{1,\theta}(\overline{M} \times \overline{M} \setminus \{(x,x)/ \, x \in \overline{M}\}$ pour tout $\theta \in (0,1)$. Plus précisément, pour tout $x \in M$ et pour tout $\varphi \in C^2(\overline{M})$, on a*

$$\int_M G_x(\Delta_g \varphi + a\varphi) \, dv_g = (\varphi - \pi_a(\varphi))(x) + \int_{\partial M} \partial_\nu G_x \varphi \, d\sigma_g,$$

où $d\sigma_g$ est l'élément de volume riemannien de ∂M muni de la métrique induite par g. De plus, $G_x \equiv 0$ si $x \in \partial M$ et pour tout $x \in M$, on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g G_x + aG_x = 0 & \textit{faiblement dans } M \setminus \{x\} \\ G_x = 0 & \textit{sur } \partial M. \end{array} \right.$$

Une fonction de Green admet un contrôle ponctuel très précis. Pour $a \in L^\infty(M)$, il existe $K, \lambda, d > 0$ tels que

$$|a(x)| \le K \text{ pour tout } x \in M, \tag{2}$$

$$\dim K_a \le d. \tag{3}$$

et

$$\int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi)^2\, dv_g \ge \lambda \|\varphi - \pi_a(\varphi)\|_2^2 \tag{4}$$

pour tout $\varphi \in H_2^2(M) \cap H_{1,0}^2(M)$ (L'existence de $\lambda > 0$ suit de la minimisation de $\|\Delta_g\varphi + a\varphi\|_2$ sous les contraintes $\varphi \in H_2^2(M) \cap H_{1,0}^2(M) \cap K_a^\perp$ et $\|\varphi\|_2 = 1$).

On a alors les estimées suivantes (on adopte la convention $d(x, \emptyset) = 1$):

Théorème 2. *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soit G la fonction de Green de $\Delta_g + a$. En notant*

$$\mathcal{H}_M(x,y) := d_g(x,y)^{2-n} \min\left\{1, \frac{d(x,\partial M)d(y,\partial M)}{d_g(x,y)^2}\right\}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ et $C_3 \ge 0$ telles que

$$-C_3 d(x,\partial M)d(y,\partial M) + C_2\mathcal{H}_M(x,y) \le G(x,y) \le C_1\mathcal{H}_M(x,y)$$

et

$$|\nabla G_x(y)| \le C_1 d_g(x,y)^{1-n} \min\left\{1, \frac{d(x,\partial M)}{d_g(x,y)}\right\},$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$ et où les constantes C_1, C_2, C_3 ne dépendent que de (M,g), K, λ et d tels que (2), (4) *et* (3) *ont lieu. De plus, si l'opérateur $\Delta_g + a$ est cœrcif, on peut prendre $C_3 = 0$.*

De nombreuses autres estimées peuvent être dérivées. On renvoie pour cela à la section 4 où l'étude asymptotique générale des fonctions de Green est effectuée.
Le Théorème 1 est démontré dans la sous-section 4.3 pour l'existence et dans la section 5 pour l'unicité. le Théorème 2 est prouvé dans la sous-section 9.3 pour le cas général et dans la section 10 pour le cas cœrcif.

Remarque: les méthodes utilisées sont très souples et, excepté dans la section 3, elle s'adaptent directement au cas des opérateurs elliptiques dont la partie principale est une puissance du laplacien. La section 3 repose sur l'utilisation du principe de comparaison, principe non valable aux ordres supérieurs: nous donnons dans la section 11 une preuve alternative du contrôle optimal qui se généralise immédiatement aux ordres supérieurs. On renvoie aux références Aubin [2], Druet-Hebey-Robert [6], Grunau-Robert [5], Krasovskiĭ [8] et Maz'ya [9] pour d'autres constructions et propriétés.

Notation: Dans tout ce manuscrit, $C(a,b,c)$ signifie que la constante C ne dépend que de a, b, c. Il arrivera qu'on conserve la même notation pour des constantes différentes d'une ligne à l'autre, et même parfois dans la même ligne. Cependant, dans le but de simplifier l'écriture, on omettra systématiquement de mentionner la métrique g et on notera $C(M, ..)$ pour $C(M, g, ...)$. Si $F : A \times B \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors pour tout $x \in A$, on définit $F_x : B \to \mathbb{R}$ par $F_x(y) := F(x,y)$ pour tout $y \in B$. On pose $\mathrm{Diag}(A) := \{(x,x)/\, x \in A\}$.

1. Considérations préliminaires

Le point de départ est de trouver une fonction dont le laplacien au sens des distributions est une perturbation de masse de Dirac. On prouve la proposition suivante:

Proposition 1. *Il existe des fonctions* $H, l \in C^\infty(\overline{M} \times \overline{M} \setminus Diag(\overline{M}))$ *telles que*

(i) pour tous $x, y \in M$ *tels que* $x \neq y$

$$d_g(x,y)^{n-2}|H(x,y)| + d_g(x,y)^{n-1}|\nabla H_x(y)| \leq C(M) \tag{5}$$

(ii) pour tous $x, y \in M$ *tels que* $x \neq y$*, on a*

$$d_g(x,y)^{n-2}|l(x,y)| \leq C(M), \tag{6}$$

(iii) pour tout $\varphi \in C^2(\overline{M})$ *et pour tout* $x \in M$*, on a*

$$\int_M H_x \Delta_g \varphi \, dv_g = \varphi(x) + \int_M l_x \varphi \, dv_g + \int_{\partial M} (-\partial_\nu \varphi H_x + \varphi \partial_\nu H_x) \, d\sigma_g \tag{7}$$

Preuve de la Proposition 1: Pour $x \in N$, on pose $i_g(x)$ le rayon d'injectivité au point x. Soit $\delta > 0$ tel que $\delta < \frac{1}{2} i_g(x)$ pour tout $x \in \overline{M}$. Le réel δ est bien défini car $\overline{M}$ est compacte. En particulier, pour tout $x \in \overline{M}$, on a des géodésiques et une application exponentielle sur $B_\delta(x)$, mais les géodésiques peuvent sortir de $\overline{M}$. Si $\overline{M} = \mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne, on prend $\delta = +\infty$.

Soit $\eta_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\eta_0(t) = 1$ si $t \leq 1$ et $\eta_0(t) = 0$ si $t \geq 2$. On pose

$$\eta(x,y) = \eta_0 \left(\frac{d_g(x,y)}{\delta} \right) \text{ pour tous } x, y \in \overline{M}.$$

Cette définition fait bien sens grâce au choix de δ. En particulier, on a $\eta \in C^\infty(\overline{M} \times \overline{M})$. On pose

$$H(x,y) := \frac{\eta(x,y)}{(n-2)\omega_{n-1} d_g(x,y)^{n-2}} \tag{8}$$

pour tous $(x,y) \in \overline{M} \times \overline{M} \setminus \mathrm{Diag}(\overline{M})$, où ω_{n-1} est le volume de la sphère unité $(n-1)-$dimensionnelle de $\mathbb{R}^n$. On a immédiatement $H \in C^\infty(\overline{M} \times \overline{M} \setminus \mathrm{Diag}(\overline{M}))$ et (5) est satisfait. En particulier, $H_x \in L^1(M)$ pour tout $x \in \overline{M}$.

Soit $\varphi \in C^2(\overline{M})$. Soit $x \in M$: il existe donc $\delta_0 > 0$ tel que $B_{\delta_0}(x) \subset M$. Soit $\epsilon \in (0, \delta_0)$. On a

$$\begin{aligned} \int_M H_x \Delta_g \varphi \, dv_g &= \int_{M \setminus B_\epsilon(x)} H_x \Delta_g \varphi \, dv_g + \int_{B_\epsilon(x)} H_x \Delta_g \varphi \, dv_g \\ &= \int_{M \setminus B_\epsilon(x)} H_x \Delta_g \varphi \, dv_g + o(1) \text{ quand } \epsilon \to 0 \end{aligned}$$

car $H_x \in L^1(M)$. La variété $M \setminus B_\epsilon(x)$ étant orientée à bord, on intègre par partie pour obtenir

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad & \int_M H_x \Delta_g \varphi \, dv_g \\
&= \int_{M\setminus B_\epsilon(x)} \varphi \Delta_g H_x \, dv_g + \int_{\partial(M\setminus B_\epsilon)(x)} \left(-\partial_\nu \varphi H_x + \varphi \partial_\nu H_x\right) \, d\sigma_g + o(1) \\
&= \int_{M\setminus B_\epsilon(x)} \varphi \Delta_g H_x \, dv_g + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu \varphi H_x + \varphi \partial_\nu H_x\right) \, d\sigma_g \\
&- \int_{\partial B_\epsilon(x)} \left(-\partial_\nu \varphi H_x + \varphi \partial_\nu H_x\right) \, d\sigma_g + o(1)
\end{aligned}
$$

quand $\epsilon \to 0$. Pour $d_g(x,y) < \delta$, on a $H(x,y) = ((n-2)\omega_{n-1})^{-1} d_g(x,y)^{2-n}$, et donc, en utilisant le laplacien en radial, on obtient en posant $r = d_g(x,y)$

$$
(10) \quad \Delta_g H_x(y) = -\frac{1}{r^{n-1}} \partial_r \left(r^{n-1} \sqrt{|g|} \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \partial_r (r^{2-n}) \right) = \frac{\partial_r \sqrt{|g|}}{\omega_{n-1} r^{n-1} \sqrt{|g|}}
$$

avec $d_g(x,y) < \delta$ ($|g|$ désignant le déterminant de la métrique g dans une carte adaptée). Par ailleurs, dans la carte exponentielle, on a $g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2)$ et donc $\sqrt{|g|} = 1 + O(r^2)$, ces développements limités pouvant être dérivés. On obtient ainsi $\partial_r \sqrt{|g|} = O(r)$. Ainsi, en reprenant (10) et en distinguant les cas $d_g(x,y) < \delta$ ou bien $> \delta$, on obtient qu'il existe $C(M) > 0$ tel que

$$
(11) \qquad |\Delta_g H_x(y)| \leq C(M) d_g(x,y)^{2-n} \text{ pour tout } (x,y) \in \overline{M} \times \overline{M} \setminus \mathrm{Diag}(\overline{M}).
$$

On pose alors $l(x,y) := \Delta_g H_x(y)$ pour $x \neq y$. Il suit donc de (11) que (6) a lieu et que $l_x \in L^1(M)$ pour tout $x \in M$. On déduit de (9) que

$$
\begin{aligned}
\int_M H_x \Delta_g \varphi \, dv_g \quad &= \quad \int_M l_x \varphi \, dv_g + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu \varphi H_x + \varphi \partial_\nu H_x\right) \, d\sigma_g \\
&\quad - \int_{\partial B_\epsilon(x)} \left(-\partial_\nu \varphi H_x + \varphi \partial_\nu H_x\right) \, d\sigma_g + o(1)
\end{aligned}
$$

lorsque $\epsilon \to 0$. Traitons maintenant le bord. Comme $|H_x(y)| \leq C(M) d_g(x,y)^{2-n}$, on obtient

$$
(12) \qquad \int_{\partial B_\epsilon(x)} \partial_\nu \varphi H_x \, d\sigma_g = O(\epsilon) = o(1) \text{ lorsque } \epsilon \to 0.
$$

Avec l'expression (8) de H_x pour y proche de x, on obtient en radial que $\partial_\nu H_x(y) = \frac{-1}{\omega_{n-1}} \epsilon^{1-n}$ pour $y \in \partial B_\epsilon(x)$. Du coup, en utilisant la continuité de φ, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B_\epsilon(x)} -\varphi \partial_\nu H_x \, d\sigma_g \quad &= \quad \varphi(x) \int_{\partial B_\epsilon(x)} -\partial_\nu H_x \, d\sigma_g + o(1) \\
&= \quad \varphi(x) \frac{\int_{\partial B_\epsilon(x)} d\sigma_g}{\epsilon^{n-1} \omega_{n-1}} + o(1) = \varphi(x) + o(1)
\end{aligned}
$$

quand $\epsilon \to 0$. On obtient ainsi

$$
\int_M H_x \Delta_g \varphi \, dv_g = \varphi(x) + \int_M l_x \varphi \, dv_g + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu \varphi H_x + \varphi \partial_\nu H_x\right) \, d\sigma_g
$$

pour tout $x \in M$. Ceci prouve (7) et achève la preuve de la Proposition 1. $\square$

Pour terminer cette partie préliminaire, on détermine un contrôle sur le module de continuité du projecteur π_a.

Proposition 2. *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soient K, d tels que $\|a\|_\infty \leq K$ et dim $K_a \leq d$. Soit π_a le projecteur orthogonal sur K_a. Alors il existe $C(M, K, d) > 0$ telle que*

$$\|\pi_a(f)\|_{C^1} \leq C(M, K, d)\|f\|_1 \tag{13}$$

pour tout $f \in H_1^2(M)$.

Preuve de la Proposition 2: Le noyau K_a étant de dimension finie $d_a \leq d$, soit $(\psi_1, ..., \psi_{d_a})$ une base orthonormée pour le produit scalaire L^2. En particulier, pour tout $i \in \{1, ..., d_a\}$, on a

$$\begin{cases} \Delta_g \psi_i + a\psi_i = 0 & \text{dans } M \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Il suit de théorie elliptique que $\psi_i \in C^1(M)$ et que pour tout $\theta \in (0, 1)$, il existe $C(M, K, \theta) > 0$ tel que

$$\|\psi_i\|_{C^{1,\theta}} \leq C(M, K, \theta)\|\psi_i\|_2 = C(M, K, \theta) \tag{14}$$

car $\|\psi_i\|_2 = 1$. Soit $f \in H_1^2(M)$: on a

$$\pi_a(f) = \sum_{i=1}^{d_a} \left(\int_M f\psi_i \, dv_g \right) \psi_i.$$

Du coup, comme $\pi_a(f) \in K_a \subset C^1(\overline{M})$, on obtient

$$\|\pi_a(f)\|_{C^1} \leq \sum_{i=1}^{d_a} \left| \int_M f\psi_i \, dv_g \right| \cdot \|\psi_i\|_{C^1} \leq \sum_{i=1}^{d_a} \|f\|_1 \|\psi_i\|_\infty \|\psi_i\|_{C^1} \tag{15}$$

En utilisant (14) et (15), on obtient qu'il existe $C(M, K, d) > 0$ tel que

$$\|\pi_a(f)\|_{C^1} \leq C(M, K, d)\|f\|_1$$

pour tout $f \in H_1^2(M)$. Ceci prouve (13) et achève la preuve de la Proposition 2.$\square$

2. Une proposition intermédiaire sur la série de Neumann

Proposition 3. *Soient, $a, h \in L^\infty(M)$. On suppose qu'il existe $\Gamma, f \in L^\infty_{loc}(\overline{M} \times \overline{M} \setminus Diag(\overline{M}))$ deux fonctions telles qu'il existe $C_1 > 0$ tels que*

$$\Gamma_x \in C^1(\overline{M} \setminus \{x\}) \,;\, |\Gamma(x, y)| \leq C_1 d_g(x, y)^{2-n} \text{ et } |\nabla\Gamma_x(y)| \leq C_1 d_g(x, y)^{1-n} \tag{16}$$

pour tous $x, y \in \overline{M}$, $x \neq y$. On suppose que

$$|f(x, y)| \leq C_1 d_g(x, y)^{2-n}$$

pour tous $x, y \in \overline{M}$, $x \neq y$. On suppose que pour tout $\varphi \in C^2(\overline{M})$ et pour tout $x \in M$, on a

$$\int_M (\Delta_g \varphi + h\varphi)\Gamma_x \, dv_g = \varphi(x) + \int_M f_x \varphi \, dv_g + \int_{\partial M} (-\partial_\nu \varphi \Gamma_x + \varphi \partial_\nu \Gamma_x) \, d\sigma_g. \tag{17}$$

Alors il existe $\hat{G} \in L^\infty_{loc}(M \times M \setminus Diag(M))$ telle que pour tout $x \in M$, on a

$$\hat{G}_x \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\}) \cap L^1(M) \text{ et } \hat{G}_x \perp K_a$$

pour tout $\theta \in (0,1)$ et pour tout $\varphi \in C^2(\overline{M})$, on a

$$\begin{aligned}&\int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi)\hat{G}_x\, dv_g\\&= (\varphi - \pi_a(\varphi))(x) + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu(\varphi - \pi_a(\varphi))\hat{G}_x + \varphi\partial_\nu\hat{G}_x\right)\, d\sigma.\end{aligned}$$

De plus, si $(\Gamma_x)_{|\partial M} = 0$ pour tout $x \in M$, alors $(\hat{G}_x)_{|\partial M} = 0$ et, en posant $\hat{G}_z \equiv 0$ si $z \in \partial M$, la fonction $\hat{G}$ est une fonction de Green pour $\Delta_g + a$.

Soient $K, K', \lambda, d \geq 0$ tels que $|a(x)| \leq K$ et $|h(x)| \leq K'$ pour tout $x \in M$ et (4) et (3) ont lieu: il existe alors $C'(M, C_1, K, K', \lambda, d) > 0$ tel que

$$|\hat{G}(x,y)| \leq C(M, C_1, K, K', \lambda, d) d_g(x,y)^{2-n} \tag{18}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$.

Preuve de la Proposition 3: elle procède en cinq étapes.

Étape 1: On suppose qu'il existe $\Gamma_1, ..., \Gamma_k : \overline{M} \times \overline{M} \setminus \mathrm{Diag}(\overline{M}) \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, on a

$$\Gamma_i \in L^\infty_{loc}(M \times M \setminus \mathrm{Diag}(M)) \text{ et } |\Gamma_i(x,y)| \leq C_2 d_g(x,y)^{2-n} \tag{19}$$

pour tous $x, y \in \overline{M}$, $x \neq y$. On pose

$$G'(x,y) := \Gamma(x,y) + \sum_{i=1}^k \int_M \Gamma_i(x,z)\Gamma(z,y)\, dv_g(z) \tag{20}$$

pour tout $x, y \in \overline{M}$, $x \neq y$. Il suit du Lemme de Giraud [4] que $G' \in L^\infty_{loc}(M \times M \setminus \mathrm{Diag}(M))$ et que $|G'(x,y)| \leq C(M, C_1, C_2) d_g(x,y)^{2-n}$ pour tous $x, y \in \overline{M}$ avec $x \neq y$. En particulier, on a $G'_x \in L^1(M)$ pour tout $x \in M$. De plus, il suit du théorème de convergence dominée de Lebesque que $G'_x \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\})$ pour tout $x \in M$ et tout $\theta \in (0,1)$.

Calculons $\Delta_g G'_x + aG'_x$ au sens des distributions. Soit $\varphi \in C^2(\overline{M})$. On a

$$\begin{aligned}&\int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi)G'_x\, dv_g = \int_M G'_x(\Delta_g\varphi + h\varphi)\, dv_g + \int_M G_x(a-h)\, dv_g\\&= \int_M \Gamma_x(\Delta_g\varphi + h\varphi)\, dv_g\\&+ \sum_{i=1}^k \int_{M\times M} \Gamma_i(x,z)\Gamma(z,y)(\Delta_g\varphi + h\varphi)(y)\, dv_g(y)\, dv_g(z)\\&+ \int_M G'_x(a-h)\, dv_g\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini. En utilisant encore le théorème de Fubini et (17), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi)G'_x\, dv_g\\
&= \varphi(x) + \int_M f_x\varphi\, dv_g + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu\varphi\Gamma_x + \varphi\partial_\nu\Gamma_x\right)\, d\sigma_g\\
&+ \sum_{i=1}^k \int_M \Gamma_i(x,z)\left(\varphi(z) + \int_M f_z\varphi\, dv_g + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu\varphi\Gamma_z + \varphi\partial_\nu\Gamma_z\right) d\sigma_g\right)\\
&+ \int_M G'_x(a-h)\, dv_g
\end{aligned}$$

Les bornes (16) sur Γ et son gradient justifient une nouvelle utilisation du théorème de Fubini pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi)G'_x\, dv_g &= \varphi(x) + \int_M f_x\varphi\, dv_g + \sum_{i=1}^k \int_M \Gamma_i(x,\cdot)\varphi\, dv_g\\
&+ \sum_{i=1}^k \int_M \left(\int_M \Gamma_i(x,z)f(z,y)\, dv_g(z)\right)\varphi(y)\, dv_g(y)\\
&+ \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu\varphi G'_x + \varphi\partial_\nu G'_x\right)\, d\sigma + \int_M G'_x(a-h)\, dv_g
\end{aligned} \tag{21}$$

Concernant le dernier terme, il suffit de remplacer G'_x par son expression (20) pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi)G'_x\, dv_g\\
&= \varphi(x) + \int_M \left(f_x + (a-h)\Gamma_x\right)\varphi\, dv_g + \sum_{i=1}^k \int_M \Gamma_i(x,\cdot)\varphi\, dv_g\\
&+ \sum_{i=1}^k \int_M \left(\int_M \Gamma_i(x,z)\left(f(z,y) + (a-h)(y)\Gamma(z,y)\right)\, dv_g(z)\right)\varphi(y)\, dv_g(y)\\
&+ \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu\varphi G'_x + \varphi\partial_\nu G'_x\right)\, d\sigma
\end{aligned} \tag{22}$$

On pose alors

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(x,y) &:= -\left[f(x,y) + (a-h)(y)\Gamma(x,y)\right]\\
\Gamma_{i+1}(x,y) &:= \textstyle\int_M \Gamma_i(x,z)\Gamma_1(z,y)\, dv_g(z)
\end{aligned} \tag{23}$$

pour tout $i \geq 1$ et pour tous $x,y \in M$, $x \neq y$. Soient $K, K' \geq 0$ tel que

$$|a(x)| \leq K \text{ et } |h(x)| \leq K' \text{ pour tout } x \in M.$$

Alors, il suit des estimées standard du Lemme de Giraud que pour tout $i \geq 1$, il existe $C_i(M, C_1, K, K') > 0$ telle que

$$|\Gamma_i(x,y)| \leq C_i(M, C_1, K, K') \begin{cases} d_g(x,y)^{2i-n} & \text{si } i < \frac{n}{2}\\ 1 + |\ln d_g(x,y)| & \text{si } i = \frac{n}{2}\\ 1 & \text{si } i > \frac{n}{2}\end{cases} \tag{24}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$. En particulier, Γ_i satisfait bien (19) pour tout $i \geq 1$. En utilisant (23), (22) devient

$$\int_M (\Delta_g \varphi + a\varphi) G'_x \, dv_g = \varphi(x) + \int_{\partial M} (-\partial_\nu \varphi G'_x + \varphi \partial_\nu G'_x) \, d\sigma - \int_M \Gamma_{k+1}(x, \cdot) \varphi \, dv_g. \tag{25}$$

On choisit $k = E\left(\frac{n}{2}\right)$, de sorte que $k+1 > \frac{n}{2}$: on pose alors $\gamma := \Gamma_{k+1}$.

Par ailleurs, il suit du Lemme de Giraud qu'il existe $C(M, K) > 0$ tel que

$$\left| \int_M \Gamma_i(x,z)\Gamma(z,y) \, dv_g(z) \right| \leq C(M, C_1, K, K') d_g(x,y)^{3-n}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$ et tout $i \geq k+1$. Du coup, on obtient

$$|G'(x,y) - \Gamma(x,y)| \leq C(M, C_1, K, K') d_g(x,y)^{3-n} \tag{26}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$. En particulier,

$$|G'(x,y)| \leq C(M, C_1, K, K') d_g(x,y)^{2-n} \tag{27}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$.

Étape 2: Soit $u'_x \in H^2_{1,0}(M) \cap K_a^\perp$ l'unique solution faible de

$$\begin{cases} \Delta_g u'_x + a u'_x = \gamma_x - \pi_a(\gamma_x) & \text{dans } M \\ u'_x = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Il suit de théorie elliptique standard que u'_x est bien unique et définie. De plus, par théorie de la régularité, on a $u'_x \in H^p_2(M) \cap C^{1,\theta}(\overline{M})$ pour tous $p \geq 1$ et $\theta \in (0,1)$ et il existe $C > 0$ tel que

$$\|u'_x\|_{C^1} \leq C(M, K) \left(\|\gamma_x - \pi_a(\gamma_x)\|_\infty + \|u'_x\|_2 \right). \tag{28}$$

Comme $u'_x \in K_a^\perp$, on a $\pi_a(u'_x) = 0$ et il suit alors de (4) que

$$\lambda \|u'_x\|_2^2 \leq \|\gamma_x - \pi_a(\gamma_x)\|_2^2. \tag{29}$$

En regroupant (28) et (29), on obtient

$$\|u'_x\|_{C^1} \leq C(M, K, \lambda) \|\gamma_x - \pi_a(\gamma_x)\|_\infty. \tag{30}$$

Il suit alors de (13), de (30) et de (24) que

$$\|u'_x\|_{C^1} \leq C(M, K, \lambda, d) \|\gamma_x\|_\infty \leq C'(M, K, K', C_1, \lambda, d). \tag{31}$$

Nous pouvons alors définir

$$u_x := u'_x - \sum_{i=1}^{d_a} \left(\int_M (G'_x + u'_x) \psi_i \, dv_g \right) \psi_i \tag{32}$$

où les ψ_i $(i = 1, ..., d_a)$ sont définis dans la preuve de la Proposition 2. Ainsi, on a $u_x \in C^1(\overline{M})$ et

$$\begin{cases} \Delta_g u_x + a u_x = \gamma_x - \pi_a(\gamma_x) & \text{dans } M \\ u_x = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Il suit de (14), de (31) et (27) que

$$\left\|\sum_{i=1}^{d_a}\left(\int_M (G'_x+u'_x)\psi_i\,dv_g\right)\psi_i\right\|_{C^1} \leq \sum_{i=1}^{d_a}\left|\int_M (G'_x+u'_x)\psi_i\,dv_g\right|\cdot\|\psi_i\|_{C^1}$$
$$\leq C(M,K)\sum_{i=1}^{d_a}(\|G'_x\|_{L^1}+\|u'_x\|_{L^1})\|\psi_i\|_\infty \leq C(M,K,K',C_1,\lambda,d) \tag{33}$$

Étape 3: On pose

$$\hat{G}(x,y) := G'(x,y)+u_x(y) \text{ pour } x\in M,\ y\in\overline{M},\ x\neq y. \tag{34}$$

En particulier, pour tout $x\in M$, on a $G_x\in L^1(M)\cap C^1(\overline{M}\setminus\{x\})$. Soit $\varphi\in C^2(\overline{M})$. Comme $u_x\in H_2^p(M)$ pour tout $p\geq 1$, en intégrant par parties, il suit de (25) et de (34) que

$$\begin{aligned}
&\int_M(\Delta_g\varphi+a\varphi)\hat{G}_x\,dv_g\\
&=\varphi(x)+\int_{\partial M}\left(-\partial_\nu\varphi G'_x+\varphi\partial_\nu\hat{G}'_x\right)\,d\sigma-\int_M\gamma_x\varphi\,dv_g+\int_M u_x(\Delta_g\varphi+a\varphi)\,dv_g\\
&=\varphi(x)+\int_{\partial M}\left(-\partial_\nu\varphi(G'_x+u_x)+\varphi\partial_\nu(G'_x+u_x)\right)\,d\sigma\\
&+\int_M\varphi(\Delta_g u_x+au_x-\gamma_x)\,dv_g\\
&=\varphi(x)+\int_{\partial M}\left(-\partial_\nu\varphi(G'_x+u_x)+\varphi\partial_\nu(G'_x+u_x)\right)\,d\sigma-\int_M\varphi\pi_a(\gamma_x)\,dv_g\\
&=\varphi(x)+\int_{\partial M}\left(-\partial_\nu\varphi\hat{G}_x+\varphi\partial_\nu\hat{G}_x\right)\,d\sigma-\int_M\varphi\pi_a(\gamma_x)\,dv_g
\end{aligned}$$

Comme $\pi_a(\gamma_x)\in K_a=\mathrm{Vect}\{\psi_1,...,\psi_{d_a}\}$, il existe $c_i(x)$, $i\in\{1,...,d_a\}$ tels que $\pi_a(\gamma_x)=\sum_{i=1}^{d_a}c_i(x)\psi_i$. Ainsi, on a la formule

$$\begin{aligned}
&\int_M(\Delta_g\varphi+a\varphi)\hat{G}_x\,dv_g\\
&=\varphi(x)+\int_{\partial M}\left(-\partial_\nu\varphi\hat{G}_x+\varphi\partial_\nu\hat{G}_x\right)\,d\sigma-\sum_{i=1}^{d_a}c_i(x)\int_M\varphi\psi_i\,dv_g
\end{aligned}\tag{35}$$

Fixons $i\in\{1,...,d_a\}$. En appliquant (35) à ψ_i, en utilisant que $(\psi_1,...\psi_{d_a})$ est une base orthonormée de K_a et que $\psi_i=0$ sur ∂M, on obtient

$$\begin{aligned}
0&=\int_M(\Delta_g\psi_i+a\psi_i)\hat{G}_x\,dv_g\\
&=\psi_i(x)-\int_{\partial M}\partial_\nu\psi_i\hat{G}_x,d\sigma-\sum_{j=1}^{d_a}c_j(x)\int_M\psi_i\psi_j\,dv_g\\
&=\psi_i(x)-c_i(x)-\int_{\partial M}\partial_\nu\psi_i\hat{G}_x\,d\sigma
\end{aligned}\tag{36}$$

et donc $c_i(x)=\psi_i(x)-\int_{\partial M}\partial_\nu\psi_i\hat{G}_x\,d\sigma$ pour tout $i\in\{1,...,d_a\}$ (Notons que comme ψ_i n'est pas C^2, on a utilisé que $\psi_i\in H_2^p(M)$ pour tout $p\geq 1$). En revenant à la formule (35), on obtient alors

$$\begin{aligned}
(37)\qquad & \int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi)\hat{G}_x\, dv_g \\
&= \varphi(x) + \int_{\partial M}\left(-\partial_\nu\varphi\hat{G}_x + \varphi\partial_\nu\hat{G}_x\right)\, d\sigma - \sum_{i=1}^{d_a}\left(\int_M \varphi\psi_i\, dv_g\right)\psi_i(x) \\
&+ \int_{\partial M}\partial_\nu\left(\sum_{i=1}^{d_a}\left(\int_M \varphi\psi_i\, dv_g\right)\psi_i\right)\hat{G}_x\, d\sigma \\
&= (\varphi - \pi_a(\varphi))(x) + \int_{\partial M}\left(-\partial_\nu(\varphi - \pi_a(\varphi))\hat{G}_x + \varphi\partial_\nu\hat{G}_x\right)\, d\sigma
\end{aligned}$$

pour tout $x \in M$. Ceci prouve (17).

Étape 4: Étudions maintenant les relations d'orthogonalité. Soit $i \in \{1, ..., d_a\}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_M \hat{G}_x\psi_i\, dv_g &= \int_M (G'_x + u'_x - \sum_{j=1}^{d_a}\left(\int_M (G'_x + u'_x)\psi_j\, dv_g\right)\psi_j)\psi_i\, dv_g \\
&= \int_M (G'_x + u'_x)\psi_i\, dv_g - \sum_{j=1}^{d_a}\left(\int_M (G'_x + u'_x)\psi_j\, dv_g\right)\int_M \psi_i\psi_j\, dv_g \\
&= \int_M (G'_x + u'_x)\psi_i\, dv_g - \int_M (G'_x + u'_x)\psi_i\, dv_g = 0.
\end{aligned}$$

La famille $(\psi_1, ..., \psi_{d_a})$ engendrant K_a, on en déduit que

$$(38)\qquad \hat{G}_x \perp K_a.$$

Étape 5: Montrons maintenant l'estimée ponctuelle. Il suit de (26) et de (33) qu'il existe $C(M, K, K', \lambda, d) > 0$ tel que

$$(39)\qquad |\hat{G}(x,y) - \Gamma(x,y)| \leq C(M, K, K', C_1, \lambda, d)d_g(x,y)^{3-n}$$

pour tout $x, y \in M$, $x \neq y$. Ceci prouve (18) et du coup achève la preuve de la Proposition 3. □

3. Première étude du cas $\Delta_g + a$ cœrcif

On donne ici une preuve de l'existence et du contrôle ponctuel de la fonction de Green dans le cas cœrcif. On fait ici usage de façon fondamentale du principe du maximum et de l'ordre deux, et une autre méthode est nécessaire pour prouver les estimées ponctuelles aux ordres supérieurs. Afin d'être complet, on donnera dans la section 11 une autre technique de preuve des estimées ponctuelles: elle présente l'inconvénient d'être sensiblement plus longue, mais elle a l'avantage d'être très robuste et d'être adaptée aux opérateurs d'ordres supérieurs (elle a en particulier été utilisée dans Grunau-Robert [5]).

Théorème 3. *Soit $a \in L^\infty(M)$. On suppose que $\Delta + a$ est cœrcif. Alors il existe une fonction de Green, notée G, pour $\Delta_g + a$. De plus, $G_x \in C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M} \setminus \{x\})$ pour tout $x \in M$ et il existe $C(M, K, \lambda) > 0$ telle que*

$$0 < G(x,y) \leq C(M, K, \lambda)d_g(x,y)^{2-n} \text{ pour tous } x, y \in M,\ x \neq y,$$

où K et λ sont comme dans (2) et (4). De plus, $G_z \equiv 0$ pour tout $z \in \partial M$ et on a $G_x(y) = 0$ pour tout $y \in \partial M$ et $x \in M$.

Preuve du Théorème 3: En reprenant les notations de la Proposition 1, on pose $\Gamma := H$, $f := l$ et $h := 0$. En remarquant que $K_a = \{0\}$ et donc que $\pi_a \equiv 0$, grâce aux résultats de la Proposition 1, on applique la Proposition 3 pour obtenir l'existence de $\hat{G} \in L^\infty_{loc}(M \times M \setminus \mathrm{Diag}(M))$ telle que (39) a lieu et pour tout $x \in M$, on a

$$\hat{G}_x \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\}) \cap L^1(M)$$

pour tout $\theta \in (0,1)$ et pour tout $\varphi \in C^2(\overline{M})$, on a

$$\int_M (\Delta_g \varphi + a\varphi)\hat{G}_x \, dv_g = \varphi(x) + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu \varphi \hat{G}_x + \varphi \partial_\nu \hat{G}_x \right) d\sigma.$$

Étape 1: Soit $V_x \in H_1^2(M)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g V_x + aV_x = 0 & \text{dans } M \\ V_x = -\hat{G}'_x & \text{sur } \partial M. \end{array} \right.$$

L'égalité au bord étant à prendre au sens usuel des traces. Pour l'existence, on renvoie à [3] (Théorèmes 8.6, 8.12, 9.15) et [1] (Théorème 9.1). Il suit de théorie elliptique standard que $V_x \in H_2^p(M) \cap C^{1,\theta}(\overline{M})$ pour tous $p \geq 1$ et $\theta \in (0,1)$. Comme $\Gamma(x,y) = H(x,y)$, il suit de l'inégalité (39) qu'il existe $\tilde{C}(M,K,\lambda) > 0$ tel

$$-\hat{G}'_x(y) \leq \tilde{C}(M,K,\lambda)$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$. Posons $V'_x := -V_x + \tilde{C}(M,K,\lambda) + 1$ et posons $W'_x \in H_2^p(M) \cap C^{1,\theta}(\overline{M})$ pour tout $p \geq 1$ et $\theta \in (0,1)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g W'_x + aW'_x = a \times (\tilde{C}(M,K,\lambda) + 1) & \text{dans } M \\ W'_x = 0 & \text{sur } \partial M. \end{array} \right.$$

L'existence de W'_x suit de théorie elliptique standard. Par cœrcivité de $\Delta_g + a$, on en déduit alors, toujours par théorie elliptique, qu'il existe $C(M,K,\lambda) > 0$ tel que

$$\|W'_x\|_\infty \leq C(M,K,\lambda).$$

De plus, on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g(V'_x - W'_x) + a(V'_x - W'_x) = 0 & \text{dans } M \\ V'_x - W'_x > 0 & \text{sur } \partial M. \end{array} \right.$$

En posant $\psi := (V'_x - W'_x)_- \in H_{1,0}^2(M)$, en multipliant le système par ψ et en intégrant, on obtient $\int_M (|\nabla\psi|_g^2 + a\psi^2)\, dv_g = 0$, et donc $\psi \equiv 0$ par cœrcivité, et donc $V'_x \geq W'_x$. Il s'ensuit qu'il existe $C(M,K,\lambda) > 0$ tel que

$$V_x \leq C(M,K,\lambda) \tag{40}$$

Étape 2: On pose alors

$$G(x,y) := \hat{G}(x,y) + V_x(y)$$

pour $x \in M$, $y \in \overline{M}$ et $x \neq y$. Si $x \in \partial M$, on pose $G_x \equiv 0$. En particulier, on a $G_x \in L^1(M)$, $G_x \in C^1(\overline{M} \setminus \{x\})$. Soit maintenant $\varphi \in C^2(\overline{M})$. En utilisant les définitions de G_x et de V_x et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
(41) \qquad & \int_M G_x(\Delta_g \varphi + a\varphi)\, dv_g \\
&= \varphi(x) + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu \varphi \hat{G}_x + \varphi \partial_\nu \hat{G}_x\right) d\sigma + \int_M (\Delta_g \varphi + a\varphi) V_x\, dv_g \\
&= \varphi(x) + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu \varphi \hat{G}_x + \varphi \partial_\nu \hat{G}_x\right) d\sigma + \int_M (\Delta_g V_x + a V_x)\varphi\, dv_g \\
&+ \int_M (-\partial_\nu \varphi V_x + \partial_\nu V_x \varphi)\, d\sigma \\
&= \varphi(x) + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu \varphi G_x + \varphi \partial_\nu G_x\right) d\sigma
\end{aligned}$$

Or il suit du choix de V_x que $G_x(y) = 0$ pour $y \in \partial M$. On obtient ainsi

$$(42) \qquad \int_M G_x(\Delta_g \varphi + a\varphi)\, dv_g = \varphi(x) + \int_{\partial M} \varphi \partial_\nu G_x\, d\sigma.$$

En particulier, G est une fonction de Green pour $\Delta_g + a$ (l'opérateur étant inversible, on a $K_a = \{0\}$).

Étape 3: On affirme ici qu'il existe $C(M, K, \lambda) > 0$ tel que

$$(43) \qquad 0 < G(x, y) \leq C(M, K, \lambda) d_g(x, y)^{2-n}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$.

Prouvons cette affirmation. Il suit de (39), de la définition de G_x et de (40) qu'il existe $C(M, K, \lambda) > 0$ tel que

$$(44) \qquad G(x, y) \leq C(M, K, \lambda) d_g(x, y)^{2-n}$$

pour tous $x \neq y$. Par ailleurs, il suit de (39) que pour $x \in M$ fixé, on a $\lim_{y \to x} G_x(y) = +\infty$. Du coup, on a $(G_x)_- \in H_{1,0}^2(M \setminus B_\delta(x))$ pour $\delta > 0$ assez petit. Soit $\psi \in C_c^\infty(M \setminus \{x\})$. Il suit de la formule de représentation (41) que

$$\int_M G_x(\Delta_g \psi + a\psi)\, dv_g = 0,$$

et donc, en intégrant par parties, on obtient

$$\int_M ((\nabla G_x, \nabla \psi)_g + a G_x \psi)\, dv_g = 0.$$

Par densité de $C_c^\infty(M \setminus B_\delta(x))$ dans $H_{1,0}^2(M \setminus B_\delta(x))$, on obtient que cette égalité est valide pour $\psi = (G_x)_-$, et donc $\int_M (|\nabla (G_x)_-|_g^2 + a(G_x)_-^2)\, dv_g = 0$, et donc $(G_x)_- = 0$ presque partout, ce qui implique par continuité de G_x que $G_x \geq 0$. Comme $G_x \not\equiv 0$ (grâce à (42)), il suit alors du principe du maximum de Hopf que

$$(45) \qquad G_x > 0 \text{ sur } M \setminus \{x\}.$$

L'inégalité (43) suit de (44) et de (45).

Remarque: concernant l'estimée ponctuelle (43), citons un résultat très élégant dans le cas euclidien qui figure dans Han-Lin ([7], Proposition 1.21): sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, la fonction de Green G du laplacien euclidien Δ avec condition de Dirichlet au bord est majorée par le noyau $((n-2)\omega_{n-1})|x-y|^{2-n}$. La preuve repose sur le principe du maximum et une comparaison des deux fonctions au bord.

4. Étude asymptotique au voisinage des singularités

Dans cette section, nous analysons le comportement infinitésimal de la fonction de Green prise en deux points voisins. On considère une suite $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in L^\infty(M)$ telle qu'il existe $K, \lambda, d > 0$ tels que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on ait

$$|a_\alpha(x)| \leq K \text{ pour tout } x \in M, \tag{46}$$

$$\int_M |\Delta_g \varphi + a_\alpha \varphi|^2 \, dv_g \geq \lambda \|\varphi - \pi_{a_\alpha}(\varphi)\|_2^2 \text{ pour tout } \varphi \in H_2^2(M) \cap H_{1,0}^2(M), \tag{47}$$

et

$$\dim K_{a_\alpha} \leq d. \tag{48}$$

4.1. **Comportement intérieur.**

Proposition 4. *Soit des suites $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in L^\infty(M)$, $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in M$ et $(r_\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \in (0, +\infty)$. On suppose qu'il existe $K, d > 0$ tels que* (46) *et* (48) *ont lieu pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on note G_α une fonction de Green de $\Delta_g + a_\alpha$. On suppose que pour tout $x \in M$ on a $(G_\alpha)_x \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\})$ pour tout $\theta \in (0,1)$ et que $(G_\alpha)_x$ s'annule sur ∂M. On suppose qu'il existe $C_1 > 0$ tel que*

$$d_g(x,y)^{n-2} |G_\alpha(x,y)| \leq C_1 \text{ for all } x, y \in M,\ x \neq y. \tag{49}$$

On suppose que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} r_\alpha = 0 \text{ et } \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d_g(x_\alpha, \partial M)}{r_\alpha} = +\infty.$$

Alors, on a

$$\lim_{\alpha\to+\infty} r_\alpha^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, exp_{x_\alpha}(r_\alpha z)) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|z|^{n-2}} \tag{50}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. De plus, cette convergence a lieu dans $C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ pour tout $\theta \in (0,1)$. La fonction exp_{x_α} désigne l'application exponentielle prise au point x_α et on a assimilé isométriquement l'espace tangent en x_α à $\mathbb{R}^n$.

Preuve de la Proposition 4: Tout d'abord, déterminons l'équation vérifiée par G_α. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, soit $\{(\psi_\alpha)_i\}_{i=1,\dots,d_{a_\alpha}}$ une base orthonormée de K_{a_α}. Soit $\varphi \in C_c^2(\overline{M} \setminus \{x\})$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_M (G_\alpha)_x (\Delta_g \varphi + a_\alpha \varphi) \, dv_g &= -\pi_{a_\alpha}(\varphi)(x) + \int_M \varphi \partial_\nu (G_\alpha)_x \, d\sigma_g \\ &= -\sum_{i=1}^{d_a} \left(\int_M (\psi_\alpha)_i \varphi \, dv_g \right) (\psi_\alpha)_i(x) + \int_M \varphi \partial_\nu (G_\alpha)_x \, d\sigma_g\end{aligned}$$

Comme φ s'annule au voisinage de x et que $G_x \in C^1(\overline{M}\setminus\{x\})$ s'annule sur ∂M, on peut intégrer par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_M ((\nabla(G_\alpha)_x, \nabla\varphi)_g + a_\alpha (G_\alpha)_x\varphi)\, dv_g &= -\int_M \varphi\left(\sum_{i=1}^{d_a}(\psi_\alpha)_i(\psi_\alpha)_i(x)\right) dv_g\\ &\quad + \int_M \varphi\partial_\nu (G_\alpha)_x\, d\sigma_g.\end{aligned}$$

Ainsi, il suit de théorie elliptique standard que $(G_\alpha)_x \in H_{2,loc}^p(M\setminus\{x\})$ pour tout $p\geq 1$ et que

$$\left\{\begin{array}{ll}\Delta_g (G_\alpha)_x + a(G_\alpha)_x = -\sum_{i=1}^{d_a}(\psi_\alpha)_i(x)(\psi_\alpha)_i & \text{dans } M\\ (G_\alpha)_x = 0 & \text{sur } \partial M\end{array}\right. \tag{51}$$

Soit $0<\delta<\frac{i_g(x)}{2}$ pour tout $x\in M$ (ceci est bien défini car $\overline{M}$ est un compact de N). Pour $z\in B_{r_\alpha^{-1}\delta}(0)\setminus\{0\}$, on pose

$$\tilde{G}_\alpha(z) := r_\alpha^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, \exp_{x_\alpha}(r_\alpha z)). \tag{52}$$

Il suit de (49) que

$$|\tilde{G}_\alpha(z)| \leq C_1|z|^{2-n} \text{ pour tout } z\in B_{r_\alpha^{-1}\delta}(0)\setminus\{0\}.$$

De plus, en notant $\tilde{g}_\alpha$ la métrique $\tilde{g}_\alpha(z) := (\exp_{x_\alpha}^\star)(r_\alpha z)$, l'équation (51) devient pour tout $R>0$

$$\Delta_{\tilde{g}_\alpha}\tilde{G}_\alpha + r_\alpha^2 a_\alpha(\exp_{x_\alpha}(r_\alpha\cdot))\tilde{G}_\alpha = -r_\alpha^2\sum_{i=1}^{d_a}(\psi_\alpha)_i(x_\alpha)(\psi_\alpha)_i(\exp_{x_\alpha}(r_\alpha\cdot)) \tag{53}$$

dans $B_R(0)$. Il suit de (49), de (53) et de théorie elliptique standard (voir Théorème 9.10 de [3]) qu'il existe $\tilde{G}\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ tel que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\tilde{G}_\alpha = \tilde{G} \text{ in } C^1_{loc}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \tag{54}$$

et du coup

$$\Delta_\xi \tilde{G} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n\setminus\{0\},$$

la métrique ξ désignant la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et

$$|\tilde{G}(z)|\leq C_1|z|^{2-n} \text{ pour tout } z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \tag{55}$$

Étudions l'équation vérifiée au sens des distributions. Soit $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et soit $R>0$ tel que $\operatorname{Supp}\varphi\subset B_R(0)$. On pose alors

$$\varphi_\alpha(z) = \varphi\left(\frac{\exp_{x_\alpha}^{-1}(z)}{r_\alpha}\right) \text{ si } d_g(z,x_\alpha) < Rr_\alpha \text{ et } \varphi_\alpha(z) = 0 \text{ sinon.}$$

En particulier, $\varphi_\alpha\in C_c^\infty(M)$. En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi_\alpha(x_\alpha) = \int_M G_\alpha(x_\alpha,\cdot)(\Delta_g\varphi_\alpha + a_\alpha\varphi_\alpha)\, dv_g + \pi_{a_\alpha}(\varphi_\alpha)(x_\alpha)\\ &= \int_{B_R(0)}\tilde{G}_\alpha(\Delta_{g_\alpha}\varphi + r_\alpha^2 a_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\cdot))\varphi)\, dv_{g_\alpha} + \pi_{a_\alpha}(\varphi_\alpha)(x_\alpha).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{\alpha\to+\infty}\|\varphi_\alpha\|_1=0$, on a $\lim_{\alpha\to+\infty}\pi_{a_\alpha}(\varphi_\alpha)(x_\alpha)=0$. Du coup, en utilisant (54), on obtient

$$\varphi(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{G}(z)\Delta_\xi\varphi(z)\,dz \text{ pour tout } \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

De plus, il suit de la Proposition 1 que

$$\varphi(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|z|^{n-2}}\Delta_\xi\varphi(z)\,dz \text{ pour tout } \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Par conséquent, $\Delta_\xi(\tilde{G}-\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|\cdot|^{n-2}})=0$ au sens des distributions, et donc, le laplacien étant hypoelliptique, la fonction $\tilde{G}-\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|\cdot|^{n-2}}$ se prolonge en une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$. Il suit alors de (55) et du théorème de Liouville que

$$\tilde{G}(z)=\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|z|^{n-2}} \text{ pour tout } z\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Ceci clôt la preuve de la Proposition 4. □

4.2. **Comportement au bord.** L'étude du comportement au bord requiert le choix d'une carte adaptée. C'est l'objet du lemme suivant (on rappelle que $(\overline{M},g)$ se plonge isométriquement) dans une variété sans bord (N,g)).

Lemme 1. *Soit $x_0\in\partial M$. Alors il existe un voisinage V de x_0 dans N, il existe U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $\varphi\in C^\infty(U,V)$ avec $0\in U$, $\varphi(0)=x_0$ et*

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(U\cap\{x_1<0\})=\varphi(U)\cap M\\ \varphi(U\cap\{x_1=0\})=\varphi(U)\cap\partial M\\ (\varphi^\star g)(0)=\xi.\end{array}\right. \tag{56}$$

En particulier, si $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}\in\overline{M}$ est telle que $\lim_{\alpha\to+\infty}x_\alpha=x_0$, alors, en notant $x_\alpha=\varphi(x_{\alpha,1},x'_\alpha)$ avec $(x_{\alpha,1},x'_\alpha)\in\{x_1\le 0\}\times\mathbb{R}^{n-1}$, on a

$$d_g(x_\alpha,\partial M)=(1+o(1))|x_{\alpha,1}| \text{ quand } \alpha\to+\infty. \tag{57}$$

Preuve du Lemme 1: Par définition d'une variété à bord, on sait qu'il existe U_0 un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $\varphi_0\in C^\infty(U_0,V)$ avec $0\in U_0$, $\varphi_0(0)=x_0$ et

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_0(U_0\cap\{x_1<0\})=\varphi_0(U_0)\cap M\\ \varphi_0(U_0\cap\{x_1=0\})=\varphi_0(U_0)\cap\partial M\end{array}\right.$$

Il existe alors un isomorphisme $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tel que $(\varphi_0^\star g)(0)=L^\star\xi$. Comme $L(\mathbb{R}^n_-)$ est un demi-espace, il existe $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une isométrie telle que $\sigma(\mathbb{R}^n_-)=L(\mathbb{R}^n_-)$. On pose alors $U:=\sigma^{-1}\circ L(U_0)$ et $\varphi:=\varphi_0\circ L^{-1}\circ\sigma$. On montre aisément que (56) a lieu.

Soit maintenant $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}},(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}\in\overline{M}$ tels que $\lim_{\alpha\to+\infty}x_\alpha=\lim_{\alpha\to+\infty}y_\alpha=x_0$. En posant $x_\alpha=\varphi(x_{\alpha,1},x'_\alpha)$ et $y_\alpha=\varphi(y_{\alpha,1},y'_\alpha)$ avec $(x_{\alpha,1},x'_\alpha),(y_{\alpha,1},y'_\alpha)\in\{x_1\le 0\}\times\mathbb{R}^{n-1}$, on a alors

$$\begin{array}{rcl}d_g(x_\alpha,y_\alpha)&=&d_{\varphi^\star g}((x_{\alpha,1},x'_\alpha),(y_{\alpha,1},y'_\alpha))=(1+o(1))d_\xi((x_{\alpha,1},x'_\alpha),(y_{\alpha,1},y'_\alpha))\\ &=&(1+o(1))\sqrt{(x_{\alpha,1}-y_{\alpha,1})^2+|x'_\alpha-y'_\alpha|^2}\end{array}$$

quand $\alpha\to+\infty$. Soit $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}\in\partial M$ tel que $d_g(x_\alpha,\partial M)=d_g(x_\alpha,z_\alpha)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$. On note alors $z_\alpha=\varphi(0,z'_\alpha)$ avec $\lim_{\alpha\to+\infty}z'_\alpha=0$. On a alors d'une part

$$d_g(x_\alpha,\partial M)=d_g(x_\alpha,z_\alpha)=(1+o(1))\sqrt{|x_{\alpha,1}|^2+|x'_\alpha-y'_\alpha|^2}\ge(1+o(1))|x_{\alpha,1}|$$

quand $\alpha \to +\infty$; et d'autre part, $d_g(x_\alpha, \partial M) \leq d_g(x_\alpha, \varphi(0, x'_\alpha)) = (1+o(1))|x_{\alpha,1}|$ quand $\alpha \to +\infty$. Ceci donne (57), et le Lemme est démontré. $\square$

On montre maintenant l'analogue de la Proposition 4 pour des points voisins du bord.

Proposition 5. *Soit des suites* $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in L^\infty(M)$, $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in M$ *et* $(r_\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \in (0,+\infty)$. *On suppose qu'il existe* $K, d > 0$ *tels que* (46) *et* (48) *ont lieu. Pour* $\alpha \in \mathbb{N}$, *on note* G_α *une fonction de Green de* $\Delta_g + a_\alpha$. *On suppose que pour tout* $x \in M$ *on a* $(G_\alpha)_x \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\})$ *pour tout* $\theta \in (0,1)$ *et que* $(G_\alpha)_x$ *s'annule sur* ∂M. *On suppose qu'il existe* $C_1 > 0$ *tel que*

$$d_g(x,y)^{n-2}|G_\alpha(x,y)| \leq C_1 \text{ for all } x,y \in M,\ x \neq y. \tag{58}$$

On suppose que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} r_\alpha = 0 \text{ et } \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d_g(x_\alpha, \partial M)}{r_\alpha} = \rho \in [0,+\infty).$$

En particulier, $\lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha = x_0 \in \partial M$. *Soit alors* φ *une carte en* x_0 *comme dans le Lemme 1. En posant* $x_\alpha = \varphi(x_{\alpha,1}, x'_\alpha)$, *on a alors*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} r_\alpha^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, \varphi((0,x'_\alpha)+r_\alpha x)) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\left(|x-(\rho,0)|^{2-n} - |x+(\rho,0)|^{2-n}\right)$$

pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}^n_-}$, $x \neq (-\rho, 0)$. *De plus, cette convergence a lieu dans* $C^{1,\theta}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_-} \setminus \{(-\rho,0)\})$ *pour tout* $\theta \in (0,1)$.

Preuve de la Proposition 5: Pour $z, y \in \overline{\mathbb{R}^n_-} \cap \frac{U-(0,x'_\alpha)}{r_\alpha}$, $z \neq y$, on pose

$$\tilde{G}_\alpha(z,y) := r_\alpha^{n-2} G_\alpha(\varphi((0,x'_\alpha)+r_\alpha z), \varphi((0,x'_\alpha)+r_\alpha y)).$$

Il suit de (58) qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$|\tilde{G}_\alpha(z,y)| \leq C_2 |x-y|^{2-n} \text{ pour tous } z,y \in \overline{\mathbb{R}^n_-} \cap \frac{U-(0,x'_\alpha)}{r_\alpha},\ z \neq y$$

Posons la métrique $g_\alpha := (\varphi^\star g)((0,x'_\alpha)+r_\alpha\cdot)$. Soit une suite $(z_\alpha)_\alpha \in \overline{\mathbb{R}^n_-}$ telle que $\lim_{\alpha\to+\infty} z_\alpha = z \in \overline{\mathbb{R}^n_-}$ et fixons $R > 0$. Comme on l'a vu dans la preuve de la Proposition 4, $G_x \in H^p_{2,loc}(M \setminus \{x\})$ pour tout $x \in M$, $p \geq 1$ et (51) a lieu: il s'ensuit que $(\tilde{G}_\alpha)_z \in H^p_{2,loc}(\mathbb{R}^n_- \setminus \{z\})$ pour tout $p \geq 1$ et que, après un changement de variables, (51) devient

$$\begin{aligned}\Delta_{g_\alpha} \tilde{G}_\alpha(z_\alpha,\cdot) &+ r_\alpha^2 a_\alpha(\varphi((0,x'_\alpha)+r_\alpha\cdot))\tilde{G}_\alpha(z_\alpha,\cdot)\\ &= -r_\alpha^2 \sum_{i=1}^{d_\alpha} (\psi_\alpha)_i(\varphi((0,x'_\alpha)+r_\alpha z_\alpha))(\psi_\alpha)_i(\varphi((0,x'_\alpha)+r_\alpha\cdot))\end{aligned}$$

dans $(B_R(0) \setminus \{z_\alpha\}) \cap \mathbb{R}^n_-$ et de plus

$$\tilde{G}_\alpha(z_\alpha, y) = 0 \text{ pour } y \in B_R(0) \cap \partial\mathbb{R}^n_-.$$

Tout comme dans la preuve de la Proposition 4, il suit alors de théorie elliptique standard qu'il existe $\tilde{G}_z \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n_-} \setminus \{z\})$ tel que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \tilde{G}_\alpha(z_\alpha,\cdot) = \tilde{G}_z \text{ in } C^1_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_-} \setminus \{z\}) \tag{59}$$

et du coup

$$\Delta_\xi \tilde{G}_z = 0 \text{ dans } \overline{\mathbb{R}^n_-} \setminus \{x\}.$$

et

$$|\tilde{G}_z(y)| \leq C_2|y-z|^{2-n} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n_- \setminus \{z\}. \tag{60}$$

De même que dans la preuve de la Proposition 4, on obtient que pour tout $\phi \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_-})$, on a

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^n_-} \tilde{G}_z \Delta\phi \, dy - \int_{\partial\mathbb{R}^n_-} \partial_1 \tilde{G}_z \phi \, d\sigma. \tag{61}$$

On pose

$$\tilde{H}(z,y) := \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \left(|z-y|^{2-n} - |z^*-y|^{2-n}\right)$$

pour tous $y, z \in \mathbb{R}^n_-$, $y \neq z$, où $z^* := (-z_1, z')$ si $z = (z_1, z')$. Il suit alors de la Proposition 1 appliqué sur $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne que

$$\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^n_-} \tilde{H}_z \Delta\phi \, dy - \int_{\partial\mathbb{R}^n_-} \partial_1 \tilde{H}_z \phi \, d\sigma \tag{62}$$

pour tout $\phi \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_-})$. En posant $\mathcal{H}_z := \tilde{G}_z - \tilde{H}_z$, il suit de (61) et (62) que

$$\int_{\mathbb{R}^n_-} \mathcal{H}_z \Delta\phi \, dy - \int_{\partial\mathbb{R}^n_-} \partial_1 \mathcal{H}_z \phi \, d\sigma = 0 \tag{63}$$

pour tout $\phi \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_-})$. En posant $T(y_1, y) := -\text{signe}(y_1)\mathcal{H}_z(-|y_1|, y)$ pour $y \neq z$ et $y \neq (-z_1, z')$, on a $T \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et il suit de (63) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} T\Delta\phi \, dy = 0 \text{ pour tout } \phi \in C^2(\mathbb{R}^n).$$

Et donc $\Delta T = 0$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}^n$. Par hypoellipticité, T se prolonge en une fonction harmonique tendant vers 0 à l'infini (c'est une conséquence de (60) et de la définition de H). Donc $T \equiv 0$ et donc

$$\tilde{G}_z(y) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \left(|z-y|^{2-n} - |z^*-y|^{2-n}\right) \tag{64}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n_- \setminus \{z\}$. Grâce à (57), on a $\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha} = -\rho$. La Proposition 5 suit en prenant $z_\alpha = \left(\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}, 0\right)$. □

4.3. **Conséquences sur l'existence des fonctions de Green en général.** Comme corollaire des Propositions 4 et 5, on obtient un premier contrôle des dérivées de la fonction de Green:

Corollaire 1. *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soit G une fonction de Green pour $\Delta_g + a$. On suppose qu'il existe $K, d > 0$ tels que (46) et (48) ont lieu. On suppose que $G_x \in C^1(\overline{M} \setminus \{x\})$ pour tout $x \in M$ et qu'il existe $C_4 > 0$ tel que*

$$|G(x,y)| \leq C_4 d_g(x,y)^{2-n} \text{ pour tous } x, y \in M, \ x \neq y.$$

Alors il existe $C(M, K, C_4)$ telle que

$$|\nabla G_x(y)| \leq C(M, K, d, C_4) d_g(x,y)^{1-n} \text{ pour tous } x, y \in M, \ x \neq y.$$

Preuve du Corollaire 1: Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $(a_\alpha)_\alpha \in L^\infty(M)$ tel que (46) a lieu et soit G_α une fonction de Green associée à $\Delta_g + a_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ telle que

$$|G_\alpha(x,y)| \le C_4 d_g(x,y)^{2-n} \text{ pour tous } x,y \in M,\ x \neq y. \tag{65}$$

On suppose qu'il existe $(x_\alpha)_\alpha, (y_\alpha)_\alpha \in M$ tels que $x_\alpha \neq y_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{n-1}|\nabla (G_\alpha)_{x_\alpha}(y_\alpha)| = +\infty. \tag{66}$$

Quitte à extraire, supposons qu'il existe $x_0, y_0 \in M$ tels que $\lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha = x_0$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} y_\alpha = y_0$.

Cas 1: supposons que $x_0 \neq y_0$. En posant $2\delta := d_g(x_0,y_0)$, il suit alors de (51), de (65) et de théorie elliptique standard que $\|(G_\alpha)_{x_\alpha}\|_{C^1(\overline{M}\setminus B_\delta(x_0))} \le C(M, C_4, K, d, \delta)$, et donc $|\nabla (G_\alpha)_{x_\alpha}(y_\alpha)| = O(1)$ quand $\alpha \to +\infty$. Ceci est une contradiction avec (66). Ceci termine le Cas 1.

Cas 2: supposons que $x_0 = y_0$. Dans le cas où $d_g(x_\alpha,y_\alpha) = o(d(x_\alpha,\partial M))$ quand $\alpha \to +\infty$, on applique alors la Proposition 4 avec $r_\alpha := d_g(x_\alpha,y_\alpha)$ et on obtient

$$\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{n-1}|\nabla (G_\alpha)_{x_\alpha}(y_\alpha)| = \frac{1}{\omega_{n-1}},$$

ce qui est encore en contradiction avec (66). Dans le cas $d(x_\alpha,\partial M) = O(d_g(x_\alpha,y_\alpha))$ quand $\alpha \to +\infty$, on applique la Proposition 5 et on aboutit encore à une contradiction avec (66). Ceci termine le Cas 2.

L'assertion (66) étant contredite dans tous les cas, ceci prouve le Corollaire 1. $\square$.

Enfin, on déduit du corollaire précédent l'existence de la fonction de Green dans le cas général:

Corollaire 2 (Preuve du Théorème 1: existence)**.** *Soit $a \in L^\infty(M)$. Alors il existe une fonction de Green, notée G, pour $\Delta_g + a$ avec condition de Dirichlet au bord. De plus, pour tout $x \in M$, on a $G_x \in C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus\{x\})$ pour tout $\theta \in (0,1)$ et il existe $C(M,K,\lambda,d) > 0$ tel que*

$$d_g(x,y)^{n-2}|G(x,y)| + d_g(x,y)^{n-1}|\nabla G_x(y)| \le C(M,K,\lambda,d) \tag{67}$$

pour tous $x,y \in M$, $x \neq y$. De plus, on a $G_x(y) = 0$ pour tout $x \in M$ et tout $y \in \partial M$.

Preuve du Corollaire 2: Soit G_1 une fonction de Green de $\Delta_g + 1$ construite comme dans le Théorème 3. En particulier $(G_1)_x \in C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus\{x\})$ pour tout $\theta \in (0,1)$ et tout $x \in M$. Il suit du Corollaire 1 qu'il existe $C(M) > 0$ tel que

$$d_g(x,y)^{n-2}|G_1(x,y)| + d_g(x,y)^{n-1}|\nabla (G_1)_x(y)| \le C(M) \text{ pour tous } x,y \in M,\ x \neq y.$$

On peut donc appliquer la Proposition 3 avec $\Gamma := G_1$, $h := 1$ et $f := 0$. Comme $((G_1)_x)_{|\partial M} = 0$, on obtient l'existence d'une fonction de Green pour $\Delta_g + a$ avec la borne (18). Il suit alors du Corollaire 1 que (67) a lieu. Ceci termine la preuve du Corollaire 2. $\square$

5. Unicité

Proposition 6. *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soit $x \in \overline{M}$. Soit G une fonction de Green de $\Delta_g + a$. On suppose qu'il existe $H_x \in L^1(M) \cap K_a^\perp$ tel que pour tout $\varphi \in C^2(\overline{M})$ tel que $\varphi_{|\partial M} = 0$, on a*

$$\int_M H_x(\Delta_g \varphi + a\varphi)\, dv_g = (\varphi - \pi_a(\varphi))(x). \tag{68}$$

Alors $H_x = G_x$ presque-partout si $x \in M$ et $H_x = 0$ si $x \in \partial M$.

Preuve de la Proposition 6: **Étape 1:** Montrons que $H_x \in L^q(M)$ pour tout $q \in [1, \frac{n}{n-2})$.
En effet, soit $\psi \in C_c^\infty(M)$ et soit $\varphi \in C^2(\overline{M})$ $(p > 1)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g \varphi + \varphi = \psi & \text{sur } M \\ \varphi_{|\partial M} = 0 & \end{array} \right. \tag{69}$$

Ceci existe par théorie elliptique standard. On a donc

$$\begin{aligned} \left| \int_M H_x \psi \, dv_g \right| &= \left| \int_M H_x(\Delta_g \varphi + a\varphi)\, dv_g + \int_M H_x(a-1)\varphi\, dv_g \right| \\ &= \left| \varphi(x) - \pi_a(\varphi)(x) + \int_M H_x(a-1)\varphi\, dv_g \right| \\ &\leq C(a,M)\|\varphi\|_\infty + C(M)\|H_x\|_1 \|a-1\|_\infty \|\varphi\|_\infty \\ &\leq C'(a,x,H_x,M)\|\varphi\|_\infty \end{aligned} \tag{70}$$

De plus, pour $q < \frac{n}{n-2}$, on a $q' := \frac{q}{q-1} > \frac{n}{2}$ et il suit de (69), des plongements de Sobolev et de théorie elliptique que

$$\|\varphi\|_\infty \leq C(M,q)\|\psi\|_{\frac{q}{q-1}} \leq C'(M,q)\|\psi\|_{\frac{q}{q-1}},$$

et donc, avec (70), on obtient

$$\left| \int_M \psi H_x \, dv_g \right| \leq C'(a,x,H_x,M,q)\|\psi\|_{\frac{q}{q-1}}$$

pour tout $\psi \in C_c^\infty(M)$. On en déduit par dualité que $H_x \in L^q(M)$. Ceci achève l'étape 1.

Étape 2: On suppose ici que $x \in M$. Soit $\psi \in C_c^\infty(M)$ et soit $\varphi \in H_2^p(M) \cap C^1(\overline{M})$ pour tout $p \geq 1$ tel que $\Delta_g \varphi + a\varphi = \psi - \pi_a(\psi)$ dans M et $\varphi_{|\partial M} = 0$. Il suit de l'étape 1 que $H_x, G_x \in L^q(M)$ pour $1 \leq q < \frac{n}{n-2}$: par densité de $C^2(\overline{M})$ dans $H_2^p(M)$, on applique (68) à H_x et G_x (car G est une fonction de Green) et il vient

$$\int_M (\psi - \pi_a(\psi))(G_x - H_x)\, dv_g = 0.$$

Notons que cet argument marche que x soit au bord ou pas. Avec un léger abus de notation (car $G_x - H_x$ n'est pas nécessairement dans $H_1^2(M)$), on obtient

$$\int_M \psi(G_x - H_x - \pi_a(G_x - H_x))\, dv_g = 0.$$

Il suit du choix de G_x et de H_x que $\pi_a(G_x) = \pi_a(H_x) = 0$, et donc $\int_M \psi(G_x - H_x)\, dv_g = 0$ pour tout $\psi \in C_c^\infty(M)$. Comme il suit de l'étape 1 que $H_x - G_x \in L^q(M)$ pour certains $q > 1$, on en déduit que $H_x = G_x$. D'où le résultat dans le cas $x \in M$.

Dans le cas $x \in \partial M$, on notera que (68) s'écrit $\int_M H_x(\Delta_g\varphi + a\varphi)\, dv_g = 0$: la même preuve que ci-dessus donne alors $H_x = 0$. $\square$

On associant la Proposition 6 et le Corollaire 2, on obtient:

Corollaire 3 (Preuve du Théorème 1: unicité)**.** *Soit $a \in L^\infty(M)$. Alors il existe une unique fonction de Green pour $\Delta_g + a$. En particulier, elle satisfait les conclusions du Corollaire 2.*

6. Continuité

Proposition 7. *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soit G la fonction de Green de $\Delta_g + a$. Alors G se prolonge continuement à $\overline{M} \times \overline{M} \setminus Diag(\overline{M})$.*

Preuve de la Proposition 7: Pour $x \in \partial M$, on pose $G_x = 0$.
Étape 1: Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in \overline{M}$ et $x_\infty \in \overline{M}$ tels que $\lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha = x_\infty$. Alors on a

$$\lim_{\alpha\to+\infty} G(x_\alpha, \cdot) = G(x_\infty, \cdot) \text{ dans } C^1_{loc}(\overline{M} \setminus \{x_\infty\}). \tag{71}$$

Preuve de l'étape 1: Soit $(G(x_{\alpha'}, \cdot))_\alpha$ une sous-suite de $(G(x_\alpha, \cdot))_\alpha$. D'après (67), il existe $C > 0$ tel que

$$|G(x, y)| \leq C d_g(x, y)^{2-n}$$

pour tout $x, y \in \overline{M}$, $x \neq y$. Il suit alors de (51) et de théorie elliptique qu'il existe $G' \in C^1(\overline{M} \setminus \{x_\infty\})$ tel que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} G(x_{\alpha''}, \cdot) = G' \text{ dans } C^1_{loc}(\overline{M} \setminus \{x_\infty\})$$

où α'' est une sous-suite de α'. De plus, $G' \in L^1(M)$ et $G' \perp K_a$. Soit $\varphi \in C^2(\overline{M})$ tel que $\varphi_{|\partial M} = 0$. Par définition de la fonction de Green, on a

$$\int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi) G_{x_{\alpha''}}\, dv_g = (\varphi - \pi_a(\varphi))(x_{\alpha''})$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En passant à la limite $\alpha \to +\infty$, on obtient

$$\int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi) G'\, dv_g = (\varphi - \pi_a(\varphi))(x_\infty)$$

pour tout $\varphi \in C^2(\overline{M})$ tel que $\varphi_{|\partial M} = 0$. Il suit de la Proposition 6 que $G' \equiv G_{x_\infty}$, et donc $(G(x_{\alpha''}, \cdot))_\alpha$ converge vers G_{x_∞}, où α'' est une sous-suite d'une sous-suite arbitraire α' de α. On en déduit (71).

Étape 2: Nous pouvons maintenant terminer la preuve la Proposition 7. Soient $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}, (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in \overline{M}$ telles qu'il existe $x, y \in \overline{M}$ tels que $\lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha = x$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} y_\alpha = y$ avec $x \neq y$. Soit G la fonction de Green associée à $\Delta_g + a$. Soit $\delta > 0$ tel que $d_g(x, y) \geq 2\delta$. On a alors

$$\begin{aligned} |G(x_\alpha, y_\alpha) - G(x, y)| &\leq |G_{x_\alpha}(y_\alpha) - G_x(y_\alpha)| + |G_x(y_\alpha) - G_x(y)| \\ &\leq \|G_{x_\alpha} - G_x\|_{L^\infty(\overline{M}\setminus B_\delta(x))} + \|G_x\|_{C^1(\overline{M}\setminus B_\delta(x))} d_g(y_\alpha, y) \end{aligned}$$

car $G_x \in C^1_{loc}(\overline{M} \setminus \{x\})$. Il suit alors de (71) que $\lim_{\alpha\to+\infty} G(x_\alpha, y_\alpha) = G(x, y)$. Ainsi G est continue sur $\overline{M} \times \overline{M} \setminus Diag(\overline{M})$. La Proposition 7 est démontrée. $\square$

Remarque: cette propriété cesse d'être vraie si on n'impose pas l'orthogonalité (ii) dans la définition de la fonction de Green. En effet, si G est la fonction de Green de Δ_g sur une variété compacte sans bord M, alors pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$, la fonction $(x, y) \mapsto G(x, y) + f(x)$ satisfait les points (i) et (iii) de la définition de la fonction de Green, mais elle n'est évidemment pas continue si f ne l'est pas.

7. Symétrie

Le caractère auto-adjoint de l'opérateur $\Delta_g + a$ induit la symétrie de la fonction de Green:

Proposition 8. *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soit G la fonction de Green de $\Delta_g + a$ avec condition de Dirichlet au bord. Alors G est symétrique (c'est-à-dire $G(x, y) = G(y, x)$ pour tous $x, y \in M$ tels que $x \neq y$).*

Preuve de la Proposition 8: Soit $\psi \in C^0(\overline{M})$ avec $\psi \perp K_a$. Pour $y \in \overline{M}$, on pose

$$h(y) := \int_M G(x, y)\psi(x)\, dv_g(x).$$

La fonction h est alors bien définie et continue sur $\overline{M}$ grâce à (67) et à la Proposition 7. On a alors $h \in C^0(\overline{M}) \cap L^\infty(M)$. De plus, il suit du théorème de Fubini (qui est licite ici grâce à (67) et à la Proposition 7) et de $G_x \perp K_a$ que pour tout $i \in \{1, ..., d_a\}$ on a

$$\begin{aligned} \int_M h\psi_i\, dv_g &= \int_M \psi_i(y) \left(\int_M G(x, y)\psi(x)\, dv_g(x) \right) dv_g(y) \\ &= \int_M \psi(x) \left(\int_M G(x, y)\psi_i(y)\, dv_g(y) \right) dv_g(x) = 0. \end{aligned} \tag{72}$$

Soit maintenant $\varphi \in H_2^p(M)$ pour $p > n$ (de sorte que $\varphi \in C^1(\overline{M})$) telle que $\varphi = 0$ sur ∂M et $\varphi \perp K_a$. En utilisant une fois encore le théorème de Fubini, la définition de la fonction de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \int_M h(\Delta_g\varphi + a\varphi)\, dv_g &= \int_{M\times M} G(x, y)\psi(x)(\Delta_g\varphi(y) + a(y)\varphi(y))\, dv_g(x)\, dv_g(y) \\ &= \int_M \psi(x) \left(\int_M G(x, y)(\Delta_g\varphi(y) + a(y)\varphi(y))\, dv_g(y) \right) dv_g(x) \\ &= \int_M \psi(x)(\varphi - \pi_a(\varphi))(x)\, dv_g(x) = \int_M \psi\varphi\, dv_g. \end{aligned}$$

Soit $\tau \in H_2^p(M) \cap K_a^\perp$ (et donc $\tau \in C^1(\overline{M})$) telle que

$$\begin{cases} \Delta\tau + a\tau = \psi & \text{dans } M \\ \tau = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

La fonction τ est bien définie par théorie elliptique standard car $\psi \in K_a^\perp$. En intégrant par parties et sachant que $\tau, \varphi \in H_2^p(M)$ pour tout $p \geq 1$, on obtient

$$\int_M h(\Delta_g\varphi + a\varphi)\, dv_g = \int_M \psi\varphi\, dv_g = \int_M (\Delta_g\tau + a\tau)\varphi\, dv_g = \int_M \tau(\Delta_g\varphi + a\varphi)\, dv_g$$

car $\tau = \varphi = 0$ sur ∂M. Du coup, on obtient

$$\int_M (h - \tau)(\Delta_g\varphi + a\varphi)\, dv_g = 0 \tag{73}$$

pour tout $\varphi \in H_2^p(M)$ $(p > n)$ telle que $\varphi = 0$ sur ∂M et $\varphi \perp K_a$. En particulier, comme $h - \tau \in K_a^\perp \cap L^\infty(M)$, il existe $\varphi \in H_2^p(M)$ pour tout $p \geq 1$ telle que $\varphi = 0$ sur ∂M et $\varphi \perp K_a$ telle que $\Delta_g\varphi + a\varphi = h - \tau$ sur M. En prenant un tel φ dans

(73), on obtient $h(x) = \tau(x)$ pour presque tous $x \in M$ et donc $h = \tau$ par continuité de h et τ. Ainsi, il vient pour tout $x \in M$ que

$$\int_M (G(x,y) - G(y,x))\psi(y)\, dv_g(y) = 0$$

pour tout $x \in M$ et pour tout $\psi \in C^0(\overline{M})$ tel que $\psi \perp K_a$. Soit $\psi' \in C^0(\overline{M})$: en prenant $\psi := \psi' - \pi_a(\psi')$ ci-dessus et en intégrant par parties, il suit avec un léger abus de notation (car $G(x,\cdot) - G(\cdot,x)$ n'est pas nécessairement dans $H_1^2(M)$) que

$$\int_M (G(x,\cdot) - G(\cdot,x) - \pi_a(G(x,\cdot) - G(\cdot,x)))\psi'\, dv_g = 0$$

pour tout $\psi' \in C^0(\overline{M})$. Avec la continuité de G et l'inégalité ponctuelle (67), on a

$$G(x,\cdot) - G(\cdot,x) - \pi_a(G(x,\cdot) - G(\cdot,x)) = 0 \tag{74}$$

pour tout $x \in \overline{M}$. De plus, $\pi_a(G(x,\cdot)) = 0$ car $G_x \perp K_a$. Montrons que $\pi_a(G(\cdot,x)) = 0$ pour tout $x \in M$. Soit $u \in K_a$ et soit $\varphi \in C^2(\overline{M})$ telle que $\varphi_{|\partial M} = 0$. Il suit de la formule de Green que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M u(\varphi - \pi_a(\varphi))\, dv_g = \int_{M\times M} u(x)G(x,y)(\Delta_g\varphi + a\varphi)(y)\, dv_g(x)\, dv_g(x) \\ &= \int_M (\Delta_g\varphi + a\varphi)h_u\, dv_g \end{aligned}$$

où on a posé $h_u(y) := \int_M u(x)G(x,y)\, dv_g(x)$ (qui est bien définie et continue d'après (67) et à la Proposition 7). En particulier, comme plus haut, on en déduit que $h_u \in K_a$. Soit $v \in K_a$: on a alors d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_M h_u v\, dy &= \int_{M\times M} G(x,y)u(x)v(y)\, dv_g(x)\, dv_g(y) \\ &= \int_M \left(\int_M G(x,y)v(y)\, dv_g(y)\right) u(x)\, dv_g(x) = 0 \end{aligned}$$

car $G_x \in K_a^\perp$. Ceci étant valable pour tout $v \in K_a$, on en déduit donc que $h_u \in K_a^\perp$. Comme $h_u \in K_a$, on obtient donc $h_u \equiv 0$. On en déduit donc que pour y fixé, la fonction $G(\cdot,y)$ est dans $K_a^\perp$, et donc $\pi_a(G(\cdot,y)) \equiv 0$ pour tout $y \in M$. Il suit alors de (74) que $G(x,y) = G(y,x)$ pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$. □

Remarque: comme pour la continuité, cette propriété cesse d'être vraie si on n'impose pas l'orthogonalité (ii) dans la définition de la fonction de Green. Pour s'en rendre compte, on reprendra l'exemple de la remarque suivant la preuve de la continuité de G: la nouvelle fonction n'est évidemment pas symétrique si f n'est pas constante.

8. Différentiabilité

8.1. Régularité C^1.

Proposition 9. *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soit G la fonction de Green de $\Delta_g + a$. Alors $G \in C^{1,\theta}\left(\overline{M} \times \overline{M} \setminus Diag(\overline{M})\right)$ pour tout $\theta \in (0,1)$.*

Preuve de la Proposition 9: Soient $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in \overline{M} \times \overline{M}$ telle qu'il existe $(x,y) \in \overline{M} \times \overline{M}$ telle que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} (x_\alpha, y_\alpha) = (x,y) \text{ avec } x \neq y.$$

Afin d'alléger la preuve, on se permet un abus de notation: on fixe $i \in \{1, ..., n\}$ et on note ∂_{y_i} la dérivée partielle d'une fonction dans la $i$ème direction selon la seconde variable via une carte locale. Soit $\delta > 0$ tel que $d_g(x,y) \geq 3\delta$. On a

$$\begin{aligned} &|\partial_{y_i} G(x_\alpha, y_\alpha) - \partial_{y_i} G(x,y)| \\ &\leq |\partial_{y_i} G_{x_\alpha}(y_\alpha) - \partial_{y_i} G_x(y_\alpha)| + |\partial_{y_i} G_x(y_\alpha) - \partial_{y_i} G_x(y)| \\ &\leq \|G_{x_\alpha} - G_x\|_{C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus B_{2\delta}(x))} + \|G_x\|_{C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus B_{2\delta}(x))} d_g(y_\alpha, y)^\theta \end{aligned} \tag{75}$$

De plus, on a d'après (51), on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g (G_{x_\alpha} - G_x) + a(G_{x_\alpha} - G_x) = -\sum_{i=1}^{d_a} (\psi_i(x_\alpha) - \psi_i(x))\psi & \text{dans } M \setminus B_\delta(x) \\ G_{x_\alpha} - G_x = 0 & \text{sur } \partial M \end{array} \right.$$

Il suit alors de théorie elliptique standard et de (14) que

$$\begin{aligned} &\|G_{x_\alpha} - G_x\|_{C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus B_{2\delta}(x))} \\ &\leq C(M,K,\theta,\delta) \left(\|G_{x_\alpha} - G_x\|_{L^\infty(M\setminus B_\delta(x))} + \sum_{i=1}^{d_a} \|\psi_i\|_\infty |\psi_i(x_\alpha) - \psi_i(x)| \right) \\ &\leq C(M,K,\theta,d,\delta) \left(\|G_{x_\alpha} - G_x\|_{L^\infty(M\setminus B_\delta(x))} + d_g(x_\alpha, x)^\theta \right) \end{aligned} \tag{76}$$

Ici, on a choisi K, d tels que (2) et (3) ont lieu. Pour évaluer l'avant-dernier terme, on utilise la symétrie de la fonction de Green: pour $z \in M \setminus B_\delta(x)$, on a

$$\begin{array}{rcl} |G_{x_\alpha}(z) - G_x(z)| & \leq & |G_z(x_\alpha) - G_z(x)| \\ & \leq & \|G_z\|_{C^1(\overline{M}\setminus B_\delta(z))} d_g(x_\alpha, x) \end{array}$$

Il suit alors de (67) qu'il existe $C(a,x,\delta) > 0$ tel que

$$\|G_{x_\alpha} - G_x\|_{L^\infty(M\setminus B_\delta(x))} \leq C(M,K,\lambda,d,\delta) d_g(x_\alpha, x)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En incluant cette inégalité dans (76) et (75), il vient

$$\begin{array}{rcl} |\partial_{y_i} G(x_\alpha, y_\alpha) - \partial_{y_i} G(x,y)| & \leq & C(M,K,d,\lambda,\delta,\theta)(d_g(x_\alpha, x) + d_g(y_\alpha, y)^\theta) \\ & \leq & C(M,K,d,\lambda,\delta,\theta)(d_g(x_\alpha, x) + d_g(y_\alpha, y))^\theta \end{array}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. On a donc montré que pour tout $\delta > 0$, on a

$$|\partial_{y_i} G(x', y') - \partial_{y_i} G(x,y)| \leq C(M,K,d,\lambda,\delta,\theta)(d_g(x', x) + d_g(y', y))^\theta$$

pour tous $(x,y), (x',y') \in \overline{M} \times \overline{M}$ tels que $d_g(x,y) \geq \delta$ et $d_g(x',y') \geq \delta$. On obtient alors avec symétrie que $G \in C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M} \times \overline{M} \setminus \text{Diag}(\overline{M}))$. De plus, pour tout $\delta > 0$, il existe $C(M,K,\lambda,d,\theta,\delta) > 0$ tel que

$$\|G\|_{C^{1,\theta}(\overline{M}\times\overline{M}\cap\{d_g(x,y)>\delta\})} \leq C(M,K,\lambda,d,\theta,\delta). \tag{77}$$

Ceci achève la preuve de la Proposition 9. □

Remarque: la régularité ici obtenue est maximale car on a imposé d'avoir seulement $a \in L^\infty(M)$. Avec $a \in C^{k,\theta}(M)$, on obtiendrait plus généralement (et plus facilement!) la régularité $C^{k+2,\theta}$ en dehors de la diagonale. Cependant, toujours sous l'hypothèse $a \in L^\infty$, on peut montrer un peu plus de régularité si on s'autorise des dérivations croisées suivant la première et la seconde variable. C'est l'objet de la section suivante, et comme application, nous obtiendrons des estimées ponctuelles optimales pour G en faisant intervenir la distance au bord.

8.2. **Dérivées croisées.** Comme expliqué plus haut, même si G n'est pas deux fois différentiable en général, nous allons montrer que les dérivées croisées en x et y ont un sens. Ceci va nous permettre d'améliorer l'inégalité (67) afin de rendre compte de la nullité au bord dans le cas $\partial M \neq \emptyset$. Pour simplifier l'écriture, on ne note pas les espaces d'arrivée des fonctions car il n'y a pas d'ambiguité (par exemple, on récupère le fibré cotangent dans la proposition ci-après).

Proposition 10. *Soit $x \in \overline{M}$. On a $\nabla_x G(x,\cdot) \in C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M} \setminus \{x\}$, $\nabla_y G(x,\cdot) \in C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M} \setminus \{x\})$ et $\nabla_y\nabla_x G, \nabla_y\nabla_x G \in C^{0,\theta}_{loc}(\overline{M} \times \overline{M} \setminus Diag(\overline{M}))$ pour tout $\theta \in (0,1)$. De plus, pour tout $\delta > 0$, il existe $C(\theta, \delta, M, K, \lambda, d)$ tel que*

$$\|\nabla_x G(x,\cdot)\|_{C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus B_\delta(x))} \leq C(\theta, \delta, M, K, \lambda, d) \tag{78}$$

et

$$\|\nabla_y\nabla_x G\|_{C^{0,\theta}(K_\delta)} + \|\nabla_x\nabla_y G\|_{C^{0,\theta}(K_\delta)} \leq C(\theta, \delta, M, K, \lambda, d) \tag{79}$$

pour tout $x \in \overline{M}$, où $K_\delta := \{(x,y) \in \overline{M} \times \overline{M} / \, d_g(x,y) > \delta\}$.

Preuve de la Proposition 10: Fixons $x_0 \in \overline{M}$. On a déjà vu (voir (51)) que $G_x \in H^p_{2,loc}(\overline{M} \setminus \{x\})$ pour tout $p \geq 1$ et que

$$\begin{cases} \Delta_g G_x + aG_x = -\sum_{j=1}^{d_a} \psi_j(x)\psi_j & \text{dans } M \setminus \{x\} \\ G_x = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases} \tag{80}$$

où $(\psi_i)_{i=1,\dots,d_a}$ est une base orthonormée de K_a. On va distinguer deux cas, selon que x_0 est voisin ou non du bord.

Cas 1: Soit $x_0 \in M$, c'est-à-dire $x_0 \notin \partial M$. Soit alors une carte $\varphi \in C^\infty(B_{2r}(0), V)$ telle que $x_0 \in V$ avec V ouvert relativement compact de M et $r > 0$ suffisamment petit. Pour $\tilde{x} \in B_{2r}(0)$, on note $\tilde{G}(\tilde{x}, y) := G(\varphi(\tilde{x}), y)$. Fixons $k \in \{1, ..., n\}$ et notons e_k le $k$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $\tilde{x} \in B_r(0)$ et pour $t \in (-r, r)$, il suit de (80) que

$$\begin{cases} (\Delta_g + a)\frac{\tilde{G}(\tilde{x}+te_k,\cdot)-\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)}{t} = -\sum_{j=1}^{d_a} \frac{\psi_j(\tilde{x}+te_k)-\psi_j(\tilde{x})}{t}\psi_j & \text{dans } M \setminus \{x\} \\ \frac{\tilde{G}(\tilde{x}+te_k,\cdot)-\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)}{t} = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Il suit de théorie elliptique standard et de (14) que pour tout $\delta > 0$ et tout $p > n$, il existe $C(M, K, d, \delta, p) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\tilde{G}(\tilde{x}+te_k,\cdot)-\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)}{t}\right\|_{H^p_2(M\setminus B_{2\delta}(\varphi(\tilde{x})))} \\ &\leq C(M, K, d, \delta, p) + C(M, K, d, \delta, p)\left\|\frac{\tilde{G}(\tilde{x}+te_k,\cdot)-\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)}{t}\right\|_{L^\infty(M\setminus B_\delta(\varphi(\tilde{x})))} \end{aligned}$$

Il suit alors de (67) et de la symétrie de G que

$$\left\|\frac{\tilde{G}(\tilde{x}+te_k,\cdot)-\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)}{t}\right\|_{H^p_2(M\setminus B_{2\delta}(\varphi(\tilde{x})))} \leq C(M, K, d, \lambda, \delta, p) \tag{81}$$

pour tout $t \in (-r, r)$. Par compacité des plongements de Sobolev sous-critiques, on obtient que pour tout $\theta \in (0,1)$, il existe $U \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus B_{2\delta}(\varphi(\tilde{x}))$ et il existe une suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (-r,r)$ telle que $\lim_{i\to+\infty} t_i = 0$ et

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\tilde{G}(\tilde{x}+t_i e_k,\cdot)-\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)}{t_i} = U \text{ dans } C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus B_{2\delta}(\varphi(\tilde{x})).$$

En particulier, comme $G\in C^1(\overline{M}\times\overline{M}\setminus \mathrm{Diag}(\overline{M}))$, on a $\partial_{x_k}\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)=U\in C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus B_{2\delta}(\varphi(\tilde{x}))$. En prenant $t:=t_i$ dans (81) et en faisant tendre i vers l'infini, on obtient

$$\|\partial_{x_k}\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)\|_{C^{1,\theta}(M\setminus B_{2\delta}(\varphi(\tilde{x})))}\leq C(M,K,d,\lambda,\delta,\theta).$$

En prenant l'expression analytique de la dérivée covariante dans une carte, on obtient que $\nabla_x G_x\in C^{1,\theta}$ pour tout $\theta\in(0,1)$ et (78) a lieu pour $x\in\varphi(B_r(0))$. Le contrôle ponctuel ci-dessus étant indépendant de $\tilde{x}$, en utilisant que $\partial_{x_k}G$ est $C^{0,\theta}$ en les deux variables en dehors de la diagonale, on obtient (79) pour $\nabla_y\nabla_x G$ à partir d'estimées apriori standard (voir [1]). Pour la dérivée $\nabla_x\nabla_y$, il suffit d'utiliser la symétrie de G. On en déduit (79) pour $\nabla_x\nabla_y G$.

Cas 2: On suppose ici que $x_0\in\partial M$. Soit alors une carte $\varphi\in C^\infty(B_{2r}(0),V)$ telle que $x_0\in V$ avec V ouvert relativement compact de N (la variété contenant $\overline{M}$) et telle que

$$\varphi(B_{2r}(0)\cap\mathbb{R}^n_-)=V\cap M \text{ et } \varphi(B_{2r}(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_-)=V\cap\partial M.$$

Pour une fonction $\Phi:\overline{M}\times\overline{M}\to\mathbb{R}$, on définit $\hat{\Phi}:B_{2r}(0)\times\overline{M}\to\mathbb{R}$ par

$$\hat{\Phi}(\tilde{x},y)=\left\{\begin{array}{ll}\Phi(\varphi(x_1,x'),y) & \text{si } x_1\leq 0\\ -\Phi(\varphi(-x_1,x'),y) & \text{si } x_1\geq 0\end{array}\right.$$

pour $\tilde{x}=(x_1,x')\in B_{2r}(0)$. On déduit alors aisément de (80) et de théorie elliptique que $\hat{G}(\tilde{x},\cdot)\in H_2^p(B_{2r}(0)\times\overline{M})$ pour tout $p>n$ et que

$$\left\{\begin{array}{ll}\Delta_g\hat{G}(\tilde{x},\cdot)+a\hat{G}(\tilde{x},\cdot)=-\sum_{j=1}^{d_a}\hat{\psi}_j(\tilde{x})\psi_i & \text{dans } M\setminus\{\varphi(\tilde{x}),\varphi(-x_1,x')\}\\ \hat{G}(\tilde{x},\cdot)=0 & \text{sur } \partial M.\end{array}\right.$$

pour tout $\tilde{x}=(x_1,x')\in B_{2r}(0)$. De même que dans le premier cas, on obtient que $\partial_{x_k}\tilde{G}(\tilde{x},\cdot)\in C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus\{\varphi(\tilde{x}),\varphi(-x_1,x')\})$ avec un contrôle ponctuel. En repassant aux dérivées covariantes, on obtient que (78) a lieu pour $x\in\varphi(B_r(0))\cap\overline{M}$.

Par compacité, on recouvre $\overline{M}$ par un nombre fini de voisinages tels qu'on peut appliquer les Cas 1 ou 2. Ceci prouve (78) et (79), et la Proposition 10 est démontrée.

9. Contrôle asymptotique optimal

L'objectif est ici d'améliorer l'estimée ponctuelle (67) afin de tenir compte des conditions de Dirichlet au bord pour ainsi démontrer le Théorème 2. Comme on le verra dans la section suivante, cette estimée est optimale. Dans le cadre de la preuve, on distingue deux cas, suivant que les points considérés sont proches ou pas de la diagonale.

9.1. **Estimées au bord en dehors de la diagonale.**

Proposition 11. *Soit des suites $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}\in L^\infty(M)$, $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}\in M$ et $(r_\alpha)_{n\in\mathbb{N}}\in(0,+\infty)$. On suppose qu'il existe $K,\lambda,d>0$ tels que (46), (47) et (48) ont lieu. Pour $\alpha\in\mathbb{N}$, on note G_α la fonction de Green de Δ_g+a_α. Il existe $G:\overline{M}\times\overline{M}\setminus Diag(\overline{M})\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $\theta\in(0,1)$, $G\in C^{1,\theta}(\overline{M}\times\overline{M}\setminus Diag(\overline{M}))$ telle que, à extraction près, $\lim_{\alpha\to+\infty}G_\alpha=G$ dans $C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M}\times\overline{M}\setminus Diag(\overline{M}))$, avec de plus $\nabla_x G(x,\cdot)$ qui existe et est $C^{1,\theta}$ et $\lim_{\alpha\to+\infty}\nabla_x G_\alpha(x,\cdot)=\nabla_x G(x,\cdot)$ dans*

$C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M}\backslash\{x\})$. De plus, $\nabla_y\nabla_x G \in C^{0,\theta}_{loc}(\overline{M}\times\overline{M}\backslash Diag(\overline{M}))$ et $\lim_{\alpha\to+\infty}\nabla_y\nabla_x G_\alpha = \nabla_y\nabla_x G$ dans $C^{0,\theta}_{loc}(\overline{M}\times\overline{M}\setminus Diag(\overline{M}))$.

Soient $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}, (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in \overline{M}$ telles qu'il existe $x_0, y_0 \in \overline{M}$ tels que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha = x_0\,,\ \lim_{\alpha\to+\infty} y_\alpha = y_0 \ \textit{et}\ x_0 \neq y_0.$$

Alors on a

(82)

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{G_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)}{d(x_\alpha,\partial M)d(y_\alpha,\partial M)} = \begin{cases} \frac{G(x_0,y_0)}{d(x_0,\partial M)d(y_0,\partial M)} & \textit{si } x_0,y_0\notin\partial M \\ \frac{-\partial_{\nu,y}G(x_0,y_0)}{d(x_0,\partial M)} & \textit{si } x_0\notin\partial M \textit{ et } y_0\in\partial M \\ \frac{-\partial_{\nu,x}G(x_0,y_0)}{d(y_0,\partial M)} & \textit{si } x_0\in\partial M \textit{ et } y_0\notin\partial M \\ \partial_{\nu,y}\partial_{\nu,x}G(x_0,y_0) & \textit{si } x_0,y_0\in\partial M. \end{cases}$$

Preuve de la Proposition 11: L'existence de la limite G dans $C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M}\times\overline{M}\backslash\mathrm{Diag}(\overline{M}))$ est conséquence directe de (77). La convergence des dérivées en la première variable dans $C^{1,\theta}$ est conséquence de la Proposition 10. La continuité et la convergence en les deux variables des dérivées croisées est conséquence de (79).

Dans le cas $x_0, y_0 \in M$, la limite (82) est conséquence directe de la convergence ponctuelle de G_α.

Supposons que $x_0 \in M$ et $y_0 \in \partial M$. On choisit alors une carte φ centrée en y_0 comme dans le Lemme 1. On pose $(y_{\alpha,1}, y'_\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $y_{\alpha,1} < 0$ et $y_\alpha = \varphi(y_{\alpha,1}, y'_\alpha)$. En particulier, il suit de (57) que

$$d(y_\alpha,\partial M) = (1+o(1))|y_{\alpha,1}| \text{ quand } \alpha\to+\infty. \tag{83}$$

Il suit du théorème des accroissements finis qu'il existe une suite $(\tau_\alpha)_\alpha \in (0,1)$ telle que

$$\begin{aligned} G_\alpha(x_\alpha,y_\alpha) &= (G_\alpha)_{x_\alpha}(\varphi(y_{\alpha,1},y'_\alpha)) = y_{\alpha,1}\partial_{y_1}((G_\alpha)_{x_\alpha}\circ\varphi)(\tau_\alpha y_{\alpha,1},y'_\alpha) \\ &= -(1+o(1))|y_{\alpha,1}|\times(\partial_{y_1}(G_{x_0}\circ\varphi)(0,y'_\infty)+o(1)) \end{aligned} \tag{84}$$

lorsque $\alpha\to+\infty$ (on a utilisé la convergence C^1 de G_α et $\lim_{\alpha\to+\infty}(y_{\alpha,1},y'_\alpha) = (0,y'_\infty)$). En combinant (83) et (84), en utilisant les propriétés de la carte φ et la condition de Dirichlet au bord, on obtient (82) dans le cas $x_0\in M$ et $y_0\in\partial M$.

Dans le cas $x_0 \in \partial M$ et $y_0 \in M$, on montre (82) comme dans le cas précédent.

Supposons maintenant que $x_0, y_0 \in \partial M$. Choisissons une carte φ en x_0 et une carte ψ en y_0 comme dans le Lemme 1. On pose alors $(x_{\alpha,1}, x'_\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ et $(y_{\alpha,1}, y'_\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ tels que $x_{\alpha,1}, y_{\alpha,1} < 0$ et $x_\alpha = \varphi(x_{\alpha,1}, x'_\alpha)$ et $y_\alpha = \psi(y_{\alpha,1}, y'_\alpha)$. On a ainsi

$$d(x_\alpha,\partial M) = (1+o(1))|x_{\alpha,1}| \text{ et } d(y_\alpha,\partial M) = (1+o(1))|y_{\alpha,1}| \tag{85}$$

quand $\alpha \to +\infty$. Posons pour simplifier l'écriture $\tilde{G}_\alpha := G_\alpha(\varphi(\cdot), \psi(\cdot))$ et $\tilde{G} := G_\alpha(\varphi(\cdot), \psi(\cdot))$. Il existe alors $(\tau_\alpha)_\alpha, (\sigma_\alpha)_\alpha \in (0,1)$ tels que

$$\begin{aligned} G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) &= \tilde{G}_\alpha((x_{\alpha,1}, x'_\alpha), (y_{\alpha,1}, y'_\alpha)) = x_{\alpha,1}\partial_{x_1}\tilde{G}_\alpha((\tau_\alpha x_{\alpha,1}, x'_\alpha), (y_{\alpha,1}, y'_\alpha)) \\ &= x_{\alpha,1} \cdot y_{\alpha,1}\partial_{y_1}\partial_{x_1}\tilde{G}_\alpha((\tau_\alpha x_{\alpha,1}, x'_\alpha), (\sigma_\alpha y_{\alpha,1}, y'_\alpha)) \\ &= |x_{\alpha,1}| \cdot |y_{\alpha,1}| \left(\partial_{y_1}\partial_{x_1}\tilde{G}((0, x'_\infty), (0, y'_\infty)) + o(1)\right) \end{aligned} \tag{86}$$

avec $\lim_{\alpha\to+\infty}(x_{\alpha,1}, x'_\alpha) = (0, x'_\infty)$ et $\lim_{\alpha\to+\infty}(y_{\alpha,1}, y'_\alpha) = (0, y'_\infty)$. En combinant (85) et (86), en utilisant les propriétés des cartes φ, ψ et la condition de Dirichlet au bord, on obtient (82) dans le cas $x_0, y_0 \in \partial M$. Ceci achève la preuve de la Proposition 11. $\square$

9.2. **Estimées au bord au voisinage de la diagonale.**

Proposition 12. *Soit $(a_\alpha)_\alpha \in L^\infty(M)$ telle qu'il existe K, λ, d vérifiant* (46), (47) *et* (48). *Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on note G_α la fonction de Green de $\Delta_g + a_\alpha$. Soient $(x_\alpha)_\alpha, (y_\alpha)_\alpha \in M$ tels que $\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_\alpha, y_\alpha) = 0$. Alors, si on note*

$$D := \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d(x_\alpha, \partial M) d(y_\alpha, \partial M)}{d_g(x_\alpha, y_\alpha)^2},$$

avec la convention $d(x, \emptyset) = 1$, on a

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)}{\min\left\{1, \frac{d(x_\alpha,\partial M)d(y_\alpha,\partial M)}{d_g(x_\alpha,y_\alpha)^2}\right\}} = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \begin{cases} 1 & si\ D = \infty, \\ \frac{1-(1+4D)^{-\frac{n-2}{2}}}{\min\{1,D\}} & si\ 0 < D < \infty \\ 2(n-2) & si\ D = 0 \end{cases} \tag{87}$$

En particulier, il existe $\delta(M, K, \lambda, d) > 0$ tel que

$$G_\alpha(x,y) > 0 \text{ pour tous } x, y \in M \text{ tels que } x \neq y \text{ et } d_g(x,y) < \delta(M, K, \lambda, d).$$

Preuve de la Proposition 12: Posons $r_\alpha := d_g(x_\alpha, y_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$.

Cas 1: Considérons tout d'abord le cas $D = +\infty$. On a alors

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d(x_\alpha, \partial M)}{r_\alpha} = +\infty.$$

Soit $\tilde{y}_\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_\alpha = \exp_{x_\alpha}(r_\alpha \tilde{y}_\alpha)$. En particulier, on a $|\tilde{y}_\alpha| = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Il suit alors de la convergence (50) de la Proposition 4 que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}.$$

Ceci prouve (87) dans le cas $D = +\infty$ et termine le Cas 1.

Cas 2: Considérons maintenant le cas $D \in (0, +\infty)$. On pose $\lambda, \mu > 0$ tels que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d(x_\alpha, \partial M)}{r_\alpha} = \lambda \text{ et } \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d(y_\alpha, \partial M)}{r_\alpha} = \mu.$$

En particulier, $D = \lambda\mu$. Soit $x_0 := \lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha = \lim_{\alpha\to+\infty} y_\alpha$. En particulier, on a $x_0 \in \partial M$. On choisit alors une carte φ comme dans le Lemme 1: on pose

$x_\alpha = \varphi(x_{\alpha,1}, x'_\alpha)$ et $y_\alpha = \varphi(y_{\alpha,1}, y'_\alpha)$ avec $x_{\alpha,1} < 0$ et $y_{\alpha,1} < 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En particulier, on a

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha} = -\lambda \text{ et } \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{y_{\alpha,1}}{r_\alpha} = -\mu.$$

On pose $z_\alpha := \frac{(y_{\alpha,1}-x_{\alpha,1}, y'_\alpha - x'_\alpha)}{r_\alpha}$. En particulier, on a

$$\lim_{\alpha\to+\infty} z_\alpha = z \text{ avec } z = (\lambda - \mu, z') \text{ et } |z| = 1.$$

En reprenant les notations de la preuve de la Proposition 5, on a

$$d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = \tilde{G}_\alpha\left(\left(\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}, 0\right), \left(\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}, 0\right) + z_\alpha\right)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En exploitant la convergence (59) et l'identité (64), on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = \tilde{G}((-\lambda, 0), (-\lambda, 0) + z) \\
&= \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\left(|z|^{2-n} - |z - (2\lambda, 0)|^{2-n}\right) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\left(1 - (1 + 4\lambda\mu)^{-\frac{n-2}{2}}\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé $|z| = |(\lambda - \mu, z')| = 1$. Sachant que $D = \lambda\mu$, on récupère (87) dans le cas $D \in (0, +\infty)$ et le Cas 2 est terminé.

Cas 3: Supposons maintenant qu'il existe $\mu > 0$ tels que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d(x_\alpha, \partial M)}{r_\alpha} = 0 \text{ et } \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d(y_\alpha, \partial M)}{r_\alpha} = \mu. \tag{88}$$

En particulier, $D = 0$. On reprend les mêmes notation que ci-dessus. Par la symétrie de G, $\tilde{G}_\alpha$ est différentiable selon la première variable et $\partial_{x_1}\tilde{G}_\alpha$ converge uniformément vers $\partial_{x_1}\tilde{G}$ en dehors de la diagonale. Il existe donc $(\tau_\alpha)_\alpha \in (0,1)$ tel que

$$\begin{aligned}
d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) &= \tilde{G}_\alpha\left(\left(\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}, 0\right), \left(\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}, 0\right) + z_\alpha\right) \\
&= \frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}\partial_{x_1}\tilde{G}_\alpha\left(\left(\tau_\alpha\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}, 0\right), \left(\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}, 0\right) + z_\alpha\right).
\end{aligned}$$

Et donc, à la limite $\alpha \to +\infty$, en utilisant (54) et en tenant compte de (88), on obtient

$$d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = (1 + o(1))\frac{d(x_\alpha, \partial M)}{d_g(x_\alpha, y_\alpha)}(-\partial_{x_1}\tilde{G}(0, z) + o(1))$$

quand $\alpha \to 0$. En utilisant l'expression explicite (64) de $\tilde{G}$, on obtient $-\partial_{x_1}\tilde{G}(0,z) = \frac{2\mu}{\omega_{n-1}}$, et donc

$$\frac{d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)}{\min\left\{1, \frac{d(x_\alpha,\partial M) d(y_\alpha, \partial M)}{d_g(x_\alpha, y_\alpha)^2}\right\}} = (1 + o(1))\frac{\frac{d(x_\alpha,\partial M)}{d_g(x_\alpha,y_\alpha)}\left(\frac{2\mu}{\omega_{n-1}} + o(1)\right)}{\frac{d(x_\alpha,\partial M)d(y_\alpha,\partial M)}{d_g(x_\alpha,y_\alpha)^2}} = \frac{2}{\omega_{n-1}} + o(1)$$

quand $\alpha \to +\infty$. Ceci montre (87) dans le cas (88) et termine le Cas 3.

Cas 4: Le cas $d(x_\alpha, \partial M) = (\lambda + o(1)) d_g(x_\alpha, y_\alpha)$ et $d(x_\alpha, \partial M) = o(d_g(x_\alpha, y_\alpha))$ quand $\alpha \to +\infty$ avec $\lambda > 0$ se traite de la même manière.

Cas 5: Supposons maintenant que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{d(x_\alpha,\partial M)}{r_\alpha}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{d(y_\alpha,\partial M)}{r_\alpha}=0. \tag{89}$$

En particulier, $D=0$. De même que dans la Proposition 10, $\partial_{x_1}\tilde{G}_\alpha$ est bien définie et $C^{1,\theta}$ en la seconde variable. De plus, localement, sa norme $C^{1,\theta}$ est contrôlée. On en déduit que $\partial_{x_1}\tilde{G}_\alpha$ converge uniformément vers $\partial_{x_1}\tilde{G}$ dans $C^{1,\theta}$ en la seconde variable. Ainsi, on obtient l'existence de $(\tau_\alpha)_\alpha, (\sigma_\alpha)_\alpha\in(0,1)$ tels que

$$\begin{aligned}d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{n-2}G_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)&=\tilde{G}_\alpha\left(\left(\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha},0\right),\left(\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha},0\right)+z_\alpha\right)\\&=\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}\partial_{x_1}\tilde{G}_\alpha\left(\left(\tau_\alpha\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha},0\right),\left(\frac{y_{\alpha,1}}{r_\alpha},z'_\alpha\right)\right)\\&=\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha}\cdot\frac{y_{\alpha,1}}{r_\alpha}\partial_{y_1}\partial_{x_1}\tilde{G}_\alpha\left(\left(\tau_\alpha\frac{x_{\alpha,1}}{r_\alpha},0\right),\left(\sigma_\alpha\frac{y_{\alpha,1}}{r_\alpha},z'_\alpha\right)\right)\end{aligned}$$

pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$. À la limite $\alpha\to+\infty$, on obtient

$$d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{n-2}G_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)=(1+o(1))\frac{d(x_\alpha,\partial M)d(y_\alpha,\partial M)}{d_g(x_\alpha,y_\alpha)^2}(\partial_{y_1}\partial_{x_1}\tilde{G}(0,z)+o(1))$$

quand $\alpha\to+\infty$. Ici encore, on a utilisé la continuité des dérivées croisées en les deux variables. En utilisant l'expression explicite (64) de $\tilde{G}$, on obtient $\partial_{y_1}\partial_{x_1}\tilde{G}(0,z)=\frac{2}{\omega_{n-1}}$. Ceci montre (87) dans le cas (89) et termine le Cas 5.

Ces cinq cas prouvent (87). La dernière assertion de positivité de la Proposition 12 est une conséquence directe de (87). □

9.3. Preuve du Théorème 2 dans le cas général.

Proposition 13. *Soit $a\in L^\infty(M)$ et soient K,λ,d tels que (2), (4) et (3) ont lieu. Il existe $C_1(M,K,\lambda,d)>0$ tel que*

$$|G(x,y)|\le C_1(M,K,\lambda,d)d_g(x,y)^{2-n}\min\left\{1,\frac{d(x,\partial M)d(y,\partial M)}{d_g(x,y)^2}\right\} \tag{90}$$

et

$$|\nabla G_x(y)|\le C_1(M,K,\lambda,d)d_g(x,y)^{1-n}\min\left\{1,\frac{d(x,\partial M)}{d_g(x,y)}\right\} \tag{91}$$

pour tous $x,y\in M$, $x\neq y$.

Preuve de la Proposition 13: On prouve (90) par contradiction et on suppose qu'il existe une suite $(a_\alpha)_\alpha\in L^\infty(M)$ telle que (46), (47) et (48) ont lieu pour tout α et telle qu'il existe $(x_\alpha)_\alpha,(y_\alpha)_\alpha\in\overline{M}$ tels que $x_\alpha\neq y_\alpha$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$ et telle que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{n-2}|G_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)|}{\min\left\{1,\frac{d(x_\alpha,\partial M)d(y_\alpha,\partial M)}{d_g(x_\alpha,y_\alpha)^2}\right\}}=+\infty. \tag{92}$$

En particulier, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_\alpha,y_\alpha\in M$ pour tout α et qu'il existe $x_0,y_0\in\overline{M}$ tels que $\lim_{\alpha\to+\infty}x_\alpha=x_0$ et $\lim_{\alpha\to+\infty}y_\alpha=y_0$. Il suit de la Proposition 12 et de (92) que $x_0\neq y_0$. On est donc dans le cas de la Proposition 11 qui est en contradiction avec (92). La preuve de (91) procède de la même manière. □

Proposition 14. *Soit $a \in L^\infty(M)$ et soient K, λ, d tels que* (2), (4) *et* (3) *ont lieu. Alors il existe $C_2 = C_2(M, K, \lambda, d) > 0$ et $C_3 = C_3(M, K, \lambda, d) > 0$ telles que*

$$G(x,y) \geq C_2 d_g(x,y)^{2-n} \min\left\{1, \frac{d(x,\partial M)d(x,\partial M)}{d_g(x,y)^2}\right\} - C_3 d(x,\partial M)d(y,\partial M) \tag{93}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$.

Preuve de la Proposition 14: Par commodité, on note

$$\mathcal{H}_M(x,y) := d_g(x,y)^{2-n} \min\left\{1, \frac{d(x,\partial M)d(x,\partial M)}{d_g(x,y)^2}\right\}$$

pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$. Soit

$$\alpha_n := \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \min\left\{\frac{1-(1+4D)^{-\frac{n-2}{2}}}{\min\{1, D\}} / \, D > 0\right\} > 0.$$

Il suit de la Proposition 12 qu'il existe $\epsilon(M, K, \lambda, d) > 0$ tel que

$$G(x,y) \geq \frac{\alpha_n}{2}\mathcal{H}_M(x,y)$$

pour tous $x, y \in M$ tels que $x \neq y$ et $d_g(x,y) < \epsilon(M, K, \lambda, d)$.

Soient $x, y \in M$ tels que $x \neq y$.

Cas 1: Supposons que

$$G(x,y) < \frac{\alpha_n}{2}\Gamma_M(x,y).$$

On a alors $d_g(x,y) \geq \epsilon(M, K, \lambda, d)$. En particulier, on a avec (90)

$$|G(x,y)| \leq C(M, K, \lambda, d)d(x,\partial M)d(y,\partial M)$$

et

$$\frac{\alpha_n}{2}\Gamma_M(x,y) \leq C'(M, K, \lambda, d)d(x,\partial M)d(y,\partial M).$$

Du coup, on obtient

$$G(x,y) - \frac{\alpha_n}{2}\Gamma_M(x,y) \geq -C''(M, K, \lambda, d)d(x,\partial M)d(y,\partial M) \tag{94}$$

Cas 2: Supposons que

$$G(x,y) \geq \frac{\alpha_n}{2}\Gamma_M(x,y).$$

Alors (94) a lieu.

Dans tous les cas, nous avons montré que (94) a lieu. Ceci prouve (93) et donc la Proposition 14. □

10. Amélioration de l'estimée inférieure dans le cas cœrcif

On termine ici la preuve du Théorème 2 en démontrant qu'on peut prendre $C_3 = 0$ dans (93) dans le cas d'un opérateur cœrcif. Ce résultat repose sur le principe de comparaison et est spécifique à l'ordre deux (pour les problématiques aux ordres supérieurs, on renvoie aux références de [5]).

Proposition 15. *Soit $a \in L^\infty(M)$ telle que $\Delta_g + a$ est cœrcif. Soient $K, \mu > 0$ tels que $\|a\|_\infty \leq K$ et*

$$\int_M (|\nabla u|^2 + au^2)\, dv_g \geq \mu \int_M u^2\, dv_g \tag{95}$$

pour tout $u \in H_{1,0}^2(M)$. Alors il existe $C_1(M,K,\mu), C_2(M,K,\mu) > 0$ tels que

$$C_1(M,K,\mu) \leq \frac{G(x,y)}{d_g(x,y)^{2-n} \min\left\{1, \frac{d(x,\partial M)d(x,\partial M)}{d_g(x,y)^2}\right\}} \leq C_2(M,K,\mu) \tag{96}$$

pour tous $x, y \in M$ tels que $x \neq y$. Autrement dit, on peut prendre $C_3 = 0$ dans (93).

Preuve de la Proposition 15: Pour $K, \mu > 0$, on se donne une suite $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in L^\infty(M)$ telle que $\|a_\alpha\|_\infty \leq K$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et (95) a lieu pour tout $a \equiv a_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En remarquant que $\pi_{a_\alpha} \equiv 0$, on obtient alors aisément qu'il existe $\lambda > 0$ tel que (47) a lieu pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. On note G_α est la fonction de Green de $\Delta_g + a_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. D'après le Théorème 1 et d'après la Proposition 13, on a existence et unicité de G_α avec des contrôles ponctuels. De plus, d'après le Théorème 3, on a

$$G_\alpha(x,y) > 0 \text{ pour tous } x, y \in M,\ x \neq y. \tag{97}$$

Étape 1: On prouve la Proposition 15 par l'absurde: en utilisant (97), on suppose donc qu'il existe deux suites $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}, (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in M$ telles que $x_\alpha \neq y_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{G_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)}{d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{2-n} \min\left\{1, \frac{d(x_\alpha,\partial M)d(y_\alpha,\partial M)}{d_g(x_\alpha,y_\alpha)^2}\right\}} = 0, \tag{98}$$

où . Quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe $x_0, y_0 \in \overline{M}$ tels que $\lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha = x_0$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} y_\alpha = y_0$. Il suit de la Proposition 12 que $x_0 \neq y_0$. Il suit alors de la Proposition 11 qu'il existe $\hat{G} \in C^{1,\theta}(\overline{M}\times\overline{M} \setminus \text{Diag}(\overline{M}))$ telle que $\nabla_x \hat{G}$ existe et est $C^{1,\theta}$ en dehors de la diagonale et

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\to+\infty} G_\alpha = \hat{G} \text{ dans } C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M}\times\overline{M} \setminus \text{Diag}(\overline{M}))\\
&\lim_{\alpha\to+\infty} \nabla_x G_\alpha(x,\cdot) = \nabla_x \hat{G}(x,\cdot) \text{ dans } C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M} \setminus \{x\}),\\
&\lim_{\alpha\to+\infty} \nabla_y\nabla_x G_\alpha = \nabla_y\nabla_x \hat{G} \text{ dans } C^{0,\theta}_{loc}(\overline{M}\times\overline{M} \setminus \text{Diag}(\overline{M})).
\end{aligned} \tag{99}$$

Il suit de la Proposition 11 et de (98) qu'on est dans l'un des trois cas suivants:

$$\begin{array}{ll}
\hat{G}(x_0,y_0) = 0 & \text{si } x_0, y_0 \notin \partial M,\\
\partial_{\nu,y}\hat{G}(x_0,y_0) = 0 & \text{si } x_0 \notin \partial M \text{ et } y_0 \in \partial M\\
\partial_{\nu,y}\partial_{\nu,x}\hat{G}(x_0,y_0) = 0 & \text{si } x_0, y_0 \in \partial M.
\end{array} \tag{100}$$

Par symétrie (G est symétrique car l'opérateur est inversible, voir la Proposition 8), on a éliminé un des quatre cas de la Proposition 11. On va montrer que ces trois cas sont absurdes, ce qui démontrera (96).

Étape 3: On affirme que

$$\hat{G}_x \not\equiv 0 \text{ pour tout } x \in M. \tag{101}$$

Preuve: Soit $x \in M$. Supposons par l'absurde que $\hat{G}_x \equiv 0$. En particulier, $\lim_{\alpha\to+\infty} G_\alpha(x,\cdot) = 0$ dans $C^1_{loc}(\overline{M}\setminus\{x\})$. Soit $\varphi \in C^2(\overline{M})$ tel que $\varphi(x) = 1$ et $\varphi_{|\partial M} = 0$. Il suit de la formule de la définition de la fonction de Green que

$$\varphi(x) = \int_M G_\alpha(x,\cdot)(\Delta_g\varphi + a_\alpha\varphi)\,dv_g.$$

En faisant tendre $\alpha \to +\infty$, en utilisant la borne uniforme (90) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient $\varphi(x) = 0$, ce qui est absurde. Ceci montre (101).

Si on avait convergence de $(a_\alpha)_\alpha$ vers $a_\infty \in C^{0,\theta}(\overline{M})$ dans $C^0(\overline{M})$, avec $\theta \in (0,1)$, on obtiendrait immédiatement que $\hat{G}$ est la fonction de Green de $\Delta_g + a_\infty$ et que $\hat{G} \in C^{2,\theta}(\overline{M}\setminus\{x\})$. Il suffirait alors simplement d'utiliser le principe du maximum sous ses formes faibles et fortes pour nier (100). Dans le cas général, on va appliquer les principes du maximum à G_α puis passer à la limite en contrôlant avec précision les minorants de G_α.

Étape 4: On affirme que

$$\hat{G}(x,y) > 0 \text{ pour tout } x,y \in M,\ x \neq y. \tag{102}$$

Preuve: Fixons $x \in M$ et $y \in M$ tel que $y \neq x$. Soit $\omega \subset\subset M\setminus\{x\}$ tel que $y \in \omega$. Comme $G_\alpha(x,\cdot) \in C^1(\overline{M}\setminus\{x\})$ est positive et vérifie $\Delta_g G_\alpha(x,\cdot) + a_\alpha G_\alpha(x,\cdot) = 0$ au sens faible en dehors de x, il suit de l'inégalité de Harnack (Théorème 8.20 de [3]) que

$$\sup_\omega G_\alpha(x,\cdot) \le C(M,K,\lambda,\omega) \inf_\omega G_\alpha(x,\cdot)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En faisant tendre $\alpha \to +\infty$ et en utilisant la convergence de G_α vers $\hat{G}$ dans C^0, on obtient

$$\sup_\omega \hat{G}_x \le C(M,K,\lambda,\omega) \inf_\omega \hat{G}_x.$$

Comme $\hat{G}_x \not\equiv 0$ d'après (101) et que $\hat{G}_x \ge 0$ comme limite simple de $G_\alpha(x,\cdot)$, on obtient $\hat{G}_x > 0$ sur ω, et donc $\hat{G}(x,y) > 0$ pour tous $x,y \in M$, $x \neq y$. Ceci prouve (102).

Étape 5: On affirme que

$$\partial_{\nu,y}\hat{G}_x(y) < 0 \text{ pour tout } x \in M \text{ et } y \in \partial M. \tag{103}$$

Preuve: On applique ici la preuve du Lemme de Hopf du Lemme 3.4 de [3] (voir aussi le Théorème 2.5 de [7]). Cette preuve utilise le principe du maximum faible pour des fonctions C^2: comme G_α n'est pas C^2 en général, on utilise dans notre contexte la cœrcivité (qui est équivalente au principe du maximum) qui est un outil plus souple et qui a déjà été employée dans la preuve de (40). On montre ainsi que pour tout $x \in M$ et tout $y \in \partial M$, il existe $\epsilon > 0$ indépendant de α tel que

$$\partial_{\nu,y}(G_\alpha)_x(y) \le -\epsilon(M,K,\lambda,x,y). \tag{104}$$

Comme la convergence de G_α a lieu dans C^1, en passant à la limite, on obtient $\partial_\nu\hat{G}_x(y) < 0$. Ceci prouve (103).

Étape 6: On affirme que

$$\partial_{\nu,x}\partial_{\nu,y}\hat{G}_x(y) > 0 \text{ pour tout } x,y \in \partial M,\ x \neq y. \tag{105}$$

Preuve: on ne fait ici qu'esquisser la preuve qui reprend les techniques utilisées plus haut. Fixons $x \in \partial M$. Sachant que $\nabla_x G_\alpha(x,\cdot) \in H_2^p(M \setminus \{x\}) \cap C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\})$ pour tout $p \geq 1$ et $\theta \in (0,1)$, on a donc $\partial_{\nu,x} G_\alpha(x,\cdot) \in H_2^p(M \setminus \{x\})$ et il suit de (51) que

$$\begin{array}{ll} \Delta_g(-\partial_{\nu,x} G_\alpha(x,\cdot)) + a_\alpha(-\partial_{\nu,x} G_\alpha(x,\cdot)) = 0 & \text{dans } M \setminus \{x\} \\ -\partial_{\nu,x} G_\alpha(x,\cdot) = 0 & \text{sur } \partial M. \end{array}.$$

Comme on a $-\partial_{\nu,x} G_\alpha(x,\cdot) > 0$ d'après (103), on applique encore le lemme de Hopf précédent et on obtient que

$$\partial_{\nu,y}\partial_{\nu,x} G_\alpha(x,y) \geq \epsilon(M,K,\lambda,x,y) > 0$$

pour tout $x,y \in \partial M$, $x \neq y$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En utilisant la convergence (99), on obtient (105).

Étape 7: il suit de (102), (103) et (105) que (100) n'a jamais lieu. Ceci montre (96), et la Proposition 15 est démontrée. $\square$

11. Annexe: Une preuve alternative dans le cas $\Delta_g + a$ inversible

Comme mentionné plus haut, la preuve du Théorème 3 de l'existence et de la borne uniforme dans le cas cœrcif est spécifique à l'ordre deux et ne s'étend pas aux ordres supérieurs. La preuve ci-dessous, plus longue, pallie à ce défaut: elle s'étend sans difficulté aucune au cas des opérateurs d'ordres supérieurs. Elle a été employée dans Grunau-Robert [5] pour les opérateurs d'ordre quatre.

Théorème 4. *Soit $a \in L^\infty(M)$. On suppose que $\Delta + a$ est inversible. Alors il existe une fonction de Green, notée G, pour $\Delta_g + a$. De plus, $G_x \in C^{1,\theta}_{loc}(\overline{M} \setminus \{x\})$ pour tout $x \in M$ et il existe $C(M,K,\lambda) > 0$ telle que*

$$|G(x,y)| \leq C(M,K,\lambda) d_g(x,y)^{2-n} \text{ pour tous } x,y \in M,\ x \neq y, \tag{106}$$

où K et λ sont comme dans (2) *et* (4)*. De plus, on a $G_x(y) = 0$ pour tout $y \in \partial M$ et $x \in M$.*

Preuve du Théorème 4: En reprenant les notations de la Proposition 1, on pose $\Gamma := H$, $f := l$ et $h := 0$. Rappelons que $\Delta_g + a$ est inversible, et donc que $K_a = \{0\}$ et $\pi_a \equiv 0$. Grâce aux résultats de la Proposition 1, on applique la Proposition 3 pour obtenir l'existence de $\hat{G} \in L^\infty_{loc}(M \times M \setminus \mathrm{Diag}(M))$ telle que pour tout $x \in M$, on a

$$\hat{G}_x \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\}) \cap L^1(M) \text{ pour tout } \theta \in (0,1)$$

et

$$\int_M (\Delta_g \varphi + a\varphi)\hat{G}_x\, dv_g = \varphi(x) + \int_{\partial M} \left(-\partial_\nu \varphi \hat{G}_x + \varphi \partial_\nu \hat{G}_x\right) d\sigma$$

et il existe $C(M,K,\lambda) > 0$ tel que

$$|\hat{G}(x,y)| \leq C(M,K,\lambda) d_g(x,y)^{2-n} \text{ pour tous } x,y \in M,\ x \neq y. \tag{107}$$

Étape 1: Comme $\hat{G}_x \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\})$, il existe un unique $V_x \in C^{1,\theta}(\overline{M})$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g V_x + a V_x = 0 & \text{dans } M \\ V_x = -G'_x & \text{sur } \partial M. \end{array} \right.$$

Pour l'existence, on renvoie à [3] (Théorèmes 8.6, 8.12, 9.15) et [1] (Théorème 9.1). On pose

$$G_x := \hat{G}_x + V_x. \tag{108}$$

En particulier, on a $G_x \in L^1(M)\cap C^{1,\theta}(\overline{M}\setminus\{x\})$ pour tout $p\geq 1$ et $\theta\in(0,1)$ et G_x s'annule sur ∂M. De même que pour (42), on obtient que pour tout $\varphi\in C^2(\overline{M})$, on a

$$\int_M G_x(\Delta_g\varphi + a\varphi)\,dv_g = \varphi(x) + \int_{\partial M}\varphi\partial_\nu G_x\,d\sigma. \tag{109}$$

Donc G est bien une fonction de Green pour $\Delta_g + a$. Il suffit maintenant de montrer (106) pour démontrer le Théorème 4.

Étape 2: On prouve le lemme suivant:

Lemme 2. *Soit $a\in L^\infty$ et soit π_a la projection sur K_a (on ne suppose pas nécessairement que $\Delta_g + a$ est inversible). Soit $u\in H_1^2(M)\cap C^0(\overline{M})$ et soit $\gamma\in C^0(\partial M)$ tels que*

$$\left\{\begin{array}{ll}\Delta_g u + au = 0 & \textit{faiblement dans } M\\ u=\gamma & \textit{sur } \partial M.\end{array}\right.$$

Alors il existe $C(M,K,\lambda)>0$ tel que

$$\|u-\pi_a(u)\|_{L^\infty(M)}\leq C(M,K,\lambda)\|\gamma\|_{L^\infty(\partial M)},$$

òu $K,\lambda>0$ sont telles que (2) *et* (4) *ont lieu.*

Preuve du Lemme 2: Ce Lemme peut être démontré via les techniques et résultats de [1] (voir en particulier le Théorème 9.1). On donne ici une preuve auto-contenue spécifique à l'ordre deux. On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe des suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\in L^\infty(M)$, $(u_i)\in H_1^2(M)\cap C^0(\overline{M})$ et $(\gamma_i)_i\in C^0(\partial M)$ telles que $\|a_i\|_\infty\leq K$ pour tout $i\in\mathbb{N}$,

$$\|\Delta_g\psi + a_i\psi\|_2^2\geq\lambda\|\psi-\pi_{a_i}(\psi)\|_2^2 \tag{110}$$

pour tout $\psi\in H_2^2(M)\cap H_{1,0}^2(M)$ et tout $i\in\mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{ll}\Delta_g u_i + a_i u_i = 0 & \text{faiblement dans } M\\ u_i=\gamma_i & \text{sur } \partial M.\end{array}\right. \tag{111}$$

et

$$u_i\perp K_{a_i}\,,\ \|u_i\|_\infty = 1 \text{ et } \lim_{i\to+\infty}\|\gamma_i\|_\infty = 0. \tag{112}$$

Fixons $i\in\mathbb{N}$: soit $\varphi_i\in H_2^p(M)\cap C^{1,\theta}(\overline{M})$ pour tous $p\geq 1$ et $\theta\in(0,1)$ telle que $\varphi_i\perp K_{a_i}$ et

$$\left\{\begin{array}{ll}\Delta_g\varphi_i + a_i\varphi_i = u_i & \text{faiblement dans } M\\ \varphi_i = 0 \text{ sur } \partial M.\end{array}\right.$$

Comme $u_i\perp K_{a_i}$, φ_i existe et est unique. De plus, par théorie elliptique standard, on a $\varphi_i\in H_2^p(M)$ pour tout $p\geq 1$ et

$$\|\varphi_i\|_{H_2^p}\leq C(M,K,p)\left(\|u_i\|_p + \|\varphi_i\|_p\right).$$

En utilisant (110), des arguments de bootstrap et (112), il vient

$$\|\varphi_i\|_{H_2^p}\leq C(M,K,p,\lambda)\|u_i\|_p\leq C(M,K,p,\lambda) \tag{113}$$

pour tout $p \geq 1$. En particulier, pour tout $\theta \in (0,1)$, on a

$$\|\varphi_i\|_{C^{1,\theta}} \leq C(M,K,\theta,\lambda) \tag{114}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. En multipliant (111) par φ_i et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_M u_i^2\, dv_g + \int_{\partial M} \gamma_i \partial_\nu \varphi_i\, d\sigma_g = 0$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. En utilisant (114) et (112), on obtient donc $\|u_i\|_2 = o(1)$ quand $i \to +\infty$. Comme $\|u_i\|_\infty = 1$, on obtient alors que

$$\lim_{i\to+\infty} \|u_i\|_p = 0 \tag{115}$$

pour tout $p \geq 1$. Soit $\tilde{u}_i \in H_{1,0}^2(M)$ tel que

$$\begin{cases} \Delta_g \tilde{u}_i + \tilde{u}_i = (1-a_i)u_i & \text{faiblement dans } M \\ \tilde{u}_i = 0 \text{ sur } \partial M. \end{cases}$$

Il suit de théorie elliptique standard et de (115) que $\tilde{u}_i \in H_2^p(M)$ pour tout $p \geq 1$ et lorsque $p > n/2$, on a

$$\|\tilde{u}_i\|_\infty \leq C(M,p)\|\tilde{u}_i\|_{H_2^p} \leq C(M,p)\|(1-a_i)u_i\|_p = o(1) \tag{116}$$

lorsque $i \to +\infty$. On obtient donc que

$$\begin{cases} \Delta_g(u_i - \tilde{u}_i) + (u_i - \tilde{u}_i) = 0 & \text{faiblement dans } M \\ u_i - \tilde{u}_i = \gamma_i \text{ sur } \partial M. \end{cases}$$

et donc, d'après le principe du maximum, on a

$$\|u_i - \tilde{u}_i\|_\infty \leq \|\gamma_i\|_\infty$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. Cette dernière inégalité étant contradictoire avec (112) et (116), ceci achève la preuve du Lemme 2. $\square$

Étape 3: On affirme que

$$|G_x(y)| \leq C(M,K,\lambda)\left(d_g(x,y)^{2-n} + d(x,\partial M)^{2-n}\right) \tag{117}$$

pour tout $y \in \overline{M} \setminus \{x\}$.

Preuve: on applique le Lemme 2 avec $u := V_x$ et $\gamma := -(\hat{G}_x)_{|\partial M}$. Il suit alors du Lemme 2 et de (107) que $\|V_x\|_\infty \leq C(M,K,\lambda) d(x,\partial M)^{2-n}$. Cette dernière inégalité et (107) impliquent alors (117).

Étape 4: On prouve la proposition suivante qui traite des points près du bord.

Proposition 16. *Soit $a \in L^\infty(M)$ tel que $\Delta_g + a$ est inversible. Soit G une fonction de Green de $\Delta_g + a$. On suppose que pour tout $x \in M$, $G_x \in C^{1,\theta}(\overline{M} \setminus \{x\})$ pour tout $\theta \in (0,1)$. On suppose de plus que G_x s'annule sur ∂M. Alors pour tout $\chi > 0$, il existe une constante $C(M,K,\lambda,\chi) > 0$ telle que pour tous $x, y \in M$, $x \neq y$, on a*

$$d(x,\partial M) \leq \chi d_g(x,y) \ \Rightarrow\ d_g(x,y)^{n-2}|G(x,y)| \leq C(M,K,\lambda,\chi). \tag{118}$$

Preuve de la Proposition 16: On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $(a_\alpha) \in L^\infty(M)$ telle que $\Delta_g + a_\alpha$ est inversible pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et telle que (46) et (47) ont lieu pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux suites $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}, (y_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in M$ telles que $x_\alpha \neq y_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d(x_\alpha,\partial M)}{d(x_\alpha,y_\alpha)} = \rho \geq 0. \tag{119}$$

et

$$\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_\alpha,y_\alpha)^{n-2}|(G_\alpha)_{x_\alpha}(y_\alpha)| = +\infty \tag{120}$$

où G_α est une fonction de Green pour $\Delta_g + a_\alpha$ construite comme plus haut.

Étape 4.1: Soit $q \in \left(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}\right)$. Alors on affirme que $(G_\alpha)_x \in L^q(M)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et que tout $x \in M$ et on a

$$\|(G_\alpha)_x\|_q \leq C(M,\lambda,K,\lambda,q)d(x,\partial M)^{2-n+\frac{n}{q}} \tag{121}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et tout $x \in M$.

Preuve de l'étape 4.1: Prouvons cette assertion par dualité. Soit $\psi \in C^0(\overline{M})$. Soit $p := \frac{q}{q-1}$ et soit $\varphi_\alpha \in H_2^p(M)$ l'unique solution de $\Delta_g\varphi_\alpha + a_\alpha\varphi_\alpha = \psi$ avec condition de Dirichlet au bord. Il suit de théorie elliptique standard et de (4) que

$$\|\varphi_\alpha\|_{H_2^p} \leq C(M,K,\lambda,p)\|\psi\|_p$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Comme $q \in \left(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}\right)$, on a $\theta := 2 - \frac{n}{p} \in (0,1)$ et il suit des plongements de Sobolev que $\varphi_\alpha \in C^{0,\theta}(\overline{M})$ et que

$$\|\varphi_\alpha\|_{C^{0,\theta}} \leq C(M,K,\lambda,p)\|\psi\|_p \tag{122}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule de représentation (109) avec $\varphi_\alpha \in H_2^p \cap C^0(\overline{M})$ (ce qui est licite ici par densité car $(G_\alpha)_x \in L^r(M)$ pour $r < \frac{n}{n-2}$, voir l'étape 1 de la preuve de la Proposition 6), (122) et $(\varphi_\alpha)_{|\partial M} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_M (G_\alpha)_x\psi\, dv_g\right| &= |\varphi_\alpha(x)| \leq \|\varphi_\alpha\|_{C^{0,\theta}} d(x,\partial M)^\theta \\ &\leq C(M,K,\lambda,p)\|\psi\|_p d(x,\partial M)^\theta\end{aligned}$$

Du coup, par dualité, $(G_\alpha)_x \in L^q(M)$ et (121) est vérifiée. Ceci achève l'étape 4.1.

Rappelons qu'il suit de (51) que

$$\begin{cases} \Delta_g(G_\alpha)_{x_\alpha} + a_\alpha(G_\alpha)_{x_\alpha} = 0 & \text{dans } M\setminus\{x_\alpha\} \\ (G_\alpha)_{x_\alpha}(y) = 0 & \text{pour } y \in \partial M. \end{cases} \tag{123}$$

Étape 4.2: Supposons que $\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_\alpha,y_\alpha) = 2\delta > 0$. Dans ce cas, il suit de (123) et de (121) qu'il existe $C(M,K,\lambda,\delta)$ tel que

$$\|(G_\alpha)_{x_\alpha}\|_{L^\infty(M\setminus B_\delta(x_\alpha))} \leq C(M,K,\lambda,\delta)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Ainsi, $G_\alpha(x_\alpha,y_\alpha) = O(1)$ quand $\alpha \to +\infty$, ce qui contredit (120). Ceci achève l'étape 4.2.

Étape 4.3: Supposons que $\lim_{\alpha\to+\infty} d_g(x_\alpha,y_\alpha) = 0$. En particulier, en notant $x_\infty := \lim_{\alpha\to+\infty} x_\alpha = \lim_{\alpha\to+\infty} y_\alpha$, on a $x_\infty \in \partial M$. Au voisinage de $x_\infty \in \partial M$, on se donne une carte φ comme dans le Lemme 1. On pose alors $(x_{\alpha,1}, x'_\alpha), (y_{\alpha,1}, y'_\alpha) \in \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $x_\alpha = \varphi(x_{\alpha,1}, x'_\alpha)$ et $y_\alpha = \varphi(y_{\alpha,1}, y'_\alpha)$. En particulier, il suit de (57) et de (119) que

$$|x_{\alpha,1}| = (1+o(1))d(x_\alpha,\partial M) = (\rho+o(1))(d_g(x_\alpha,y_\alpha)) \text{ quand } \alpha \to +\infty. \tag{124}$$

On pose $r_\alpha := d_g(x_\alpha,y_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et on définit

$$\tilde{G}_\alpha(z) := r_\alpha^{n-2} G_\alpha(x_\alpha, \varphi((0,x'_\alpha) + r_\alpha z))$$

pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$ et $z\in\overline{\mathbb{R}^n_-}\setminus\{(r_\alpha^{-1}x_{\alpha,1},0)\}$. On pose $g_\alpha:=(\varphi^\star g)((0,x'_\alpha)+r_\alpha z)$. En changeant de variable, il suit de (123) que

$$(125)\quad \begin{cases}\Delta_{g_\alpha}\tilde G_\alpha+r_\alpha^2 a_\alpha\circ\varphi((0,x'_\alpha)+r_\alpha\cdot)\tilde G_\alpha=0 & \text{dans } \mathbb{R}^n_-\setminus\{(r_\alpha^{-1}x_{\alpha,1},0)\}\\ \tilde G_\alpha(y)=0 & \text{pour } y\in\partial\mathbb{R}^n_-.\end{cases}$$

Pour $R>1>\delta$. Avec un changement de variable et en utilisant (121) et (119), on obtient pour $q\in\left(\frac{n}{n-1},\frac{n}{n-2}\right)$

$$\begin{aligned}\|\tilde G_\alpha\|_{L^q(B_{2R}(-\rho,0)\setminus B_{\delta/2}(-\rho,0)\cap\mathbb{R}^n_-)} &\leq Cr_\alpha^{n-2-\frac{n}{q}}\|(G_\alpha)_{x_\alpha}\|_{L^q(M)}\\ &\leq C\left(\frac{d(x_\alpha,\partial M)}{d_g(x_\alpha,y_\alpha)}\right)^{2-n+\frac{n}{q}}=O(1)\end{aligned}\quad(126)$$

lorsque $\alpha\to+\infty$. Il suit alors de (125), de (126) et de théorie elliptique standard que

$$(127)\qquad \|\tilde G_\alpha\|_{L^\infty(B_R(-\rho,0)\setminus B_\delta(-\rho,0)\cap\mathbb{R}^n_-)}=O(1)\text{ quand }\alpha\to+\infty.$$

Par ailleurs, posons $\theta_\alpha:=r_\alpha^{-1}(y_{\alpha,1},y'_\alpha-x'_\alpha)$. Il suit de (124) de $d\varphi_0=Id$ et de (120) que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}|\theta_\alpha-(-\rho,0)|=1\text{ et }\lim_{\alpha\to+\infty}|\tilde G_\alpha(\theta_\alpha)|=+\infty,$$

ce qui est contradictoire avec (127). Ceci prouve (118) et la Proposition 16 est démontrée. □

Étape 5: en combinant (117) et la Proposition 16, on obtient (106). Ceci achève la preuve du Théorème 4. □

Références

[1] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**, (1959), 623-727.

[2] Aubin, T. Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **252**. Springer-Verlag, New York, 1982. xii+204 pp.

[3] Gilbarg, D.; Trudinger, N. Elliptic partial differential equations of second order. Second edition. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **224**. Springer-Verlag, Berlin, 1983. xiii+513 pp.

[4] Giraud, G. Sur le problème de Dirichlet généralisé. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **46**, (1929), 131-245.

[5] Grunau, H.-C.; Robert, F. Positivity and almost positivity of biharmonic Green's functions under Dirichlet boundary conditions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, à paraître.

[6] Druet, O.; Hebey, E.; Robert, F. Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry. *Mathematical Notes*, **45**. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2004).

[7] Han, Q.; Lin, F. Elliptic partial differential equations. *Courant Lecture Notes in Mathematics*, **1**. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. x+144pp.

[8] Krasovskiĭ, Ju.P. Investigation of potentials connected with boundary value problems for elliptic equations (Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **31**, (1967), 587-640. English translation in: *Math. USSR, Izv.* **1**, (1967), 569-622.

[9] Maz'ya, V.; Movchan, A. Uniform asymptotic approximations of Green's functions in a long rod. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **31**, (2008), 2055-2068.

Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A.Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France

E-mail address: frobert@math.unice.fr