1903 - 2003

Un siècle de mathématiques à Nancy

Institut Élie Cartan

Sommaire

Cent et trois ans après

par Antoine Henrot

À l'automne 2003, les mathématiciens nancéiens ont tenu à marquer le centenaire de l'arrivée à Nancy d'Élie Cartan et le jubilé de la création de l'institut qui porte son nom.

Dans le dessein affirmé de faire partager notre passion des mathématiques à un public aussi large que possible, nous avons ainsi saisi l'opportunité offerte par le calendrier pour organiser une série de manifestations culturelles et scientifiques largement accessibles aux non-spécialistes. Parmi celles-ci, figurait en bonne place la présente brochure, dont l'édition visait un double objectif : d'une part, retracer les aspects historiques de l'implantation locale des mathématiques, naturellement insérée dans son développement international, et, d'autre part présenter certains aspects de l'évolution moderne de la recherche dans notre discipline, en mettant l'accent sur les domaines représentés au sein de notre laboratoire.

L'ensemble de ces manifestations, et notamment cette brochure, ont reçu de la part du public et des médias un accueil très favorable. Forts de cette expérience, nous persistons plus que jamais dans l'idée que notre laboratoire doit être ouvert au public, que notre travail quotidien doit être mieux connu et partagé. La recherche en mathématiques ne peut plus, aujourd'hui, rester strictement l'apanage de ceux qui la font. Son rôle essentiel dans les progrès technologiques et l'évolution de nos sociétés doit être exposé, expliqué, débattu.

Notre science est vivante, en plein essor, en transformation permanente. L'institut Élie Cartan est, parmi d'autres, le reflet de cette mutation. Contentons-nous ici d'en témoigner par quelques chiffres. Depuis la première édition de cette brochure, il y a deux ans et demi :

- Le laboratoire a augmenté son effectif de plus de 10% passant de 73 à 81 enseignant-chercheurs et chercheurs permanents.
- Les chercheurs du laboratoire ont publié 180 nouveaux articles dans des revues mathématiques internationales. On peut ainsi estimer à plus de 300 le nombre de nouveaux théorèmes obtenus !
- La bibliothèque de l'Institut Élie Cartan a acquis près de 900 nouveaux ouvrages et 600 volumes de périodiques reliés. Cela ne représente pas moins de 34 mètres linéaires de documentation mathématique nouvelle !

Cette seconde édition a pour objet essentiel de maintenir et de promouvoir l'accessibilité aux différents textes composant cette brochure : ils reflètent la diversité de notre discipline et le large spectre de notre laboratoire. Nous avons également saisi l'occasion d'opérer quelques mises à jour et de corriger quelques coquilles.

Je vous souhaite une excellente lecture.

Antoine Henrot
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

antoine.henrot@iecn.u-nancy.fr

Éditorial

par Daniel Barlet

L'Institut Élie Cartan, qui est, faut-il le préciser, un institut de recherche en mathématiques, a décidé de publier cette brochure en préambule aux festivités qu'il organise cet automne sur le thème :

Un siècle de mathématiques à Nancy.

Nous avons, en effet, saisi l'occasion de la coïncidence, en cette année 2003, de plusieurs anniversaires (rappelés dans l'article suivant), pour faire mieux connaître la recherche mathématique et convaincre un large public que la « Mathématique » est une science vivante. En 1950, il existait dans le monde environ trois mille chercheurs en mathématiques. Ils étaient cent mille en 2000, leur nombre ayant essentiellement doublé tous les dix ans pendant cette période. Plus de trois mille mathématiciens exercent en France aujourd'hui. Ce dénombrement ne concerne que les professionnels dont au moins la moitié de l'activité consiste à produire des mathématiques *nouvelles*. Les professeurs de mathématiques des lycées et collèges participent d'une autre manière au développement et à l'essor de la discipline. Les mathématiques sont très présentes au cœur même de notre vie quotidienne, bien qu'il ne soit pas toujours aisé de les localiser derrière les innovations technologiques (et pas seulement les plus récentes !) que nous utilisons de plus en plus.

Cette brochure contient, nécessairement, quelques éléments de l'histoire des mathématiques à Nancy, depuis la nomination d'Élie Cartan comme professeur en 1903, jusqu'aux évolutions actuelles. On y trouvera également une présentation de quelques thèmes de recherche des équipes nancéiennes. Ce recueil témoigne, à nos yeux, à la fois de l'unité profonde des mathématiques et de l'incroyable diversité des champs dans lesquels elles trouvent à s'appliquer.

Cela étant, par cette manifestation d'envergure et tournée vers la cité, nous avons aussi souhaité rappeler que Nancy est un centre mathématique internationalement reconnu et porte une longue tradition dans ce domaine. Notre engagement dépasse d'ailleurs largement les frontières régionales : malgré sa taille plutôt modeste comparée à d'autres pays, la France a été historiquement et demeure actuellement un des grands pays de la recherche mathématique.

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

L'Institut Élie Cartan en 2003

Interview (presque réelle) des deux précédents directeurs de l'Institut Élie Cartan

par Daniel Barlet & Jean-Louis Clerc

Q. L'Institut Élie Cartan a décidé d'organiser pendant l'année 2003 plusieurs manifestations pour fêter un siècle de mathématiques à Nancy (1903-2003). Que célébrez-vous précisément ?

R. Il y a un siècle, en 1903 donc, Élie Cartan est nommé professeur à la Faculté des Sciences. Il y restera jusqu'en 1909. C'est l'un des mathématiciens français les plus importants de la première moitié du XXème siècle. Il est moins connu que Henri Poincaré, mais son œuvre mathématique est très profonde et a influencé la géométrie différentielle jusqu'à nos jours. Ses travaux de recherche à Nancy portent sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs de dimension infinie. C'est un travail de pionnier, qui va être oublié pendant cinquante ans, pour resurgir en force dans les années soixante. Encore aujourd'hui, on peut lire certains des travaux d'Élie Cartan avec profit, et la légende (qui a quelque chose de vrai) veut qu'on puisse toujours y trouver des sujets de thèse.

Q. Quel genre de personnalité était-ce ?

R. Il est né en 1869. Son père est le forgeron de son village natal dans le Dauphiné. C'est un pur produit de l'École républicaine : remarqué par l'inspecteur au cours d'une visite de l'école du village, il bénéficie d'une bourse pour poursuivre ses études au collège, puis au lycée et réussit le concours d'entrée à l'École Normale Supérieure. L'ascenseur social par le biais de l'école fonctionnait dans les débuts de la IIIème République ! C'était une personnalité réservée, voire timide, et malgré l'excellence de son travail, il n'eut pas de son vivant l'influence qu'il aurait mérité d'avoir dans les mathématiques françaises, alors même qu'il était sans doute le plus novateur des mathématiciens français dans les années 20 et 30. Il est le père de quatre enfants, dont l'aîné Henri Cartan est né à Nancy en 1904 : on fêtera bientôt son centenaire. Henri Cartan fut l'un des fondateurs du groupe Bourbaki, dont nous reparlerons sans doute ultérieurement.

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

Q. Élie Cartan est-il passé par Nancy au hasard du déroulement de sa carrière, ou y avait-il une raison plus profonde à sa venue à Nancy ?

R. À cette époque, où l'Alsace-Lorraine a été annexée à la Prusse, Nancy est presque ville frontière et sert de vitrine face à la puissance allemande. La défaite de 1870-1871 a été attribuée, entre autres causes, à la faiblesse de la science française par rapport à celle du voisin allemand. Les mêmes raisons qui jouent pour le développement de l'Art Nouveau à Nancy jouent pour le développement de la Faculté des Sciences et d'Écoles d'Ingénieurs. Les mathématiciens sont très présents, sur le terrain fondamental, mais aussi appliqué. D'ailleurs Élie Cartan donnait également des enseignements à l'École d'Électrotechnique et de Mécanique Appliquée de Nancy (ancêtre de l'ENSEM). Il y a à Nancy au début du XXème siècle un groupe de mathématiciens de grande qualité, dont le plus connu est effectivement Élie Cartan, mais les noms de Gaston Floquet et Jules Molk, entre autres, sont passés à la postérité.

Q. La deuxième date anniversaire que vous mentionnez est 1953, et la création de l'Institut Élie Cartan. En quoi est-ce important ?

R. La création de l'Institut en 1953 n'est pas en soi un événement très important. L'Institut ne joua qu'un rôle modeste, et avait disparu dans les faits avant sa renaissance dans les années 80, mais avec une tout autre fonction. Mais cette date est symbolique de ce qu'on pourrait appeler l'âge d'or des mathématiques nancéiennes, ou plus précisément la période bourbakiste. Nous n'allons pas raconter l'histoire de Bourbaki, qui est largement connue, même du grand public. Si Nancy joue un rôle si important dans l'histoire du groupe Bourbaki, c'est dû essentiellement à un homme, Jean Delsarte. Il est l'un des membres fondateurs du groupe, et va faire toute sa carrière comme professeur à Nancy. Au sein du groupe Bourbaki, il est (au-delà de son travail mathématique, qui est très important) le meilleur organisateur, celui qui s'occupe de trouver crédits et secrétaires pour le groupe. Il accédera très vite à des responsabilités administratives (doyen de la Faculté des Sciences de Nancy) et son expérience en la matière sera très utile pour Bourbaki. Le secrétariat du groupe est à Nancy, et c'est ainsi qu'une part importante des archives des travaux de Bourbaki se trouve à Nancy grâce au legs de J. Delsarte.

Q. Quelle fut plus précisément l'influence de Delsarte sur les mathématiques à Nancy ?

R. Après la deuxième guerre mondiale, il veut faire de Nancy un grand centre de recherche en mathématiques, avec l'idée de renouveler la recherche et l'enseignement dans cette discipline, suivant les nouvelles conceptions préconisées par Bourbaki. Il sera un temps aidé par Jean Dieudonné, autre membre fondateur de Bourbaki, mais celui-ci partira assez vite pour Nice, avec le même projet scientifique que Delsarte, mais pour Nice ! Delsarte va contribuer à faire venir à Nancy de nombreux jeunes professeurs, bourbakistes eux-mêmes ou influencés par le groupe. C'est Laurent Schwartz (de la deuxième génération de Bourbaki) qui en est la figure la plus connue. Il fut professeur à Nancy de 1945 à 1952, et obtint en 1950 la médaille Fields (la plus haute récompense internationale en mathématiques) pour ses travaux sur les distributions. Il faut citer aussi Jean Leray (nommé professeur à Nancy en 1937, il sera élu professeur au Collège de France), Roger Godement, Jacques-Louis Lions, François Bruhat, et (mais pour une très courte période) Jean-Pierre Serre (autre médaille Fields, en 1954) pour ne citer que les plus connus. Les témoignages sur cette époque des mathématiques à Nancy sont extrêmement élogieux. Dans son autobiographie *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Laurent Schwartz décrit un département de taille assez petite, mais où les discussions (avec Delsarte, Dieudonné et d'autres) sont fréquentes et très riches. Il ne faut pas non plus oublier quelques brillants étudiants de thèse, souvent repérés parmi les Normaliens ou les étudiants parisiens, puis « expédiés » à Nancy, au premier rang desquels Alexandre Grothendieck qui y commença sa thèse sous la direction de L. Schwartz.

Q. Après ce que vous appelez l'âge d'or, y a-t-il eu un reflux ?

R. Disons qu'à partir du milieu des années 60, le département de mathématiques de Nancy perd sa spécificité et devient un département standard d'une ville universitaire de taille moyenne. Delsarte s'est retiré de Bourbaki en 1953, selon la limite d'âge fixée par Bourbaki, et devient, en 1962, directeur de la Maison franco-japonaise à Tokyo. Les bourbakistes ont, pour l'essentiel, gagné la bataille des idées et ils essaiment maintenant dans tous les départements de mathématiques de France. La démographie fait le reste. C'est d'abord l'arrivée massive d'étudiants dans les facultés de sciences, conséquence, d'une part, de la démocratisation des études secondaires, d'autre part, de l'arrivée à l'âge canonique des enfants du baby-boom. L'effet *Spoutnik*, c'est-à-dire la perception (justifiée ou non) par les démocraties occidentales d'un retard par rapport à l'Union Soviétique en matière de recherche scientifique et technologique pousse à l'accroissement du nombre d'étudiants en sciences. Au contraire, la génération dans laquelle se recrutent les professeurs est une génération creuse. Il devient difficile de recruter des professeurs, et c'est plus particulièrement le cas dans les facultés de province, puisque les candidats accordent leur préférence à Paris. Devant l'afflux d'étudiants, on élargit le corps enseignant par le développement des postes d'assistants et de maîtres-assistants. Souvent recrutés parmi les agrégés de l'enseignement secondaire, ils n'ont au départ qu'une expérience limitée de la recherche (voire aucune). Un nombre important de postes de professeurs sont pourvus par des chargés de cours, qui n'ont pas soutenu leur thèse d'état. Les charges d'enseignement s'alourdissent. L'enseignement des mathématiques en faculté des sciences se renouvelle rapidement, en intégrant partiellement le point de vue de Bourbaki. Enfin, un gros travail est demandé pour la formation des enseignants du secondaire, à la fois en formation initiale, parce que c'est une période de recrutement intense, et en formation continue, parce qu'il faut former les professeurs du secondaire aux nouveaux programmes. Les temps sont donc plus difficiles pour la recherche.

Q. Parmi les temps forts que vous avez retenus figure l'année 1978, début de l'association avec le CNRS pour les mathématiques nancéiennes. Pourquoi et en quoi était-ce important ?

R. La reconnaissance par le CNRS en 1978 comme équipe associée (sous le nom d'Équipe d'Analyse Globale) était d'abord une reconnaissance scientifique, venant soutenir les efforts de rénovation des mathématiques à Nancy commencés quelques années auparavant. En 1975-1976, plusieurs postes de professeurs occupés par des chargés de cours à Nancy doivent être libérés. Les responsables du département de mathématiques de l'époque Pierre Eymard, Jean-Pierre Ferrier et Claude Morlet anticipent quelque peu les recrutements officiels et offrent à quatre docteurs d'état âgés de 29 et 30 ans, anciens élèves de l'École Normale Supérieure, de s'installer à Nancy. Ainsi arrivent la même année Daniel Barlet, Lionel Bérard Bergery, Jean-Louis Clerc et Jean Lannes. À l'exception de ce dernier qui sera nommé ultérieurement à Paris, ils resteront à Nancy. Une année auparavant, Bernard Roynette avait été nommé professeur à l'Université Nancy 2. C'est sur ces bases d'équipes largement renouvelées qu'est obtenue la reconnaissance par le CNRS. En pratique, l'aide financière du CNRS n'était pas très importante, mais cette reconnaissance permit d'obtenir au sein de l'Université Nancy 1 un soutien sans faille, qui est d'ailleurs resté permanent depuis cette date. Au-delà de ce soutien financier, ce fut pour les mathématiciens nancéiens l'occasion d'affirmer l'importance de la recherche en mathématiques dans la vie universitaire nancéienne, et de s'organiser en conséquence, en créant une structure de laboratoire.

Q. Comment le laboratoire a-t-il évolué depuis 1978, et quand a-t-il pris le nom d'Institut Élie Cartan ?

R. La création d'une équipe associée au CNRS se fait sur la base d'un programme de recherche. Le laboratoire est structuré en équipes de recherche, chacune correspondant à une thématique spécifique. Les équipes initiales étaient : Analyse et Géométrie complexes, Géométrie différentielle, Analyse Harmonique, Équations aux dérivées partielles et applications, Probabilités et Statistiques. Elles constituent encore aujourd'hui l'architecture du laboratoire. Le premier directeur fut Jean-Pierre Ferrier (de 1978 à 1981) auquel succéda Pierre Eymard (de 1982 à 1991). Une nouvelle équipe s'est constituée au milieu des années 80 autour de la théorie analytique des nombres, à la suite de l'arrivée à Nancy en 1981 de Gérald Tenenbaum comme chargé de recherche au CNRS, ultérieurement nommé professeur.

Un choix essentiel du laboratoire naissant fut d'associer étroitement les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, avec un effort important en faveur du développement de ces dernières. On sait que les bourbakistes n'étaient pas de chauds partisans des mathématiques appliquées, et, de fait, il y avait à Nancy un département de mathématiques appliquées distinct du département de mathématiques pures. Jean Legras a joué un rôle important comme analyste numéricien et fondateur du centre de calcul de Nancy. Conjointement avec un autre mathématicien, Claude Pair, on lui doit les prémices du développement remarquable de l'informatique à Nancy. Mais c'est avec l'arrivée de Michel Pierre que l'équipe d'équations aux dérivées partielles et applications prend son essor, en associant des travaux théoriques, des modélisations et des calculs numériques liés aux applications. À partir du milieu des années 80 l'installation en Lorraine de l'INRIA vint conforter le secteur des mathématiques appliquées. Cette évolution devait déboucher sur la structure tripartite (Université Henri Poincaré, CNRS et INRIA) du laboratoire réalisée en 1995. C'est à ce moment que le laboratoire choisit le nom d'Institut Élie Cartan.

Q. L'Institut est logé dans un bâtiment autonome, et d'une architecture plutôt originale. Comment cela s'est-il réalisé ?

R. Pour permettre la croissance du laboratoire, il fallait disposer de bureaux. La situation devenait critique, notamment pour les doctorants du laboratoire qui ne disposaient pas sur place de facilités pour travailler de façon confortable ou pour l'accueil de visiteurs étrangers. Philippe Noverraz, mathématicien et doyen de la Faculté des Sciences, et Daniel Barlet, alors directeur de l'UFR STMIA, surent défendre le dossier au sein des instances de l'Université Nancy 1. Le projet reçut le soutien actif de Jean Giraud alors responsable des mathématiques à la Direction de la Recherche. L'occasion en fut fournie par le plan *Université 2000*. Avec le soutien de l'Université, du CNRS, de l'INRIA, de l'État et des collectivités locales un nouveau bâtiment fut construit et les mathématiciens s'y installèrent en 1995. Les plans, dus au cabinet d'architectes Bernt-Morillon-Thouveny, furent discutés avec les utilisateurs. La bibliothèque a fait l'objet d'une réflexion spécifique, portant à la fois sur le bâtiment et son aménagement intérieur. Elle fut complètement réaménagée à cette occasion, et sa gestion est désormais informatisée. Un réseau câblé très performant fut mis en place dans le bâtiment, permettant l'accès de tous les chercheurs à de nombreuses bases de données extérieures (journaux mathématiques, prépublications, thèses, logiciels de calcul, etc.). Enfin de petites salles de travail librement accessibles furent mises en place, afin de faciliter les échanges entre chercheurs du laboratoire. Au total, le nombre de chercheurs permanents a été multiplié par 2 entre 1980 et 2000. La création de postes techniques et administratifs (notamment d'un poste d'ingénieur de recherche pour le réseau informatique) a également contribué à une amélioration des conditions de travail au sein du laboratoire.

Q. Le mot de laboratoire que vous utilisez évoque plutôt l'atmosphère des sciences expérimentales, avec tout l'équipement scientifique, cornues, microscope ou machine à faire le vide. Qu'y a-t-il de comparable en mathématiques ?

R. Les mathématiques ne sont pas une science expérimentale. L'objet des mathématiques, qu'elles soient « pures » ou « appliquées », est de construire des théories et des modèles logiquement fondés à partir de quelques règles simples. Ceci en vue de décrire et de prévoir le comportement d'objets, par exemple des objets géométriques comme une sphère ou un polyèdre, ou des objets moins familiers et plus abstraits, par exemple un *système d'équations algébriques* ou une *équation différentielle linéaire*. On constate en pratique que ces modèles, même s'ils n'ont pas été conçus ou imaginés pour cela, sont utiles pour les sciences expérimentales ou les sciences humaines.

Toutefois l'image caricaturale selon laquelle il suffirait d'idées et de quelques bâtons de craie est fausse. Les mathématiciens attachent une grande importance à la documentation scientifique à laquelle ils ont accès. Les mathématiques ont une très longue histoire (une vingtaine de siècles), et la nature même de la discipline fait que l'obsolescence des documents est très faible. Les écrits des mathématiciens grecs (Euclide ou Archimède par exemple) sont encore aujourd'hui pertinents. Ils ne sont certes plus lus dans leur version d'origine, mais il n'est pas rare que des articles écrits il y a cinquante, voire cent ans soient consultés par des mathématiciens qui y trouvent source d'inspiration nouvelle. Cette documentation est relativement chère (en raison notamment des faibles tirages), et il est impératif qu'elle soit facilement accessible aux chercheurs. Plus récemment, les mathématiciens ont adopté l'ordinateur comme l'un de leurs outils de travail. Nous disposons de logiciels permettant aux chercheurs de saisir eux-mêmes commodément les textes mathématiques, ce qui était du temps des machines à écrire un art fort difficile en raison de la multitude des signes spéciaux et des nombreuses formules à composer. Mais l'ordinateur est un outil polyvalent qui sert aussi à faire des calculs numériques ou des calculs formels, avec une puissance de calcul inimaginable auparavant. Ces possibilités ont profondément renouvelé les applications des mathématiques. On voit aussi se développer des travaux qu'on pourrait qualifier de mathématiques assistées par ordinateur.

Q. Les physiciens étudient les propriétés de la matière, les biologistes ceux des êtres vivants. Qu'en est-il des mathématiques ?

R. Les mathématiques n'ont pas d'objet propre, et il est effectivement difficile de décrire le travail d'un mathématicien. Il faut d'abord comprendre qu'il y a quantité de problèmes ouverts, c'est-à-dire de questions apparues dans le cours du développement des mathématiques auxquelles on ne sait pas répondre. Certaines questions peuvent rester très longtemps sans réponse. L'exemple le plus célèbre est lié à Fermat, un mathématicien du XVIIème siècle. Le résultat qu'il a affirmé, sans toutefois en donner la démonstration, a en fait été démontré en 1997 par A. Wiles. Un grand nombre de mathématiciens durant trois siècles et demi ont travaillé sur ce problème, et de très nombreux développements sont intervenus à propos de ce problème, contribuant à définir de nouveaux concepts mathématiques qui ont été étudiés pour eux-mêmes, indépendamment de leur lien initial avec le problème de Fermat. À ces problèmes surgis à l'intérieur même des mathématiques s'ajoutent des problèmes rencontrés dans des sciences expérimentales. La physique a constamment stimulé l'essor des mathématiques. Les équations aux dérivées partielles en sont un exemple type, et encore aujourd'hui la physique théorique est à l'origine de développements considérables en mathématiques autour de la théorie des champs notamment. Mais c'est aujourd'hui le cas de beaucoup de sciences : l'économie utilise des modèles stochastiques extrêmement sophistiqués, et la biologie (notamment la génétique) apporte un lot de problèmes extrêmement intéressants pour les mathématiciens. Ajoutons que beaucoup de projets industriels réclament des modélisations et des calculs numériques très délicats, de sorte que de nouveaux emplois dans l'industrie se sont ouverts pour des mathématiciens.

Q. Comment s'organise concrètement la vie du laboratoire ?

R. Chaque équipe s'organise autour d'un séminaire, en général hebdomadaire. Les intervenants sont tantôt les membres de l'équipe, tantôt des visiteurs qui viennent présenter leurs résultats récents. C'est aussi l'occasion de discussions informelles, où les chercheurs peuvent communiquer au-delà de leurs résultats leurs motivations et leurs espoirs. C'est souvent l'occasion de renouveler sa problématique, d'apprendre ou d'indiquer des références nouvelles. Les documents écrits et publiés sont, bien entendu, essentiels et ce sont eux qui font autorité. Ils sont d'abord accessibles sous formes de prépublications, qui sont maintenant généralement disponibles sur le réseau internet. Ils sont ensuite soumis à des journaux scientifiques, où ils font l'objet d'une évaluation par d'autres chercheurs avant publication.

Une fois l'an, le laboratoire organise les *Journées Élie Cartan*. Il s'agit d'exposés présentés par quelques chercheurs choisis par les équipes, mais destinés à l'ensemble des membres de l'Institut. C'est l'occasion de comprendre les problématiques des autres équipes. Dans le même ordre d'idées, est organisé un colloquium, à raison d'une séance par mois environ. C'est un invité extérieur, (parfois un non-mathématicien) qui vient faire un exposé à l'intention de toute la communauté.

Le laboratoire rédige périodiquement un rapport d'activité, sur la base des rapports individuels rédigés par les chercheurs. Les orientations scientifiques sont l'objet de discussions fréquentes entre chercheurs à l'intérieur des équipes, et aussi plus globalement à l'intérieur du laboratoire, notamment lors des discussions concernant les recrutements de nouveaux collègues. Il ne s'agit pas de définir un programme de recherche qui serait contraignant pour chaque chercheur, et les mathématiciens ne gagneraient rien à ce qui apparaîtrait comme une limitation de leur liberté personnelle. Il s'agit plutôt de tirer parti au mieux des connaissances mutuelles des chercheurs. Des collaborations nouvelles s'organisent, un groupe de travail se crée pour défricher un thème de recherche qui ne rentrait pas dans les préoccupations antérieures d'aucune équipe. De plus, une évolution certaine des mathématiques s'est produite. Après la période culminant autour des années 50, durant laquelle les mathématiciens se regroupaient de préférence par grandes familles (la topologie, la géométrie algébrique, l'analyse fonctionnelle, les probabilités, etc.) nous sommes dans une phase de recomposition où les travaux les plus novateurs viennent de chercheurs ayant une double (ou triple) culture. Il faut mettre en œuvre des techniques venant d'horizons variés, réclamant une solide culture mathématique. D'où, plus que jamais, l'importance de ces collaborations.

Q. Quels sont vos espoirs, vos inquiétudes et vos recommandations pour l'avenir ?

R. Les mathématiques vont continuer d'évoluer, et il faut absolument que les mathématiciens restent largement ouverts à tous ces courants nouveaux, notamment en ce qui concerne les applications des mathématiques. Nous pouvons avoir quelques inquiétudes concernant le recrutement de jeunes mathématiciens. La baisse du nombre d'étudiants scientifiques pourrait engendrer une spirale fatale : moins de postes d'enseignants-chercheurs nécessaires, moins de débouchés pour les jeunes qui rendraient les carrières encore plus difficiles. Pourtant la place et le rôle des mathématiques ne cessent de croître, et les États-Unis ont fortement relancé depuis l'an 2000 les programmes scientifiques et les financements dans ce secteur. Espérons que la même inspiration gagnera notre pays. D'autant que la France est restée une nation de tout premier plan en mathématiques, comme en témoigne la moisson importante de récompenses internationales (médailles Fields de P-L. Lions, J-C. Yoccoz en 1994 et L. Lafforgue en 2002).

Au-delà de ces considérations générales, trois recommandations pour la génération qui va venir aux commandes. Premièrement garder l'unité du laboratoire, en veillant à l'équilibre entre mathématiques pures et appliquées. La structure tripartite du laboratoire entre l'Université Henri Poincaré (Nancy 1), le CNRS et l'INRIA est un atout important pour l'avenir des mathématiques à Nancy. On peut espérer l'élargissement du partenariat à l'INPL, en relation avec le fait que les mathématiques ont pris de l'importance dans les entreprises et l'économie en général, et qu'il existe maintenant un créneau de formation d'ingénieurs de recherche possédant une forte culture mathématique. Deuxièmement, ouvrir plus encore le laboratoire sur l'international, par le développement des réseaux européens notamment. Troisièmement, accorder la plus grande importance à la formation, de l'entrée à l'Université jusqu'au doctorat. L'apprentissage des mathématiques a la réputation d'être difficile. N'oublions pas que la rigueur qu'il est nécessaire d'exiger des étudiants doit être source d'une profonde satisfaction intellectuelle pour qui parvient à la maîtriser. Simultanément, il faut présenter les apports à d'autres sciences de notre discipline, qui n'est pas une théorie abstraite fermée sur elle-même. Contrairement à ce qu'a pu écrire un ancien ministre de l'Éducation, la défaite de Platon n'est pas à l'ordre du jour : la richesse des applications des mathématiques doit être présente dès les débuts de la formation universitaire comme elle l'est dans la vie du laboratoire.

Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
France

Daniel.Barlet@iecn.u-nancy.fr, Jean-Louis.Clerc@iecn.u-nancy.fr

Élie Cartan - 1903

Les collègues mathématiciens d'Élie Cartan à Nancy (1903-1909)

par André Renaud

Élie Cartan, qui était alors maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lyon, fut chargé du cours de Calcul Différentiel et Intégral à Nancy le 1er août 1903. Il venait y remplacer le professeur Lacour dont un enseignement chargé avait altéré la santé et qui avait sollicité son transfert dans un endroit plus calme. Lacour venait d'obtenir une chaire à Rennes. Cartan fut nommé professeur à la Faculté des Sciences de Nancy le 1er novembre 1904 et il demeura dans ce poste jusqu'en 1909. On a conservé la lettre que le Recteur de l'Académie de cette époque, Charles Adam, écrivit au Doyen de la Faculté, le mathématicien Gaston Floquet :

> *J'ai l'honneur de vous informer que, par un arrêté en date du 17 juillet 1909, M. Cartan, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, a été nommé, à partir du 1er novembre 1909, maître de conférences de mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. « Toutefois, dit M. le Ministre, cette décision ne sera définitive que lorsque M. Cartan lui aura fait parvenir, par votre intermédiaire, sa démission de professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy. C'est là une jurisprudence formelle et à laquelle il n'est jamais dérogé. » Je vous prie de vouloir bien informer M. Cartan de cette décision, en l'invitant à se rendre à son poste en temps utile. M. le Vice-Recteur de l'Académie de Paris lui délivrera une copie de l'arrêté qui le concerne.*
>
> *Le Recteur, Ch. Adam*

Cartan quitta donc « la liste de classement des professeurs des Facultés des Sciences des départements », mais fut nommé professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Nancy le 16 novembre suivant.

Lors de son arrivée à Nancy, il était allé suivant la coutume visiter ses collègues professeurs à la Faculté. Les mathématiciens y étaient au nombre de trois : Gaston Floquet, professeur d'Analyse ; Jules Molk, professeur de Mécanique Rationnelle et Henri Vogt, professeur de Mathématiques Appliquées. Dix autres professeurs assuraient les enseignements de Physique et de Sciences Naturelles. Ainsi étaient-ils quatorze au Conseil, présidé par le professeur de Physique, Ernest Bichat, doyen depuis 1888.

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

Gaston Floquet, sorti de l'École Normale en 1873, était arrivé à Nancy en 1878, maître de conférences, et avait soutenu l'année suivante devant Hermite une thèse « sur la théorie des équations différentielles linéaires » où il invente en particulier le calcul symbolique que Heaviside utilisera dans ses travaux à partir de 1885. Floquet succéda à Renard dans la chaire de Mathématiques appliquées. Il y enseigna la mécanique tout en continuant à publier sur les équations différentielles. En 1890, à la mort de son collègue Mathieu, il fut nommé dans sa chaire de Mathématiques pures, laissant la sienne à Jules Molk. Il se mit alors aussi à l'étude de l'astronomie, qui faisait partie de son programme d'enseignement. En 1898, sa chaire fut supprimée mais furent créées celles d'Analyse, qu'il occupa, et de Mécanique rationnelle, qui fut attribuée à Molk, et ce fut Henri Vogt qui fut nommé en Mathématiques appliquées. La chaire de Calcul différentiel et intégral fut créée en 1901 et donnée à Lacour, qui était arrivé à Nancy maître de conférences en 1896. Pendant la première année qu'Élie Cartan passa à Nancy, Floquet outre ses cours et ses recherches présida le jury d'agrégation des sciences mathématiques (concours 1904) et fut nommé en même temps (avril 1904) assesseur du doyen. La santé de Bichat déclinait beaucoup et ses entreprises, concernant notamment le futur Institut de Physique, demandaient à être soutenues. Floquet se dévoua partout si bien qu'il en tomba malade l'été 1905 après la mort de Bichat. Dont il reçut néanmoins la charge de doyen.

Jules Molk, alsacien, était diplômé du Polyteknikum de Zurich, avait suivi les cours de Weierstrass et de Kronecker à Berlin, et soutenu une thèse en 1884 à Paris. Les nombres algébriques étaient son domaine. Il était ainsi arrivé à Nancy en 1890 et occupait donc la chaire de Mécanique rationnelle à la venue de Cartan. Il donnait alors en plein dans « l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées ». C'était là une initiative des Académies allemandes, naturellement rédigée en allemand. Il était du plus grand intérêt d'en avoir une édition française, qui intégrât en même temps les plus récentes découvertes. C'est à quoi Molk s'attela. Le premier fascicule parut le 10 août 1904 : « Principes fondamentaux de l'Arithmétique », par Molk lui-même et son ami Jules Tannery. Bien entendu, Molk demanda leur aide à tous ses collègues mathématiciens français, les nancéiens au premier rang. Cartan s'attaqua ainsi aux travaux de Study, de l'Université de Bonn, sur les nombres complexes. Le fascicule correspondant fut publié en 1908.

Henri Vogt avait été nommé professeur au lycée de Nancy à sa sortie de l'École Normale. Après une thèse « sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre », il avait été nommé maître de conférences à la Faculté en 1890, puis en 1899 dans la chaire de Mathématiques appliquées quittée par Molk. Il deviendra directeur de l'Institut Électrotechnique en 1906 et s'y consacrera entièrement, avec l'aide en particulier des relations zurichoises de son collègue Molk.

Les autres collaborateurs que Cartan put rencontrer furent les professeurs de lycée Hervieux et Chanzy ; Pol Simon, chef de Travaux, et Bertrand, de l'École professionnelle de l'Est. Naturellement, il était accueilli à chacun de ses cours par l'appariteur, un ancien adjudant au 56e R.I. de Dijon, du nom de Malfait, en poste depuis 1901, et sans doute apercevra-t-il parfois Louis Toussenot, le garçon de salle de mathématiques, fonction créée en 1905.

Alphonse Hervieux était professeur au lycée de Nancy lorsqu'il lui fut attribué deux conférences de mathématiques par semaine pour l'année 1881-1882. Il s'agissait de « cours complémentaires en vue d'une préparation spéciale à la licence ès sciences » qui avaient été institués en 1866. Toujours renouvelé dans cette tâche, il était professeur honoraire quand arriva Cartan, et en 1903-1904 assurait quatre heures d'interrogations hebdomadaires. Sans doute sentait-il ses forces décliner car c'est Cartan qui reprit ces heures l'année suivante. Hervieux décéda le 2 juillet 1906.

Chanzy était aussi au lycée lorsqu'il fut chargé de deux conférences de mathématiques par semaine aux élèves de l'Institut Chimique en 1903. Il les fit jusqu'en 1908 où il passa à l'Institut Électro-technique pour y faire les « travaux graphiques ». Cependant, géographiquement, Chanzy travaillait loin de Cartan. Ce dernier bien sûr officiait à la Faculté qui partageait avec les Facultés de Lettres et de Droit le Palais Académique de la Place Carnot, tandis que l'Institut Chimique était situé rue Granville, abritait l'École de Brasserie et voisinait avec « l'Électro ».

Un emploi nouveau de Chef de Travaux Pratiques de Mathématiques fut créé le 20 octobre 1905. Pol Simon, licencié ès sciences, y fut nommé délégué. C'est lui qui remplacera Chanzy à l'Institut Chimique en 1908.

Bertrand, professeur à l'École professionnelle de l'Est, fut également chargé de travaux pratiques de mathématiques le 1er janvier 1907 jusqu'à la fin de l'année universitaire, puis régulièrement reconduit.

Aux quatre heures d'interrogations d'Hervieux recueillies par Cartan en novembre 1904 furent ajoutées deux autres heures qui furent prises par Vogt. A partir de 1905, ce fut un cours complémentaire d'enseignement pratique des mathématiques qui fut institué, partagé entre Cartan et Vogt, auquel donc s'ajoutèrent les travaux pratiques de Pol Simon. Ces cours furent reconduits chaque année et Vogt continua d'y côtoyer Cartan même après qu'il eut reçu la direction de l'Institut Électrotechnique.

Nous cernerons mieux les charges d'enseignement à l'aide de quelques chiffres. Lors de l'année universitaire 1904-1905 il y avait, dans toute la Faculté, 598 étudiants. Les certificats d'études supérieures (C.E.S.) attribués en mathématiques furent au nombre de 35, à savoir

- Calcul différentiel et intégral (C.D.I.) : 16,
- Algèbre supérieure : 4,
- Mécanique rationnelle : 5,
- Astronomie : 5,
- Analyse supérieure : 5.

Il n'y eut pas de C.E.S de géométrie supérieure décerné. La licence se composait de trois certificats dont obligatoirement le C.D.I. et la Mécanique. Un Diplôme d'Études Supérieures avait été institué par un arrêté du 25 juin 1904, composé « d'un travail écrit sur un sujet agréé par la Faculté et d'une interrogation sur ce travail et sur des questions données au moins trois mois à l'avance et se rapportant à la même partie des mathématiques ». Étaient tenus pour équivalents, à Nancy, le C.E.S. de géométrie supérieure ou celui d'analyse supérieure.

On a une idée du contenu de l'enseignement grâce à un rapport paru le 18 août 1900 dans le Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction Publique. « Le programme des C.E.S. variant d'une Université à l'autre, le jury d'agrégation pour le concours 1901 indique le minimum des connaissances supposées acquises en C.D.I. et en Mécanique. » Intégrales classiques et généralisées et leurs applications géométriques, fonctions définies par des séries, géométrie différentielle des courbes et des surfaces, fonctions analytiques jusqu'aux résidus et à la réduction des intégrales hyperelliptiques, généralités très fouillées sur les équations différentielles, étaient au menu le plus simple. Mais l'on ne devait pas négliger quelques spécialités dans les produits infinis, la théorie des fonctions elliptiques, les formes quadratiques et leurs applications aux coniques et quadriques, l'arithmétique, la géométrie descriptive, etc. La carte de la Mécanique était d'une ampleur analogue, allant de la statique élémentaire à l'hydrodynamique de Bernoulli et Torricelli.

La vie universitaire allait bon train alors comme aujourd'hui, avec ses rites comme la Rentrée solennelle des Facultés, présidée par le Recteur, salle Poirel, et toutes les nouveautés que l'époque bouillonnante de « l'École de Nancy » faisait fleurir. En 1905, Cartan publie la suite de son étude « sur la structure des groupes infinis de transformations », pendant que Vogt analyse le *Zeitschrift für Math. und Phys.* En 1906, nonobstant la poursuite de son Encyclopédie, Molk aide Vogt qui vient d'en prendre la direction à moderniser l'Institut Électrotechnique, lui adjoignant un Institut de Mécanique appliquée. Un arrêté ministériel autorise aussitôt la délivrance du C.E.S. correspondant.

Le terrain donné par la municipalité pour y ériger le futur Institut de Physique à côté de la Porte de la Craffe est nivelé. Le financement est assuré par des dons de la Ville, de Solvay, et par la loi du 18 avril 1906 qui autorise le Ministre à engager 300 000 francs dans la construction.

Le 22 octobre 1907, naissance du vingt et unième C.E.S. de la Faculté : celui de Mathématiques générales. Floquet observe et calcule les passages de Mercure devant le Soleil. Molk est fait docteur honoris causa à Guissen et à Padoue. Cartan continue d'édifier sa théorie de la structure des groupes continus qui va lui ouvrir les portes de la Sorbonne en 1909. Il en fera un exposé intitulé *La théorie des groupes continus et la géométrie* pour l'Encyclopédie de Molk, qui parut le 8 juillet 1915.

André Renaud
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Jean Delsarte - Doyen de la faculté des Sciences de Nancy (1945/1949)

Jean Delsarte

par Gérard Eguether

Jean Delsarte naquit à Fourmies (Nord) le 19 octobre 1903, année même où le mathématicien Élie Cartan arriva à Nancy, où il devait être nommé titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégrale l'année suivante. En 1953, Delsarte créa l'Institut Élie Cartan dont nous célébrons le cinquantième anniversaire en même temps que le centenaire de la naissance de Delsarte qui joua un rôle primordial dans le développement des mathématiques à Nancy.

Après une brillante scolarité, Delsarte fut reçu en 1922 à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm. Il y partagea les conversations de salle d'étude du mathématicien André Weil et du physicien Yves Rocard, tous de la même promotion. Se retrouvèrent aussi à l'ENS les mathématiciens Henri Cartan, fils d'Élie Cartan, Jean Coulomb (mathématicien physicien), Paul Dubreil, René de Possel et le futur philosophe des mathématiques Jean Cavaillès (de la promotion 1923). Puis Marcel Brelot, Jean Dieudonné et Charles Ehresmann entrèrent à l'ENS en 1924, une promotion qui accueillit plusieurs futures célébrités des sciences et des lettres tels le physicien Louis Néel, les philosophes Raymond Aron, Georges Canguilhem, Paul Nizan et Jean-Paul Sartre. Delsarte avait quitté la rue d'Ulm quand les mathématiciens Claude Chevalley et Jean Leray traversèrent l'illustre portail en 1926. Plusieurs de ces mathématiciens normaliens formèrent plus tard le noyau originel du groupe Bourbaki.

Agrégé de mathématiques en 1925, Delsarte obtint la prestigieuse bourse de la Fondation Thiers dont il fut pensionnaire en 1926 et 1927. Non content de préparer sa thèse de doctorat dans l'hôtel particulier de la Fondation, Delsarte y écrivit aussi ses premiers articles publiés aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* : « Sur les rotations dans l'espace fonctionnel », « Étude de certaines équations intégrales qui généralisent celles de Fredholm ». La thèse de mathématiques qu'il soutint en mars 1928 porta sur le premier sujet.

À une époque où les postes dans l'enseignement supérieur étaient rares en France, Jean Delsarte accepta une charge de cours dans la chaire de mathématiques appliquées à la faculté des sciences de Nancy à compter de novembre 1927, avant même de soutenir sa thèse. À Nancy, il passa maître de conférences de mathématiques générales en octobre 1928.

En 1929, il épousa Thérèse Sutter, fille de médecin et amie d'enfance. Le couple eut deux filles, Chantal et Micheline. La famille s'installa au 4, rue de l'Oratoire à Nancy. Toute la carrière de Delsarte se déroula à Nancy, à l'exception des nombreux voyages qu'il fit à l'étranger.

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

Au cours des années trente, Delsarte écrivit ses plus beaux travaux mathématiques tout en déployant une étonnante énergie d'organisateur au sein de diverses institutions de mathématiques en France. En 1931, il fut chargé du fameux Cours de la Fondation Peccot au Collège de France, qu'il consacra à la présentation des « groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert ». Il prononça également trois exposés sur des sujets voisins au « Séminaire de mathématiques » dit « Séminaire Julia » qui se réunissait à l'Institut Henri Poincaré à Paris et dont le thème annuel de 1934-1935 porta sur les espaces de Hilbert. Par ailleurs, Delsarte se consacra beaucoup à l'étude des fonctions moyenne-périodiques au sujet desquelles il publia de nombreux mémoires dans les meilleures revues de mathématiques, françaises ou étrangères.(1) Le Prix de la Fondation Victor Noury de l'Académie des Sciences de Paris couronna ces travaux en 1935.

À la Faculté des Sciences de Nancy, Delsarte fit d'abord les incontournables cours de mathématiques générales et de calcul différentiel et intégral. Il fut nommé titulaire de la chaire d'analyse supérieure en octobre 1936. Dès lors, son cours d'analyse supérieure devint le centre de son enseignement. Les archives en témoignent : chaque année Delsarte choisissait un sujet sur lequel allait porter son cours, qu'il écrivait de manière détaillée. En 33-34 il présentait les équations différentielles, l'année suivante les espaces de Riemann et la relativité. D'autres thèmes seront abordés, balayant de vastes domaines des mathématiques : fonctions harmoniques, groupes de Lie, formes quadratiques, groupes topologiques, nombres premiers, nombres transcendants, etc... pour terminer en 1956-57 par la fonction ζ de Riemann.(2)

C'est avec le même souci de précision et d'intelligibilité qu'il donna le cours public d'astronomie à compter de 1929 : il savait s'adapter à ses auditeurs et mettait tous ses soins à préparer la moindre leçon, quel qu'en soit le prix. Ainsi trouve-t-on dans ses archives des cours rédigés sur des feuilles de formats hors normes : malgré sa quasi cécité qui s'aggrava dans les années cinquante, il persista dans la réécriture et la révision de ses cours désormais rédigés pour lui-même en grand format.

Avec la participation d'André Weil et d'Henri Cartan, tous deux enseignants à Strasbourg, Delsarte organisa des rencontres mathématiques qui se tinrent régulièrement à Nancy ou à Strasbourg : ils créèrent ainsi une branche de l'Est de la Société Mathématique de France. Delsarte multiplia les efforts pour renforcer les mathématiques à Nancy et c'est ainsi qu'il y fit nommer l'algébriste Paul Dubreil, qui enseigna entre 1933 et 1937, puis Jean Leray d'abord chargé de cours en mathématiques appliquées en 1936, puis maître de conférences en 1937 et titulaire de la chaire de mathématiques appliquées en 1938. Jean

1. Voir la liste des travaux de Delsarte dans les *Œuvres* ou sur le site internet de l'Institut Élie Cartan.
2. Archives Delsarte cotes 1050 à 1065.

Dieudonné fut nommé maître de conférences à Nancy la même année.

En marge de ses activités nancéiennes, Delsarte avait été président du jury d'admission au baccalauréat français en Pologne (1928-1929). À cette occasion, il rencontra plusieurs collègues mathématiciens dont Stanislas Zaremba à Cracovie, avec lequel il correspondit pendant de nombreuses années. À Rome, il fit la connaissance du célèbre Vito Volterra. En France, l'efficacité et le sens aigu des responsabilités de Delsarte lui valurent d'être nommé examinateur d'admission à l'École Centrale de Paris (1930-32-34), puis délégué des maîtres de conférences au Comité consultatif de l'Enseignement supérieur (1934). Il fut également chargé de recherche au CNRS de juillet 1932 à octobre 1936. S'appuyant sur une bonne expérience des institutions de recherche et d'enseignement en France, il écrivit trois articles pour la *Revue scientifique* en 1939 dans lesquels il critiqua très directement mais néanmoins de façon constructive l'organisation de la recherche scientifique et de l'enseignement supérieur en France.(3) Il n'en fut pas moins examinateur d'admission à l'École Normale Supérieure de 1939 à 1942.

Comme tous les normaliens scientifiques, Delsarte était officier d'artillerie. Capitaine de réserve, Delsarte commanda la 8^{e} batterie de repérage (DCA) de septembre 1939 à août 1940. En traversant le Jura et les Alpes, il réussit à ramener son unité au complet de l'Alsace, lieu de ses derniers combats, jusqu'à Nîmes où elle fut démobilisée.

Professeur à Grenoble en 1940-41, Delsarte y remplaça le mathématicien Jean Favard qui avait été fait prisonnier de guerre et séjournait dans un Oflag en Allemagne. Au lieu de rester à Grenoble, Delsarte rentra à Nancy qui était alors en zone interdite (1941). Voilà un fait qui caractérise bien l'homme : c'est en toute légitimité, au vu et au su de l'occupant, que Delsarte reprit son poste à la Faculté des Sciences de Nancy où sa famille le rejoignit. Celle de Dieudonné suivit bientôt et les deux collègues se retrouvèrent professeurs sans chaire à Nancy en 1943. Malgré des conditions qui s'y prêtaient peu, Delsarte poursuivit ses travaux de mathématicien et l'Académie des Sciences lui décerna le Prix Vaillant en 1944. À la même époque, il fit partie de la Commission de mathématiques pures du CNRS (de 1941 à 1949) ainsi que d'un groupe de travail sur la réforme des études scientifiques en France. À compter de 1943, il devint examinateur aux concours d'entrée des Écoles Nationales Supérieures de Nancy, fonction qu'il remplit durant de nombreuses années.

À la Libération, Delsarte devint doyen de la Faculté des Sciences de Nancy et servit l'université durant un mandat qui se termina en 1949. D'octobre 1945 à juin 1946 il participa aux travaux de la « Commission de réforme de l'enseignement », dite « Commission Langevin-Wallon ». Expérience dont il sort fort déçu et qui l'amènera à laisser de côté ces problèmes, du moins dans des fonctions de conseil.

3. N° 1, janvier 1939, p. 1-3, N° 3 mars 1939, p. 140-143, N° 5 mai 1939, p. 299-303.

Dans les années d'après-guerre, il fit nommer à Nancy plusieurs mathématiciens qui se révélèrent de première force, notamment : Laurent Schwartz (1945-1952) qui obtint la Médaille Fields en 1950, Roger Godement (1946-1955), Jean-Pierre Serre (1954) également médaillé Fields la même année puis Professeur au Collège de France, Jacques-Louis Lions (1954-1964) qui avait été en quelque sorte collaborateur de Delsarte et de Jean Leray et qui devint le chef de file des mathématiques appliquées en France.(4) D'autre part il parvint à fait venir à Nancy des étudiants de deuxième année de l'École Normale Supérieure. En 1949, on note également la présence d'Alexandre Grothendieck.

Delsarte voyagea beaucoup dans les années suivantes, répondant aux invitations à donner des séries de conférences dans divers pays : Brésil (entre 1948 et 1951), Mexique en 1952 et en 1960, États-Unis en 1957, Inde 1959. Il participa également à de nombreux congrès de mathématiques : Bruxelles 1952, Édimbourg 1957, Rome 1959 et 1960, Collège de France et Stockholm 1962.

Il est fait chevalier de la Légion d'honneur en 1954, commandeur dans l'ordre des Palmes académiques en 1962. Il fut lauréat du prix Bordin de l'Académie des Sciences en 1964 et du prix Cognacq-Jay avec les fondateurs du Groupe Bourbaki en 1966.

En 1953, Delsarte créa l'Institut Élie Cartan, avec des statuts,(5) semblables à ceux de l'Institut Henri Poincaré, ce qui en dit long sur les ambitions qu'il avait de faire de Nancy un centre de mathématiques international. Suivit la création d'un centre de troisième cycle de mathématiques pures en 1954.

Notons que l'Institut Élie Cartan a parfois été confondu avec Bourbaki puisque Delsarte se vit obligé de préciser en 1959 pour le *Répertoire des laboratoires scientifiques* :(6)

> « *Le Groupe Bourbaki est complètement distinct de l'Institut Élie Cartan, lequel s'occupe seulement de l'administration du Groupe Bourbaki. Les membres de l'Institut Élie Cartan ne sont pas les membres du Groupe Bourbaki, mais l'intersection de ces deux ensembles est non vide* ».

L'Institut Élie Cartan et le Centre constituèrent les structures par lesquelles Delsarte put faire inviter à Nancy de nombreux professeurs étrangers. Citons en quelques uns pour donner une idée de la variété des intervenants : Chandrasekharan, S.S. Chern, Harish-Chandra, Lars Hörmander, Tosio Kato (venu comme professeur associé), Nicolaas Kuiper, Leopoldo Nachbin, Carl Siegel, Sergei Sobolev, Guido Stampacchia, J.M.C. Whitehead, Yosida Kôsaku.

Delsarte organisa plusieurs congrès internationaux à Nancy, notamment : en 1946 Analyse harmonique, en 1956 Équations aux dérivées partielles, en 1962

4. Suivirent plusieurs autres dont on trouvera les emplois et les dates de service dans André Renaud, « Du rayonnement des mathématiques lorraines », in *Les Universités de Nancy, numéro thématique de la revue, Le Pays Lorrain, mai 2003, pages 43 à 52.*

5. Voir la brochure distribuée au moment de la création de l'Institut

6. Archives IECN, cote 4507.

Colloque du Rhin Supérieur.

Un certain découragement, lié au départ de plusieurs collègues et à des problèmes oculaires graves lui firent accepter en 1962 le poste de Directeur de la Maison Franco-Japonaise de Tokyo. Il y exerça ses talents d'organisateur et fit inviter au Japon de nombreux scientifiques, sans oublier ses collègues français : Henri Cartan, Jean Dieudonné, Roger Godement, Jacques-Louis Lions, Szolem Mandelbrojt et Laurent Schwartz. Il développa d'excellentes relations avec des mathématiciens japonais, en particulier avec Shokichi Iyanaga et Reiji Takahashi qu'il proposa comme professeur associé à Nancy pour 1969. Victime de problèmes de santé répétés, Delsarte refusa de rester une quatrième année à Tokyo. Il quitta le Japon après avoir été nommé commandeur dans l'Ordre Impérial Japonais du Soleil Levant en 1965.

Son voyage de retour l'amena en Chine et en URSS. La signature d'un accord culturel, lui permit d'être invité par l'Académie Sinica de Pékin et de visiter les Universités de Wu-Han et de Pékin, où il prononça plusieurs conférences. Ayant le souci de développer d'excellents contacts avec ses collègues, Delsarte rencontra, entre autres mathématiciens chinois, Hua Loo-Keng, qu'il tenta de faire nommer docteur *honoris causa* de l'université de Nancy I. Mais ce vœu ne se réalisa qu'en 1979, après la rafale de la Révolution culturelle chinoise et le décès de Delsarte.

Après la Chine, Delsarte passa par Irkoutsk et Moscou où il rencontra B.M.M. Lévitan qui connaissait très bien les travaux de Delsarte (leur correspondance en témoigne). La guerre froide sévissant, Delsarte ne parvint jamais à faire sortir Lévitan d'URSS. Dans le volume 2 des Œuvres de Jean Delsarte, on trouve un article que Lévitan écrivit à la mémoire de Delsarte et qui porte sur les opérateurs de translation généralisés où il est question en particulier des « opérateurs de Delsarte »nom que Jacques-Louis Lions donna à certains opérateurs de transmutation étudiés par Jean Delsarte.

De retour à Nancy, Delsarte reprit la direction du département de mathématiques avec une vue gravement diminuée. Il n'en interrompit pas pour autant ses activités, en donnant une conférence au Collège de France et plusieurs autres dans des Universités européennes. À la rentrée 1967-68, il accepta encore de donner un cours de mécanique de premier cycle dont ses collègues ne voulurent pas se charger. Arriva mai 1968 et ses turbulences. Certes, comme le dit Jean Delsarte dans une lettre du 20 mai 1968 :[7]

> « *L'attitude des étudiants est ici assez correcte... Il n'y a pas, à vrai dire, occupation complète de la Faculté, et les bureaux des Professeurs, la bibliothèque, sont libres.* »

Mais, s'il avait toujours souhaité une réforme de l'enseignement supérieure ce n'était pas la réforme brutale que certains prônaient alors. Fin septembre 1968, il fut victime d'un premier accident cardiaque qu'il annonça au Doyen de

7. Archives IECN, Lettre à J.-P. Ferrier, cote 4708.

la Faculté des Sciences en ces termes :[8]

« *Enfin, je vous préviens que je suis actuellement un peu souffrant : j'ai eu, jeudi dernier, à mon bureau, à la Faculté, une crise cardiaque assez spectaculaire, que j'ai trouvé fort pénible. Je suis pour le moment au lit, et je dois revoir le médecin ce soir pour un électrocardiogramme. Je serai alors fixé sur la durée de mon invalidité. Je pense qu'elle ne dépassera pas une dizaine de jours, car je vais maintenant très bien.* »

Un second infarctus le terrassa le 28 novembre 1968.

Bibliographie

Biographies

Une biographie de Jean Delsarte par André Weil, figure dans les *Œuvres*.
On en trouve deux autres, de André Renaud, dans :

- Encyclopédie illustrée de la Lorraine, Histoire des sciences et techniques. Les sciences exactes (Éditions Serpenoise, Metz, 1996)
- Les Universités de Nancy (Numéro Hors série du Pays Lorrain, 2003)

Jean Delsarte est également évoqué par Shokichi Iyanaga dans :

- Mémoires sur l'histoire des mathématiques contemporaines au Japon (Maison Franco-Japonaise, Tokyo, 1996).

On peut consulter l'inventaire des Archives Delsarte et obtenir d'autres renseignements sur Jean Delsarte sur le site internet de l'Institut Élie Cartan (Bibliothèque- Archives Jean Delsarte)

Œuvres de Jean Delsarte

- Œuvres de Jean Delsarte. Vols. 1 & 2 (CNRS, Paris, 1971)
- Œuvres de Jean Delsarte. Vol. 3 (IECN, Nancy, 2001)
- Lectures on topics in mean periodic functions and two-radius theorem (Tata institute of fundamental research, Bombay, 1961)
- Les groupes de transformations linéaires dans l'espace de Hilbert (Mémorial des sciences mathématiques N° 57) (Gauthier-Villars, Paris, 1932)
- Les rotations fonctionnelles (Thèse) (Imprimerie et librairie Édouard Privat, Toulouse, 1928)
- Sur les ds^2 d'Einstein à symétrie axiale (Hermann, Paris, 1934)

Gérard Eguether
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
gerard.eguether@iecn.u-nancy.fr

8. Archives IECN, cote 4707.

L’Institut de Mathématiques et Physique de Nancy dans les années 50

Bourbaki à Nancy*

par Liliane Beaulieu

Une rumeur voulut que le groupe de mathématiciens, connu sous le pseudonyme « N(icolas) Bourbaki », choisît son patronyme parce qu'une statue de Charles Denis Sauter Bourbaki s'élevait près de l'édifice qui logea les Instituts de mathématiques et de physique, au 2 rue de la Craffe (1909-1971). La rumeur confondait le général palois et le physicien Ernest Bichat, doyen de la Faculté des Sciences de Nancy et instigateur de la construction du fameux immeuble, dont le buste dressé au sommet d'un monument orna le square qui porte son nom. De Moscou à Malibu, on fit rimer « Bourbaki » et « Nancy » et le haut lieu de l'Art nouveau se fit connaître comme creuset de mathématiques nouvelles.(1)

Si les mathématiciens du collectif n'étaient pas tous nancéiens, il leur arriva pourtant de donner Nancy comme ville domiciliaire du personnage qu'ils avaient inventé. Mais c'est bien à Nancy que logea le secrétariat, centre administratif et cœur vibrant du groupe. Jean Delsarte, l'un des fondateurs et moteurs de Bourbaki, était professeur (et fut même doyen) de la Faculté des Sciences de Nancy où il mit tous ses efforts à concentrer une véritable « masse critique » de Bourbakis au service des mathématiques, à commencer par celles de son université.(2)

Ces mathématiciens, pour la plupart français et normaliens, exposent dans un ouvrage intitulé *Éléments de mathématique*(3) différentes branches des mathématiques en mettant en évidence leurs bases communes, les liens entre elles ou les structures qu'elles partagent. Les *Éléments* de Bourbaki ont l'envergure d'une encyclopédie mais possèdent une unité organique très marquée. Ils offrent — dans l'ordre — des exposés sur la théorie des ensembles,

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

* Ceci est le canevas d'une conférence grand public qui sera prononcée à Nancy le 21 octobre 2003.

1. Comme pour la plupart des rumeurs, on ignore précisément l'origine de celle-ci (mais on pense qu'elle est un canular d'André Weil). Elle a toutefois été reprise par Paul R. Halmos « Nicolas Bourbaki », *Scientific American*, Mai 1957, vol. 196, pages 88-99 et Ralph P. Boas Jr. « Bourbaki, Nicolas », *Dictionary of Scientific Biography*, vol. II, 1970, pages 351-353.
2. Le nom « Bourbaki » désigne soit le groupe tout entier ou un de ses membres ; c'est ce qui explique l'emploi du pluriel ici. Plusieurs explications du choix de ce nom et du prénom Nicolas ont été données ailleurs par moi-même. Elles sont élégamment reprises, illustrées et augmentées par Maurice Mashaal, *Bourbaki. Une Société secrète de mathématiciens*, Paris, Pour la Science-Belin, 2003.
3. Le singulier est volontaire ici et témoigne de la croyance de Bourbaki en l'unité des mathématiques ou en sa capacité à l'instaurer.

l'algèbre, la topologie générale, les fonctions d'une variable réelle, les espaces vectoriels topologiques et la théorie de l'intégration, six sujets qui furent regroupés sous le sous-titre « Structures fondamentales de l'analyse ». Chaque volume de cette première partie comprend au moins quatre chapitres et est assorti de notes historiques non négligeables. Ces dernières furent écrites par les Bourbakis que l'histoire de leur discipline intéressait le plus mais qui donnèrent un point de vue de mathématicien s'adressant à des lecteurs mathématiciens. À ces volumes (plusieurs fois réédités) s'ajoutent deux présentations, plus monographiques, portant respectivement sur les groupes et algèbres de Lie et sur l'algèbre commutative. Des fascicules donnant les résultats essentiels des théories spectrales et des variétés différentielles et analytiques complètent la série.

Voilà beaucoup de mathématiques de haut niveau et bien sérieuses. Pour certains, Bourbaki demeure le représentant d'une mathématique pure, aride, abstraite, qui allie l'axiomatique à un mode de présentation très rigoureux. Phénomène unique dans l'histoire récente des mathématiques, ce groupe a inspiré et suscité autant les légendes que les controverses. Il a cultivé le secret alors même que son traité devenait un grand succès d'édition et qu'il instituait un séminaire de mathématiques qui demeure le plus célèbre de France. On ne peut en nier l'importance, mais son influence demeure difficile à évaluer : si l'on soulève la question, on entend les réponses les plus contradictoires. En France du moins, Bourbaki exalte encore des passions, bien que rares soient les moins de trente ans qui le connaissent.

1. L'aventure collective

L'équipe se forma durant l'année 1934-1935 et elle poursuit encore ses activités (2003) — mais à un rythme ralenti — portée par des collaborateurs renouvelés, cooptés au fil des circonstances ou des années. L'organisation de son travail a quelque peu varié selon les époques mais, surtout après la Deuxième Guerre mondiale, le groupe se réunit trois fois par année en « congrès », souvent hors saison dans un lieu de villégiature de France où les membres soumettent à la discussion générale leurs ébauches des *Éléments*. Le collectif s'est aussi réuni à Paris, Strasbourg, Clermont-Ferrand et Nancy, entre autres villes d'accueil.

Typiquement, les aspects pratiques d'un congrès étaient préparés par le secrétaire ou « l'adjudant »[4] de la troupe qui faisait circuler quelques semaines plus tôt un « Diktat ». Cette circulaire tient de l'assignation, du cahier de charges, de la feuille de route et de la liste d'épicerie. On y lit l'itinéraire par

4. Comme son titre peut le laisser penser, celui-ci était chargé de faire régner l'ordre. Chez Bourbaki, l'ordre dans la discussion c'était le chaos. L'adjudant veillait au respect des emplois du temps durant les congrès (levers et couchers à heures fixées en principe, comme à la caserne) et, par la suite, à la tenue des engagements pris.

chemin de fer et par route jusqu'au lieu de réunion, selon les différents points de départ des membres (dispersés au six sommets de l'Hexagone), une liste de matériel à emporter (des chaussettes aux ouvrages de référence), les textes qui devront être lus en congrès, des rappels plus ou moins aimables à ceux dont on attend un travail précis et, pour finir, un emploi du temps chargé.

Entre les réunions, les membres devaient rédiger des rapports ou chapitres pour le traité. Ceux-ci varièrent entre six pages et cinq cents pages, les plus longs étant affectueusement surnommés « diplodocus ». Même si chacun menait par ailleurs une vie de chercheur très active et bien que plusieurs aient beaucoup publié au cours de leur carrière, les sacrifices en temps et en énergie que certains d'entre eux ont consentis à Bourbaki sont considérables. À aucun la propriété intellectuelle des écritures pour Bourbaki ne fut reconnue publiquement. Car dès le début, les fondateurs de Bourbaki étaient convenus que chacun renoncerait à percevoir des droits d'auteurs individuels et que les noms des participants à cette entreprise collective ne figureraient pas dans l'ouvrage publié. Delsarte et Weil insistèrent fortement sur ce principe : jamais écrit et jamais démenti, il ne souffrit aucune exception.

Néanmoins, chaque partie des *Éléments de mathématique* connut entre trois et dix versions successives. Rapports et rédactions étaient d'abord écrits par des individus (le plus souvent un non spécialiste du sujet à traiter, pour démarrer), puis relus, discutés et remaniés par toute l'équipe pour être ensuite confiés à de nouveaux rédacteurs chargés de mettre en application les recommandations de l'assemblée. Les strates d'ébauches ainsi empilées ont effectivement brouillé les pistes et l'on a souvent peine à retrouver les traces d'auteurs individuels dans le palimpseste final. En outre, dès 1936, Jean Dieudonné se chargea de lisser en version définitive les textes qui s'étaient mérité l'unanimité du groupe. Et la plupart des versions présumées définitives furent elles-mêmes maintes fois révisées et rééditées par la suite.[5]

Dans l'action, Bourbaki ressemble à un comité de rédaction où chaque évaluateur devient à son tour auteur. De plus, l'assemblée est la dernière instance qui détermine si un texte sera retenu ou non, s'il est prêt à être publié, s'il doit être révisé ou tout simplement rejeté : l'unanimité — et non le consensus — constitue l'ultime critère de Bourbaki. Mais l'unanimité se gagna chèrement et contribua largement à la lenteur de parution en théorie des ensembles ou en théorie de l'intégration, pour ne citer que ces deux exemples.

En congrès, les Bourbakis faisaient d'abord et avant tout de la lecture. En silence parfois, quand un volontaire (désigné) ne lisait pas à haute voix pour le bénéfice de tous. L'exercice avait des allures monastiques jusqu'à ce que se déclenche la discussion. Suivant les personnalités présentes ou les sujets

5. On trouve un tableau assez complet des différentes éditions françaises des *Éléments de mathématique* sur le site de l'Institut Élie Cartan.

abordés, les échanges pouvaient s'animer jusqu'au chahut ponctué des invectives les mieux choisies. Ces débordements d'adrénaline semblaient nécessaires à la créativité ; certains y étaient réfractaires et ceux qui s'ennuyaient finissaient par s'endormir ou s'éloigner ; d'autres encore usaient d'une ironie bien aiguisée qui coupait court aux ardeurs fulminantes. Pendant longtemps, chaque congrès eut droit à son « numéro du plan », performance longtemps réservée à Jean Dieudonné et devant laquelle les autres — raconte-t-on — se comportaient comme devant un spectacle comique : en accablant et moquant l'acteur tonnant qui agitait devant eux la repoussante perspective de projets ambitieux. Il est vrai que, dans le grand plan général des *Éléments de mathématique*, les sujets à aborder excédaient les matières déjà traitées.

Les archives révèlent également une autre réalité. L'ampleur comme le nombre des rédactions écrites en dehors des « congrès » ainsi que les longues remarques critiques issues des lectures collectives témoignent, par leur masse et leur minutie, d'une quantité et d'une qualité de travail indéniables. Bourbaki était âpre à la tâche et n'en dérogeait guère. On ne peut manquer d'être frappé par le contraste entre un fonctionnement interne — réputé confus et anarchique — du groupe et la teneur de sa production mathématique. Bien que Bourbaki n'ait pas eu pour objectif d'inventer de nouvelles théories, il y a dans ces rédactions des résultats et des notions qui valent plus que de simples « astuces » ou de jolies démonstrations. Il arriva que seul un cadre conceptuel tout à fait nouveau permette de poursuivre l'exposition.

Pour la construction de ce monument mathématique du vingtième siècle, la gratification des auteurs était inexistante et même une rédaction de trois cents pages pouvait être « vomie » ou passée sous silence, sans autre forme de procès, au cours du congrès pour lequel elle avait été commandée. Plus d'un Bourbaki — et non des moindres — connurent la condamnation aux oubliettes : entre autres, la communication que Weil présenta au colloque de géométrie différentielle de Strasbourg en 1953 était d'abord un projet que Bourbaki avait rejeté.(6) Parfois, quand Bourbaki reconnaissait la valeur intrinsèque d'une rédaction qu'il ne croyait pas utiliser, il lui arrivait de conseiller à son rédacteur de la publier sous son nom. Mais combien de textes furent tout simplement écartés ou complètement subsumés par d'autres travaux ! Et ces rédactions offertes au collectif n'étaient pas que de simples mises en exposé, des exercices de style ou de routine : bien des mathématiciens auraient souhaité en avoir produit de semblables et auraient été fiers de les publier.

Candidat bénévole aux besognes ingrates, Dieudonné — qui travaillait souvent pour Bourbaki entre six heures et midi — composa une bonne part des exercices qui parurent dans les *Éléments*. On devrait dire plutôt

6. À ce sujet, voir André Weil, *Œuvres scientifiques*, vol. II, New York-Heidelberg-Berlin, Springer, 1980, pp. 103-109 ; le commentaire sur les circonstances entourant cet exposé se trouve aux pages 534-536.

« recomposa », puisqu'il avait l'habitude de compulser avec empressement le dernier numéro des *Mathematical Reviews* (revue américaine spécialisée en recensions mathématiques) dont il tirait les matériaux de certains de ses exercices.(7) Ceux-ci remplissaient la fonction habituelle des exercices mais, derechef, s'y retrouvaient des résultats — voire des parties de théories — dont Bourbaki n'avait pas voulu traiter dans le corps du texte. Quoi qu'il en soit, Dieudonné eut au moins droit à des remerciements quasi transparents de la part de l'auteur fictif dans la préface à la deuxième édition du volume de topologie générale en ces termes : « Je tiens également à remercier mon fidèle adjudant, à qui je dois notamment, comme toujours, la plupart des exercices ».(8) Dieudonné s'occupait aussi de relire minutieusement les épreuves des *Éléments* et ce, jusqu'à la fin des années 1970, alors qu'il ne participait plus aux congrès Bourbaki. Ceux qui ont fait de la lecture d'épreuves savent combien fastidieuse est la tâche. Nonobstant la faconde qu'il pouvait afficher ailleurs, Dieudonné se voua sans compter à Bourbaki auquel il offrit volontairement et très longtemps ses loyaux services.

Au sein de Bourbaki, non seulement chaque membre devait-il renoncer à la paternité de son propre travail, mais lui fallait-il mettre entre parenthèses la compétition de fait qui caractérise la société très hiérarchisée des mathématiciens. Au dehors de Bourbaki, chacun s'opposait forcément à ses pairs. À l'intérieur du collectif, le don réciproque du travail mathématique et le renoncement qu'il supposait devaient passer par une série de tractations, menées dans le cadre d'un accord social tacite. Celles-ci fonctionnaient essentiellement sur le mode de l'ironie et de l'humour. La concurrence psychologique n'en était pas amoindrie pour autant. Du temps des fondateurs, l'invective était de rigueur comme contre-poids au profond respect que les Bourbakis devaient se porter mutuellement (mais en silence) dans leur clan. Ils donnèrent ainsi le ton à leurs successeurs. Doit-on s'étonner alors de ce que le rire eût servi d'exutoire ?

2. Les multiples origines du groupe Bourbaki

Où la causalité historique sera mise à l'épreuve.

7. Cette anecdote a été rapportée par l'historien des mathématiques Jean-Luc Verley (le 26 février 2003) qui la tenait de la bouche même de Dieudonné sous la direction duquel il a composé ses premiers ouvrages d'histoire. Comme Dieudonné ne citait pas les sources de « ses » exercices on peut mettre au concours des historiens des mathématiques du vingtième siècle l'exercice suivant : pour chaque exercice costaud des *Éléments*, retrouver la source dont il est issu. En outre, Dieudonné n'ayant pas laissé d'archives retrouvées jusqu'ici, les solutions et la fabrication de ces exercices sont perdues pour l'histoire.

8. La préface est signée « Nicolas Bourbaki », *Éléments de mathématique*, Topologie Générale, Chapitres I et II, Paris, Hermann, ASI 858-1142 (Deuxième édition, revue et augmentée), 1951, page 1.

3. Le proto-Bourbaki (1934-1935)

L'Analyse révisée chez Capoulade et Cie.

Les objectifs initiaux et les tout premiers efforts de mise en commun de ce « proto-Bourbaki » sont exposés plus complètement dans L. Beaulieu, « A Parisian café and ten proto-Bourbaki meetings (1934–1935) », *The Mathematical Intelligencer*, 15, 1993, pp. 27–35.

4. Noyau dur pour personnel mobile

On dit souvent que Bourbaki jouissait d'une éternelle jouvence parce que des mathématiciens plus jeunes venaient remplacer ceux qui partaient à l'âge de la retraite, fixé à cinquante ans. Or, il n'y eut pas de règle formelle concernant cette retraite à cinquante ans avant la fin des années cinquante ; elle ne fut d'ailleurs pas respectée scrupuleusement. Les mouvements de participation relevaient d'autres facteurs. Pour des raisons personnelles, pour des choix de carrière, par la force d'événements extérieurs, suite à des mésententes, par lassitude, par dépit ou par paresse, tous ces motifs ont prévalu aux changements du personnel chez Bourbaki.

Au cours des premières réunions de 1934-1935, ils décidèrent de limiter à neuf le nombre des participants à cette aventure. À ce moment-là les « neuf » en question étaient : Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, (Paul Dubreuil, présent à une réunion), Jean Leray (présent à deux réunions), Szolem Mandelbrojt, René de Possel et André Weil. Très tôt, les participants varièrent : le géophysicien Jean Coulomb remplaça Dubreil dès avril 1935 et quand Leray déclara ne plus souhaiter faire partie de l'entreprise, on coopta Charles Ehresmann qui rejoignit la compagnie dès l'automne 1935. Ces hommes composèrent le noyau originel du groupe Bourbaki. Ils en sont les fondateurs.

Il était alors entendu que les membres en titre seraient ceux qui assisteraient à l'assemblée plénière de l'été 1935. Certains « membres » étaient néanmoins absents, un autre ne fut jamais « membrifié ». Dès le début, le personnel de la compagnie s'avéra mobile. La relève était assurée quand Coulomb et Mandelbrojt s'éloignèrent du groupe en 1937 : Charles Pisot et Claude Chabauty avaient été recrutés. Mais quand Claude Chevalley partit aux États-Unis la même année, il continua d'envoyer des rédactions à Bourbaki et l'on ne le remplaça pas plus que Weil qui dut passer le reste de sa carrière dans les Amériques. Pourtant, Weil ne revint au congrès qu'en 1945 et Chevalley l'année suivante.

À tout moment de son histoire, l'équipe comporta un noyau d'individus qui s'investissaient plus à fond, soit dans la discussion, soit dans l'organisation, soit dans la rédaction. En marge de ceux-ci, d'autres flottaient, partaient pour revenir plus tard, s'impliquaient un temps puis disparaissaient, ou participaient activement aux activités de groupe mais rédigeaient peu ; c'était le contraire dans d'autres cas. Chez Bourbaki, la qualité de membre a toujours eu quelque chose de flou et cela a peut-être contribué au mystère dont le groupe s'entoura.

La liste des membres de Bourbaki, de leurs « cobayes » et de leurs invités entre 1934 et 1968 sera affichée sur transparents durant la conférence.

5. Les « belles années » (1935-1937)

Telles qu'en leurs souvenirs elles ne sont plus.

6. Attentes, fracas, chuintements, silences (1939-1944)

Pour rendre l'atmosphère, mots et images à l'appui.

7. Les séminaires Bourbaki

Leurs contenus et leurs soutiens.

8. La multiplication des fascicules marron

Le sujet à caractère statistique sera présenté à partir de graphiques.

9. La chronique de Bourbaki

Les circulaires de Bourbaki permirent aux membres dispersés d'entretenir la flamme de leur projet en dépit de circonstances souvent difficiles. À compter de 1940, l'entrée en matière de « La Tribu » (Bulletin œcuménique, apériodique et bourbachique), prenait un ton plaisant, souvent narratif. Par exemple, le premier numéro de « La Tribu » tente manifestement de ragaillardir les esprits :

> *À tous nos frères en Bourbaki, salut et bénédiction.*
>
> *Voici plus de six mois que la colère de Bourbaki s'est déchaînée, et que son peuple choisi gémit dans l'adversité, dispersé aux quatre coins de l'Univers. D'aucuns, sans connaître la main qui les a frappés, en demeurent encore étonnés, le nez dans la poussière, cherchant dans les grondements de l'air et de la terre un présage incertain d'une fin prochaine de leurs maux, et usant leurs forces à des besognes serviles ; d'autres, isolés et privés de tout secours vraiment bourbachique, se sont*

laissés aller, dans leur désespoir, jusqu'à porter leurs offrandes à de faux dieux, en l'honneur de qui ils crachent jour et nuit la flamme et le fer vers le ciel. Partout règne le découragement ; nul ne chante plus la gloire de Bourbaki et les ennemis de la vraie Mathématique se réjouissent dans le fond de leur cœur.

Or, sachez que la miséricorde de Bourbaki est infinie, et qu'en ces temps de détresse, Il a daigné se manifester en personne et confondre ses détracteurs. Le fascicule I (Résultats des Ensembles) est paru : quelques rares fidèles ont eu le privilège de le voir et de l'admirer. Le fascicule II, ayant franchi le cap des ultimes épreuves, ne saurait tarder à son tour. Mais la route est encore bien longue jusqu'à l'achèvement de l'Œuvre et la grande médaille en chocolat (n° 63 du Jeu de l'Oie bien connu). Ce bulletin se propose d'y contribuer et de ranimer les énergies défaillantes : il servira de véhicule à la discussion des Livres et chapitres déjà polycopiés, diffusera tous renseignements sur les travaux en cours, et en général, toutes informations utiles. Que les cerveaux donc se dérouillent ! Que les plumes grattent le papier ! Que le cliquetis des machines à écrire et la rumeur des presses portent en tous lieux le nom de Bourbaki ! Amen.[9]

C'était l'époque de la drôle de guerre et, suivant une suggestion de Weil, Dieudonné ravivait le bulletin pour rejoindre les collègues qui ne s'étaient plus réunis depuis deux ans. Il commence son annonce en invoquant la figure légendaire de Bourbaki. Les allusions religieuses visent sans doute Delsarte, encore secrétaire officiel de Bourbaki et toujours catholique pratiquant, qui avait l'habitude de conclure ses communications par un « À tous, salut et bénédiction » et de les rehausser d'autres expressions religieuses, comme pour se moquer de lui-même.

Comme un canevas de théâtre, « La Tribu » porte souvent comme en-tête un sous-titre, produit de la fantaisie de son rédacteur, qui dégage le thème du congrès, le cas échéant. Il y a ainsi un congrès « De Nicolaïdes » à Nancy, « Du banc public » (référence à Brassens) celui des « Universités cogérées » (en octobre 68, à l'heure de la cogestion).[10] Après le titre, vient la liste des membres présents, (quasi-présents ou absents), cobayes, visiteurs, épouses, enfants, animaux, véhicules en tous genres et la panoplie des *impedimenta* de Bourbaki (le tableau portatif et sa brosse à effacer, appelée *éraseur* ou les coussins, appelés *sous-culs*, etc.). Les longues énumérations s'allient une touche de surréalisme.

Quand « La Tribu » rend compte d'un congrès, un court récit drolatique

9. La Tribu n° 1, 15 mars 1940. NBT 002, page 1.

10. Les congrès d'avant-guerre et des années d'occupation étaient plutôt identifiés par les lieux où ils étaient tenus.

dépeint ou invente les situations les plus ridicules et raconte le détail des activités ludiques des participants réunis en congrès. Certains Bourbakis l'appelèrent plus tard la « partie folklorique », ce qui ne les empêcha pas de la conserver alors qu'ils avaient jeté les parties plus techniques, souvent de lecture rébarbative. Elle servit de chronique. Écrite avec fantaisie et humour par un membre (durant la période qui nous intéresse ici : Delsarte, Dieudonné, parfois Cartan, souvent Pierre Samuel, ou Jacques Dixmier, entre autres), la narration déploie une technique d'écriture qui frise le burlesque, au point où certains congrès semblent être des reprises d'*Alice au pays des merveilles* ou d'autres s'apparentent aux revues normaliennes les plus loufoques.(11) Les jeux de mots mathématiques y abondent, faisant se rencontrer les idées les plus nobles avec les réalités les plus physiologiques.

Ces comptes rendus écrits imitent la forme verbale : ils sont faits pour être lus et relus à haute voix et provoquer le rire des lecteurs. L'humour pose aussi des limites à la mémoire et certaines blagues sont si pointues et si intimement liées aux circonstances particulières d'un congrès qu'elles peuvent échapper aux absents ou même aux lecteurs initiés qui n'avaient pas fréquenté depuis longtemps les vieux numéros de « La Tribu ».

« La Tribu » comprenait d'autre rubriques strictement informatives sur la marche des discussions, les sujets traités, l'état des rédactions, le calendrier des prochains congrès et celui du séminaire Bourbaki. L'ensemble de ces rubriques constituaient d'ailleurs la véritable substance du bulletin. Néanmoins, si l'humour caractérise le style narratif de Bourbaki, il n'est pas pour autant absent des discussions mathématiques proprement dites et les mêmes techniques humoristiques sont utilisées dans la façon de raconter des incidents anodins ou de traiter des sujets les plus difficiles ou techniques. Le récit l'emporte sur le vécu authentique qu'il corrige et réorganise : l'événementiel et les arrêts sur image fantaisistes deviennent de véritables aide-mémoire. Ainsi la narration humoristique, plus facile à retenir et qui reste écrite, tisse-t-elle d'un fil continu la mémoire du groupe. En outre, elle lisse une grande part de réalité et exerce un pouvoir consensuel : elle devient l'histoire officielle de Bourbaki, celle que les membres se remémorent entre eux. Chez Bourbaki, les jeux de mots et les jeux d'esprit — à commencer par les mathématiques elles-mêmes telles qu'ils les représentèrent souvent — étaient partie intégrante des habitudes communautaires et contribuèrent à cimenter les liens entre les membres du groupe.(12)

---

11. Ceux que le folklore normalien intéresse découvriront avec bonheur un enregistrement édité par les Éditions de l'ENS.
12. J'ai longuement discuté du rire de Bourbaki et de ses diverses fonctions à l'intérieur du collectif « Jeux d'esprit et jeux de mémoire chez N. Bourbaki », in *La Mise en mémoire de la science. Pour une ethnographie historique des rites commémoratifs*, sous la direction de Pnina Abir-Am, Paris, Éditions des Archives contemporaines, 1998, pages 75-123.

10. Le secrétariat de Bourbaki à Nancy (1935-1968)

Ou les vases communicants.

11. Les réunions de Bourbaki à Nancy

Il y en a eu peu, mais...

12. Concentration bourbakienne à Nancy

Dès les années trente, Delsarte s'efforça de faire nommer à Nancy des collègues de valeur quand ceux-ci n'étaient pas à Strasbourg ou déjà à Paris. Certains de ces mathématiciens choisis furent également membres de Bourbaki. Des tableaux montrent les nominations et affectations de ce personnel. Je les commenterai dans ma conférence et apporterai quelques précisions.(13)

13. Les institutions Delsarte

Au sujet des liens entre l'Institut Élie Cartan, le Centre de Troisième Cycle et Bourbaki.

14. Bourbaki s'associe

Le pacte de Bourbaki, le recours à un pseudonyme et à l'anonymat des membres, présentaient également des dimensions pratiques. Dans les premiers temps, Bourbaki s'était mis d'accord, pour que les membres ne touchent pas de droits d'auteurs individuellement. Tant que Bourbaki publia peu, la question financière se posait surtout pour la rémunération de la secrétaire et l'achat de fournitures. Après la guerre, lorsque le collectif commença effectivement à encaisser des droits, les membres s'entendirent pour que cet argent serve à couvrir les dépenses liées à la tenue de leurs congrès. Lorsque les droits de Bourbaki eurent augmenté sensiblement encore, Delsarte, toujours secrétaire-trésorier, prit des mesures afin que Bourbaki puisse bénéficier des dispositions légales régissant les associations à but non lucratif (loi 1901). Bourbaki se constitua donc en association, qui porte encore le nom d'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki.

13. Lire à ce sujet André Renaud, Du Rayonnement des mathématiques lorraines, in *Les Universités de Nancy*, numéro hors série du *Pays Lorrain* (Journal de la Société d'Histoire de la Lorraine et du Musée Lorrain), mai 2003, pages 43 à 48 ; les tableaux figurent aux pages 44 et 45.

Officiellement, l'association a été fondée le 2 juillet 1952 et elle choisit son siège social à Nancy, rue de l'Oratoire au Numéro 4 (toujours adresse privée de Jean Delsarte). Son conseil d'administration se composait alors de : Delsarte, président, Cartan, vice-président, Dieudonné, secrétaire, et Jean-Pierre Serre, trésorier. Le document statutaire nomme quatre autres membres : Godement, Schwartz, Dixmier et Samuel.(14) On remarquera que les membres étrangers (comme Samuel Eilenberg) ou non résidents (Chevalley et Weil) ne faisaient pas partie de cette association administrative. Dans ce cas-ci comme dans d'autres, on peut dire que le groupe Bourbaki comprenait des membres qui ne faisaient pas partie de l'Association, laquelle avait des fonctions dont le groupe en entier ne s'occupait pas, mais que l'intersection entre les deux n'était pas vide.(15)

Subséquemment, Bourbaki put s'en remettre à ce contrat pour régler certaines affaires d'argent et décider des questions relatives au rôle des membres et aux activités du groupe. En théorie, l'assemblée de l'association devait se réunir une fois l'an. Cela se fit une fois de façon officielle et à peu près dans les formes, mais Delsarte dû renoncer à la participation active de ses camarades que ces considérations ennuyaient profondément et qui préférèrent très tôt en déléguer la responsabilité en « le priant de ne plus canuler Bourbaki ». Le plus souvent, un petit comité se chargeait des affaires administratives de l'équipe.

Cela étant, le contrat social implicite — par lequel chacun renonçait à l'exclusivité de sa propriété intellectuelle et acceptait que son travail ne soit jamais reconnu en son nom — devait malgré tout continuer à prévaloir, comme pratique d'adhésion qui n'était pas et ne pouvait pas être déterminée par un document juridique.

L'Association avait dix ans quand Jean Delsarte en fut fait président d'honneur, peu avant son départ au Japon où il accepta le poste de Directeur de la maison franco-japonaise à Tokyo en 1962.

15. Nancago

Ce n'est pas du japonais. Ce fut le nom de la villa de Dieudonné près de Nice. « Nancago » (composé de NANcy et ChiCAGO pour tout dire) servit parfois de deuxième adresse domiciliaire de Bourbaki dans ses canulars : c'est de Nancago, que « Nicolas Bourbaki » ou « N.B. » signa les préfaces de ses nouvelles éditions à compter des années cinquante.

Mais c'est en toute légitimité fictive que ce nom de ville fut introduit dans l'intitulé d'une série, les « Publications de l'Institut mathématique de l'Université de Nancago », que Dieudonné et Weil dirigèrent chez Hermann, toujours dans le cadre des Actualités scientifiques et industrielles, entre 1951 et

14. Déclaration d'existence (Association loi 1901), 1 page, signée et enregistrée le 30 août 1952. Préfecture de Nancy, Archives départementales de Meurthe-et-Moselle.

15. On trouve un raisonnement semblable énoncé par Delsarte à un administrateur dans le texte de Gérard Eguether sur Jean Delsarte.

1975.[16] Y firent paraître certains de leurs travaux, les Bourbakis Chevalley, Serre, Weil et d'autres mathématiciens proches du groupe, comme Georges de Rham et Irving Kaplansky. Ces mémoires s'orientent sur les groupes et algèbres de Lie et sur les variétés différentielles.

Mis à part ses sujets, cette série fit, un temps, double emploi à une autre, également créée par Weil du temps où il enseignait à Strasbourg, les « Publications de l'Institut de mathématique de l'Université de Strasbourg », qui parurent également aux ASI chez Hermann entre 1937 et 1987. Plus vivaces, ces publications portèrent plutôt sur l'analyse classique, la théorie de l'intégration, celle du potentiel ou des probabilités. On y trouve néanmoins une bonne densité bourbakienne : Armand Borel, Henri Cartan, Dieudonné, Godement, Schwartz (qui y publia ses premiers fascicules sur les distributions). Parmi les auteurs, il y a aussi une élève de Weil, Élisabeth Lutz, et un mathématicien célèbre qui contribua généreusement aux travaux de Bourbaki sans pour autant en être jamais membre en titre, Paul-André Meyer.

16. Le prix de Bourbaki

À quel prix évaluer Bourbaki ?

17. Les héritiers

Notre époque valorise les applications mathématiques. À Nancy, la chaire de mathématiques appliquées, créée depuis 1871, fut abolie au profit d'une chaire de mécanique physique, à compter de 1958. Les mathématiques appliquées, pour leur part, ont essaimé et proliféré au sein de l'ENSEM et de l'INRIA. La création d'un courant de mathématiques appliquées en France, essentiellement due à l'engagement de Jacques-Louis Lions — qui a été d'ailleurs collaborateur mathématique de Delsarte et de Leray — a délimité un groupe de mathématiciens qui se reconnaissent comme mathématiciens appliqués et qui sont, de plusieurs manières, sociologiquement séparés des autres mathématiciens dont les recherches sont caractérisées comme « pures ». D'ailleurs, les applications mettent en jeu beaucoup de secteurs des mathématiques et non seulement les équations aux dérivées partielles ou les probabilités.

Je tiens à remercier , parmi ceux qui m'ont aidée, Daniel Barlet, Henri, Nicole et Suzanne Cartan, David Coyle, Gérard Eguether, Roger Godement,

16. J'ai longtemps cru que le nom de cette ville imaginaire venait plutôt d'une complicité Delsarte-Weil. Il n'est pas exclu qu'il en eut été ainsi, mais comme les Archives Jean Delsarte ne renferment aucun document concernant les dites publications — alors que Delsarte conservait toujours une trace écrite de ce qu'il faisait — j'en conclus que le co-directeur de Weil était plutôt Dieudonné, qui n'a hélas laissé aucune archive. (Du moins, aucune retrouvée à ce jour.)

Micheline Guillemin-Delsarte, Christian Houzel, Geneviève Poirot, André Renaud, Paul Sadoul et Gérald Tenenbaum. La reconnaissance m'empêche de leur faire partager la responsabilité de mes erreurs. La plus grande partie de mon travail s'appuie sur des archives inédites, orales ou écrites, provenant d'Europe ou d'Amériques. Les Archives Jean Delsarte de l'Institut Élie Cartan et les Archives de l'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki à Paris constituent deux mines quasi inépuisables.

beaulieu@math.jussieu.fr

Autour du nombre π

par Pierre Eymard

L'origine du nombre π se trouve dans le désir de *mesurer le cercle*. Soit L la longueur du cercle de rayon R, et soit S son aire. Il existe une seule et même constante π telle que $L = 2\pi R$ et $S = \pi R^2$.

La première tentative connue de calcul de cette constante remonte à 4 000 ans avant J.-C. et s'appelle la *règle du neuvième*. Soit $d = 2R$. Il s'agit de trouver le côté d'un carré d'aire égale à celle du cercle de diamètre d. Pour cela on ôte à d le neuvième de d. Ainsi

$$\left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad \text{donc} \qquad \pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1605\ldots$$

Bien entendu, il s'agit d'une formule empirique, qui ne peut être exacte, car on sait que π n'est pas une fraction (Lambert, 1766). L'erreur est inférieure à $2 \cdot 10^{-2}$.

Mais la première étude mathématique de π est due à Archimède (287-212 avant J.-C.), avec sa *méthode de duplication*. Dans le cercle de rayon un, il considère un polygone régulier à n côtés inscrit (resp. exinscrit). Notons ℓ_n (resp. L_n) son demi-périmètre. Par exemple, pour $n = 6$, cas de l'hexagone, on a $\ell_6 = 3$ et $L_6 = 2\sqrt{3}$. Archimède calcule ℓ_n et L_n pour $n = 6$, 12, 24, 48 et 96. En fait, grâce à la géométrie euclidienne et notamment au théorème de Pythagore, il sait calculer ℓ_{2n} en fonction de ℓ_n et L_{2n} en fonction de L_n :

$$\ell_{2_n} = \sqrt{2}\, n\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_n}{n}\right)^2}} \qquad \text{et} \qquad L_{2n} = \frac{2L_n}{1 + \sqrt{1 + \left(L_n/n\right)^2}}\cdot$$

Il a donc l'encadrement $\ell_{96} < \pi < L_{96}$. Mais il ne calcule pas exactement ℓ_{96} et L_{96}, n'ayant pas la numération de position. De plus, les Grecs ramenaient tout à des fractions. En minorant les ℓ_n et majorant les L_n très précautionneusement, il trouve

$$3 + \frac{10}{71} < \ell_{96} < \pi < L_{96} < 3 + \frac{1}{7},$$

c'est-à-dire $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

Ce texte est la rédaction d'une conférence de vulgarisation, donnée à l'Institut Élie Cartan le 21 octobre 2000, lors de la Fête de la Science 2000.

L'auteur a dirigé cet Institut de 1982 à 1991.

Archimède ne va pas plus loin que 96, mais il est implicite dans sa démarche qu'on pourrait approcher π d'aussi près qu'on veut, par le haut et par le bas, en prenant n assez grand. Il y a là une véritable définition mathématique de π comme limite commune des deux suites adjacentes (ℓ_n) et (L_n). Indiquons que les formules de duplication écrites plus haut équivalent à l'algorithme de type moyenne arithmético-géométrique :

$$L_{2n} = \frac{2L_n\ell_n}{L_n + \ell_n} \qquad \text{et} \qquad \ell_{2n} = \sqrt{L_{2_n}\ell_n}.$$

Après Archimède, il faudra attendre presque 2 000 ans pour que l'étude de π progresse notablement. L'apparition du Calcul Infinitésimal va permettre d'exprimer π par des sommes de séries, des intégrales, des produits infinis ou des fractions continues. Dans la masse énorme des formules de l'Analyse où intervient π, j'ai sélectionné quelques unes, soit pour leur beauté, soit pour leur implication dans d'autres domaines des mathématiques.

En 1655, Wallis énonce la formule

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2{\cdot}2}{1{\cdot}3}\,\frac{4{\cdot}4}{3{\cdot}5}\,\frac{6{\cdot}6}{5{\cdot}7}\cdots\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)},$$

où l'on voit apparaître les produits $2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2n)$ et $1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2n+1)$, qui s'expriment par des factorielles. Ainsi la *formule de Wallis* peut encore s'écrire :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \qquad \text{quand} n \to \infty.$$

Or, le premier membre a une interprétation probabiliste, avec le jeu de pile ou face. C'est la probabilité, après $2n$ jets successifs de la pièce, qu'on ait eu exactement n piles et n faces. Cette probabilité décroît quand n croît, et Wallis nous dit que, quand $n \longrightarrow \infty$, elle se comporte comme $1/\sqrt{\pi n}$. Laplace, en signalant cette interprétation probabiliste de la formule de Wallis, ne manque pas de s'étonner : quel rapport π, c'est-à-dire le cercle, peut-il avoir avec le jeu de pile ou face ? Pour le savoir, il faudrait trouver une démonstration de la formule de Wallis par les probabilités élémentaires.

D'ailleurs π, ou plutôt $\sqrt{\pi}$ intervient aussi dans la distribution normale ; on a la *formule de Gauss* :

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Rien d'étonnant à cela, après ce que nous avons dit, puisque la distribution binomiale du jeu de pile ou face a à la limite le comportement d'une distribution normale (de Moivre–Laplace).

Citons aussi la formule due à Euler :

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big),$$

qui généralise celle de Wallis $x = \frac{1}{2}$ et qui, pour $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc... donnerait d'autres produits infinis remarquables pour π.

Signalons que la formule de Wallis joue un rôle crucial dans l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim C\sqrt{n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \qquad (n \to \infty)$$

que l'équivalent soit de ce type s'obtient aisément en encadrant la courbe de $\log x$ par des fonctions en escalier. Mais c'est Wallis qui donne la constante $C = \sqrt{2\pi}$.

La première expression de π comme *somme de série* est donnée par Leibniz vers 1670 :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

C'est un cas particulier (pour $x = 1$) de la formule de Grégory :

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

valable pour $|x| \leqslant 1$. La série de Leibniz pour $\pi/4$ converge très lentement : il faut additionner 5 000 termes pour avoir trois décimales exactes de π. En revanche la série de Grégory de $\operatorname{arctg} x$ converge assez vite pour x petit. D'où l'idée de reconstituer $\pi/4 = \operatorname{arctg} 1$ comme somme de deux, trois, ou plus, valeurs de $\operatorname{arctg} x$, avec des x petits. La première formule de ce type fut celle de John Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}\cdot$$

Elle lui permit en 1706 d'obtenir 100 décimales exactes de π. Dans cet ordre d'idées, citons encore la formule de Gauss

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

avec laquelle Guilloud et Bouyer ont calculé en 1974 le premier million de décimales de π. La chasse aux décimales de π est un sport très ancien et toujours actuel. Outre les formules du type de Machin, se révèlent très efficaces des algorithmes issus des relations entre π, la moyenne arithmético-géométrique et les fonctions elliptiques. Citons par exemple l'algorithme suivant, dû aux frères J.M. et P.B. Berwein en 1984 : soient $x_0 = \sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt[4]{2}$ et $\pi_0 = 2+\sqrt{2}$. Posons

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{1+x_0}{2\sqrt{x_n}} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0;\\
y_{n+1} &= \frac{1+x_n y_n}{(1+y_n)\sqrt{x_n}} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1;\\
\pi_{n+1} &= \pi_n \frac{1+x_n}{1+y_n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Alors π_n tend vers π en décroissant et, pour $n \geqslant 3$,

$$\pi_n - \pi \leqslant 10^{-2^{n+1}}$$

25 itérations suffisent pour dépasser les 50 millions de décimales de π.

Toutes ces acrobaties numériques ne fournissent pas la moindre indication générale sur le nombre π. Par exemple, π a-t-il une infinité de décimales égales à 7 ? On n'en sait rien, pas plus d'ailleurs que pour le nombre $\sqrt{2}$, à priori plus « simple » que le nombre π. Mais il n'est pas spectaculaire de chasser les décimales de $\sqrt{2}$.

Depuis les origines, π est lié à la trigonométrie. Considérons les fonctions « élémentaires » $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ de période 2π, où n est un paramètre entier $\geqslant 0$. Si $x \mapsto f(x)$ est une fonction de période de 2π suffisamment régulière, on peut la développer en *série de Fourier* :

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \tag{1}$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

sont les « coefficients de Fourier » de f. De plus on a la *formule de Parseval* :

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{a=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Par exemple, si $f(x) = x$ pour $|x| < \pi$, la formule (1) avec $x = \pi/2$ redonne la formule de Leibniz pour $\pi/4$ et la formule (2) donne la célèbre formule d'Euler :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Avec $f(x) = x^2$ pour $|x| < \pi$, la formule (2) donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Plus généralement, posons $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ pour s réel > 1 (fonction zêta d'Euler). Euler a calculé que, pour p entier $\geqslant 1$,

$$\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p-1} \frac{2^{2p-1}}{(2p)!} B_{2p} \pi^{2p},$$

où les nombres B_{2p}, nombres de Bernoulli, sont définis par la formule

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!},$$

ce qui fournit une relation de récurrence pour les calculer. On voit notamment que les B_{2p} sont des nombres rationnels, donc les $\zeta(2p)$ sont, comme π^{2p}, des nombres irrationnels.

On ne sait pratiquement rien des $\zeta(2p+1)$; ils ne semblent avoir aucun rapport avec π. En 1978, R. Apéry a démontré que $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ est un nombre irrationnel.

A propos de la formule $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$, en voici une illustration probabiliste : si vous prenez deux nombres entiers au hasard, la probabilité pour qu'ils soient premiers entiers entre eux vaut $6/\pi^2$. De manière précise, parmi les n couples d'entiers $\leqslant n$, soit p_n le nombre de ceux qui sont premiers entre eux ; alors $\lim_{n\to\infty} p_n/n^2 = 6/\pi^2$.

Revenons à la nature mathématique du nombre π. Nous avons dit qu'il est irrationnel. En fait on a mieux : *π est un nombre transcendant*, c'est-à-dire non algébrique ; autrement dit il n'est racine d'aucun polynôme non identiquement nul à coefficients entiers. Ceci a été démontré par Lindemann en 1882, inspiré par la démonstration qu'Hermite avait donnée antérieurement de la transcendance du nombre e. Ce théorème mettait un point final à un problème historique : celui de la *quadrature du cercle*. Peut-on, à la règle et au compas, à partir d'un segment de longueur un, construire une longueur égale à π ? Le nombre π est-il *constructible* ? Autrement dit, peut-il s'exprimer à partir du nombre 1 par un nombre fini de superpositions d'opérations de l'arithmétique (addition, multiplication, soustraction, division) et d'extractions de racines carrées. Non, car ceci impliquerait que π soit solution d'une équation algébrique à coefficients entiers, et même dont le degré serait une puissance de 2.

Le nombre π intervient de manière essentielle dans le *comportement asymptotique de certaines fonctions arithmétiques*. Donnons-en un exemple traité par Gauss en 1834.

Un entier naturel peut être ou ne pas être la *somme de deux carrés.* Par exemple $5 = 2^2 + 1^2$, et $250 = 13^2 + 9^2 = 15^2 + 5^2$, mais 3 n'est pas somme de deux carrés, non plus que 6 ou 7 ou 251. Soit $r(n)$ le nombre de décompositions de n comme somme de deux carrés. Par exemple $5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 5)^2$, donc $r(5) = 8$. De même $r(250) = 16$, mais $r(251) = 0$. Comment se comporte, quand $n \to \infty$, la suite

$$1 + r(1) + r(2) + \cdots + r(n)?$$

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2 = xOy$, considérons le sous-ensemble (discret) $\mathbb{Z}^2$ des points (x, y) à coordonnées entières. Traçons le disque de centre O, de rayon $\sqrt{n}$. Son aire est égale à πn. D'autre part, à chaque point de $\mathbb{Z}^2$ situé dans ce disque, associons le carré de côté un dont il est le bord inférieur gauche. Si D_n est la réunion de ces carrés, on a

$$\mathrm{aire}(D_n) = 1 + r(1) + r(2) + \cdots + r(n).$$

L'aire de D_n se compare aisément à celle πn du disque et il vient

$$\left|1 + r(1) + r(2) + \ldots + r(n) - \pi n\right| \leqslant C\sqrt{n} \tag{3}$$

où C est une constante. En particulier

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(1) + r(2) + \ldots + r(n)}{n} = \pi\cdot$$

Améliorer le terme d'erreur $C\sqrt{n}$ dans (3) est l'objet d'une recherche qui connaît encore aujourd'hui un grand développement. Soit ξ_0 la borne inférieure des nombres réels ξ tels qu'il existe une constante C avec

$$\left|1 + r(1) + r(2) + \ldots + r(n) - \pi n\right| \leqslant C n^{\xi}.$$

Le résultat (3) de Gauss dit que $\xi_0 \leqslant \frac{1}{2}$. On sait que depuis 1914 que $\xi_0 \geqslant \frac{1}{4}$. On conjecture que $\xi_0 = \frac{1}{4}$. La meilleure valeur obtenue jusqu'à présent est $\xi_0 \leqslant \frac{22}{73}$ (Huxley, 1993).

Terminons avec une autre illustration des relations entre le nombre π et la théorie des probabilités : le problème de *l'aiguille de Buffon.* Le grand naturaliste s'est aussi intéressé aux sciences exactes ; il fut le premier à calculer une probabilité continue, je veux dire non discrète, qui ne reposait pas seulement sur des dénombrements d'analyse combinatoire, mais sur la théorie de la mesure.

Considérons un parquet illimité formé de lattes de largeur d séparées par des rayures parallèles. Sur ce parquet jetons « au hasard » une aiguille AB rectiligne de longueur $L < d$. On demande la probabilité p pour que l'aiguille coupe une rayure du parquet.

Que veut dire ici « au hasard » ? Rien n'est plus déterminé que le hasard en mathématiques. Soit h la distance du centre C de l'aiguille à la rayure la plus proche et soit ϑ l'angle de l'aiguille avec cette rayure. Nous déterminons le hasard en décidant que toutes les valeurs de h entre 0 et $d/2$ et de ϑ entre 0 et $\pi/2$ sont indépendamment équiprobables. Buffon montre alors en 1777 que

$$p = \frac{2}{\pi}\,\frac{L}{d}\cdot$$

Ici, il n'y a pas lieu de s'étonner de l'intervention de π, puisque l'une des variables, ϑ, est un angle.

En 1860, Barbier, un mathématicien français mal connu, peut-être méconnu, a donné du résultat de Buffon une généralisation hardie. D'abord il admet pour l'aiguille n'importe quelle longueur L, pas forcément $< d$. L'aiguille pourra avoir plusieurs points d'intersection avec des rainures. Il détermine alors l'espérance mathématique du nombre de points d'intersection

$$E = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots$$

où p_k est la probabilité de k intersections, à savoir $E = 2L/(\pi d)$. Il dit aussi, ce qui est surprenant, que le résultat est le même si on prend une *aiguille courbe* de longueur L, ce qui, après tout, est logique quand on pense qu'une aiguille courbe est limite de lignes polygonales, lesquelles sont réunions finies d'aiguilles rectilignes à la Buffon.

Prenons par exemple pour aiguille un *cercle de diamètre d*. Alors $L = \pi d$ et il est clair qu'il y a toujours exactement 2 points d'intersection. Donc $E = 2$. Or on a bien

$$2 = \frac{2}{\pi}\,\frac{(\pi d)}{d},$$

donc

$$E = \frac{2}{\pi}\,\frac{L}{d}\cdot$$

Ça marche !

Cette méthode de Barbier lui a permis de généraliser la définition de π comme longueur du cercle, en étudiant, plus généralement que le cercle, les *courbes de largeur constante*.

Soit une courbe fermée convexe. Dans une direction donnée, elle s'inscrit dans une bande ; soit d la distance des deux droites d'appui ; d est la largeur de la courbe dans la direction donnée. On dit que la courbe est de largeur constante d si sa largeur vaut d dans toutes les directions. Le cercle de diamètre d en est un exemple, mais il y en a une infinité d'autres. Citons le *triangle de Reuleaux*, formé de trois arcs de cercle de même rayon d dont chacun a pour centre le sommet opposé. L'attention de l'ingénieur Reuleaux a été attirée par cette courbe qui peut tourner sans aucun jeu à l'intérieur d'un carré.

Théorème. *Toute courbe de largeur constante d a pour longueur πd.*

Démonstration. Soit L la longueur inconnue de la courbe. Faisons de la courbe une aiguille et jetons-la sur un parquet d'écart d. Il y a toujours exactement deux points d'intersection, donc $E = 2$. Ainsi, d'après Barbier,

$$2 = \frac{2}{\pi}\frac{L}{d},$$

donc $L = \pi d$. □

Remarque. En revanche, l'*aire* S d'une courbe de largeur constante d dépend de la courbe. Pour le cercle, $S = \pi d^2/4\cdot$ Pour le triangle de Reuleaux, elle vaut $S = \frac{1}{2}\big(n - \sqrt{3}\big)d^2$. On peut montrer que ce sont les valeurs extrêmes :

$$\big(n - \sqrt{3}\big)\frac{d^2}{2} \leqslant S \leqslant \pi\frac{d^2}{4}\cdot$$

La deuxième inégalité n'est autre que l'inégalité isopérimétrique ; la première est due à Lebesgue et Blaschke.

Le lecteur qui voudrait approfondir le sujet pourra consulter l'ouvrage *Autour du nombre π*, par Pierre Eymard et Jean-Pierre Lafon, Act. Sc. et Ind. 1441, 317 pp, Hermann 1999, où il trouvera par ailleurs une bibliographie détaillée.

Pierre Eymard
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France

Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?

par Antoine Henrot & Jan Sokolowski

1. Introduction

La légende raconte qu'en 814 avant Jésus-Christ, la reine Didon fuyant les Assyriens accosta sur les rives de l'actuelle Tunisie. Souhaitant s'y installer et fonder une ville (la future Carthage), Didon demanda au chef de la tribu qui occupait les lieux l'autorisation de disposer d'un territoire. Celui-ci lui tendit alors une peau de bœuf en lui disant d'un air goguenard : « *Le territoire que vous arriverez à couvrir avec cette peau est à vous !* ». Didon découpa la peau en une très fine lanière et se trouva alors confrontée au problème suivant : *disposant d'une lanière de longueur donnée, comment enclore un territoire de surface maximale* ? **L'optimisation de forme** était née ! L'optimisation de forme a pour objet la recherche de la meilleure forme possible pour un certain problème. Comme nous allons le voir dans ce petit texte, les problèmes d'optimisation de forme sont souvent d'origine industrielle : il pourra s'agir de chercher la meilleure aile d'avion, le meilleur mur anti-bruit, le meilleur pare-brise... Pour en revenir au problème de la reine Didon, si on souhaite construire un territoire disposant d'une ouverture sur la mer (dont on peut supposer le rivage rectiligne) la solution de ce problème est un demi-disque. Ce serait un disque dans le cas où on ne mettrait aucune contrainte. Cette propriété était déjà connue des grecs et porte le nom d'inégalité isopérimétrique. On peut traduire cette propriété en termes mathématiques de la façon suivante. Si Ω est un domaine du plan, notons A l'aire de Ω et P son périmètre. On peut alors montrer que, quelle que soit la forme du domaine Ω, on a toujours l'inégalité suivante entre l'aire et le périmètre :

$$4\pi A \leqslant P^2 . \tag{1}$$

De plus, le seul domaine plan pour lequel on a l'égalité dans (1) est le disque. En particulier, l'inégalité (1) montre bien que si le périmètre est fixé, le domaine Ω aura une aire maximale s'il est un disque.

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

La démonstration de (1) est loin d'être facile. Elle n'a été trouvée qu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle ! Et encore, il y eut quelques péripéties qui montrent bien que la recherche mathématique n'est pas un long fleuve tranquille. Après de nombreuses tentatives au cours des siècles, Jacob Steiner, mathématicien suisse (1796-1863 : on a dit de lui qu'il était le plus grand géomètre depuis le grec Apollonius) pense avoir trouvé la démonstration grâce à une idée très ingénieuse. Il montre qu'en partant d'un domaine quelconque qui n'est pas un disque, on peut le modifier (en fait le rendre plus symétrique grâce à une construction qu'on appelle maintenant la symétrisation de Steiner) en réduisant son périmètre tout en conservant son aire. Pour Steiner, c'est la preuve que le disque est bien le domaine qui a le plus petit périmètre parmi les domaines d'aire donnée. Mais affirmant cela, il fait une subtile erreur de raisonnement : sa preuve serait correcte s'il avait démontré au préalable qu'il existe effectivement un domaine plan qui minimise le périmètre parmi les domaines d'aire donnée. En appliquant alors son raisonnement à ce domaine-là, appelons-le Ω^*, il pouvait conclure par ce qu'on appelle un *raisonnement par l'absurde* : si le meilleur domaine Ω^* n'est pas un disque, alors la symétrisation de Steiner permet de transformer Ω^* en un domaine strictement meilleur : c'est une contradiction qui prouve que Ω^* est nécessairement un disque. Sa démonstration a été complétée par la suite par Constantin Carathéodory (1873-1950, allemand d'origine grecque).

Remarquons que si ces questions isopérimétriques s'énoncent et se conçoivent facilement, les preuves sont le plus souvent très ardues et certains problèmes restent encore à l'heure actuelle ouverts. Par exemple, si on se pose la question de déterminer la surface, dans l'espace, d'aire minimale qui englobe un domaine Ω composé de deux parties de volumes respectifs v_1 et v_2 donnés, la réponse n'est toujours pas connue et ce n'est qu'en 1995 que trois américains J. Hass, M. Hutchings et R. Schlafly, ont résolu le cas particulier $v_1 = v_2$ en prouvant que la solution est donnée par deux morceaux de sphère séparés par un disque. Notons que cette question est très fortement liée aux problèmes de surface minimale et de bulles de savon (voir ci-dessous). En effet la surface d'un film de savon est d'aire minimale, pour le volume d'air qu'elle contient, car la bulle cherche à minimiser son énergie élastique qui est proportionnelle à cette aire. Une généralisation possible de ces questions est évoquée ci-dessous : c'est le cas des surfaces capillaires.

L'optimisation de forme est une discipline mathématique à part entière. Que peut faire un mathématicien devant un problème d'optimisation de forme ? Son programme de travail est, en général, le suivant :

- Il va chercher à prouver l'existence d'une solution optimale. On a vu l'importance que cela pouvait avoir dans l'exemple de Jacob Steiner ci-dessus. Parfois, il essaiera également de prouver l'unicité de cette solution optimale (mais c'est une question très difficile en général).

- Il étudiera ce qu'on appelle les conditions d'optimalité qui caractérisent les formes optimales.
- Enfin, il s'attachera au calcul de la solution optimale ou, au moins, de solutions approchées satisfaisantes.

Pour les problèmes de nature industrielle, la démarche est souvent assez différente. L'industriel a devant lui une forme de départ qu'il souhaite améliorer. Le mathématicien doit alors imaginer une méthode (ou un algorithme) de modification de la forme de départ pour diminuer le coût ou augmenter les performances de l'objet. Parmi les exemples qui ont fait l'objet de collaborations récentes entre des mathématiciens de l'Institut Élie Cartan et des industriels sur ce sujet, citons :

- l'optimisation de la forme d'un aimant intervenant dans le système d'injection d'une voiture (voir paragraphe 2.2),
- l'optimisation de la forme d'un pare-brise pour que les essuie-glace fonctionnent le mieux possible,
- l'optimisation de la forme d'une pompe pour puits de pétrole pour améliorer son rendement,
- l'optimisation de la forme de la nacelle d'un moteur d'avion pour réduire le bruit que fait le moteur au décollage.

Nous allons maintenant donner quelques exemples de problèmes d'optimisation de forme. Sans rentrer dans les détails, nous évoquerons parfois en plus petits caractères comme ceci le contexte mathématique ou physique de manière plus précise : le lecteur non spécialiste pourra évidemment sauter ces passages en première lecture.

2. Quelques exemples

2.1. Surfaces minimales et surfaces capillaires

Ce problème est aussi appelé le problème des bulles de savon et il est illustré dans la section mathématiques de nombreux musées des Sciences de par le monde. On se donne un cadre métallique ou en plastique, si possible non plan (sinon le problème est élémentaire), et on le plonge dans un bain d'eau savonneuse. La question est de déterminer la forme de la bulle de savon qui se formera quand on remontera le cadre. Comme évoqué ci-dessus, c'est en fait un problème d'optimisation de forme, car la bulle de savon cherche à minimiser son énergie.

Mathématiquement, cela revient à se donner une courbe gauche γ de $\mathbb{R}^3$ et l'on peut démontrer (principe de moindre énergie) que la forme prise par la bulle de savon correspond à la surface S s'appuyant sur γ d'aire minimale. On est donc, là aussi, en présence d'un problème d'optimisation de forme :

$$\min\{|S|,\ S \text{ surface de bord } \gamma\}.$$

S est appelée *surface minimale* associée à γ. On peut démontrer qu'une des caractéristiques des surfaces minimales est que leur courbure moyenne est nulle en tout point (en dehors de γ).

On peut aussi considérer la situation analogue suivante. On a un récipient dans lequel on met un liquide (visqueux). Ce liquide adhère à la paroi par capillarité et la question est de trouver la forme prise par l'interface liquide-air (ou surface « libre » du liquide). Cette fois « l'énergie » du système qu'il s'agit de minimiser a une expression plus compliquée, mais le problème est de même nature.

Mathématiquement, la donnée est donc le récipient D ainsi que le volume de liquide V_0. On notera Ω l'espace occupé par le liquide. L'énergie totale du système « récipient-liquide » est somme d'une part de l'énergie de tension superficielle, qui s'écrit

$$E_1(\Omega) := 3D\mathrm{Aire}(\partial\Omega \cap D) + \cos\vartheta \ \mathrm{Aire}(\partial\Omega \cap \partial D),$$

et d'autre part de l'énergie potentielle

$$E_2(\Omega) := 3D - \int_\Omega K(x)\ \mathrm{d}x$$

où ϑ est un nombre donné et K une fonction bornée tous deux caractéristiques du liquide (ou plus précisément de sa viscosité) ainsi que de la paroi du récipient.

Le principe de moindre énergie indique que la forme Ω cherchée sera celle qui minimise l'énergie totale. On est donc conduit au problème d'optimisation de forme

$$\min\{E_1(\Omega) + E_2(\Omega),\ \Omega \subset D, |\Omega| = 3DV_0\}.$$

2.2. Optimisation d'un aimant

Dans certains systèmes électroniques (système d'injection dans une voiture par exemple), on peut trouver l'appareillage représenté à la Figure 1. Il s'agit d'un aimant situé en face d'une roue dentée. Le champ magnétique créé par l'aimant est évidemment différent suivant que c'est une roue ou un creux de la roue dentée qui se trouve en face de l'aimant. Une petite sonde, placée entre l'aimant et la roue dentée, mesure cette différence de champ magnétique. Pour rendre le système plus fiable, il convient de donner à cette différence la plus grande valeur possible. Pour ce faire, on peut agir sur la forme de l'aimant.

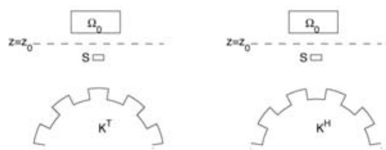


FIGURE 1.— L'aimant en face d'une dent (à gauche), en face d'un creux (à droite)

Ce travail a fait l'objet d'une thèse industrielle encadrée par le premier auteur.

2.3. Segmentation d'images

Le but est ici de rechercher à rendre plus nette des images floues. Pour cela, on cherche à définir des contours à l'intérieur desquels l'image est d'une intensité (on dira un niveau de gris) à peu près homogène. Les domaines d'application sont très variés : par exemple l'imagerie médicale ou spatiale.

Mathématiquement, la donnée d'une image peut être la donnée de D un rectangle du plan et de $g(x,y)$ une fonction définie sur D et à valeurs dans $[0,1]$ qui s'appelle « le niveau de gris » : on associe à chaque point de l'image (c'est-à-dire à chaque pixel) un nombre compris entre 0 et 1, plus l'image est pâle en ce point, plus ce nombre est proche de 0 et plus elle est sombre plus ce nombre est proche de 1 (il s'agit, bien sûr, ici d'images en noir et blanc). On veut alors déterminer un ensemble de contours $K \subset D$, où K est un ensemble fini (par exemple une réunion de courbes) et une fonction $u : D \mapsto [0,1]$ satisfaisant aux critères suivants :

- u est voisin de g (l'image d'origine),
- u est régulière et varie peu à l'intérieur de chaque contour délimité par K (on peut par exemple la supposer constante),
- la longueur totale de K doit rester petite (sinon il y aurait décomposition de l'image en un trop grand nombre de petits morceaux).

Cela conduit, comme indiqué ci-dessous, à un nouveau problème d'optimisation de forme. Cette technique est effectivement utilisée (avec d'autres méthodes d'origine mathématique) dans la reconstruction d'images.

Une modélisation, proposée par Mumford et Shah en 1985, consiste à minimiser la fonctionnelle

$$J(K,u) := a\int_D (u-g)^2\,dx + b\int_{D\setminus K} |\nabla u(x)|^2\,dx + c\,\text{« Longueur »}(K) \tag{2}$$

parmi les contours possibles $K \subset D$ et les fonctions u définies dans D. Dans (2), chaque intégrale correspond clairement à l'un des critères définis précédemment et les constantes positives a, b, c sont là pour donner plus de poids à l'un ou à l'autre de ces critères.

2.4. Identification de fissures ou de défauts

Un enjeu important dans le contrôle non destructif de structures ou de matériaux réside dans la possibilité de détecter d'éventuels défauts (fissures, fractures par exemple) à l'intérieur d'un matériau ou d'un système. En général, l'intérieur du matériau est inaccessible et il s'agit d'identifier les défauts à partir d'observations effectuées sur le bord du domaine.

Un modèle possible consiste à utiliser les propriétés de conduction du matériau (en thermique ou en électricité). A l'aide de mesures effectuées sur le bord, on compare ce qu'on obtient avec ce qu'on aurait obtenu si le matériau était parfait. Si tout se passe bien, on peut espérer, non seulement, détecter la présence de défauts, mais également les localiser. Les problèmes mathématiques que pose cette approche sont souvent très difficiles et sont appelés *problèmes inverses.* Nous expliquons ci-dessous comment on peut faire rentrer cette problématique dans le cadre de l'optimisation de forme.

Notons Ω le matériau, si γ désigne la fissure (inconnue), on peut imposer un flux f sur le bord de Ω, la température (ou le potentiel) u_γ est alors solution de

$$\begin{cases} \Delta u_\gamma = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \gamma, \\ \dfrac{\partial u_\gamma}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma, \\ \dfrac{\partial u_\gamma}{\partial n} = f & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

On mesure maintenant $u_\gamma = g$ sur une partie du bord ou sur tout le bord et, à l'aide de cette mesure, on cherche à reconstituer la fissure. On peut voir cela comme un problème d'optimisation de forme (c'est en réalité un problème inverse géométrique), car pour déterminer γ, on peut chercher à minimiser la fonctionnelle

$$J(\gamma) = \int_{\partial\Omega} (u_\gamma - g)^2 \, \mathrm{d}x\,.$$

Mathématiquement, plusieurs questions peuvent se poser :

- L'identifiabilité : c'est un problème d'unicité. Il s'agit de savoir si, pour des données mesurées, il y a une seule fissure γ qui peut convenir.
- L'identification : c'est la question de l'existence d'une telle fissure. Quelle est la classe des données (des fonctions g dans le modèle ci-dessus) qui correspondent à une telle situation ? Pour d'autres types de problèmes, de quelles données et mesures a-t-on besoin pour identifier l'inconnue ?
- La sensibilité vis-à-vis des données est une question cruciale. Dans les problèmes inverses, on a souvent un très mauvais comportement de la solution vis à vis de perturbations sur les données. Du coup, la mise en œuvre numérique s'avère souvent très délicate.

On peut imaginer d'autres types de problèmes et de modèles dans le même esprit. Il peut s'agir par exemple de détecter des nappes de pétrole (ou de minerai) dans le sous-sol grâce à une technique analogue. Dans ce cas, l'inconnue géométrique n'est plus une fissure, mais il faut identifier les différentes couches du sous-sol, via leurs différentes conductivités. En France, Elf a financé de nombreux travaux sur la question dans les années 80 et 90.

2.5. Acoustique

On peut également considérer le même type de problème en acoustique. Par exemple, on recherche la couche d'isolant à mettre sur la paroi d'une pièce pour améliorer les performances acoustiques. Il peut s'agir d' une salle de concert ou d'un amphithéâtre et, dans ce cas on voudra une très bonne restitution du son dans une partie de la pièce. On peut aussi considérer le cas d'un véhicule (voiture, avion) ou d'une habitation à proximité d'une source de bruit (autoroute par exemple) et il s'agira alors de limiter au maximum le bruit. On le voit, les critères peuvent être différents, mais les techniques mathématiques peuvent également varier.

Ainsi, le premier auteur encadre actuellement une thèse en collaboration avec EADS : il s'agit de modifier la forme ou le revêtement intérieur de la nacelle d'un Airbus A380. La nacelle est la partie située sous l'aile qui abrite le moteur de l'avion. Le but est évidemment de réduire le bruit que fait l'avion, en particulier lors de la phase de décollage.

2.6. Mélange de matériaux

En mécanique des structures ou en thermique, on est souvent confronté à la situation suivante : on dispose de deux (ou plusieurs) matériaux aux propriétés mécaniques ou thermiques différentes, l'un des matériaux pouvant d'ailleurs être l'air ou le vide, et on cherche à fabriquer un matériau composite ayant les meilleures propriétés possibles. Dans le même ordre d'idées, les travaux en mécanique des structures sont très nombreux. Un exemple de problème modèle est le suivant. On cherche à fabriquer une structure de rigidité maximale ou de poids minimal (pylône électrique par exemple). La figure 2 illustre bien ce type de problème. On cherchait la forme optimale (poids minimal, résistance maximale) pour un tabouret avec quatre pieds soumis à une force de traction verticale.

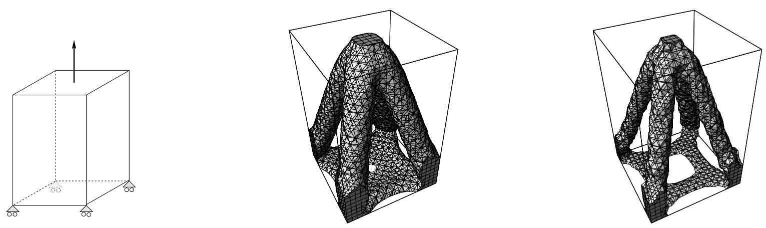


Figure 2.— Tétrapode : conditions aux limites (à gauche), forme optimale relaxée (au milieu), forme optimale pénalisée (à droite).

L'une des difficultés majeures de ce type de problème est que la topologie (voir section 3) de la structure cherchée est inconnue *a priori*, ce qui rend inefficace les méthodes de calcul usuelles basées sur la déformation progressive de la frontière. De plus, il n'existe pas en général de solutions classiques, c'est-à-dire de structure ω^* optimale. Heuristiquement, on s'en convainc en vérifiant qu'on peut améliorer une structure donnée en remplaçant un gros trou par beaucoup de petits trous, ce qui améliore la rigidité. C'est pourquoi, dans ce type de problèmes, les méthodes issues de *l'homogénéisation* vont trouver toute leur force.

2.7. Exemples en aéronautique

Historiquement, l'aéronautique est sans doute le domaine industriel qui a été le plus concerné par l'optimisation de forme. Parmi les problèmes qui ont été très étudiés, on peut citer

- optimisation du profil d'une aile pour améliorer la pénétration dans l'air (voir ci-dessous)
- tentative de rendre les avions moins bruyants (en particulier les avions supersoniques)
- recherches sur les avions furtifs (ou sur les sous-marins).

Dans ce dernier cas, on veut rendre l'avion le plus invisible pour les radars ennemis. On peut, pour cela, bien sûr jouer sur la forme de l'avion, mais aussi sur l'épaisseur et la nature de la couche de peinture : on rejoint là les problèmes de renforcement ou d'isolation traités au paragraphe 2.5.

Explicitons par exemple ce que peut être le problème d'optimiser le profil d'une aile d'avion. On introduit la traînée $\mathcal{T}$ d'une aile A comme étant la quantité

$$\mathcal{T} = \int_A \left[\mu(\nabla u + \nabla u^T) - \frac{2\mu}{3}\,\mathrm{div} u\right] n \;-\int_A Pn \tag{4}$$

où u est la vitesse du fluide, μ sa viscosité, P sa pression, ces quantités se calculant en résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles. On peut chercher, par exemple, à minimiser $\mathcal{T}u_\infty$ où u_∞ est la vitesse de l'aile dans le fluide. Le problème est très difficile, à la fois théoriquement et numériquement (nombre de Reynolds élevé, tourbillons, Navier-Stokes 3-D sur domaine non borné, ...).

3. Une nouvelle direction de recherche : l'optimisation topologique

3.1. Introduction

Dans de nombreux problèmes pratiques d'optimisation de forme, on peut avoir besoin de modifier la topologie des structures étudiées (c'est-à-dire par exemple le nombre de trous) afin de prendre en compte certains impératifs technologiques et économiques tels que la minimisation du poids de la construction sans pour autant perdre la stabilité, ou plus simplement pour obtenir un design agréable facilitant les ventes du produit. L'étude des questions mathématiques soulevées par ce type de problèmes est impossible si l'on se contente des méthodes classiques de l'optimisation de forme. Ces méthodes classiques bien connues reposent essentiellement sur des petites perturbations de la frontière du domaine en direction normale et conduisent à des méthodes numériques couramment utilisées par les ingénieurs.

Dans les problèmes qui vont suivre la *topologie* du domaine optimal (c'est-à-dire, pour parler grossièrement, le nombre de trous, le nombre de barres qui connectent les différentes parties de l'objet) est inconnue et il faut inventer de nouvelles méthodes pour rechercher une forme, sinon optimale, tout au moins meilleure que les formes utilisées couramment. Il y a pour cela plusieurs techniques mathématiques, l'une des plus prometteuses s'appelle l'optimisation topologique et est particulièrement développée à l'Institut Élie Cartan.

3.2. Exemple : l'optimisation d'un satellite

Les astronomes danois se sont lancés dernièrement dans la réalisation d'un petit satellite capable de détecter des sources de rayon gamma en provenance de galaxies lointaines. Ce satellite est équipé de quatre caméras (situées à chaque angle) et de divers autres instruments. Les différents instruments sont présentés sur la Figure 3(a).

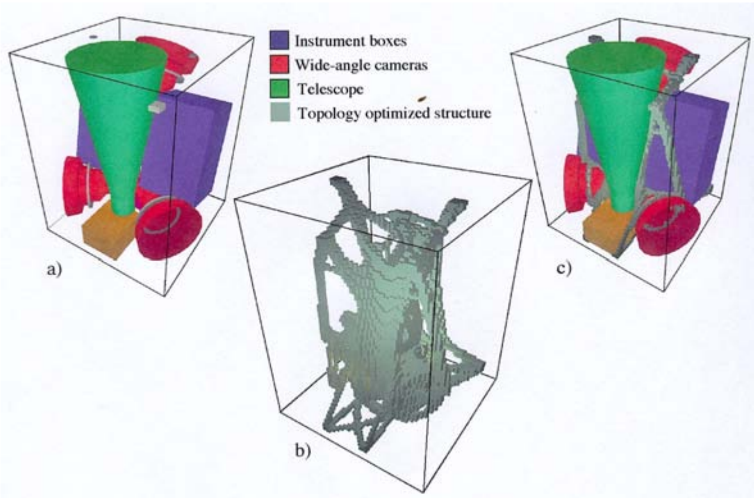


Figure 3.— Optimisation d'un satellite.
(a) Région de dessin et instrumentation.
(b) Structure obtenue par optimisation topologique.
(c) Structure optimisée avec les instruments.
(Exemple et figures aimablement fournis par Ole Sigmund.)

La taille du satellite est limitée à $60 \times 60 \times 80$ cm^3 et le poids à 80 kg. La question qui était posée au mathématicien était de trouver la structure permettant d'accrocher ensemble ces divers instruments avec le minimum de poids et une résistance suffisante, compte tenu des efforts mécaniques endurés par le satellite lors du décollage. C'est typiquement une question à laquelle l'optimisation topologique apporte une très bonne réponse. La Figure 3(b) représente le domaine optimal avant post-traitement et la Figure 3(c) la structure avec les instruments. Ce type de calcul tridimensionnel peut prendre plusieurs jours sur une machine très puissante.

3.3. Exemple : l'optimisation d'un micro-robot

Même en micro-électronique, on peut avoir à se poser ce type de questions d'optimisation de forme et de matériel. C'est actuellement un domaine de recherche très actif. Ces micro-mécanismes sont désignés sous le vocable de MEMS (MicroElectroMechanicalSystems). Leur petite taille leur procure de nombreux avantages par rapport à des systèmes plus traditionnels. On peut, par exemple, les utiliser pour retirer des caillots dans les artères !

La Figure 4 montre l'utilisation de l'optimisation topologique dans la recherche de la forme optimale d'un MEMS particulier : un actionneur microscopique à deux degrés de liberté.

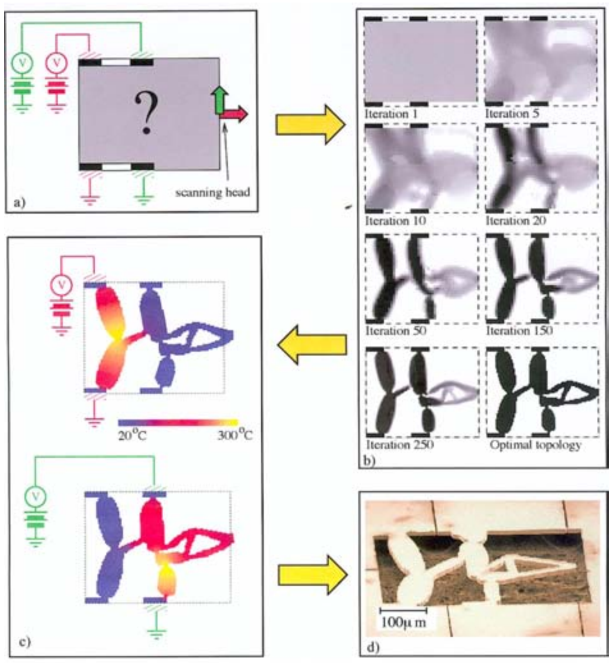


FIGURE 4.— Optimisation d'un mini-robot.
(a) Définition de la région de dessin et contraintes électriques.
(b) Historique de différentes itérations.
(c) Simulation de la distribution de chaleur et des déplacements pour le robot optimisé.
(d) Robot effectivement construit en laboratoire.
(Exemple et figures aimablement fournis par Ole Sigmund.)

Pour en savoir plus :

- J. Sokolowski, J.P. Zolesio, *Introduction to shape optimization*, Springer, 1992.
- A. Henrot, M. Pierre, *Variation et Optimisation de Formes*, collection Mathématiques et Applications, vol. 48, Springer 2005.

Antoine Henrot & Jan Sokolowski
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

antoine.henrot@iecn.u-nancy.fr
jan.sokolowski@iecn.u-nancy.fr

Modélisation mathématique et interactions fluide-structure

par Marius Tucsnak

1. Introduction

Les lignes qui suivent abordent des questions liées à la modélisation mathématique de phénomènes physiques et en particulier des interactions fluide-structure. Leur objectif est de sensibiliser un large public à quelques questions suscitant actuellement un grand intérêt, tout en évitant le plus possible l'utilisation de termes techniques et en essayant de mettre en évidence le rôle fondamental joué par les mathématiques dans des domaines applicatifs comme la météorologie, l'océanographie, l'aéronautique ou la médecine.

Nous allons, dans un premier temps, évoquer des questions liées à la modélisation mathématique en général et à ses applications à la dynamique des fluides, en évoquant, en particulier, les contributions fondamentales d'anciens professeurs de l'Université de Nancy. Nous présenterons ensuite quelques résultats récents sur la modélisation mathématique de phénomènes assez compliqués : les interactions fluide-structure.

Prévoir et contrôler l'écoulement fluide(1) est un problème d'intérêt primordial pour de nombreux domaines d'application : aérodynamique (autour des voitures, avions, fusées et navettes spatiales), médecine (écoulement du sang dans les artères), océanographie, météorologie, questions de pollution et d'environnement, régularisation de vibrations dans des réservoirs ou des tuyaux, etc. Le plus souvent le fluide entoure ou est contenu dans des structures rigides ou élastiques qui interagissent avec lui. Il convient alors d'étudier des systèmes *fluide-structure*. L'exemple le plus simple de ce type d'interaction est fourni par la célèbre poussée d'Archimède : *un solide plongé dans un fluide* **en équilibre** *est soumis à une force verticale, dirigée vers le haut, de valeur égale à celle du poids de fluide déplacé*. L'intuition géniale d'Archimède lui a donc permis de formuler un principe simple, donnant lieu à de nombreuses applications. La principale limitation à l'application de ce principe est la condition que le fluide soit à l'équilibre. Dans de nombreuses applications (mouvement d'avions ou

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

1. D'une manière très simplifiée le terme *fluide* désigne un liquide (eau, huile, etc) ou un gaz (air, oxygène, etc.).

de bateaux rapides, par exemple) cette hypothèse n'est pas satisfaite, ce qui donne lieu à des interactions bien plus complexes entre le solide et le fluide qui l'entoure. Il s'agit, en particulier, de forces de portance[(2)] et de traînée[(3)], qui jouent un rôle fondamental en aérodynamique (voir la Figure 1, téléchargée du site *http://www.chez.com/simpleavion/portance.html*).

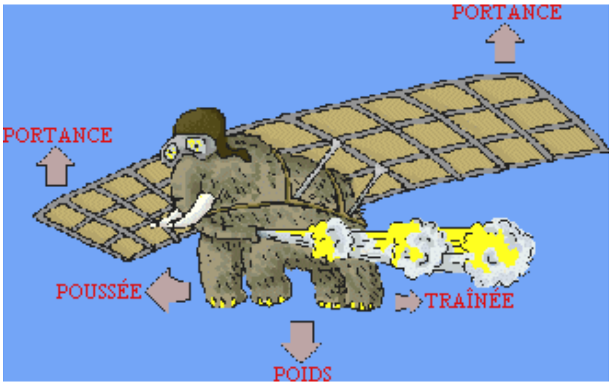


FIGURE 1.— Les quatre forces agissant sur un objet volant

De plus, à des grandes vitesses, la pression du fluide peut déplacer les solides avec lesquels il interagit. Dans ce cas le volume occupé par le fluide et, par conséquent, le « poids de fluide déplacé » varient avec le temps. Les difficultés mentionnées ci-dessus ont rendu nécessaire une nouvelle approche des interactions fluide-structure, en utilisant des modèles mathématiques beaucoup plus complexes. Ce sujet est en pleine effervescence actuellement, notamment grâce aux applications à l'aéronautique ou à la médecine. Précisons, avant de décrire quelques directions actuelles de la recherche dans ce domaine, la notion de *modèle mathématique*. Un *modèle mathématique* est une représentation abstraite et simplifiée d'un système réel, utilisant le langage des mathématiques, et créée dans le but de *prévoir* ou *d'influencer* l'évolution du système. Cette représentation schématise ce qu'elle étudie, n'en retenant que les traits communs et essentiels, en négligeant les détails. Du point de vue d'un modèle mathématique donné, les objets et les phénomènes peuvent être classés en trois catégories :

- ceux qui peuvent être complètement négligés ;
- ceux qui doivent être calculés : il s'agit de *paramètres de sortie* du système ;
- ceux qui doivent être connus pour calculer la sortie : il s'agit de *paramètres d'entrée* du système.

2. Pour un avion, la portance est la composante perpendiculaire aux ailes des forces aérodynamiques qui s'exercent sur celles-ci.

3. La traînée est la force qui s'oppose à l'avancement d'un solide plongé dans un fluide.

Le choix des objets et des phénomènes faisant partie de chaque catégorie est une étape très importante et très difficile du processus de modélisation. Si le modèle néglige trop d'objets ou de phénomènes les résultats obtenus en sortie seront forcément éloignés de la réalité. Si trop d'objets ou de phénomènes sont pris en compte alors le modèle sera trop complexe, donc inutilisable. Remarquons que la notion de « trop complexe » a évolué très fortement au cours du temps. La puissance de calcul de superordinateurs modernes rend possible l'utilisation de modèles mathématiques qui semblaient hors de portée il y a quelques années.

2. Modélisation mathématique de mouvements fluides

On peut attribuer les premiers modèles mathématiques du mouvement fluide à Euler et à Lagrange. En fait il s'agit essentiellement des équations de Newton, qui relient la force et l'accélération, qui sont appliquées à chaque particule du fluide. Dès le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle on obtient des résultats importants sur les fluides que nous appelons aujourd'hui « parfaits », ce qui veut dire « sans viscosité »[4]. Plus précisément, pour ce type de fluide, on range la viscosité dans la catégorie des phénomènes qu'on peut négliger. Ce type de modélisation a permis des applications importantes, dues notamment à Bernoulli et à Venturi mais il a aussi montré ses limites, notamment en ce qui concerne la modélisation des interactions fluide-structure. Il s'agit, en particulier, du célèbre « paradoxe de d'Alembert » selon lequel « un corps rigide peut se déplacer d'un mouvement uniforme dans un fluide au repos à l'infini, sans qu'il soit nécessaire de lui fournir de l'énergie, le fluide n'exerçant sur ce corps ni portance ni traînée ». L'explication de ce « paradoxe » réside dans le fait que les fluides réels ne sont pas parfaits, mais plus ou moins visqueux. La modélisation mathématique de ce type de fluide, essentiellement due à Navier et à Stokes, date du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Dans le cadre de ce modèle, le champ de vitesses du fluide vérifie un système très complexe. Il s'agit des fameuses équations de Navier-Stokes. Précisons, pour ceux qui n'ont jamais vu ces équations, que, pour les fluides incompressibles[5], les inconnues du système sont deux fonctions

$$(x,y,z,t) \to \overrightarrow{v}(x,y,z,t) \text{ (respectivement } \; (x,y,z,t) \to p(x,y,z,t)).$$

représentant la vitesse (respectivement la pression) du fluide à l'instant t au point de coordonnées (x,y,z). Les équations de Navier-Stokes font intervenir

4. D'une manière très simplifiée, le terme « viscosité » désigne les forces de friction entre les diverses couches du fluide.

5. Un fluide est dit *incompressible* si toutes ses parties préservent leur volume pendant les différents déplacements.

les taux de croissance (ou *dérivées*) de $\overrightarrow{v}$ et p par rapport à chacune de variables x, y, z, et t (appelés *dérivées partielles* des fonctions $\overrightarrow{v}$ et p et notées $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$, etc.) dans des expressions assez compliquées. Cette complexité rendait leur étude mathématique très difficile. Une avancée majeure dans l'étude théorique des équations de Navier-Stokes a été obtenue par Leray(6) en 1933, qui a prouvé les premiers résultats d'existence et d'unicité de solutions. Des résultats fondamentaux dans le même domaine ont été ensuite obtenus par de nombreux mathématiciens. Citons ici les travaux de J.L. Lions(7) qui est à l'origine du développement actuel de mathématiques appliqués en France et les contributions fondamentales de P.L. Lions(8), en particulier sur les fluides non homogènes et compressibles. Mentionnons que l'étude complète de l'existence et l'unicité des solutions n'est pas encore achevée aujourd'hui, ce qui fait que le système de Navier-Stokes continue à fasciner les mathématiciens. Une question ouverte très importante est l'unicité des solutions en dimension trois. Ce défi mathématique fait l'objet d'un des sept prix d'un million de dollars annoncés récemment par la fondation Clay au Collège de France. On peut à ce stade se poser une question en apparence naïve : au fond, pourquoi choisir de travailler sur l'existence et l'unicité de solutions ? Une première réponse est purement mathématique : le sujet est en apparence simple, son histoire est riche et il est rempli d'interactions avec divers sujets de mathématiques. Mais, outre la motivation purement mathématique, cette étude a un intérêt plus pratique. Tout d'abord elle permet de valider un modèle mathématique. Si, par exemple, les équations issues d'un modèle admettent plusieurs solutions on peut s'interroger sur la pertinence de ce modèle. D'autre part, les techniques utilisées dans la preuve de l'existence et de l'unicité de solutions sont souvent source d'inspiration pour les méthodes utilisées dans les calculs effectifs, réalisés à l'aide de superordinateurs.

3. Problèmes fluide-structure

Dans cette section nous allons évoquer un sujet qui intéresse beaucoup les scientifiques : les interactions fluide-structure. Pour donner un aperçu de l'intérêt et de la complexité du problème considérons un exemple : l'écoulement du sang dans une artère. Dans ce cas les équations de Navier-Stokes classiques ne sont pas suffisantes pour modéliser le système car il faut prendre en compte au moins deux phénomènes nouveaux. Il s'agit tout d'abord du fait que le fluide

6. Jean Leray a été le titulaire da la chaire de mathématiques appliquées de l'Université de Nancy entre 1936 et 1941.

7. Jacques Louis Lions (1928-2001) fut professeur à l'Université de Nancy de 1954 à 1962.

8. Pierre-Louis Lions est né en 1956 à Nancy. En 1994, il a obtenu la médaille Fields (l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiques)

sanguin transporte de petits solides (par exemple les globules rouges). Il faut ensuite prendre en compte que la paroi de l'artère est élastique, ce qui fait qu'elle se déforme sous l'action de la pression sanguine. Les deux phénomènes évoqués ci-dessus, présents dans beaucoup de problèmes d'interaction fluide-structure, induisent de nouvelles difficultés, qui se rajoutent à celles rencontrées dans la modélisation du fluide isolé (voir la Section 2). Il s'agit du couplage de deux systèmes et du fait que les domaines occupés par le fluide (le liquide sanguin dans l'exemple ci-dessus) et la structure (les globules rouges et la paroi de l'artère dans notre exemple) sont *des inconnues du modèle*.

Pour simplifier l'exposé, nous allons nous limiter au cas où le fluide remplit une enceinte bornée et la partie *structure* est formée par des solides rigides, en nous basant sur des travaux effectués au sein de l'équipe **EDP** (**É**quations aux **D**érivées **P**artielles) et du projet CORIDA de l'Institut Élie Cartan de Nancy.

L'étude du mouvement de solides rigides à l'intérieur d'un liquide est une des questions importantes de la mécanique des fluides. Les premières contributions au développement de ce sujet sont dues à des scientifiques célèbres comme Kirchhoff, Stokes, Lord Kelvin ou Lamb. Dans la formulation classique du problème, le mouvement de rigides est donné par avance (le plus souvent il s'agit d'une simple translation). Néanmoins, il existe beaucoup d'applications, comme la fabrication de matériaux composites, l'écoulement sanguin, la séparation de macromolécules par électrophorèse, le mouvement de micro-organismes marins, le déplacement de sous-marins, où la présence de solides a une influence importante sur le mouvement du fluide. Dans ce cas, la position et la vitesse du rigide deviennent de nouvelles inconnues du problème, donnant lieu à des défis mathématiques d'une grande envergure. Récemment, après de nombreuses contributions de la part des ingénieurs, les mathématiciens ont commencé à s'intéresser au sujet.

Dans certaines situations on peut supposer que le liquide remplit tout l'espace (lorsqu'on étudie le mouvement d'un micro-organisme dans l'océan, par exemple). Il convient alors d'utiliser un repère lié au solide, car, par ce choix, le domaine occupé par le fluide *ne change pas au cours du temps*. La difficulté mathématique qui apparaît dans ce cas est que le domaine occupé par le fluide est *non borné* et que la vitesse du fluide à l'infini est une inconnue du problème. Des progrès importants dans la résolution de ce problème ont été enregistrés ces dernières années, en particulier par des chercheurs de l'équipe CORIDA de l'Institut Élie Cartan de Nancy (le lecteur intéressé par ces travaux peut consulter le site *http ://www.iecn.u-nancy.fr/~corida/*). Il s'agit de l'étude complète du cas où le rigide est un cylindre circulaire infini. L'avantage d'une telle situation est que le problème devient bidimensionnel (cela veut dire que les fonctions inconnues dépendent seulement de deux variables d'espace et du temps).

Dans d'autres situations on suppose que le système formé par le fluide et le solide rigide est confiné dans un volume borné. Dans ce cas on ne peut plus négliger les effets de bord et l'utilisation d'un repère lié au solide est moins intéressante car, par rapport à un tel repère, la frontière extérieure du domaine fluide devient variable avec le temps (et cette variation est *une inconnue du problème*). Plusieurs techniques permettant de contourner cette difficulté ont été envisagées. Une solution est d'effectuer un changement de variable permettant de se ramener à la configuration initiale (par conséquent fixe) du système fluide-solide rigide (voir la Figure 2).

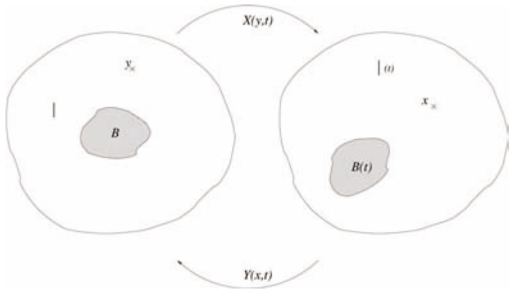


FIGURE 2.— Ω et B (respectivement $\Omega(t)$ et $B(t)$) représentent les domaines occupés par le fluide et par le solide au début du mouvement (respectivement à l'instant t).

En utilisant une telle approche les équations de mouvement du fluide deviennent encore plus compliquées. Les travaux de membres de l'équipe CORIDA, contiennent plusieurs résultats d'existence et d'unicité de solutions. Une autre approche que nous avons utilisée passe par la *pénalisation* du problème. Plus précisément il s'agit de remplacer la partie rigide par un deuxième fluide dont la viscosité est très grande. Cette fois la difficulté réside dans le passage à la limite lorsque la viscosité tend vers l'infini. Ce résultat semble, à première vue, paradoxal : si deux rigides ont un contact alors *leur vitesse relative est nulle*. Cela contredit l'idée que deux rigides plongés dans un fluide peuvent avoir de « vrais » chocs. Avant de commenter ce « paradoxe », nous allons décrire une expérience numérique, réalisée par le chercheur Jorge San Martin, de l'Université du Chili (un de collaborateurs de longue date de l'équipe EDP de l'Institut Élie Cartan de Nancy). Les illustrations qui suivent montrent le cas de deux boules rigides identiques, dans un fluide visqueux. A l'instant initial, les vitesses du fluide et des solides sont nulles. On applique sur les deux solides deux forces constantes verticales, de même intensité et de sens opposés. Nous avons représenté la position des boules ainsi que le champ des vitesses du fluide à des temps $t_k = k\Delta t$, où Δt est un pas de temps fixé. On remarque que les boules s'approchent mais n'entrent pas en collision. Il s'agit d'un phénomène mis en évidence par des expérimentateurs et appelé effet « kiss and go ». Il est par ailleurs clair que, si les rigides ont une très grande énergie initiale, ils vont finir par se toucher avec une vitesse relative non nulle. Ceci ne contredit qu'en apparence les résultats théoriques décrits ci-dessus, qui sont basés sur l'hypothèse que le fluide peut être modélisé par les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. Cette hypothèse donne des résultats en très bonne concordance avec les expériences lorsque l'épaisseur du fluide reste « grande » devant la taille d'une molécule et lorsque la pression du fluide ne dépasse pas un certain seuil. Si la distance entre les deux solides tend vers zéro, alors les conditions permettant l'utilisation des équations classiques de Navier-Stokes ne sont plus réunies. En particulier, comme on peut le voir dans les figures, les vitesses et la pression augmentent d'une manière très importante, ce qui, en particulier, rend irréaliste l'hypothèse que le fluide soit incompressible.

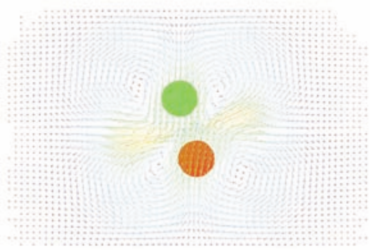


Figure 3.— $k = 370$.

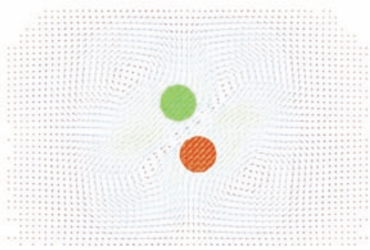


Figure 4.— $k = 430$.

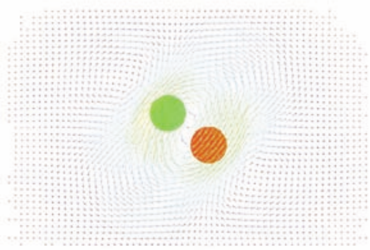


Figure 5.— $k = 620$.

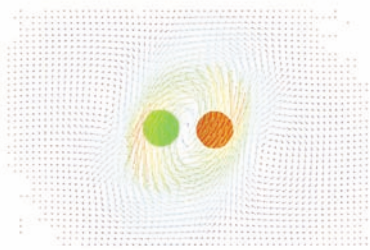


Figure 6.— $k = 750$.

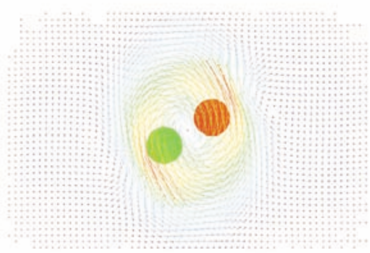


Figure 7.— $k = 860$.

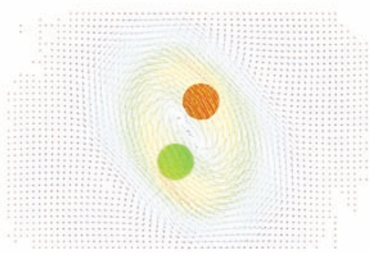


Figure 8.— $k = 1000$.

En conclusion, la modélisation mathématique par des équations aux dérivées partielles est devenue un outil indispensable pour les physiciens et les ingénieurs. Elle permet d'anticiper et de contrôler le déroulement de phénomènes d'une grande complexité, sans faire appel à des expériences difficiles et très coûteuses. L'utilisation de la modélisation mathématique comporte une connaissance approfondie du domaine d'application, combinée à la maîtrise de moyens mathématiques et informatiques. Elle peut être efficace uniquement au sein d'une collaboration interdisciplinaire étroite entre les mathématiciens et les ingénieurs.

Marius Tucsnak
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex

Marius.Tucsnak@iecn.u-nancy.fr

Mathématiques en option : un exemple de modélisation en finance

par Pierre Vallois

1. Introduction

1.1. Dans sa préface à la quatrième édition des *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, publiée à Lausanne en 1900, Léon Walras écrivait : « *Toute cette théorie est une théorie mathématique, c'est-à-dire que si l'exposition peut s'en faire dans le langage ordinaire, la démonstration doit s'en faire mathématiquement.* »

Jusqu'à la Seconde Guerre mondiale, la finance était enseignée de manière purement descriptive, l'accent était mis sur ses aspects institutionnels et juridiques et sur les calculs d'actualisation.

Durant le troisième quart du XXème siècle, elle est devenue une théorie économique charpentée et argumentée, avec bien sûr des écoles distinctes et des controverses. Ce développement fut essentiellement le fruit de l'école américaine avec une contribution significative de l'école française. Ont ainsi vu le jour : la théorie du marché efficient, la théorie de la sélection de portefeuille, l'analyse du risque. Parmi les pionniers on doit citer : Arrow, Debreu, Allais, Lintner, Markowitz, Modigliani, Sharpe, Tobin...

En l'espace de vingt ans, à la suite des politiques de déréglementation, des innovations technologiques dans le domaine de l'information et des télécommunications, le monde de la finance a connu de profonds bouleversements. En réponse à ces changements qui perturbent les prévisions des investisseurs, de nouveaux instruments financiers ont vu le jour, par exemple les futures, les options, les produits dérivés. On peut consulter à ce sujet le livre de N. Bouleau et l'article de E. Jouini, cités dans la bibliographie.

Mais comme l'a souligné Robert Merton, prix Nobel d'économie, cette nouvelle gestion du risque financier n'aurait jamais pu voir le jour sans l'apport conjoint de la théorie économique et des mathématiques. Le secteur de la finance de marché est fortement demandeur d'ingénieurs ayant un niveau mathématique élevé.

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

1.2. Le but de cet article est d'illustrer la phrase de Léon Walras citée au début. Nous avons retenu les deux concepts clefs en finance : la complétude des marchés et la notion de couverture. Nous montrerons comment associer à ces deux principes une représentation mathématique appropriée. Nous mettrons ensuite en évidence l'intérêt de cette construction, qui est de fournir des résultats quantitatifs.

Rassurons le lecteur : il s'agit seulement d'une introduction à la modélisation mathématique, il est hors de question de faire figurer ici des développements et calculs compliqués. Pour cette raison nous nous intéresserons, dans la section 2, à un modèle simple où le marché est réduit à deux actifs. Nous dirons deux mots dans une section suivante du modèle le plus populaire en mathématiques financières. Nous discuterons à la fin la pertinence de tels modèles.

2. Le modèle binomial

Ce modèle a été élaboré par Cox, Ross et Rubinstein (voir la référence à la fin de l'article).

2.1. Il me paraît intéressant de développer ici ce modèle, pour les raisons suivantes :

- Du point de vue mathématique il est extrêmement simple.
- Il traduit en termes mathématiques précis, deux concepts clés en finance : l'absence d'opportunité d'arbitrage et la complétude du marché. Cette approche rentre dans le cadre plus général de la modélisation mathématique.
- Il met en évidence l'importance des modèles probabilistes.

On peut montrer (voir la section 2.4), que si le marché est sans opportunité d'arbitrage et complet, alors le prix aujourd'hui de tout d'actif financier de revenu incertain s'exprime à travers une formule de probabilité.

2.2. On considère un marché formé d'un actif risqué et d'un taux de placement constant r : une somme de un euro aujourd'hui, placée au taux r, engendre un capital de $1 + r$ euros au temps 1. Ce revenu est certain et est garanti quelle que soit l'évolution future du marché. Le taux de placement constant correspond à un actif non risqué.

On commence par étudier ce marché sur une seule période de temps. Il est clair que ce marché est des plus simples ! Nous verrons une extension au paragraphe 2.6.

Par définition il y a deux dates : aujourd'hui, ce que l'on note $t = 0$, et l'instant final noté $t = 1$. On suppose connaître parfaitement le marché à la date d'aujourd'hui. Dans notre contexte cela signifie que le prix de l'actif risqué est $S_0 > 0$ fixé ; l'actif non risqué est déterminé par son rendement : $r > 0$.

Quant à l'actif risqué, sa valeur à $t = 1$ n'est pas connue à l'avance. On restreint ici le champ des possibles : on suppose que le *rendement* de cet actif prend deux valeurs h et b, avec $-1 < b < h$. Ainsi l'actif risqué au temps $t = 1$ prend deux valeurs positives : $S_1 = S_0(1 + b)$ pour la valeur basse et $S_1 = S_0(1 + h)$ pour la valeur haute. Le fait que l'actif risqué ne prenne que deux valeurs justifie l'appellation : modèle *binomial*.

2.3. Modélisons l'absence d'opportunité d'arbitrage. Il est en fait plus facile de définir une stratégie conduisant à une opportunité d'arbitrage.

Nous commençons par la notion de *portefeuille* ou de *stratégie*. Un investisseur peut acheter une quantité n d'actif risqué et placer une somme n_0 au taux r. Les réels n et n_0 ne sont pas forcément des entiers, ils peuvent être aussi positifs ou négatifs. Par exemple $n < 0$ signifie que l'investisseur a une dette libellée en actif risqué d'une valeur de $(-n)S_0$. L'investisseur adopte ce choix s'il pense que l'actif risqué va perdre de sa valeur dans le temps. Quant au placement sans risque, dire que $n_0 = -2$ signifie que l'investisseur a emprunté 2 euros à l'instant 0.

Le couple (n, n_0) est la composition du portefeuille.

La valeur V_0 au temps $t = 0$, du portefeuille de composition (n, n_0) est donc :

$$V_0 = nS_0 + n_0.$$

Puisque le placement d'un euro aujourd'hui procure le revenu $1 + r$ euros demain, la valeur V_1 au temps $t = 1$ de ce portefeuille est

$$V_1 = nS_1 + n_0(1 + r). \tag{1}$$

S_1 désignant la valeur de l'actif risqué au temps $t = 1$.

Comme nous l'avons expliqué plus haut, S_1 prend deux valeurs, il en est de même pour V_1. Ce qui signifie que le revenu de ce portefeuille est incertain.

Nous dirons qu'un portefeuille conduit à une *opportunité d'arbitrage* si

$$(a) \quad V_0 = 0\ , \qquad (b) \quad V_1 \geqslant 0 \text{ et } V_1 \neq 0, \tag{2}$$

La condition (2) signifie que le choix de cette stratégie permet de gagner de l'argent à coup sûr : avec un investissement nul en $t = 0$, la valeur du portefeuille au temps $t = 1$ est positive, de plus dans certaines situations (i.e. pour certaines valeurs de l'actif risqué) il est possible de vraiment gagner de l'argent : $V_1 > 0$.

On dit que le marché est sans *opportunité d'arbitrage* s'il n'existe aucune stratégie conduisant à une opportunité d'arbitrage.

Dans ces conditions on montre que ***le marché binomial est sans opportunité d'arbitrage si et seulement si*** $b < r < h$.

À bien y réfléchir ce résultat est intuitif : le rendement de l'actif non risqué doit être compris entre la valeur basse et la valeur haute de l'actif risqué.

On peut remarquer que le concept d'absence opportunité d'arbitrage se traduit mathématiquement d'une manière extrêmement simple. Ce qui illustre parfaitement le citation de Léon Walras mentionnée au début.

Esquissons brièvement une preuve partielle de l'assertion énoncée plus haut : si $r \leqslant b$ ou si $r \geqslant h$, alors il existe une opportunité d'arbitrage.

Supposons par exemple : $r \leqslant b$. On est donc dans la situation où il est plus intéressant d'investir dans l'actif risqué que de placer de l'argent au taux r.

Pour rendre la preuve plus facile à suivre, nous allons raisonner sur un exemple numérique. Supposons :

- Le loyer de l'argent est de 5% pour la période considérée, i.e. $r = .05$.
- L'actif risqué est coté aujourd'hui $S_0 = 100$ euros et peut prendre demain deux valeurs $S_1 = 105$ ou $S_1 = 108$ euros. Donc $b = .05$ et $h = .08$.

Un investisseur emprunte 100 euros à la banque (au taux du marché) et achète un actif risqué. Le portefeuille ainsi constitué a une composition de $n = 1$ et $n_0 = -100$. Sa valeur à l'instant 0 est alors nulle : $V_0 = nS_0 + n = 1 \times 100 - 100 = 0$.

Soit V_1 la valeur de ce portefeuille au temps 1. Pour déterminer V_1, il est nécessaire de distinguer deux cas :

a) $S_1 = 105$, alors

$$V_1 = nS_1 + n_0(1+r) = 1 \times 105 - 100 \times 1.05 = 0.$$

Dans cette situation l'investisseur n'a rien gagné : $V_1 = V_0 = 0$.

b) $S_1 = 108$, alors

$$V_1 = nS_1 + n_0(1+r) = 1 \times 108 - 100 \times 1.05 = 3.$$

Lorsqu'il en est ainsi, l'investisseur a réalisé un profit de 3 euros.

2.4. On souhaite à présent introduire la notion de marché complet. Pour des raisons pédagogiques nous introduirons ce concept uniquement pour des options d'achat (call, en anglais).

Nous considérons toujours le modèle binomial et nous supposons qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage : $b < r < h$.

Une *option d'achat* portant sur une quantité unité d'actif risqué (nous abrégerons dans la suite en parlant simplement d'option d'achat) est un produit vendu à l'instant $t = 0$, par un établissement financier au prix de C_0. Il est aussi convenu d'un prix d'exercice K. Puisque nous considérons un marché mono-périodique, la maturité de cette option est 1. Étudions le cas d'un investisseur qui achète une option d'achat au prix de C_0 euros. À l'instant $t = 1$, deux cas peuvent se produire :

- La valeur S_1 de l'actif risqué au temps $t = 1$ est supérieure à K : l'investisseur *exerce* l'option d'achat : il achète une quantité unité d'actif risqué, au prix convenu à l'avance K, qui est inférieur au prix du marché. La revente de cet actif lui procure le gain $S_1 - K$. En pratique l'établissement financier délivre directement la somme $S_1 - K$ à l'investisseur.

• La valeur S_1 de l'actif risqué au temps $t = 1$ est inférieure à K : l'investisseur n'exerce pas l'option d'achat, et ne reçoit rien de la part de l'établissement financier.

Examinons le point de vue de l'établissement financier, via un exemple numérique.

Supposons :

• Le loyer de l'argent est de 5% pour la période considérée, i.e. $r = .05$.

• L'actif risqué est coté aujourd'hui $S_0 = 100$ euros et peut prendre demain deux valeurs $S_1 = 98$ ou $S_1 = 108$ euros. Donc $h = .08$ et $b = -.02$.

• Le prix d'exercice est fixé à $K = 101$ euros.

• Un investisseur achète 10 000 options d'achat.

À l'instant $t = 0$ l'établissement financier reçoit de la part de l'investisseur $10\,000 \times C_0$ euros. Nous discuterons plus loin de la valeur à donner à C_0.

À l'échéance deux cas peuvent se produire :

• $S_1 = 98$. L'investisseur n'exerce pas son option. Ce cas de figure est favorable à l'établissement financier puisqu'il a perçu $10\,000 \times C_0$ euros à l'instant initial et n'a rien eu à donner à $t = 1$.

• $S_1 = 108$. L'option est exercée par l'investisseur, l'établissement financier doit fournir : $10\,000 \times (108 - 101) = 70\,000$ euros !

Dans ce second cas l'*effet de levier* est considérable, pour se prémunir l'établissement financier doit adopter une stratégie de couverture.

Revenons au cadre général. Le revenu procuré au temps 1, au détenteur d'une option d'achat est la quantité C_1 :

$$C_1 = \begin{cases} S_1 - K & \text{si } S_1 \geqslant K, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit que le marché est *complet* (pour les options d'achat), s'il existe une *stratégie de couverture* de composition (n, n_0) telle que :

$$C_1 = nS_1 + n_0(1 + r).$$

En d'autres termes le marché est complet si on peut réaliser l'actif financier (dans notre cas particulier l'option d'achat) comme la valeur au temps 1 d'un portefeuille. Il n'est pas difficile de montrer :

Lorsqu'il n' y a pas d'opportunité d'arbitrage, le modèle binomial est un marché complet.

Examinons les conséquences pratiques de cette propriété.

1) En plaçant à la date $t = 0$ une somme n_0 au taux r et en détenant n titres d'actif risqué l'établissement financier adopte une stratégie de couverture. En

effet la valeur de ce portefeuille au temps $t = 1$ représente exactement la somme que doit donner cet établissement financier au détenteur de l'option d'achat.

2) Cette stratégie de couverture a bien sûr un coût : la valeur de ce portefeuille au temps $t = 0$:

$$V_0 = nS_0 + n_0.$$

Puisque le marché est sans opportunité d'arbitrage V_0 est **le** prix de vente de l'option d'achat : $C_0 = V_0$.

Si on reprend l'exemple numérique précédent on trouve :

$$n = .7\ ,\ n_0 = -\frac{980}{15} \approx -65.33\ .$$

Par conséquent le prix de cette option d'achat est :

$$V_0 = C_0 = .7 \times 100 - \frac{980}{15} \times 1 \approx 4.67\ .$$

La conclusion de cette étude est la suivante : ***dans un marché complet et sans opportunité d'arbitrage, il existe un procédé pour déterminer le prix à l'instant*** 0 ***de tout actif financier de revenu incertain***.

2.5. Il reste une autre idée à dégager : le prix d'un actif financier s'exprime à l'aide d'une formule mathématique de nature probabiliste.

Pour ne pas compliquer inutilement les choses, nous allons vérifier cette assertion et, par là même, lui donner un contenu plus précis, dans le cadre du modèle binomial. Nous choisissons comme plus haut les valeurs suivantes des paramètres :

$$h = .08\ ,\ b = -.02,\ \text{ et }\ r = .05.$$

On introduit le réel p :

$$p = \frac{h-r}{h-b}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que p est compris strictement entre 0 et 1.

On considère que l'actif risqué au temps $t = 1$ prend la valeur $S_0(1+b)$ avec *probabilité* ou intensité p. D'une manière analogue S_1 prend la valeur $S_0(1+h)$ avec probabilité $1-p$. Ici

$$p = \frac{h-r}{h-b} = \frac{.08 - .05}{.08 - .(-.02)} = \frac{3}{10} = .3\ .$$

Ayant introduit ce modèle probabiliste, on remarque que S_0 est la *valeur moyenne, actualisée* de S_1 :

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\big\{S_0(1+b) \times p + S_0(1+h) \times (1-p)\big\}.$$

Vérifions cette propriété dans le cadre de notre exemple numérique.

Puisque $S_1 = 98$ avec probabilité .3 et $S_1 = 108$ avec probabilité .7, l'*espérance* (ou la moyenne m) de S_1 est :

$$m = \mathbb{E}[S_1] = 98 \times .3 + 108 \times .7 = 105.$$

La valeur actualisée est

$$\frac{m}{1+r} = \frac{105}{1.05} = 100 = S_0 \ !$$

Il est facile de montrer qu'un résultat du même type a lieu pour l'option d'achat. En effet C_1 vaut 0 quand $S_1 = 98$ et $108 - 101 = 7$ lorsque $S_1 = 108$. Mais la moyenne m_C d'une quantité qui prend la valeur 0 avec probabilité .3 et la valeur 7 avec probabilité .7 est :

$$m_C = 0 \times .3 + 7 \times .7 = 4.9 \ .$$

La valeur actualisée est :

$$\frac{m_C}{1+r} = \frac{4.9}{1.05} \approx 4.67 \ .$$

Rappelons que le portefeuille de composition : $n = .7$ et $n_0 = -65.33$ génère le même revenu au temps 1 que l'option d'achat. Puisque le marché est sans opportunité d'arbitrage sa valeur au temps 0 est la valeur de l'option d'achat. Donc :

$$V_0 = C_0 = n \times S_0 + n_0 = .7 \times 100 - 65.33 = 4.67.$$

Nous pouvons donc compléter la conclusion de la section précédente : ***dans un marché complet et sans opportunité d'arbitrage, le prix à l'instant*** 0 ***de tout actif financier de revenu incertain est la moyenne actualisée de son prix futur***.

2.6. Le modèle monopériodique décrit précédemment, peut être généralisé au cas de N périodes. On suppose toujours l'existence d'un taux constant r pour les N périodes considérées : un somme de un euro placée à la date $t = 0$ procure le revenu (certain) $(1+r)^N$ à l'instant N. Quant à l'actif risqué, il suffit de dire que si l'actif risqué vaut x à un moment donné n, à l'instant suivant $n + 1$, il prendra deux valeurs : $x(1 + b)$ avec probabilité p et $x(1 + h)$ avec probabilité $1 - p$.

On montre que ce modèle binomial à N périodes est complet et sans opportunité d'arbitrage.

Une option d'achat porte sur une quantité unité d'actif risqué, a une maturité $t = N$ et un prix d'exercice K. Son détenteur ne peut exercer l'option qu'à l'échéance et que si le prix du sous-jacent est au dessus du prix d'exercice. Plus précisément si S_N désigne la valeur (aléatoire ou incertaine) de l'actif risqué au temps N, le revenu futur (i.e. à l'instant N) du détenteur de l'option d'achat est $C_N = (S_N - K)_+$, où a_+ désigne la quantité qui vaut a si $a > 0$ et 0 sinon. Ce revenu est incertain car il dépend de la valeur finale de l'actif risqué. De plus la formule de *moyenne actualisée* est encore valable. Si C_0 désigne le prix à l'instant $t = 0$ de l'option d'achat, alors :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\mathbb{E}[C_N] = \frac{1}{(1+r)^N}\mathbb{E}[(S_N - K)_+], \tag{3}$$

Le symbole $\mathbb{E}$ représente l'espérance (mathématique) ou encore la valeur moyenne et le facteur $1/(1+r)^N$ est le facteur d'actualisation.

La formule (3) est opératoire : on peut calculer numériquement C_0, connaissant les valeurs des paramètres : b, h, r, S_0 et N.

3. Le modèle de Black et Scholes

3.1. Ce modèle mathématique a été introduit par Black et Scholes (voir la référence à la fin). Il s'agit d'un modèle à temps continu utilisant le *mouvement brownien*, noté (B_t). Pour chaque instant t, B_t est une valeur incertaine, on dit aussi que B_t est une *variable aléatoire*. Il est impossible de décrire ici ce processus stochastique, i.e. les fluctuations de B_t en fonction du temps t. Pour Black et Scholes, le prix S_t de l'actif risqué au temps t s'exprime de la manière suivante :

$$S_t = \exp\Big\{\sigma B_t + \Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t\Big\}, \tag{4}$$

où σ est la *volatilité* et r est le taux d'intérêt exponentiel (une somme de un euro placée aujourd'hui rapporte e^{rt} euros au temps t). Le paramètre σ est strictement positif et mesure la variabilité de l'actif : plus σ est grand plus l'actif risqué fluctue. En pratique, ce paramètre est difficile à estimer.

3.2. Il est légitime de se demander pourquoi considérer un modèle à temps continu alors que les cotations boursières sont journalières ?

Considérons le cas d'un investisseur détenteur d'une option d'achat d'échéance deux mois. Comme nous l'avons dit cet investisseur ne peut pas exercer son option avant sa maturité. Il lui est en revanche possible de surveiller au jour le jour le cours du sous-jacent, ce qui représente environ 50 valeurs. Il parait tentant d'utiliser le modèle binomial (avec $N = 50$) et en particulier la formule (3) donnant le prix du call. Toutefois les calculs deviennent compliqués et quasiment impossibles à mener jusqu'au bout lorsque N est « grand ».

Nous souhaitons expliquer, qu'avec des hypothèses raisonnables, le modèle binomial (à temps discret), lorsque la période d'observation N est grande, est « voisin » du modèle à temps continu de Black et Scholes. Ce qui justifie l'intérêt du modèle de Black et Scholes et rend possible le calcul du prix d'une option dans le modèle binomial avec N « grand ».

3.3. Pour approximer un modèle continu par un modèle discret il est classique d'introduire un paramètre d'échelle N. Pour le moment N est fixé mais il faut penser que N est « grand ». Nous allons considérer le modèle binomial avec N périodes, mais à présent une période représente une durée « infinitésimale » de $1/N$.

Il parait naturel de supposer que pour chacun des deux actifs, les variations entre deux instants consécutifs sont petites. Ce qui signifie que les paramètres du modèle : h, b et r doivent dépendre de N et être proches de 0. On notera dans la suite h_N, b_N et r_N les valeurs correspondantes. Le bon choix du point de vue mathématique est le suivant

$$(5) \qquad r_N = \frac{r}{N}, \quad h_N = (1+r_N)\mathrm{e}^{\sigma/\sqrt{N}} - 1, \quad b_N = (1+r_N)\mathrm{e}^{-\sigma/\sqrt{N}} - 1.$$

Il est facile de vérifier que h_N, b_N, r_N sont petits, lorsque N est grand.

Plaçons-nous au niveau macroscopique en considérant ce marché au temps 1, c'est-à-dire après N périodes. Deux forces antagonistes sont en jeu : d'une part, plus N est grand, plus le nombre possible de variations est élevé, d'autre part, plus N est grand, plus l'amplitude de ces fluctuations est faible. Nous prétendons que le choix des paramètres que nous avons fait via (5) permet d'équilibrer ces deux effets opposés.

Il est facile de vérifier que le choix de $r_N = r/N$ est correct. En effet, le placement de un euro au taux de r_N par période engendre un revenu au temps N de $V = (1+r_N)^N = (1+r/N)^N$. Il est bien connu que $(1+r/N)^N$, converge lorsque N tend vers l'infini, vers e^r. Ainsi r est un taux exponentiel.

Signalons que les paramètres σ et r apparaissant dans la formule (5) sont les mêmes que ceux de la relation (4). Ce qui permet au passage de leur donner une interprétation « microscopique ».

Quant à l'actif risqué, soit $S_N^{(N)}$ sa valeur après N périodes. On montre que $S_N^{(N)}$ « converge » vers S_1, la valeur de l'actif donné par la formule (4).

4. En guise de conclusion

On peut tirer de ce qui précède deux conclusions : la première est que les modèles que nous avons introduits sont bien trop simples pour représenter fidèlement un marché financier réel dans lequel existent plusieurs centaines de produits. La seconde observation est que le niveau mathématique requis pour l'étude des modèles binomial et de Black et Scholes est déjà élevé, il correspond à un niveau bac + 5.

Des recherches très actives, regroupant des chercheurs en mathématiques appliquées, des économistes et des praticiens des marchés financiers, ont lieu de nos jours pour développer des modèles explicatifs plus réalistes.

Bibliographie

[1] Black, F, Scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81** (1973), 635–654.

[2] Bouleau, N., *Martingales et marchés financiers*, Éditions Odile Jacob, 1998.

[3] Cox, J.C., Rubinstein, M., *Options Markets*, Prentice Hall, London, 1985.

[4] Jouini, E., Le prix des options financières, in : *L'explosion des mathématiques*, Publication commune SMF et SMAI 2002, p 80–83.

Pierre Vallois
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

pierre.vallois@iecn.u-nancy.fr

L'épreuve Million ou les tourments d'un mathématicien amoureux

par Gérald Tenenbaum

Valérie était en larmes. D'un geste lent mais définitif, elle repoussa son assiette de quelques centimètres. Relevant ensuite la tête en tremblant légèrement, elle tamponna ses yeux avec sa serviette et, après une vague hésitation, se leva en hoquetant.

— Ma chérie...

France Million, la cinquantaine blond cuivré qu'elle aurait voulu vénitien, était restée une femme simple en dépit de l'éclatante réussite professionnelle de son mari. Simple, et maigre. Alors que la plupart de ses amies avaient pris leur lot de kilos superflus au fil des années, elle s'amusait encore, certains dimanches, à enfiler sa robe de mariée et à esquisser des pas de valse devant le grand miroir en pied du grenier. Maigre, et simple.

Mais, à cette heure, elle avait d'autres chats à fouetter, si tant est qu'elle fût femme à fouetter qui que ce soit. Elle détestait ces prises de bec entre sa fille Valérie, dont elle était si fière, et son mari Stanislas, objet de toutes ses attentions, dont elle redoutait en permanence les sautes d'humeur dévastatrices.

— Ma chérie... Ton père pense d'abord à ton bien...

Stan paraissait plus grand assis que debout. À cause, probablement, de ses membres trop courts, soi-disant qu'il aurait « fait un peu de rachitisme » dans les années de l'immédiat après-guerre, avant le lait Mendès France. Il fulminait, mais conservait au coin des lèvres une sorte de mauvais sourire dominateur. Sa calvitie en couronne faisait apparaître un étonnant contraste entre le rose des joues et les reflets opalescents du cuir chevelu.

— Un mariage, après tout, c'est pour toute la vie... Enfin, au moins pour longtemps...

Mais Valérie, mâchoires serrées, descendait déjà les marches du perron.

C'est précisément cet instant que Stan choisit pour passer à l'action. Avec une fulgurance dont plus personne ne le croyait encore capable, et certainement pas sa femme, il bondit de sa chaise, traversa la salle à manger, le living, et, avant qu'elle n'ait pu y pénétrer, se retrouva devant la Clio de sa fille (celle-là même qu'il lui avait offerte pour son CAPES d'histoire), lui bloquant résolument le passage.

— Tu as vingt-cinq ans...

1903–2003 Un siècle de mathématiques à Nancy, Institut Élie Cartan, Nancy, 2003.

Il n'avait vraiment pas l'air d'humeur à négocier. Un peu comme le jour où M. Villeret, sous prétexte qu'il est pharmacien, avait voulu lui faire refaire tout le circuit d'arrivée d'eau de sa maison de campagne, arguant que les canalisations n'étaient pas aux normes et que le défaut de pente engendrerait des « foyers septiques ». Sceptique, Stan l'était resté jusqu'au bout, aussi ému du risque de nids à microbes que de son premier raccord en PVC. Il y avait eu une scène mémorable sur le carrefour, juste devant la pharmacie. L'affaire s'était évidemment terminée devant le tribunal de commerce, mais Stan s'était défendu mordicus et, après plusieurs années, il avait eu gain de cause.

— Tu as vingt-cinq ans, ma fille...

— Je sais bien, papa !

— ... et il est hors de question que tu épouses un garçon qui n'a pas de métier !

— Mais, papa, il est chercheur, mathématicien, c'est un scientifique ! C'est un métier, ça ! D'ailleurs il cotise à la sécu...

— Ça ne veut rien dire. Mathématicien, ce n'est pas un métier, pas un vrai...

Arc-bouté, enraciné dans ses certitudes, Stanislas Million aurait pu repousser les assauts de tous les rhéteurs des mondes antique et moderne réunis. La colère sourdait des prunelles amandines de Valérie.

— C'est quoi alors, M. Je-sais-tout ?

— C'est... c'est... un adjectif, voilà !

Voir traiter son Lucien d'adjectif, c'était plus que la jeune fille ne pouvait supporter. Et dire qu'il avait brillamment soutenu sa thèse de théorie des nombres quelques mois auparavant... Il fallait frapper vite et fort, étourdir l'adversaire avant de porter l'estocade. Tant pis pour les âmes sensibles.

— Papa, j'attends un enfant.

Elle vit immédiatement qu'elle avait pris l'avantage : tel un taureau estourbi par le picador, il fit deux pas de côté, lui laissant enfin la possibilité de s'asseoir au volant.

— Hein ? Un enfant ? Mais, tu n'es...

Stan était blême. Les joues, roses quelques instants auparavant, avaient viré au nacré façon saturnisme chronique. Quelques gouttes de sueur glacée perlaient sur le front et la moustache.

— Papa, tu l'as dit toi-même, j'ai vingt-cinq ans...

— Mais... mais... il n'a pas de métier... Ça ne sert à rien, les mathématiques... Si encore il était prof, comme toi, mais chercheur, chercheur en maths, ça n'a aucun sens... Et puis, d'ailleurs, il cherche quoi ? Qu'y a-t-il donc encore à chercher ?

— Bien sûr qu'il y a matière à chercher ! C'est... très important même.

Devinant un sourire incrédule, entre mépris et défi, sur les lèvres paternelles, la jeune femme ajouta :

— Il y a des masses de conjectures, sur lesquelles ils travaillent tous...

— Les conjonctures, on nous dit tous les jours qu'elles vont mal, qu'elles sont mauvaises, que c'est la crise...

— Con-*jec*-ture, papa, pas con-*jonc*-ture. C'est différent. Les conjectures, ce sont des idées de théorèmes, enfin de ceux qui ne sont pas encore de vrais théorèmes, ceux qu'on attend sans savoir...

— Si c'est une fille ou garçon ?

Elle sourit. Au moins, il n'avait pas perdu son sens de l'humour. Et le gros de la tempête était visiblement passé.

— Si tu veux, sauf que, dans ce cas-là, il y a beaucoup plus que deux possibilités. Des milliards...

— Un petit Million, ça me suffira. C'est pour quand ?

— Septembre. On aura le temps de tout préparer. D'ailleurs, maman est au courant...

— Pas si vite, fillette, je n'ai pas dit mon dernier mot !

Pas à dire, il encaissait bien et il récupérait vite. Il avait à présent les yeux brillants et ses joues avaient presque retrouvé un semblant de couleur.

Valérie sortit de la voiture. S'il fallait négocier, autant le faire dans un endroit confortable.

— Viens, on rentre à la maison.

En les apercevant s'asseoir calmement au salon, France les gratifia de regards reconnaissants.

— Ma chérie, tu veux ton dessert ?

— Non merci. Papa a une proposition à me faire.

Stan attrapa le gros cendrier en verre fumé et se mit à jouer avec l'éteignoir en forme de gourdin préhistorique. Un cadeau de mariage. Il semblait chercher à rassembler des souvenirs.

— Quand j'ai demandé la main de ta mère, j'avais juste un CAP. Je suis venu un dimanche. Il pleuvait. J'avais des fleurs, mais le bouquet était trempé. Beau-papa m'a fait entrer dans la pièce rouge, celle des réunions de famille, qu'il n'ouvrait que pour les grandes occasions...

Il jeta un rapide regard circulaire autour de lui, comme pour se rassurer de tout ce qui lui appartenait, tout ce qu'il avait gagné. Il avala sa salive, se passa brièvement la langue sur les lèvres, et reprit :

— Il m'a dit : « *Vous avez votre* CAP, *bien, mais qu'est-ce que vous savez faire ?* » Alors j'ai expliqué mes projets, d'où je venais et où je voulais aller, et nous nous sommes compris, nous avons parlé le même langage, concret, solide, réaliste...

— Papa, aujourd'hui, les choses ont changé.

— Peut-être, mais j'aimerais bien que ton Lucien-chercheur vienne me raconter à moi aussi comment il voit les choses, ce qu'il sait faire et ce qu'il cherche dans cette voie qu'il a choisie...

— Impossible ! C'est beaucoup trop compliqué, tu n'y comprendras jamais rien !

— Justement, Valou, j'ai juste mon certif, je n'y comprendrai certainement rien, mais je suis ton père. Alors, il faudra qu'il essaie.

Fut-ce à cause du « Valou », le premier depuis si longtemps, la jeune fille répondit doucement :

— Bon, d'acc, 'pa, il viendra, une fois, deux fois, peut-être trois fois, et il t'expliquera...

M. Million se renversa lentement sur son fauteuil. Il y avait si longtemps qu'il n'était pas retourné à l'école... Il allait laisser sa chance au blanc-bec...

Là-dessus, il s'endormit.

Il faut dire que, depuis quelques années, il faisait systématiquement une petite sieste après le repas.

La première rencontre était prévue pour lundi à 19 heures. Lucien, qui avait contracté très jeune l'habitude d'arriver systématiquement en retard de quelques minutes à ses rendez-vous, fut ce jour-là scrupuleusement ponctuel. France lui ouvrit la porte. Elle avait prévu de rester très neutre, mais le jeune homme avait un bon sourire qu'elle ne put s'empêcher de rendre.

— Bienvenue, M. Faus, mon mari vous attend.

— Bonjour. Merci, Madame Million. Est-ce que Val est là aussi ?

Il savait très bien que la réponse serait négative. Les tourtereaux avaient considéré qu'il serait préférable que Lucien affrontât seul ses futurs beaux-parents et Valérie s'était éclipsée en fin d'après-midi, prétextant une réunion pédagogique en marge de son stage en classe de seconde.

Lucien était plutôt grand, mince, avec un regard noir rehaussé de sourcils bien dessinés. Il y avait quelque chose de naïf dans le haut de son visage, qui contrastait avec une sorte de détermination de la bouche et de la mâchoire. France l'introduisit au petit salon-bibliothèque, où attendait son mari, calé derrière le bureau qu'il n'utilisait plus depuis des années. C'était assis à cette table qu'il avait, au début, établi les devis et les factures. Mais dès que l'entreprise avait pris de l'envergure, il avait embauché une aide-comptable pour le décharger de ces tâches pour le moins fastidieuses.

— Asseyez-vous, jeune homme !

— Merci, Monsieur.

Au moins, il était poli. Avec sa raie sur le côté, son pull marine en V et sa serviette en cuir, il faisait plutôt bon genre, quoique un peu intemporel. Cela dit, il aurait tout de même pu mettre une cravate.

— Alors, comme ça, vous faites des mathématiques ?

— Oui, enfin de la théorie des nombres...

— Et vous voulez épouser ma fille ?

Stan était assez content de cette brutale entrée en matière. Il était très curieux de voir comment le cadet s'en sortirait. À en juger par la goutte de sueur qui avait perlé sur son front, il avait au minimum suscité une certaine émotion.

— Nous le voulons tous les deux... Et...

— Et ?

— Nous aimerions beaucoup avoir votre accord, à Mme Million et à vous.

— ...

Au dernier moment, Stan réfréna le « Et sinon ? » qu'il avait au bout des lèvres. Quelque chose lui disait que ce garçon était du genre à relever les défis et à accepter le combat frontal. Il décida donc d'entrer sans plus attendre dans le vif du sujet.

— On verra ça... Vous êtes donc dans les chiffres ?

— Oui, enfin, plutôt dans les nombres.

— C'est pareil, non ?

— Disons que les chiffres servent à écrire les nombres. Par exemple, 3 est un chiffre, qui est aussi un nombre, et 32 est un nombre qui s'écrit avec deux chiffres. Les chiffres arabes, de 0 à 9, sont les plus utilisés, mais il y a aussi les chiffres romains...

— Sans compter le chiffre d'affaires !

C'était parti un peu vite, il fallait bien détendre l'atmosphère.

— Si vous voulez...

— Et alors, aligner des chiffres, ou même des nombres, ça vous donne quoi dans la vie ?

— Je ne les aligne pas, j'y pense, je réfléchis sur leur nature, leur structure.

Stanislas Million, plombier, écarquilla les yeux, se frotta les paupières, ouvrit la bouche, la referma, s'éclaircit la voix, et se lança finalement.

— Mais, voyons, tous le monde sait ce que c'est qu'un nombre ! On commence par un, et puis on ajoute un, ça fait deux... Vous n'allez pas me faire croire qu'on vous paie, même pas cher, pour réfléchir sur des idées qu'on utilise depuis que le monde est monde ?

C'était au tour de Lucien d'être mal à l'aise. Il n'allait pas s'en sortir comme ça, il lui fallait une comparaison. Il choisit la première qui lui vint à l'esprit.

— Quand vous allumez la lumière, vous vous servez de l'électricité, n'est-ce pas ?

— Certes...

— Mais vous n'avez pas besoin pour cela de connaître la nature des électrons et la structure fine de la matière ?

— Au fait, jeune homme...

— Eh bien, c'est la même chose pour les nombres : tout le monde s'en sert, les mathématiciens y réfléchissent.

M. Million se pencha en avant, le regard acéré et les lèvres humides.

— Sauf qu'il a bien fallu comprendre les électrons pour domestiquer l'électricité... Alors que, compter, ma foi...

Lucien croisa les jambes. Ce fut précisément le moment que Mme Million choisit pour entrer :

— Voulez-vous quelque chose à boire ? Alcoolisme, ou boissons fraîches ?

— Un petit whisky avec des olives, répondit Stan sans lever les yeux.

— Juste de l'eau minérale, dit Lucien, si vous avez, merci.

Il attrapa son siège des deux mains, et dit doucement :

— Mais, vous, M. Million, entre les vases communicants, les siphons, les joints, les soudures qui tiennent et celles qui ne tiennent pas, il y a bien des jours où vous avez envie de savoir comment ça marche, non ? Des jours où vous êtes un peu plus curieux que d'autres ?

Il avait, à cet instant, l'air d'un vrai gosse en train de démonter le poste de radio de son grand-père. Stan repensa à ses *Dinky Toys* et lui accorda, sinon le quitus, du moins le bénéfice du doute.

— Bon. Admettons que vous soyez curieux et que, moi, je veuille bien payer des impôts pour vous calmer...

— D'autant, qu'évidemment, les nombres, ça peut servir aussi, vraiment...

— À quoi, par exemple ?

— À garder le code secret de votre carte bleue.

— Et comment ça ?

— C'est un peu compliqué, mais, disons qu'on utilise les nombres premiers.

— Les nombres entiers, vous voulez dire...

— Non, les nombres premiers, ceux qu'on ne peut pas retrouver comme produit de deux nombres plus petits.

— Là, je ne vous suis plus.

— Prenez 12 : c'est 4 fois 3, il n'est pas premier. Mais 11, on ne peut pas le retrouver de cette manière, il est premier.

— OK. Et qu'est-ce que ça a à voir avec ma carte bleue ?

— On veut garder votre numéro secret : ça revient à fabriquer une serrure facile à fermer et très difficile, sinon impossible à ouvrir.

— Si vous voulez.

— Lorsque vous multipliez 11 par 13, vous trouvez 143, c'est facile.

— Oui, bien sûr.

— Mais si vous deviez retrouver 11 et 13 à partir de 143, ce serait beaucoup plus délicat, non ?

— Je ne sais pas, je n'y ai jamais réfléchi...

— Vous admettez donc que cela nécessiterait une réflexion !

— Vous marquez un point, jeune homme.

— C'est le principe de la serrure : on choisit de très grands nombres premiers, disons des nombres de cent ou cent cinquante chiffres...

— Hou la la !

— ... on fait leur produit, c'est facile, on obtient un nombre de trois cents chiffres, et là, il est presque impossible de revenir en arrière...

— De retrouver les deux nombres de départ ?

— Exactement ! C'est comme ça qu'on protège votre argent !

— Pas mal...

Stan contempla un instant son whisky, attrapa une olive avec trois doigts de sa main droite, la croqua et but une gorgée qu'il sirota en jouant avec le noyau. Il regardait son interlocuteur avec la mine d'un badaud qui s'est fait bluffer par un bateleur de foire et cherche le truc tout en pressentant qu'il ne le trouvera pas.

Tout à coup, son visage se tendit :

— C'est pas mal, votre histoire, mais quand les ordinateurs auront trouvé tous les nombres premiers et fait tous les produits, vous serez gros Jean comme devant ?

— Les ordinateurs ne trouveront jamais tous les nombres premiers...

— Ha, ha ! Il paraît qu'il ne faut jamais dire jamais !

— Sauf si on peut le prouver. Et en mathématiques, il arrive que l'on puisse... Dans le cas qui nous occupe, c'est facile : il y a une infinité de nombres premiers !

— Que voulez-vous dire par là ?

— Si l'on rangeait tous les nombres entiers sur les barreaux d'une échelle et que l'on peignait en rouge les barreaux correspondant aux nombres premiers, on pourrait monter jusqu'au ciel en n'utilisant que les barreaux rouges.

— Comment pouvez-vous en être si sûr ? Les arbres ne montent pas au ciel, les échelles non plus...

— Supposons que je multiplie entre eux tous les nombres entiers depuis 2 jusqu'à 101.

— Faites, je vous en prie.

Une certaine complicité transpirait dans cette invite.

— J'obtiendrais alors un grand nombre, en fait de l'ordre d'un milliard.

— Soit.

— Ce nombre est évidemment un multiple de 2, 3, 4, etc., jusqu'à 101. Vous êtes d'accord ?

— Oui, oui...

— Ajoutons alors 1 : nous obtenons un nombre impair, puisque le nombre de départ est multiple de deux. Mais ce nouveau nombre laisse aussi un reste de 1 lorsqu'on le divise par 3.

— Forcément : il est le suivant d'un multiple de 3.

Stanislas semblait à présent assez excité.

— De même, reprit Lucien, son reste dans la division par 4, 5, ou 101 est égal à 1.

— Oui, je vois cela, dit Stan dans un soupir.

— Donc ce nombre ne peut être divisé que par des facteurs plus grands que 101 : ainsi, il existe des nombres premiers dépassant 101...

— Pourquoi des nombres *premiers* ?

— Parce que : ou bien notre nouveau nombre est premier, ou bien il est produit de facteurs premiers plus petits, mais qui tous dépasseront 101.

— Je ne suis plus très sûr de comprendre, dit Stan, visiblement un peu déçu, mais où vouliez-vous en venir ?

— À ceci : ce que nous avons fait avec 101, nous pouvons le refaire avec n'importe quel nombre... Il y a donc toujours un barreau rouge au-delà d'un barreau rouge !

— Ha ! Alors je peux dormir tranquille, mon argent est bien protégé !

— Sauf si un mathématicien invente un moyen de trouver facilement les facteurs d'un très grand nombre...

— Je vois... ce serait une raison de couper les crédits de la recherche plutôt que le contraire, non ?

M. Million semblait satisfait de son humour. Lucien ne répondit pas et avala d'un trait son verre d'eau en le regardant fixement.

Après quelques échanges polis sur des renseignements d'état civil et d'adresse, on convint d'un nouveau rendez-vous pour le lundi suivant. À l'évidence aucun des deux protagonistes n'était totalement parvenu à ses fins : Lucien sentait confusément qu'il n'avait pas convaincu Stanislas de son utilité sociale et ce dernier ne se résolvait pas vraiment à considérer ce gamin jongleur de nombres, aussi habile fût-il, comme un possible père pour ses petits-enfants.

Le premier contact s'étant, somme toute, plutôt bien passé, ces dames furent invitées à la seconde rencontre. Il faisait beau. Mme Million en avait profité pour dresser la table dans le patio. Lorsque Lucien y pénétra, il aperçut Stanislas en grande conversation avec sa fille, apparemment à propos de la voiture de France, qu'il fallait remplacer : le premier voulait la revendre et la seconde la « récupérer ». Val avait relevé ses cheveux en un savant chignon à la grecque, juste assez décoiffé pour troubler la concentration du chercheur. Avec ses fines lunettes de métal aux reflets mauves et violets, elle était vraiment irrésistible.

Ce fut Stan qui tira le premier.

— J'ai parlé de votre histoire de nombres premiers avec un client avocat. Il m'a dit que le plus grand nombre premier avait été trouvé par ordinateur aux USA. Tenez, je l'ai noté.

Il tendit à Lucien un bon de commande de son entreprise, au dos duquel il avait inscrit au feutre noir

$$P = 2^{6972593} - 1.$$

— Merci, je n'avais pas noté la valeur exacte, dit Lucien, mais ce n'est pas le plus grand nombre premier, c'est juste le plus grand nombre premier *connu*.

— Comment savoir s'il y en a d'autres, puisqu'ils sont inconnus ? demanda Valérie.

— Eh bien, comme je l'ai expliqué à ton père lundi dernier...

— ... Les cartes bleues avalent des nombres premiers et elles ne risquent pas de mourir de faim ! interrompit Stan.

— Effectivement, on peut le dire comme ça... savoir qu'il *existe* autant de nombres premiers qu'on veut, une infinité, est une chose ; savoir reconnaître, décider si un nombre qu'on a *écrit*, avec tous ses chiffres, est premier, c'est une tout autre affaire.

— On fait des produits à partir de 2, on obtient un très grand nombre, puis on ajoute 1, et hop ! il y a un nouveau nombre premier, ajouta Stan, tout fier de lui.

— Oui, mais, malheureusement, cela ne permet pas de l'écrire, précisa Lucien.

Il resta pensif quelques instants, puis reprit :

— Il y a un problème très simple à énoncer, concernant les nombres premiers, sur lequel les chercheurs n'ont pratiquement pas avancé depuis l'Antiquité.

— Voulez-vous un peu de jus de pamplemousse, demanda France, pour vous donner le courage de l'expliquer ?

— Oui, merci. Cela dit, c'est assez facile. Le point de départ consiste à remarquer qu'à part 2 et 3, deux nombres premiers ont forcément une différence au moins égale à deux...

— Je sens bien que ça doit être comme ça, mais je ne vois pas pourquoi, dit Valérie.

— Voyons, ma chérie, s'exclama France avec un rire de gorge, si deux nombres se suivent, l'un des deux est pair !

Stanislas leva sur sa femme des yeux soupçonneux. Visiblement, il n'avait pas raisonné aussi rapidement. Cela ne l'empêcha pas de ponctuer :

— C'est tranquille. Il n'y a pas d'ambiguïté.

— Bien, dit Lucien. Mais rien n'empêche deux nombres premiers d'être distants de 2, comme 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19...

— ... 41 et 43, ajouta Stan.

— Exactement... On dit que deux tels nombres premiers, aussi proches que possible, sont des *jumeaux.* Eh bien, personne ne sait s'il existe ou non une infinité de nombres premiers jumeaux.

— Minute papillon ! s'exclama Stan très excité. Il n'y a qu'à procéder comme on a dit lundi dernier, en faisant le produit depuis 2 jusqu'à un grand nombre et en ajoutant 1, puis 3... non, plutôt -1...

— Là je suis larguée, dit Valérie en riant.

— Je te donnerai des cours de rattrapage privés, souffla Lucien, puis s'adressant à Stan : vous avez un véritable tempérament de chercheur, ma parole... C'est une idée, effectivement, mais rappelez-vous qu'en ajoutant 1, nous n'obtenions pas forcément un nombre premier, juste un nombre avec un grand facteur premier... Et c'est pareil avec -1...

— Oui, je me disais bien qu'il devait y avoir un os, répondit Stan en déballant un petit cube de fromage. Et alors, vous séchez tous là-dessus ?

— Tous les chercheurs en théorie des nombres ne travaillent pas sur les nombres premiers jumeaux, mais, oui, « nous » séchons... Il y a d'ailleurs un autre problème très voisin, posé en 1742 par le mathématicien et historien Christian Goldbach et sur lequel nous n'avons guère plus de lumières : peut-on écrire n'importe quel nombre pair comme la somme de deux nombres premiers ?

— Si l'on prend deux nombres premiers différents de 2, ce sont des nombres impairs, donc leur somme est forcément paire, remarqua Valérie...

— Oui, mais c'est le problème *inverse* qui intéresse les mathématiciens : donnez-moi un nombre pair...

— 1946 ! dit France en rougissant.

— Soit, répliqua Lucien. J'aurais préféré un nombre plus petit, mais on va faire avec... Val, tu as ta calculette ?

— Sûr, capitaine !

— Alors, commençons. Tu as une touche, là, qui permet de savoir si un nombre est premier.

— Celle-là, la bleue ?

— Non, juste à côté, tu vois ? On commence... Alors $1946 - 3 = 1943$. Est-il premier ?

— Non, capitaine : $1943 = 29 \times 67$.

— Excellent. On continue. Après 3, le nombre premier suivant est 5. Que donne la machine ?

— $1946 - 5 = 1941 = 3 \times 647$. Toujours pas premier...

— Ne désespérons pas, moussaillon. La manœuvre suivante est $1946 - 7 = 1939$. Verdict ?

— 7×277, mon capitaine, toujours rien !

— Aïe, ça va être dur, mon petit. Suivant ?

— $1946 - 11 = 1935$, il n'est pas premier, mon commandant.

— Comment le savez-vous, moussaillon ?

— C'est un secret de famille, mon général. J'essaie le suivant ?

— Faites, donc !

— $1946 - 13 = 1933$... Oh ! Gagné, il est premier !

— Je vous fais première classe, moussaillon ! Vous voyez, $1946 = 1933 + 13$ peut bien être écrit comme la somme de deux nombres premiers. Il vérifie la conjecture de Goldbach.

— Mais, il est facile votre problème, s'exclama Stan ! Il n'y a qu'à faire vérifier à un ordinateur, précisément par cette méthode, que l'on aboutit immanquablement.

— On a vérifié jusqu'à de très grands nombres, mais, tous, c'est impossible : il y a une infinité de nombres pairs...

— Alors, dans ce cas, les ordinateurs ne servent pas à grand-chose...

Stan affichait la mine du Petit Prince découvrant que les grandes personnes, qui se prétendent des gens sérieux, ne savent finalement rien de l'essentiel — vous savez, celui qui est invisible pour les yeux.

— Je me mêle peut-être de ce qui ne me regarde pas, mais...

France, apparemment enhardie par les succès de l'équipe avec le nombre 1946, semblait prête à poser une question indiscrète. Lucien se tourna vers elle.

— Je vous en prie.

— Eh bien, voilà. Tout cela semble tout de même un peu... comment dirais-je ? un peu vain. Après tout, ça sert à quoi de savoir si les nombres premiers sont souvent jumeaux ou si M. Goldbach avait raison il y a deux cent cinquante ans ? Surtout si les réponses sont aussi difficiles à trouver ! Pourquoi dépenser une telle énergie, pourquoi vouloir à un tel prix éclairer de tels abîmes ?

Elle s'arrêta, essoufflée, étonnée de sa propre audace. Celui qui, d'une manière ou d'une autre, allait entrer dans sa famille, lui répondit doucement :

— Ces nombres que nous avons en nous font des choses plutôt bizarres. C'est vrai que nous avons envie de comprendre. Juste parce que c'est beau... comme une petite musique de nuit... Et ces propriétés correspondent précisément à une caractéristique particulière, disons « psychologique », des nombres premiers que les mathématiciens soupçonnent depuis longtemps mais qu'ils n'ont jamais réussi à mettre totalement en évidence...

— Moi, la psychologie, dit Stan, ça me dépasse encore plus que les mathématiques !

— Quelle caractéristique psychologique ? demanda Valérie, intriguée.

— Une sorte de perversion...

— Alors, là, ça commence à m'intéresser sérieusement, interrompit Stan.

— Enfin, il faut modérer tout ça, bien sûr... dit Lucien avec un sourire évanescent, mais, oui, on peut dire que les chercheurs soupçonnent que les nombres premiers sont des adeptes forcenés du principe « *tout ce qui n'est pas interdit doit être essayé* ».

France semblait réellement intriguée.

— Comme nos enfants quand ils étaient petits, entre deux et cinq ans... Je me souviens... De sacrés numéros : ils attrapaient tout ce qui était à leur portée et affichaient des mines étonnées quand on mettait des limites à leur capacité destructrice... Cela dit, je ne suis pas sûre de voir le lien avec vos nombres premiers.

— Ce qui frappe d'abord, quand on les étudie, c'est leur caractère apparemment aléatoire : rien ne permet *a priori* de prévoir si le nombre suivant sera premier ou non, enfin, pas sans des calculs précis, du genre de ceux qui permettraient de trouver tous les facteurs premiers de ce nombre ou de son suivant...

Et puis, ensuite, quand on pousse l'étude un peu plus loin, on est fasciné par l'extraordinaire régularité, à grande échelle, de la suite des nombres premiers. On la met facilement en évidence avec des tables, des graphiques...

— Quel genre de régularité demanda Valérie ?

— Disons qu'on parvient à montrer que les nombres premiers se raréfient de plus en plus, mais que le pourcentage de nombres premiers dans des tranches de, par exemple, 1000 nombres entiers consécutifs faiblit très lentement.

— C'est très abstrait pour moi, ça... dit Stan.

— Oui, effectivement, admit Lucien... Attendez je vais donner un exemple. Val, tu peux me passer ta calculette ?

— Mais certainement, très cher !

— Eh bien, voilà... un instant... Il y a 168 nombres premiers entre 1 et 1000, 135 entre 1001 et 2000, 127 entre 2001 et 3000, 120 entre 3001 et 4000, etc... Ils sont de moins en moins nombreux mais il n'y pas de chute brutale de la densité de population, pas de cataclysme.

— Je ne vois aucune perversion là dedans, consigna Stan, déçu.

— Attendez... Les nombres premiers semblent donc obéir à des lois, se comporter en bons citoyens du pays des nombres. Mais, lorsqu'on les observe d'encore plus près, de nouveau, il paraissent soumis à des fluctuations très hasardeuses, comme s'ils se permettaient, et effectivement réalisaient, tout ce qui ne leur est pas explicitement interdit...

Trois paires d'yeux interrogatifs fixaient le jeune homme. Il but un verre d'eau en fermant les paupières et reprit :

— Vous, M. Million, vous avez le droit d'aller au travail en marchant sur la tête, ou de faire un détour de cinquante kilomètres le matin et trente-cinq le soir...

— Certes, ça ne tombe pas sous le coup de la loi...

— Mais pourtant, vous ne le faites pas... Dites-vous alors que les nombres premiers, c'est tout le contraire : ils font *tout ce qui leur est possible.*

— Par exemple ?

— Par exemple être jumeaux aussi souvent que permis. La loi de la parité leur interdit d'être distants de 1, mais ils peuvent être distants de 2, alors ils le sont, de temps en temps...

— Sauf que vous ne savez pas le démontrer ! le titilla Stan.

— Exact, pas encore, mais nous sommes *sûrs* que cela se passe ainsi. Dans le même genre : si un nombre n est premier, on ne peut pas espérer que $n+2$ et $n+4$ le soient aussi, parce que l'un de ces trois nombres est forcément divisible par 3 (pensez à 11, 13 et 15), mais *rien* n'interdit que n, $n+2$ et $n+6$ soient simultanément premiers, alors ils le sont, de temps en temps, aussi souvent que possible...

— Exemple ? souffla Valérie, visiblement prise au jeu.

— 11, 13 et 17, ou encore 41, 43 et 47, répondit Lucien du tac au tac, avec un petit sourire narquois.

— Ainsi, les nombres premiers, comme les enfants, sont des pervers polymorphes ! conclut France en riant. Est-ce que notre professeur accepterait de partager notre maigre repas ?

— Mais, je...

Lucien interrogea Valérie du regard, qui lui sourit, puis se tourna vers Stan, qui considérait sa femme, apparemment plutôt surpris par cette invitation impromptue. Le silence ne pesa pas très longtemps. Le maître de maison pivota sur son siège pour faire face au jeune homme et lança :

— À une condition, parlez-nous d'un problème de ce genre sur lequel vous autres mathématiciens, fleurons de notre civilisation *savez* faire quelque chose !

— Il est évident qu'un nombre premier n'est jamais un carré parfait, mais rien n'empêche le nombre qui suit un carré d'être premier, comme 5, qui suit 4, 17, qui suit 16, 37, qui suit 36, etc. Comme les nombres premiers veulent tout essayer...

— Cela arrive effectivement autant de fois qu'on veut ! Vous pouvez le prouver ?

Stan semblait enfin impressionné.

— Hélas ! Ce problème est peut-être encore plus dur que celui des nombres premiers jumeaux... Mais nous savons montrer, par exemple, qu'il existe « beaucoup » de nombres entiers n tels que le nombre entier le plus proche de ..., de ... attendez, je vous l'écris :

$$n\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}},$$

soit un nombre premier.

— Admettons, dit Stan. Cela ne justifie pas encore votre salaire, mais ça commence à ressembler à du travail... En tout cas, ça mérite bien un repas !

La soirée fut conviviale et fort détendue. Les discussions mathématiques firent naturellement place à des digressions diverses et consensuelles : vacances, tennis, planche à voile, bruit quotidien, vertus réparatrices comparées du sommeil et du calme, maison de campagne, impôts, santé, enfants. Tout au plus, le regard de Stan se figeait-il, parfois, sur Lucien, avec une forme de complicité mêlée de respect et de curiosité. Lorsqu'il partit, vers minuit, le jeune homme faisait presque partie de la famille.

Ce fut donc par pure perversité que Stan demanda à Lucien de revenir une troisième fois lui parler de ses « petits problèmes ». C'était, lui avait-il confié, juste histoire d'être parfaitement convaincu.

Le dernier entretien fut programmé un jeudi férié du mois de mai. Lucien s'en serait bien passé, en fait, parce qu'il achoppait depuis plusieurs semaines sur un calcul *a priori* standard, et qui donnait, par deux méthodes différentes, deux résultats obstinément différents. Il était allé consulter son ancien directeur de thèse à Lyon, mais le voyage s'était révélé totalement inutile. L'ex-patron était visiblement accaparé par des préoccupations scientifiques d'un tout autre ordre : il était plongé dans un ouvrage de thermodynamique et ne parlait plus qu'entropie, potentiel, lumière et trous noirs. Lucien s'était soudain senti bien seul avec son problème. Dans le TGV du retour, il avait eu une grosse envie de tout jeter aux orties et de proposer ses services à son copain de promo Jean-René qui avait créé une boîte de services informatiques « à la carte » pour les industries lourdes — automobile et aéronautique... Cependant, au milieu de ses divagations spéculatives, une idée nouvelle lui était venue et il avait ressorti son bloc de papier blanc pour le couvrir de signes cabalistiques, excitant à son insu la curiosité de sa voisine de compartiment.

Ayant donc, indubitablement, la tête ailleurs, il fit pourtant l'effort de préparer correctement son « cours » d'un genre particulier : le sourire de Valérie valait bien cette messe.

Il était prévu qu'elle assistât son père dans cette ultime épreuve, mais elle n'était pas encore rentrée lorsque Lucien se présenta.

— Commençons sans elle, proposa Stan, visiblement conciliant. Elle prendra le train en cours de route.

— Aujourd'hui j'ai prévu de vous parler des fractales...

Le jeune chercheur avait pris de l'assurance, c'était évident.

— Vous voulez dire des fractions ? C'était un vrai cauchemar...

— Non, je dis bien des *fractales*, ce sont des formes géométriques un peu particulières... mais comme nous avons peu de temps, je me limiterai à une description plutôt sommaire.

— Allons-y, soupira Stan. J'espère que vos fractales seront moins perverses que vos nombres premiers... Ou au minimum moins compliquées !

— J'espère aussi, mais vous allez voir que les deux sont liés... Vous qui connaissez bien les installations de distribution d'eau, vous devez imaginer facilement le schéma de la circulation sanguine.

— Effectivement, les tuyaux, ça n'a pas de secret pour moi.

— Bien... Il y a de grosses veines, ou de grosses artères, qui se ramifient en plus petites.

— Jusqu'ici, tout va bien...

— Et ces veines ou artères se divisent elles-mêmes en veinules ou artérioles encore plus petites...

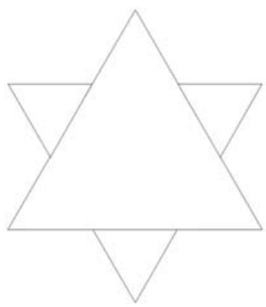
— Tant qu'on a du débit, on survit, quand on en a plus, c'est foutu...

— Imaginez alors que ce processus de division se poursuive indéfiniment. On obtient un système « circulatoire » imaginaire qui a les deux spécificités caractéristiques d'un objet fractal : d'une part, il est indéfiniment divisé, et donc totalement irrégulier, et d'autre part il est « robuste » par changement d'échelle, au sens où grossir à la loupe ou au microscope une partie du système vous ramène à une image équivalente, sinon identique au système initial.

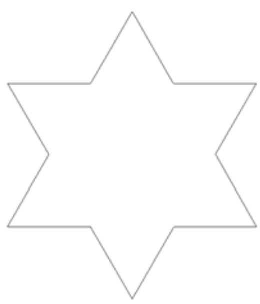
— C'est assez monstrueux, votre engin ! Ça me rappelle les boîtes de Vache-qui-rit avec les boucles d'oreille pour vache représentant des boîtes de Vache-qui-rit, elles mêmes représentant des vaches...

Lucien sortit une feuille de papier blanc de son cartable et dessina un triangle.

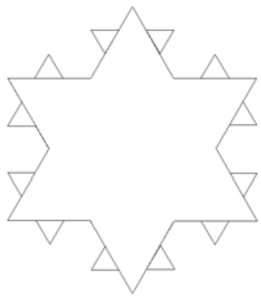
— Oui, c'est l'idée. Tenez, voici un autre exemple de forme fractale facile à construire. Considérons ce triangle équilatéral et construisons des petits triangles, eux aussi équilatéraux, sur chacun des trois côtés, comme ça :



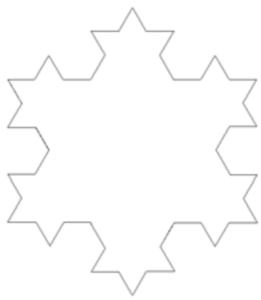
Ensuite, effaçons les base des petits triangles, pour obtenir une sorte d'étoile... Voilà.



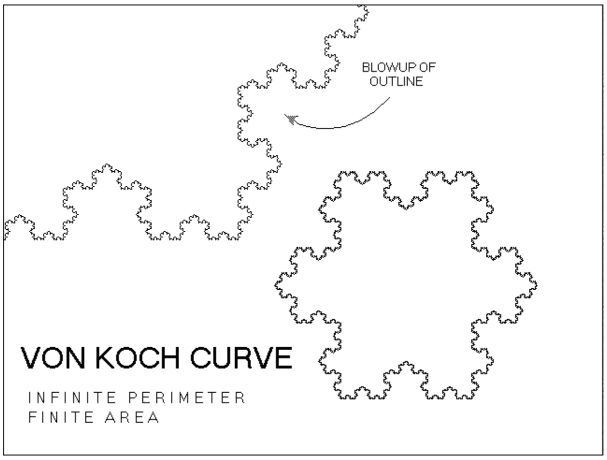
Puis, recommençons l'opération sur chacun des nouveaux côtés de la figure obtenue...



... effaçons les traits inutiles...



Après un grand nombre d'étapes, nous obtenons une sorte de flocon de neige, tenez, je vous ai apporté une illustration trouvée sur le réseau :



— Plutôt joli, admit Stan.

— Comme indiqué, c'est la courbe de von Koch... Difficile de reconnaître le triangle d'origine... Mais chaque partie est semblable au tout, c'est bien une fractale !

— Et les nombres dans tout ça ?

— Ce qui est fascinant, c'est que ce sont eux aussi, en un sens, des fractales...

— Quel rapport avec les artères ou les flocons de neige ?

— Ce n'est pas si difficile à voir. Considérons un grand nombre entier tiré au hasard, avec beaucoup de facteurs premiers...

— C'est un peu difficile à se le représenter. Un exemple serait préférable, prescrit Stan.

— D'accord, attendez un peu, concilia Lucien en sortant sa calculette. Voilà, choisissons 118866.

— D'où sort-il, celui-là ?

— Ne vous inquiétez pas, il est fait pour. Sa décomposition est $2 \times 3 \times 11 \times 1801$.

— Si vous le dites...

— Cherchons alors les diviseurs de ce grand nombre. Il y a les grands et les petits...

— Et les moyens !

— Non justement, pas de moyens : un diviseur sera « grand » s'il contient le facteur premier 1801 et il sera « petit » dans le cas contraire.

— Bien vu !

— Ce n'est rien, j'ai l'habitude, je fais ça tous les soirs, rétorqua Lucien avec un petit sourire malicieux et un subtil froncement des sourcils. Bon. Reprenons. Nous avons donc deux paquets. Mais dans chaque paquet, il y a encore deux groupes...

— Ceux qui contiennent 11 et ceux qui ne le contiennent pas ! s'exclama Stan, très satisfait de lui-même.

— Exact !

— Et ainsi de suite, avec 3 puis enfin 2...

— C'est ce qui fait de ce nombre une sorte de fractale : deux paquets, puis dans chaque paquet, deux nouveaux paquets, etc.

— Oui... je vois...

Stan avait les yeux dans le vague, voire du vague dans les yeux.

C'est à cet instant que Valérie entra. Leste, élégante, fraîche. Elle embrassa son père et, du plat de la main, souffla un baiser vers Lucien, ostensiblement déçu.

— Alors, papa, qu'as-tu appris de nouveau aujourd'hui ?

— Qu'un nombre entier pris au hasard ressemble à un flocon de neige... C'est fou, tout de même ! Se retournant vers Lucien il ajouta : mais enfin, tous les nombres ne sont quand même pas comme ça, c'est trop fort !

— Non, bien sûr, mais on sait, et c'est une découverte assez récente, qu'ils sont « presque tous » fabriqués sur le même modèle...

— Presque tous ?

— Disons que si vous les tirez au hasard sur des billets de loterie, vous avez de très grandes chances de tomber sur un flocon plutôt que sur un nombre bien lisse...

— Dommage que je n'aie pas vu le début du film, je suis totalement larguée, dit Valérie. Et l'assassin, c'est qui ?

— Le hasard, comme d'habitude, répliqua Lucien, presque sérieux.

— Allez... Tu peux me résumer les chapitres précédents ? supplia Valérie avec une petite voix.

— Je vais faire mieux, dit Lucien, tu vas voir... Tout à l'heure nous avons analysé la structure du nombre 118866, dont les facteurs premiers sont 2, 3, 11, 1801. Rangeons ses seize diviseurs dans l'ordre croissant : nous obtenons

$$\begin{aligned}
&1,\ 2,\ 3,\ 6 = 3 \times 2,\ 11,\ 22 = 11 \times 2,\ 33 = 11 \times 3,\\
&66 = 11 \times 3 \times 2,\ 1801,\ 3602 = 1801 \times 2,\ 5403 = 1801 \times 3,\\
&10806 = 1801 \times 3 \times 2,\ 19811 = 1801 \times 11,\\
&39622 = 1801 \times 11 \times 2,\ 59433 = 1801 \times 11 \times 2\\
&118866 = 1801 \times 11 \times 3 \times 2.
\end{aligned}$$

— Bravo ! s'exclama Valérie, mais, moi ça ne me parle pas franchement du côté du vécu...

— Attends... On va maintenant faire un petit tour de passe-passe. On remplace 1 par a, 2 par b, 3 par c, 11 par d, 1801 par e, et on réécrit la même liste avec les lettres à la place des chiffres.

— Si ça peut te faire plaisir...

— Regarde, on obtient

$$a,\ b,\ c,\ cb,\ d,\ db,\ dc,\ dcb,\ e,\ eb,\ ec,\ ecb,\ ed,\ edb,\ edc,\ edcb.$$

— Mouais, dit Valérie, et alors ?
— Tu ne vois rien ?
— Non... et toi, papa ?
— Papa ne voit rien non plus, éructa Stanislas Million.
À cet instant, France entra dans la pièce, un plateau de boissons dans les mains. Elle jeta un coup d'œil à la feuille posée sur la table basse, que son mari et sa fille scrutaient désespérément.
— Tiens, dit-elle, c'est rangé comme dans un dictionnaire !
— Bravo, Mme Million, c'est vous la meilleure !
Lucien essuya prestement son front du revers de sa manche et sourit à la ronde d'un air victorieux.
— Je ne voudrais pas te contrarier, mon chéri, dit doucement Valérie, mais il n'y a pas de quoi pavoiser...
— Disons que c'est une propriété remarquable...
— Et presque tous les nombres sont comme ça, rangés alphabétiquement ? demanda Stan.
— Non... C'est un peu plus compliqué... En fait, presque *aucun* nombre n'est strictement rangé de cette façon. Mais presque tous le sont « presque », ce qui ne perturbe pas la structure fractale...
— Ils aimeraient bien jouer au dictionnaire, mais ils font des petites erreurs d'ordre alphabétique, quoi ! résuma Stan.
— On peut le dire comme ça, convint Lucien.
— Pas mal quand même, admit Stan, rêveur...
— Merci... Nous y sommes donc arrivés, dit Lucien.
Après un instant d'hésitation et une courte inspiration, il ajouta :
— Et si je vous invitais tous au restau ?

(À SUIVRE)

Et pour en savoir plus ?

La plupart des sujets abordés dans le texte précédent correspondent à des sujets de recherche de l'équipe de théorie (analytique) des nombres[1] *de l'institut Élie Cartan, au sein de l'Université Nancy 1 :*

Jie Wu a travaillé sur les nombres premiers jumeaux. En collaboration avec Joël Rivat, il a trouvé des nombres premiers proches de n^c avec $c = 1,18$.

1. equipe.nombres@antares.iecn.u-nancy.fr

Joël Rivat et Patrick Sargos ont, pour leur part, établi qu'avec une valeur un tout petit peu plus faible de c, les nombres premiers en question surgissent avec la régularité attendue.

Cécile Dartyge s'est penchée sur le problème si difficile des nombres premiers de la forme $n^2 + 1$.

André Stef et l'auteur de ces lignes ont partiellement percé les secrets des nombres « lexicographiques », dont les diviseurs sont rangés par ordre alphabétique.

En collaboration avec Michel Mendès France, de l'université de Bordeaux, le signataire a décrit la structure fractale des diviseurs. Les mêmes ont également commis un volume de la collection Que sais-je ? *sur les nombres premiers...*

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex

gerald.tenenbaum@ciril.fr

1903 - 2003
Un siècle de mathématiques à Nancy

Numéro hors série de la Revue de l'Institut Élie Cartan
édité dans le cadre de la manifestation éponyme
organisée à l'automne 2003

avec le concours
du Centre Culturel André Malraux - scène nationale de Vandœuvre

et le soutien de
l'Université Henri Poincaré - Nancy 1
le CNRS
l'INRIA
l'Université - Nancy 2
l'I.N.P.L.
le Conseil Régional de Lorraine
le Conseil Général 54
la Communauté Urbaine du Grand Nancy
la ville de Nancy
la ville de Vandœuvre

Comité de rédaction :
D. Barlet, L. Berard Bergery, J.-L. Clerc,
F. Conrad, G. Tenenbaum, P. Vallois
Directeur de publication : *Jean-Louis Clerc*
Mise en page : *Gérald Tenenbaum*
Conception graphique : *CCAM*

Achevé d'imprimer en février 2006 par l'imprimerie SAG à Saverne

ISSN : 0290-7889
ISBN : 2-903594-19-8
Dépôt légal : mars 2006

Institut Élie Cartan
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239 - 54506 Vandœuvre Cedex
33 (0)3 83 68 45 64 - http://www.iecn.u-nancy.fr