

801 Travaux encadrés de recherche (3 ects)

Pré-requis : Licence et premier semestre de M1 mathématiques ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

Objectifs : mener à bien un projet sur une durée d'un semestre, approfondir un sujet donné, mobiliser les connaissances acquises dans les autres enseignements, s'initier à la recherche, rédiger un rapport de synthèse, communiquer sur un travail effectué.

Encadré par un enseignant-chercheur, l'étudiant étudie en profondeur un texte mathématique et en détaille tous les points. Il pourra s'agir d'un extrait de livre, voire d'un article de recherche accessible à ce niveau. Un travail de modélisation avec outils informatiques pourra éventuellement être demandé.

Ce travail fera l'objet d'un mémoire écrit et d'une soutenance devant un jury.

802 Anglais (3 ects, 30h TD)

Pré-requis : anglais de Licence

Contenu pédagogique

Anglais littéraire et scientifique. Communication écrite et orale. Compétences du CLES 2 (ou d'une certification équivalente) ou du TOEIC qui pourront être présentés dans l'année.

803 Probabilités (6 ects, 30h CM + 30h TD)

Pré-requis : Licence et premier semestre de M1 mathématiques ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

- Equi-intégrabilité.
- Sommes de variables aléatoires indépendantes. Inégalités. Théorème des trois séries.
- Théorie classique des martingales à temps discret : sous et sur-martingales, théorème d'arrêt et théorème de Hunt, théorèmes de convergence (en particulier : théorème de Doob pour les martingales bornées dans L^1).
- Notion de loi d'un processus à temps discret. Théorème de prolongement de Kolmogorov (admis).
- Théorie des chaînes de Markov à espace d'états dénombrable. Propriété de Markov forte. Etude asymptotique : lois invariantes, réversibles, états transients, récurrents, récurrents positifs. Théorème de convergence en loi, théorème de convergence des moyennes ergodiques.
- Simulation de processus aléatoires (TP).

804 Calcul différentiel (4 ects, 20h CM + 20h TD)

Pré-requis : Licence de mathématiques ou niveau équivalent, en particulier le calcul différentiel

Contenu pédagogique

Equations différentielles ordinaires (rappels et compléments) :

- Théorème de Cauchy-Lipschitz : preuve dans le cas linéaire, indications ou devoir pour le cas général.
 - Solutions maximales.
 - Comportement au bord de l'intervalle maximal.
 - Etudes qualitatives 1: utilisation d'une intégrale première ($y'' = \pm y^3$, pendule, etc.).
 - Etudes qualitatives 2 : stabilité pour $y'=f(y)$ (avec $f(0)=0$).
 - Intégration simultanée de champs de vecteurs et flots.
- Systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Sous-variétés de \mathbb{R}^n .
Domaines de \mathbb{R}^n à bord C^1 par morceaux.
Formule de Stokes.

805 Analyse fonctionnelle (7 ects, 35h CM + 35h TD)

Pré-requis : Licence de mathématiques et cours d'Analyse du premier semestre, ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

1. Espaces de fonctions continues : structure et théorèmes de convergence (rappels), ensembles relativement compacts (théorèmes d'Ascoli, de Montel (TD)), densité (produit de convolution, théorème de Stone-Weierstrass).
2. Espaces d'applications linéaires continues (rappels et compléments) : théorèmes de Hahn-Banach, de Baire et conséquences, de Banach-Steinhaus, théorie spectrale des opérateurs compacts (homomorphismes de Hilbert-Schmidt, théorie spectrale des opérateurs normaux compacts, alternative de Fredholm).
3. D'autres topologies sur les espaces vectoriels normés : semi-normes et topologie associée, topologie faible, topologie faible étoile.
4. Distributions tempérées : structure via les semi-normes, multiplication par des fonctions, différentiation, support, densité des fonctions, convolution, applications aux équations aux dérivées partielles : noyaux, analyse de Fourier dans S et S' .

806 Algèbre commutative et arithmétique (7 ects, 35h CM + 35h TD)

Pré-requis : Licence de mathématiques et cours d'Analyse du premier semestre, ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

* *Algèbre commutative*

I) Extensions de corps

II) Généralités sur les modules

A) Objets, morphismes, sous-objets et quotients avec prop. universelle.

B) Additivité des morphismes, produits et sommes directes, Noyau et conoyau, image et coimage, prop universelles idem. Premier théorème d'isomorphisme : $\text{CoIm} \simeq \text{Im}$

C) Suites exactes, suites exactes scindées, S -modules en somme directe et projecteurs. Supplémentaires, diagrammes commutatifs, lemme des cinq

D) Opérations sur les S -modules : S -module engendré, sommes de S -modules, deuxième théorème d'isomorphisme.

--- à partir d'ici les anneaux sont supposés commutatifs ---

III) Compléments

A) Modules de morphismes et dualité

B) Torsion sur un anneau intègre (si le temps le permet)

C) Changement de l'anneau de base

IV) Modules particuliers

A) Familles libres et génératrices

B) Modules libres et rang (en admettant la théorie générale de la dimension des espaces vectoriels) (notions)

C) Modules de type fini, (notions, théorème de Cayley-Hamilton)

D) Modules noethériens (artinien en TD)

V) Modules de type fini sur les anneaux principaux

A) Théorème des diviseurs élémentaires : énoncé général pour un anneau principal et démonstration algorithmique dans le cas particulier d'un anneau euclidien

C) Décomposition primaire et unicité dans le théorème de structure (si le temps le permet)

D) Application à la réduction des endomorphismes (si le temps le permet)

* *Arithmétique*

Anneaux commutatifs, corps des rationnels de Gauss $\mathbb{Q}[i]$, anneaux des entiers d'un corps de nombres, anneaux

de Dedekind, groupe de classes d'idéaux, géométrie des nombres (théorème de Minkowski), bases d'entiers et calculs de factorisation, théorème des unités de Dirichlet (si le temps le permet), factorisation des idéaux.

Références possibles :

Sur la partie Algèbre commutative :

- Atiyah-McDonald

Sur la partie Arithmétique :

- Pierre Samuel, Théorie algébrique des nombres

- Jean-Pierre Serre, Cours d'arithmétique

- Paulo Ribenboim, Classical theory of algebraic numbers

- Jürgen Neukirch, Algebraic Number Theory

807 Géométrie différentielle

(7 ects, 35h CM + 35h TD)

Pré-requis : Analyse, algèbre linéaire et calcul différentiel de licence

Contenu pédagogique

1. Courbes et surfaces dans \mathbb{R}^3 : courbure et torsion des courbes gauches ; surfaces régulières ; les deux formes fondamentales et le théorème de Gauss.

2. Notions fondamentales de géométrie différentielle abstraite : sous-variétés de \mathbb{R} et variétés abstraites ; espaces tangents, différentielles d'une application ; sous-variétés, sous-variétés plongées ; champs de vecteur, intégration, crochet ; formes différentielles ; distributions, théorème de Frobenius

3. Compléments (groupes de Lie, structures riemanniennes, fibrés, etc.)

808 Calcul scientifique

(7 ects, 35h CM + 25h TD + 10h TP)

Pré-requis : Algèbre linéaire (niveau de Licence de mathématiques) et analyse (premier semestre du M1)

Contenu pédagogique

Objectifs : méthodologie de résolution numérique de problèmes aux limites elliptiques basée sur l'approximation conforme par Eléments Finis et Algorithmes pour la résolution de grands systèmes linéaires.

Cette unité se consacrera essentiellement à l'introduction de la méthode des Eléments Finis, tout en abordant par ailleurs la résolution de grands systèmes linéaires par des méthodes itératives. La présentation de la méthode des Eléments Finis s'effectuera dans le contexte de l'approximation numérique conforme de problèmes aux limites elliptiques, linéaires. Les points suivants articuleront le déroulement de l'unité en particulier : Espaces de Sobolev, Formulations Variationnelles, Existence et Unicité de solution variationnelle, Eléments Finis de Lagrange d'ordre k en 2D (éléments géométriques triangulaires et rectangulaires), Triangulation de domaines polygonaux, Formulations Variationnelles Discrètes, Etude de l'erreur d'approximation, Mise sous forme matricielle, Stockage de matrice, Théorème de Projection, Sous-espaces de Krylov, Méthode d'Arnoldi, Méthode de Lanczos, Méthode du Gradient Conjugué.

809 Statistique et séries chronologiques

(7 ects, 27h CM + 21h TD + 22h TP)

Pré-requis : Probabilités, statistique et algèbre linéaire de licence et du 1er semestre du master

Contenu pédagogique

Objectifs :

- savoir analyser un problème d'inférence statistique ; choisir et mettre en œuvre la méthode adaptée, et interpréter les résultats,

- savoir utiliser les méthodes de type MCMC, choisir un algorithme de simulation et faire de l'inférence statistique en fonction du contexte proposé par les données,

- comprendre le principe de la modélisation statistique, des tests sur les coefficients et la validation de modèles,

connaître le principe du choix de modèles, connaître les principaux tests non paramétriques,
- connaître les principales techniques de type MCMC, appliquer ces techniques dans des situations réelles.

Régression linéaire Multiple : rappels théoriques, pratique, validation, choix de modèles.

Modèles mixtes. Tests non-paramétriques usuels. Puissance et effectifs nécessaires. Implémentation avec R et/ou SAS.

Méthodes d'analyse factorielle : analyse en composantes principales, analyses de tableaux multiples, analyses des correspondances simples et multiples, cas des données mixtes, cas des données manquantes. Implémentation avec R et/ou SAS.

Simulation des variables aléatoires

Intégration Monte Carlo. Contrôle de la variance par des méthodes Monte Carlo.

Simulation de chaînes de Markov. Algorithme de simulation (Metropolis-Hastings, Gibbs).

Optimisation Monte Carlo.

Inférence bayésienne.