

701 Analyse
(8 ects, 30h CM + 50h TD)

Pré-requis : Licence de mathématiques ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

* *Chapitre I. Espaces de Banach*

1. Rappels de topologie métrique, théorème du point fixe, théorème des fermés emboîtés, théorème de Baire, notions de topologie générale.

2. Espaces vectoriels normés : normes sur un espace vectoriel, parties totales, séparabilité, parties compactes, fonctions continues sur un compact, espaces localement compacts, homéomorphismes, propriétés topologiques des espaces complets.

3. Applications linéaires continues : norme d'un opérateur, sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels normés, théorèmes de l'isomorphisme et du graphe fermé, supplémentaires topologiques, projecteurs, topologie de l'ensemble des isomorphismes entre espaces de Banach, spectre d'un opérateur, théorème de Banach-Steinhaus.

* *Chapitre II. Espaces de Hilbert*

Espaces préhilbertiens, espaces préhilbertiens séparés, espaces de Hilbert, topologies forte et faible sur un espace de Hilbert, familles orthonormales et bases hilbertiennes, formes sesquilineaires continues, adjoint d'un opérateur, opérateurs normaux, opérateurs compacts.

* *Chapitre III. Convolution et transformation de Fourier*

Convolution, transformation de Fourier, formules d'inversion, transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

* *Chapitre IV. Introduction aux distributions sur \mathbb{R}*

Classe de Schwarz, distributions tempérées.

702 Statistique et probabilités
(8 ects, 30h CM + 50h TD)

Pré-requis : Licence de mathématiques ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

- Estimation : propriétés d'un estimateur, méthode des moments et du maximum de vraisemblance.

- TCL dans \mathbb{R}^d , vecteurs gaussiens. Lois du khi-deux, de Student et de Fisher.

- Tests usuels du modèle gaussien ou asymptotiques : test sur les moyennes, test du khi-deux.

- Modèle linéaire gaussien.

- Etude des chaînes de Markov à espace d'états finis : classification des états, théorème de convergence en loi des chaînes de Markov irréductibles apériodiques. (Pas de propriété de Markov forte ni de loi des grands nombres des chaînes de Markov.)

- Espérance conditionnelle, loi conditionnelle, simulation par rejet, simulation de vecteurs aléatoires, méthode de l'échantillonneur de Gibbs.

- Lois conditionnelles : le cas des lois gaussiennes.

703 Algèbre et théorie des représentations
(7 ects, 30h CM + 30h TD)

Pré-requis : Licence de mathématiques ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

- Groupes finis : actions de groupes, groupes symétriques, alternés et diédraux, groupes finis simples.

- Théorèmes de Sylow : divers énoncés, produits semi-directs, classification des groupes finis de petit ordre.

- Représentations des groupes finis : complète réductibilité, représentations induites (TD), produit tensoriel, alterné et symétrique, lemme de Schur, relations d'orthogonalité des coefficients matriciels, caractères, transformation de Fourier non commutative, fonctions centrales, tables des caractères.

Références possibles :

- Jean-Pierre Serre, Théorie des représentations et groupes finis (premier chapitre)

- Daniel Perrin, Algèbre

704 Géométrie et topologie
(7 ects, 30h CM + 30h TD)

Pré-requis : Licence de mathématiques ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

1. Géométrie projective (30h)

Définition de l'espace projectif, homographies, birapport, théorème fondamental de la géométrie projective (caractérisation des transformations d'un espace projectif préservant l'alignement), topologie quotient, structure de variété différentielle et notion générale de variété différentielle (ex. : sphère et SO_3).

2. Géométrie hyperbolique (10h)

Demi-plan de Poincaré, vérification des axiomes, isomorphisme avec le disque, caractérisation des automorphismes conformes préservant l'alignement ($SL_2(\mathbb{R})$).

3. Topologie (20h)

Groupe fondamental, homotopie, formes différentielles dans \mathbb{R}^2 .

705 Optimisation
(7 ects, 28h CM + 20h TD + 12h TP)

Pré-requis : Algèbre linéaire et calcul différentiel (niveau Licence de mathématiques ou équivalent)

Contenu pédagogique

Objectif : maîtriser des outils mathématiques et des algorithmes pour la résolution de problèmes d'optimisation. Ce module se consacrera aux méthodes de programmation linéaire/non-linéaire.

L'organisation suivante sera adoptée :

1. Introduction aux problèmes d'optimisation,
2. Programmation linéaire – aspects théoriques, méthodes du simplexe, dualité en programmation linéaire,
3. Programmation non-linéaire sans contraintes – aspects théoriques, méthodes de gradient, méthodes de quasi-Newton,
4. Programmation non-linéaire avec contraintes – aspects théoriques, relations de Kuhn et Tucker, introduction à la dualité, méthode d'Uzawa.

Divers exemples, y compris ceux du domaine de l'apprentissage statistique, seront traités en Travaux Pratiques.

706 Algorithmique et algèbre linéaire appliquée
(7 ects, 20h CM + 20h TD + 20h TP)

Pré-requis : Licence de mathématiques ou niveau équivalent

Contenu pédagogique

Objectifs :

- choisir quel type d'algorithme est pertinent dans une situation concrète,
- implémenter un algorithme classique,
- implémenter des algorithmes matriciels pour l'analyse des données.

** Algorithmique (12h CM + 12h TD + 12h TP)*

- Algorithmique et Programmation.
- Structures de données, algorithmes de base.
- Algorithmes sur les graphes.
- Algorithmes gloutons (sac à dos, plus courts chemins, arbre couvrant minimum).

** Algèbre linéaire appliquée (8h CM + 8h TD + 8h TP)*

- Calcul matriciel rapide: produit matrice vecteur. Applications à des algorithmes classiques en calcul scientifique.
- Approximation matricielle de type SVD, application à l'ACP, moindres carrés, inverse de Moore-Penrose.
- Calcul spectral numérique : valeurs propres, vecteurs propres. Implémentation sur des problèmes de grande taille. Approximation spectrale de matrice de faible rang (méthode de Nystrom).
- Equations matricielles. Approximation matricielle de type Kronecker.