
Thèse
présentée pour l'obtention du titre de
Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I
en Mathématiques
par
Aurélien DEYA

Etude de systèmes différentiels fractionnaires

Soutenue publiquement le 18 octobre 2010

Membres du Jury :

Arnaud Debussche	Professeur, ENS Cachan (Rapporteur)
Massimiliano Gubinelli	Professeur, Paris Dauphine
Michel Ledoux	Professeur, Toulouse
Antoine Lejay	CR Inria
Ivan Nourdin	Professeur, Nancy
Marta Sanz-Solé	Professeur, Barcelone (Rapporteuse)
Samy Tindel	Professeur, Nancy (Directeur de thèse)

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Objectifs	7
1.2	Application à l'analyse stochastique	11
1.3	Plan et résultats principaux	14
1.4	Index des notations	17
1.4.1	Notations générales	17
1.4.2	Notations du chapitre 3	17
1.4.3	Notations du chapitre 4	18
1.4.4	Notations du chapitre 5	18
1.4.5	Notations du chapitre 6	19
1.4.6	Notations du chapitre 7	20
I	Retour sur le système différentiel rugueux standard	21
2	Éléments de la théorie des k-incrément	23
2.1	Quelques outils	24
2.1.1	L'opérateur d'incrément δ	24
2.1.2	Espaces höldériens	25
2.1.3	L'opérateur Λ	26
2.2	Construction de l'intégrale rugueuse	29
2.2.1	Le cas Young ($\gamma > 1/2$)	29
2.2.2	Le cas $\gamma \in (1/3, 1/2]$	31
2.2.3	Vers des processus moins réguliers	34
2.3	Résolution du système	35
2.3.1	Existence et unicité de la solution	37
2.3.2	Continuité de l'application d'Itô	39
3	Un schéma d'approximation dans le cas du mBf	41
3.1	Quelques précisions sur l'aire de Lévy du mBf	43
3.1.1	L'approximation analytique du mBf	44
3.1.2	Discrétisation du 2-rough path	47
3.2	Etude du schéma	53
3.2.1	Le schéma de Milstein pour les EDO dirigées par un processus régulier	54
3.2.2	Application au mBf	56
3.2.3	Résultats de simulation numérique	58
3.3	Appendix	60

II	L'équation de Volterra rugueuse	65
4	Une première approche	69
4.1	Le cas Young	71
4.2	Le cas Young en présence d'une singularité	78
4.2.1	Interprétation du système	78
4.2.2	Résolution de l'équation	83
4.3	Le cas rugueux	88
4.3.1	Interprétation du système	88
4.3.2	Résolution du système	89
4.3.3	Prolongement de la solution	94
4.4	Appendix	94
5	Le cadre convolutionnel	99
5.1	Introduction	99
5.2	L'opérateur d'incrément $\tilde{\delta}$	101
5.2.1	Incréments	102
5.2.2	Espaces fonctionnels sous-jacents	102
5.2.3	Espaces höldériens et application $\tilde{\Lambda}$	104
5.3	Le cas Young	107
5.3.1	Considérations heuristiques et interprétation du système	107
5.3.2	Résolution de l'équation	110
5.4	Le cas rugueux	112
5.4.1	Processus convolutionnels contrôlés	113
5.4.2	Intégration convolutionnelle des processus contrôlés	116
5.4.3	Processus contrôlés localisés	118
5.4.4	Résolution de l'équation	121
5.5	Application aux trajectoires rugueuses	126
5.5.1	Cas de la transformée de Laplace	126
5.5.2	Cas de la transformée de Fourier	128
5.6	Appendix	132
III	L'équation de la chaleur rugueuse	135
6	Interprétation et résolution	139
6.1	Introduction	139
6.2	Intégration algébrique associée au semigroupe de la chaleur sur \mathbb{R}^n	142
6.2.1	Cadre d'étude	142
6.2.2	L'incrément modifié $\hat{\delta}$	144
6.3	Le cas Young	145
6.3.1	Interprétation de l'intégrale	145
6.3.2	Résolution du système différentiel	148
6.4	Le cas rugueux	151
6.4.1	Considérations heuristiques	152
6.4.2	Définition de l'intégrale	155
6.5	Régularisation du champ et solution globale	160
6.5.1	Considérations heuristiques	160

6.5.2	Définition de l'intégrale	161
6.6	Construction du chemin rugueux associé à l'équation de la chaleur	165
6.7	Le cas rugueux d'ordre 3	169
6.7.1	Construction de l'intégrale	170
6.7.2	Résolution du système différentiel	173
7	Schémas d'approximation	175
7.1	Introduction	175
7.2	Cadre d'étude	177
7.3	Le cas Young	180
7.3.1	Résultats précédents	180
7.3.2	Schéma et résultat principal	182
7.3.3	Discrétisation du processus directeur	182
7.3.4	Discrétisation en temps	185
7.3.5	Discrétisation en espace	188
7.3.6	Résultats numériques pour le mBf	191
7.4	Cas rugueux en présence d'un intégrant régularisé	194
7.4.1	Rappel des résultats théoriques	194
7.4.2	Schéma et résultat principal	197
7.4.3	Discrétisation du processus directeur	198
7.4.4	Discrétisation en temps	200
7.4.5	Discrétisation en espace	201
7.4.6	Résultats numériques pour le mBf	203
7.5	Appendix	205

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objectifs

La théorie des trajectoires rugueuses (ou *rough paths*) a été initiée par Terry Lyons il y a une dizaine d'années en vue d'offrir une interprétation des intégrales dites rugueuses, car de la forme

$$\int_s^t y_u dx_u, \quad (1.1)$$

où x est un processus *fractionnaire*, c'est-à-dire non différentiable mais présentant une certaine régularité höldérienne $\gamma \in (0, 1)$. L'engouement suscité par cette approche, et que viennent traduire les multiples publications inspirées des travaux de Lyons, trouve essentiellement son explication à travers deux aspects fondamentaux de la théorie : d'une part, l'élégance du procédé, qui met en avant toute la *légitimité* de la construction, d'autre part, la *souplesse* du formalisme en jeu, qui permet d'envisager le traitement de *bruits x très généraux*.

Légitimité. L'intégrale rugueuse (1.1), définie au sens des rough paths, est une extension directe de l'intégrale de Lebesgue usuelle : pour toute suite (x^n) de processus différentiables qui convergerait vers x (relativement à une topologie à préciser), la suite des intégrales

$$\int_s^t y_u dx_u^n := \int_s^t y_u \dot{x}_u^n du$$

converge vers $\int_s^t y_u dx_u$. En d'autres termes, le procédé de construction est *continu* par rapport au processus qui dirige l'intégrale. La complexité des mécanismes mis en œuvre dans la théorie sera retranscrite par le biais des topologies qui interviennent dans l'énoncé complet de cette dernière assertion.

Souplesse. L'interprétation de l'intégrale (1.1) n'est permise que pour une classe d'intégrands y spécifique, dont l'expression générale est le plus souvent liée au processus x . L'atout majeur de la théorie des rough paths réside dans le fait que la classe d'intégrands en question présente suffisamment de stabilité vis-à-vis de l'opération de composition avec un champ de vecteurs σ régulier, mais aussi vis-à-vis du processus d'intégration lui-même, pour permettre l'interprétation du *système différentiel rugueux* $dy_t = \sigma(y_t) dx_t$, $y_0 = a$, c'est-à-dire

$$y_t = a + \int_0^t \sigma(y_u) dx_u, \quad (1.2)$$

où a est une condition initiale fixée. L'ensemble des processus intégrables est en outre assez large pour autoriser la résolution du système (1.2) par le biais d'arguments de point fixe standards. Le principe évoqué au point précédent s'étend alors à la solution y du système, qui dépend ainsi continûment de x : c'est le *théorème de la limite universelle*.

Efficacité. Aussi performante soit-elle, la méthode développée par Doss et Sussmann [31, 97] afin d'interpréter et résoudre le système (1.2) ne s'applique qu'à des processus x unidimensionnels, ou lorsque les composantes du champ de vecteurs σ satisfont une certaine condition de commutativité. La théorie des rough paths prend ainsi toute sa valeur et sa spécificité dès que x est à valeurs multi-dimensionnelles, voire infini-dimensionnelles, et ce en présence de champs très généraux. Dans ces circonstances, elle englobe largement l'interprétation fournie par Young dans son article [106], et constitue à ce jour la seule approche (déterministe) disponible lorsque le coefficient de régularité höldérienne γ est inférieur à $1/2$.

La construction proposée par Lyons dans [66] prend source dans les travaux de Chen [12, 13, 14]. Si cette construction a été introduite dans la perspective d'envisager un bruit höldérien, cette seule hypothèse ne suffit généralement pas à l'analyse du système (1.2). Les conditions préalables à l'amorce du mécanisme des rough paths peuvent être très grossièrement résumées par le principe général suivant :

Afin de donner sens au système (1.2) lorsque x est un processus γ -höldérien, puis résoudre ce système, il suffit de justifier l'existence des intégrales itérées associées à x , définies (formellement) pour tous temps $s < t$ comme les éléments de l'algèbre tensorielle donnés par la relation itérative

$$\mathbf{x}_{s,t}^1 = x_t - x_s \quad , \quad \mathbf{x}_{s,t}^{n+1} = \int_s^t \mathbf{x}_{s,u}^n \otimes dx_u, \quad (1.3)$$

et ce jusqu'à un certain ordre lié au coefficient γ .

Si $\gamma > 1/2$, seul \mathbf{x}^1 entrera en jeu, et aucune hypothèse autre que la régularité höldérienne n'est alors requise. C'est le cas dit *Young*, en référence à la construction proposée par ce dernier dans [106]. Si $\gamma \in (1/3, 1/2]$, l'analyse du système fera en outre intervenir le processus \mathbf{x}^2 : $[0, T]^2 \rightarrow V \otimes V$ (si x est à valeurs dans l'espace V). Plus généralement, si $\gamma \in (1/(k+1), 1/k]$, il faut être en mesure de prouver l'existence des intégrales itérées jusqu'à l'ordre k .

L'ensemble $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ composé du processus et de ses intégrales itérées est alors appelé *trajectoire rugueuse* (ou *rough path*) *au-dessus de x* . C'est seulement à partir de la donnée de cet élément de l'algèbre tensorielle que la procédure imaginée par Lyons peut être enclenchée, pour finalement aboutir à la résolution de (1.2) et au théorème de la limite universelle.

Pour tenter d'appréhender le mécanisme en jeu (mécanisme sur lequel nous reviendrons en détail dans la première partie), supposons un instant le processus x différentiable et unidimensionnel. Pour toute application $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, la solution y du système (1.2), donnée par le théorème de Cauchy classique, peut être développée entre deux instants

$s < t \in [0, T]$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
y_t - y_s &= \int_s^t \sigma(y_u) dx_u \\
&= \sigma(y_s) \cdot (x_t - x_s) + \int_s^t [\sigma(y_u) - \sigma(y_s)] dx_u \\
&= \sigma(y_s) \cdot (x_t - x_s) + \sigma'(y_s) \cdot \int_s^t (y_u - y_s) dx_u + r_{s,t}^1 \\
&= \sigma(y_s) \cdot (x_t - x_s) + \sigma'(y_s) \cdot \sigma(y_s) \cdot \int_s^t (x_u - x_s) dx_u + r_{s,t}^1 + r_{s,t}^2, \quad (1.4)
\end{aligned}$$

où l'on a noté successivement

$$\begin{aligned}
r_{s,t}^1 &= \int_s^t \left(\int_0^1 dr [\sigma'(y_s + r(y_u - y_s)) - \sigma'(y_s)] \cdot (y_u - y_s) \right) dx_u, \\
r_{s,t}^2 &= \sigma'(y_s) \cdot \int_s^t \int_s^u [\sigma(y_v) - \sigma(y_s)] dx_v dx_u.
\end{aligned}$$

En se référant au formalisme décrit par (1.3), et en notant en outre $r_{s,t} := r_{s,t}^1 + r_{s,t}^2$, la décomposition (1.4) s'écrit également :

$$y_t - y_s = \sigma(y_s) \cdot \mathbf{x}_{s,t}^1 + \sigma'(y_s) \cdot \sigma(y_s) \cdot \mathbf{x}_{s,t}^2 + r_{s,t}. \quad (1.5)$$

Moralement, du point de vue de la régularité vis-à-vis du couple (s, t) , $\sigma(y_s) \cdot \mathbf{x}_{s,t}^1$ (resp. $\sigma'(y_s) \cdot \sigma(y_s) \cdot \mathbf{x}_{s,t}^2$) représente un terme d'ordre 1 (resp. d'ordre 2), tandis que les expressions qui composent r font apparaître des variations d'ordre 3. C'est à ce stade qu'intervient le résultat qui va régir la construction des intégrales rugueuses (dans le cas $\gamma > 1/3$ du moins) et que l'on peut retranscrire, de façon simplifiée, à travers l'assertion :

Si x et y sont deux processus γ -höldériens, avec $\gamma > 1/3$, et si x autorise la construction d'une intégrale itérée d'ordre deux $\mathbf{x}_{s,t}^2 = \int_s^t (x_u - x_s) dx_u$ telle que

$$|\mathbf{x}_{s,t}^2| \leq c_x |t - s|^{2\gamma} \quad \text{pour tous } s < t \in [0, T], \quad (1.6)$$

alors le processus r qui apparaît dans (1.5) peut être prolongé en une fonction du triplet $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, y)$, et ce de façon continue relativement à la topologie issue de la condition (1.6) pour la seconde variable (et à une topologie plus sophistiquée pour la troisième variable).

Cette extension permet ainsi de donner sens au membre de droite de l'expression (1.5) dans ce contexte, pour une classe de processus y assez large. Elle fournit par là même une interprétation légitime du système (1.2) dans le cas où γ est strictement supérieur à $1/3$, cette dernière condition permettant d'envisager le terme résiduel r comme un processus de régularité höldérienne $3\gamma > 1$.

Le procédé peut ensuite être étendu à des processus x moins réguliers encore, en partant de développements du système similaires à (1.5), mais d'ordres plus élevés.

Les éléments techniques sous-jacents à cette procédure ont plusieurs fois été précisés au cours des dix dernières années, d'abord par Lyons lui-même, en collaboration avec Qian [68], ou

dans le cours de Saint-Flour [67], puis par Laure Coutin, Antoine Lejay, Peter Friz et Nicolas Victoir (entre autres) à travers une série d'articles qui ont poussé le formalisme original jusqu'à un degré de perfectionnement très élevé [18, 19, 21, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 62, 63, 64]. L'ouvrage de Friz et Victoir [41] rend compte du haut niveau de maturité désormais atteint par la théorie dans l'étude du système (1.2).

Le point de vue utilisé dans ce mémoire est celui développé par Massimiliano Gubinelli dans son article *Controlling rough paths* [46]. Cette variante de la théorie des rough paths, proche des conceptions de Feyel et De La Pradelle [33, 34], est généralement désignée par l'appellation *théorie des k -incrémentes*. Elle restitue l'essentiel des idées originales de Lyons, tout en s'affranchissant du cadre d'étude hautement abstrait mis en œuvre dans [68], et développé par Friz et Victoir. À l'approche géométrique de ces derniers auteurs, Gubinelli substitue en outre un point de vue plus *algébrique* du processus d'intégration contre des fonctions höldériennes, comme est récemment venu le souligner son article *Ramification of rough paths* [49].

L'objectif principal de ma thèse a consisté à illustrer la souplesse des méthodes initiées par Gubinelli à travers la considération de systèmes différentiels moins standards que le système décrit par (1.2), et ce dans un cadre fini ou infini-dimensionnel. Deux types de travaux avaient déjà convergé en ce sens :

- Neuenkirch, Nourdin et Tindel s'étaient penchés sur le cas de l'équation avec retard rugueuse, que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} y_t = \xi_0 + \int_0^t \sigma(y_u, y_{u-r_1}, \dots, y_{u-r_k}) dx_u \text{ pour tout } t \geq 0, \\ y_t = \xi_t \text{ si } t \in [-r_k, 0], \end{cases}$$

où $r_1 < \dots < r_k$ sont des instants fixés. Leurs résultats ont donné lieu à l'article [75].

- Plusieurs auteurs avaient envisagé la possibilité de définir des *équations aux dérivées partielles rugueuses*, ou plus exactement *perturbées par un bruit rugueux*, autrement dit des systèmes de la forme :

$$dy_t = Ay_t dt + f(y_t) dx_t,$$

avec A un opérateur non borné d'un espace de Banach. Nous reviendrons plus en détail sur ces différents travaux, mais citons dès à présent les articles de Gubinelli, Lejay et Tindel [50, 51].

Nous avons poursuivi ce projet à travers l'étude de deux systèmes : l'équation de Volterra et l'équation de la chaleur, toutes deux dans leur version rugueuse.

L'équation de Volterra. Il s'agit à l'origine de l'équation intégrale

$$y_t = a + \int_0^t \sigma(t, u, y_u) du,$$

qui, sous sa forme rugueuse, devient

$$y_t = a + \int_0^t \sigma(t, u, y_u) dx_u, \tag{1.7}$$

avec x un bruit fractionnaire multidimensionnel. La particularité de ce système tient bien entendu au fait que l'intégrand $\sigma(t, u, y_u)$ dépende de la variable courante t , dépendance qui induit un comportement global du système radicalement différent de celui du système standard décrit par (1.2).

L'équation de la chaleur. Ce travail en collaboration avec Gubinelli et Tindel faisait directement suite à l'article [51] relatif aux équations d'évolution rugueuses. L'objectif du projet consistait à interpréter et résoudre le système infini-dimensionnel

$$dy_t = \Delta y_t + \sum_{i=1}^m f_i(y_t) dx_t^i, \quad y_0 = \psi, \quad (1.8)$$

où Δ désigne le laplacien sur un espace à préciser, ψ une condition initiale fixée, f une application non linéaire, et x un bruit fractionnaire m -dimensionnel.

Dans ces deux situations, c'est-à-dire aussi bien pour l'équation de Volterra que pour l'équation de la chaleur, l'analyse du système a (le plus souvent) conduit à une véritable reformulation de la notion de rough paths, basée sur une définition des intégrales itérées plus en accord avec la forme de l'équation et le comportement algébrique des solutions potentielles.

Ce mémoire soulève également la question de *l'approximation numérique des solutions de systèmes rugueux*. Un premier travail fondamental avait été entrepris dans cette direction par Davie, dans son article [25] portant sur l'analyse du système différentiel (1.2). Les solutions du système ne sont plus vues comme des points fixes d'une classe d'intégrants abstraite, mais comme les limites d'un procédé itératif discret, point de vue qui conduit tout naturellement à la définition d'un schéma d'approximation.

En collaboration avec Andreas Neuenkirch, nous avons développé cette idée (toujours dans le cadre de l'analyse du système (1.2)) à travers la conception d'un schéma d'approximation qui soit en outre facilement implémentable. La démarche initiée pour le système (1.2) a ensuite été adaptée au cas de l'équation de la chaleur rugueuse, dans un contexte cette fois infini-dimensionnel.

1.2 Application à l'analyse stochastique

En raison de leurs propriétés de régularité trajectorielle, plusieurs processus aléatoires (continus) constituent des candidats potentiels à l'application de la théorie des rough paths, ouvrant par là même la voie à une approche trajectorielle des systèmes différentiels stochastiques. C'est le cas du processus stochastique le plus connu, le mouvement Brownien, dont les trajectoires sont presque sûrement γ -höldériennes, et ce pour tout coefficient $\gamma < 1/2$. C'est également le cas pour son extension immédiate, le *mouvement Brownien fractionnaire*, introduit par Mandelbrot et Van Ness en 1968 dans [69] :

Définition 1.2.1. *On appelle mouvement Brownien fractionnaire (abrégé en mBf dans la suite) d'indice de Hurst $H \in (0, 1)$ le processus gaussien centré B^H dont la covariance est donnée par la relation*

$$E [B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} \left\{ s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H} \right\}.$$

Lorsque $H = 1/2$, B^H coïncide avec le mouvement Brownien standard.

A partir de cette définition, le critère de Kolmogorov conduit immédiatement au résultat de régularité escompté :

Proposition 1.2.2. *Presque sûrement, les trajectoires d'un mBf d'indice de Hurst H sont γ -höldériennes, pour tout $\gamma < H$.*

L'intérêt porté à ce processus s'est manifesté au cours des vingt dernières années au travers de nombreuses applications, dans des registres aussi variés que l'analyse des protéines [60, 61], la neurobiologie [85] ou la modélisation financière [98], en passant par les télécommunications [105]. Dans toutes ces situations, les propriétés de dépendance à long terme du mBf, associées à son auto-similarité, en font une alternative tout à fait plausible au mB standard. Ces différents exemples viennent ainsi nourrir l'attente d'une formulation exhaustive d'une théorie du calcul stochastique associée à ce processus, calcul qui échappe à la théorie d'Itô, dans la mesure où un mBf d'indice $H \neq 1/2$ n'est pas une (semi)martingale.

La théorie des rough paths pourrait contribuer à l'obtention d'une telle formulation. Toutefois, en vue de l'application de ce mécanisme, se pose la question du sens à donner aux intégrales itérées issues du mBf. Eu égard à la proposition 1.2.2, et conformément au principe général évoqué dans la partie précédente, il advient en effet que si B^H est un mBf d'indice H , nous devons être en mesure de justifier l'existence des intégrales itérées jusqu'à l'ordre $k = \lfloor \frac{1}{H} \rfloor$.

Le cas du mouvement Brownien standard ($H = 1/2$) ne soulève bien entendu aucune difficulté sur ce plan, l'intégrale itérée d'ordre 2 (appelée aussi *aire de Lévy*) pouvant être définie au sens d'Itô ou de Stratonovich. Ainsi, si $B = B^{1/2}$, on définira simplement \mathbf{B}^2 comme le processus de deux variables à valeurs matricielles

$$\mathbf{B}_{s,t}^{2,ij} := \int_s^t (B_u^{(i)} - B_s^{(i)}) dB_u^{(j)}, \quad (1.9)$$

où l'intégrale est comprise au sens d'Itô ou de Stratonovich. Le calcul stochastique trajectorien issu de la méthode des rough paths rejoint alors le calcul de la théorie d'Itô, l'identification des deux procédés conduisant, via le théorème de la limite universelle, à une preuve élémentaire des résultats classiques relatifs au support et aux grandes déviations d'une diffusion Brownienne. Le chapitre IV de [41] rend compte de ce phénomène.

La définition de l'aire de Lévy, et plus généralement des intégrales itérées d'ordres supérieurs à 2, pour un mBf d'indice $H < 1/2$, est nettement plus délicate. Comme l'observe Nualart dans [81], on ne peut par exemple recourir à une définition de l'intégrale comme limite des sommes de Riemann usuelles, ne serait-ce qu'en raison de la relation : si $t_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, \dots, n$),

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} E \left[B_{t_i}^H (B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H) \right] &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [t_{i+1}^{2H} - t_i^{2H} - (t_{i+1} - t_i)^{2H}] \\ &= \frac{1}{2} (1 - n^{1-2H}) \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

lorsque n tend vers l'infini, si $H < 1/2$.

Afin de donner sens à (1.9) dans ce contexte, nous sommes d'abord tentés de nous tourner vers des approches préexistantes du calcul stochastique par rapport au mBf, telle que l'interprétation donnée par Russo et Vallois dans [93], et qui donne naissance à la notion d'intégrale symétrique :

Définition 1.2.3. *L'intégrale symétrique d'un processus H relativement à un mBf, notée $\int_0^T H_u \circ dB_u$, est définie comme la limite en probabilité (si elle existe) de l'intégrale*

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T H_u (B_{u+\varepsilon} - B_{u-\varepsilon}) du, \quad (1.10)$$

lorsque ε tend vers 0.

Par ce dernier biais, il s'avère cette fois possible de définir l'aire de Lévy par la formule :

$$\mathbf{B}_{s,t}^{2,ij} := \int_s^t (B_u^{(i)} - B_s^{(i)}) \circ dB_u^{(j)}, \quad (1.11)$$

lorsque $B = B^H$ est par exemple un mBf d'indice $H \in (1/3, 1/2)$. Le mécanisme des rough paths peut alors prendre appui sur (1.11) pour conduire à l'interprétation et à la résolution du système (1.2), palliant par là même l'absence d'une méthode de résolution plus directe pour l'équation

$$Y_t = a + \int_0^t \sigma(Y_u) \circ dB_u$$

dans un cadre multi-dimensionnel, comme le souligne l'appendix du livre [8] de Biagini, Hu, Oksendal et Bernt.

Une autre approche visant à l'obtention d'une définition acceptable des intégrales itérées, consiste à introduire une approximation régulière B^n du mBf, puis à examiner le comportement asymptotique des intégrales itérées associées à B^n , comprises au sens de Lebesgue :

$$\mathbf{B}_{s,t}^{2,n} := \int_s^t (B_u^n - B_s^n) \otimes dB_u^n \quad , \quad \mathbf{B}_{s,t}^{k+1,n} = \int_s^t \mathbf{B}_{s,u}^{k,n} \otimes dB_u^n, \quad k \geq 2. \quad (1.12)$$

Les limites potentielles (relativement à une topologie adéquate) de ces différentes suites constituent alors des candidats naturels à la définition d'une trajectoire rugueuse issue de B . Plusieurs types d'approximation B^n ont été envisagées jusqu'à présent. Citons par exemple :

- L'interpolation linéaire du processus, définie relativement à une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ par la formule

$$B_t^n = B_{t_k} + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \quad \text{si } t_k \leq t < t_{k+1}.$$

Le comportement asymptotique des intégrales itérées construites à partir de B^n a d'abord été étudié par Coutin et Qian dans leur article [20].

- Une approximation de type Karhunen-Loève, utilisée dans [33] :

$$B_t^n = \sum_{i \leq n} Z^i e_i(t),$$

où $B_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} Z^i e_i(t)$ est le développement de Karhunen-Loève du mBf dans une base hilbertienne (e_i) de l'espace auto-reproduisant, de telle sorte que les variables aléatoires (Z^i) correspondent à des gaussiennes centrées indépendantes.

- Une approximation basée sur la représentation intégrale du mBf, et étudiée par Millet et Sanz-Solé dans [71]. Rappelons que le processus peut être décrit (sur $[0, 1]$) par la formule $B_t = \int_0^1 K(t, s) dW_s$, où W est un mouvement Brownien standard et

$$K(t, s) = K^H(t, s) = \mathbf{1}_{\{s < t\}} \left\{ c_H (t - s)^{H-1/2} + s^{H-1/2} F_1 \left(\frac{t}{s} \right) \right\},$$

$$F_1(u) = \mathbf{1}_{\{u > 1\}} c_H \left(\frac{1}{2} - H \right) \int_0^{u-1} v^{H-3/2} \left(1 - (v+1)^{H-1/2} \right) dv.$$

L'approximation B^n présentée dans [71] est alors définie, pour une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ donnée, par $B_t^n = \int_0^1 K_n(t, s) dW_s$, avec

$$K_n(t, s) = \mathbf{1}_{\{s < t\}} \frac{1}{t_{k+} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t, u) du \quad \text{si } t_k \leq s < t_{k+1}.$$

- L’approximation dite analytique du mBf, récemment introduite par Unterberger [102], et sur laquelle nous reviendrons plus en détail au cours du premier chapitre.

L’analyse des trois premiers exemples a été englobée dans une étude plus générale relative aux processus gaussiens par Friz et Victoir [42], article dans lequel les deux auteurs mettent en évidence un critère de convergence des intégrales itérées basé sur la fonction de covariance du processus. Dans les trois cas, il est prouvé que les intégrales itérées associées à chacune de ces approximations convergent si l’indice de Hurst H est supérieur à $1/4$. Les limites obtenues sont en outre communes aux trois approximations, et coïncident, presque sûrement, avec les intégrales définies au sens de Russo-Vallois ((1.11) pour l’aire de Lévy). Nous verrons au cours du premier chapitre que l’approximation analytique du mBf rejoint (à la limite) cette construction, toujours sous l’hypothèse $H > 1/4$, donnant ainsi naissance, via la méthode des rough paths, au même calcul stochastique.

Les constructions qui apparaissent dans ce mémoire ont d’abord été développées en vue d’une application au mBf (d’indice de Hurst supérieur à $1/4$). Nous avons cependant fait le constat, au cours de l’étude, qu’une modification minimale des structures algébriques en jeu permettait d’étendre une majeure partie de ces constructions à une trajectoire rugueuse d’ordre 2 ou 3 (suivant le degré du développement effectué) quelconque. Les simulations associées aux schémas d’approximation numérique mettent quant à elles en scène le Brownien fractionnaire.

Il convient de mentionner que seules les constructions proposées par Unterberger [103, 101] et Tindel et Nualart [84] rendent à ce jour possible le traitement d’un indice de Hurst $H < 1/4$, même si le calcul stochastique résultant de ces deux procédures est plus difficile à interpréter. *Dans ce manuscrit, nous n’envisagerons de toute façon à aucun moment le cas d’un coefficient de régularité höldérienne inférieur (ou égal) à $1/4$. Nous n’avons cependant guère de doute quant au fait que les constructions que nous proposons, aussi bien pour l’équation de Volterra que pour l’équation de la chaleur, pourraient s’étendre à des processus de régularité höldérienne quelconque, une fois mise en évidence l’existence d’une trajectoire rugueuse associée à ces processus.*

Avant de clore cette section, rappelons que la méthode des rough paths est surtout digne d’intérêt lors de la considération de bruits multi-dimensionnels et de régularité höldérienne inférieure à $1/2$. La résolution du système (1.2) lorsque x désigne un mBf uni-dimensionnel (d’indice de Hurst quelconque) est en effet possible via la méthode de Doss-Sussmann [31, 97], ou, dans un cadre plus général, en faisant appel à la notion d’intégrale de Newton-Côtes développée dans [43, 45, 78]. Dans leur article [79], Nourdin et Simon mettent d’ailleurs en évidence les similitudes entre cette dernière approche et une approche basée sur les rough paths, dans ce contexte uni-dimensionnel. Le cas $H > 1/2$ (pour un mBf de dimension quelconque) est quant à lui efficacement traité par le biais de méthodes de calcul fractionnaire trajectorien, comme le rapporte Nualart dans son compte-rendu [80].

1.3 Plan et résultats principaux

Le mémoire est divisé en trois parties, chacune d’entre elles correspondant (globalement) à l’analyse d’un système différentiel différent.

La **1^{ère} partie** viendra servir un objectif double. Elle permettra dans un premier temps (à travers le chapitre 2) de *présenter les principaux éléments de la théorie des k -incrémentes*, tels

qu'ils ont été introduits par Gubinelli dans le cadre de l'analyse du système (1.2), et d'évoquer les constructions et résultats issus de leur mise en œuvre. Ces constructions feront en effet office de référence lors de développements ultérieurs. L'attention sera essentiellement portée sur le cas $\gamma > 1/3$, qui véhicule la plupart des principes généraux caractéristiques de la méthode des rough paths. Dans le contexte du mBf, une précision sera finalement apportée quant à la définition de l'aire de Lévy issue de l'approximation analytique du processus.

L'autre objectif de cette première partie (restitué dans le chapitre 3) consistera en *l'étude d'un schéma numérique* facilement implémentable pour le système (1.2), et donné, lorsque $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ et $\sigma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, par la formule

$$y_{t_{k+1}}^n = y_{t_k}^n + \sum_{i=1}^m \sigma_i(y_{t_k}^n) \cdot (x_{t_{k+1}}^{(i)} - x_{t_k}^{(i)}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \sigma_i(y_{t_k}^n) \sigma_j'(y_{t_k}^n) \cdot (x_{t_{k+1}}^{(i)} - x_{t_k}^{(i)}) (x_{t_{k+1}}^{(j)} - x_{t_k}^{(j)}).$$

La convergence de ce schéma de type Milstein (car incluant un facteur d'ordre deux) vers la solution du système, sera établie par le biais d'un raisonnement basé sur le flot du système, et valable pour tout coefficient $\gamma > 1/3$. Le raisonnement en question, qui fait l'objet de [28], sera repris dans la troisième partie, dans le cadre infini-dimensionnel des EDPS.

La **2^{nde} partie** sera dédiée à l'étude de *l'équation de Volterra rugueuse* (1.7). Le chapitre 4 mettra d'abord en avant les résultats obtenus lors de l'analyse du système sous sa forme la plus générale, tels qu'ils apparaissent dans [30]. Il s'agit de résultats du type :

- (i) Si le coefficient de régularité höldérienne γ de x est supérieur à $1/2$, un *théorème d'existence et d'unicité d'une solution globale* pour (1.7), pour toute application $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d)$ suffisamment régulière vis-à-vis de ses trois variables.
- (ii) Si $\gamma \in (1/3, 1/2]$, et si x permet la construction d'un rough path d'ordre 2 (autrement dit d'une aire de Lévy), un *théorème d'existence et d'unicité d'une solution locale*, définie sur un petit intervalle $[0, T_0]$.

Dans ces deux situations, l'interprétation du système prendra appui sur les constructions dites classiques de l'intégrale rugueuse, issues de l'étude du système ordinaire (1.2). On envisagera également, à l'aide d'une interprétation plus élémentaire de l'intégrale en termes de sommes de Riemann, la possibilité d'une singularité dans le système (1.7), c'est-à-dire d'un champ de vecteurs de la forme

$$\sigma(t, u, y) = (t - u)^{-\alpha} \psi(y),$$

où $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d)$ est une application régulière et α un paramètre positif corrélé à la régularité γ de x .

Pour tenter de remédier aux difficultés soulevées par l'extension de la solution locale obtenue dans le cas (ii), nous élaborerons ensuite, suivant [29], une stratégie visant à un meilleur contrôle de la solution y , et ce lorsque le système se présente sous la forme

$$y_t = a + \int_0^t \phi(t - u) \cdot \sigma(y_u) dx_u, \quad \text{avec } \phi(t) = \int_{\mathbb{R}} S_t(\xi) \cdot \tilde{\phi}(\xi) d\xi, \quad (1.13)$$

pour un certain noyau régulier $S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Cette dernière opération inclura notamment les transformées de Laplace et de Fourier. Sous certaines conditions de régularité concernant $\tilde{\phi}$ et σ , une *solution globale* sera cette fois obtenue dans le cas $\gamma > 1/3$, via une transformation du système et une réinterprétation des intégrales itérées en jeu. L'ensemble fera l'objet du chapitre 5.

Enfin, la **3^{ème} partie** sera consacrée à l'analyse de l'équation de la chaleur rugueuse (1.8), et divisée en deux chapitres.

Le chapitre 6 permettra de présenter le contexte théorique de cette étude, autrement dit les *outils et espaces fonctionnels* impliqués dans la phase d'interprétation du système, et qui combinent la méthode des rough paths avec la théorie des semigroupes. Nous reprendrons en cela les principes généraux introduits dans [51] pour une équation d'évolution quelconque, tout en y adjoignant certaines propriétés spécifiques à l'équation de la chaleur.

Ce même chapitre rendra par ailleurs compte des résultats obtenus dans [27] dans le cadre de la résolution de (1.8). Il s'agira d'abord de la mise en évidence d'une *solution globale unique* (à valeurs dans un certain espace de Sobolev fractionnaire) dans le cas Young ($\gamma > 1/2$), pour des champs f_i suffisamment réguliers, puis d'une analyse du cas rugueux ($\gamma \in (1/3, 1/2]$) dans les deux situations suivantes :

- En considérant des champs f_i très généraux, ce qui donnera lieu à un *théorème d'existence et d'unicité d'une solution locale* pour (1.8).
- En présence de champs f_i issus d'une *régularisation*, c'est-à-dire de la forme $f_i(y)(\xi) := \int d\eta K(\xi, \eta) \cdot g_i(y(\eta))$, pour un certain noyau régularisant K . Le procédé conduira alors à un *théorème d'existence et d'unicité globale* d'une solution.

Le chapitre 7, tiré de [26], permettra finalement d'évoquer la question de l'approximation des solutions de (1.8) via un schéma numérique, dans les deux cas de figure où l'existence d'une solution *globale* aura été démontrée (cas Young et cas rugueux en présence de champs régularisés).

Si les trois parties peuvent être envisagées de façon indépendante, l'ensemble suit toutefois un cheminement global marqué par plusieurs références inter-parties, et voit la mise en scène de procédés de complexité croissante.

1.4 Index des notations

1.4.1 Notations générales

$\mathcal{C}^{k,\mathbf{b}}(V; W)$, $k \in \mathbb{N}$	Espace des applications k -fois différentiables de V dans W , dont les k premières dérivées sont bornées
$\mathcal{C}^{k,\mathbf{b},\kappa}(V; W)$, $k \in \mathbb{N}$, $\kappa \in (0, 1)$	Espace des applications k -fois différentiables de V dans W , dont les k premières dérivées sont bornées et dont la k -ième dérivée est κ -höldérienne
$\mathbb{R}^{m_1, m_2, \dots, m_k}$	Produit tensoriel $\mathbb{R}^{m_1} \otimes \mathbb{R}^{m_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^{m_k}$
$\mathcal{S}_k(I)$, $k \in \mathbb{N}^*$	k -ième simplexe sur I (Définition 2.1.1)
$\mathcal{C}_k(I; V)$, $k \in \mathbb{N}$	Espace des k -incrémentés sur I à valeurs dans V (Définition 2.1.1)
δ	Opérateur d'incrément standard (Définition 2.1.2)
$\mathcal{C}_k^\mu(I; V)$, $k \in \{1, 2, 3\}$	Espaces höldériens généralisés (Sous-section 2.1.2)
Λ	Opérateur d'inversion standard (Théorème 2.1.1)
$\mathcal{Q}_x^{\gamma, \eta}(I; \mathbb{R}^l)$	Espace des processus (γ, η) -contrôlés par x (Définition 2.2.4)
$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$	2-rough path au-dessus de x (Hypothèse 1)
$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)$	3-rough path au-dessus de x (Hypothèse 2)

1.4.2 Notations du chapitre 3

X^ε ou $X(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$	Approximation analytique du mBf (Sous-section 3.1.1)
$B^{n,T}$	Interpolation linéaire du processus B sur $[0, T]$, suivant la partition de pas $\frac{T}{n}$ (Voir (3.13))
$\mathbf{B}^{2,n,T}$	Aire de Lévy construite à partir de $B^{n,T}$ (Voir (3.14))
Y	Solution du système (3.2)
Y^n	Solution approchée via le schéma (3.5)
\bar{Y}^n	Approximation de Wong-Zakai associée à B^n (voir (3.32))
$\phi(\cdot; \cdot, \cdot)$	Flot associé au système (3.34)
$\psi^n(\cdot; \cdot, \cdot)$	Flot numérique associé au schéma (3.35)

1.4.3 Notations du chapitre 4

\mathcal{Y}_u	Voir introduction du chapitre
σ_t	Voir introduction du chapitre
$D\sigma, D^2\sigma, \dots$	Opérateurs différentiels successifs associés à σ (voir introduction du chapitre)
$D_3\sigma$	Opérateur de dérivée partielle (Sous-section 4.3.1)

1.4.4 Notations du chapitre 5

$\phi, \tilde{\phi}, S$	Voir (5.3) et (5.4)
$S_k(I)$	k -ième simplexe inversé (Sous-section 5.2.1)
$\mathcal{L}_\beta(V), \mathcal{L}_{\beta, \tilde{\phi}}(V), \beta \geq 0$	Espaces fonctionnels de type \mathcal{L}_1 (Voir (5.11))
$\tilde{\mathcal{C}}_{k, \beta}(I; V), k \in \mathbb{N}^*, \beta \geq 0$	Espace de k -incrément à valeurs fonctionnelles (Voir (5.12))
$\tilde{\delta}$	Opérateur d'incrément convolutionnel (Définition 5.2.1)
$\tilde{\mathcal{C}}_{k, \beta}^\mu(I; V), k \in \{1, 2, 3\}$	Espaces de processus höldériens à valeurs fonctionnelles (Sous-section 5.2.3)
$\tilde{\Lambda}$	Opérateur d'inversion convolutionnel (Proposition 5.2.9)
\tilde{X}^x	1-rough path convolutionnel (Hypothèse 4)
$\tilde{\mathcal{C}}_k^\gamma(I; V), k \in \{1, 2, 3\}$	Voir (5.39)
$\tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$	Espace des processus convolutionnels contrôlés (Définition 5.4.1)
X^x	Voir (5.42)
$(\tilde{X}^x, \tilde{X}^{ax}, \tilde{X}^{xx})$	2-rough path convolutionnel (Hypothèses 5, 7 et 8)
$L_{\tilde{\phi}}$	Voir (5.45)
X^{ax}	Voir (5.45)
$\mathcal{A}_{x, f}^\gamma(I; \mathbb{R}^k)$	Espace affine des processus contrôlés localisés (Définition 5.4.7)

1.4.5 Notations du chapitre 6

Δ	Laplacien sur \mathbb{R}^n
S	Semigroupe de la chaleur sur \mathbb{R}^n (Voir (6.9))
$\mathcal{B}_{\alpha,p}$, $\alpha \geq 0, p \in \mathbb{N}^*$	Espaces de Sobolev fractionnaires sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ (6.2.1)
$\varphi \cdot \psi$	Multiplication point par point de φ et ψ (Notation 6.4.3)
$\hat{\delta}$	Opérateur d'incrément twisté (Définition 6.2.6)
$\hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_{\alpha,p})$	Espace des processus κ -höldériens au sens de $\hat{\delta}$ (Voir (6.19))
$\hat{\Lambda}$	Opérateur d'inversion twisté (Théorème 6.2.2)
X^x	1-rough path associé à l'équation de la chaleur (Hypothèse 9)
\mathcal{X}_k , $k \in \mathbb{N}^*$	Classe de champs de vecteurs spécifique (Définition 6.3.5)
$f'(\varphi)$, $f \in \mathcal{X}_1$	Voir Notation 6.4.2
$M \otimes N$, $M, N \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)$	Voir Notation 6.4.3
$(X^x, X^{ax}, X^{xa}, X^{xx})$	2-rough path associé à l'équation de la chaleur (Hypothèse 10)
$\mathcal{CL}^{\gamma,\kappa,p}$	Espace de chemins rugueux (Hypothèse 10)
$\hat{\mathcal{Q}}_{\alpha,p}^\kappa(I)$	Espace des processus contrôlés twistés (Définition 6.4.6 ($\gamma \in (1/3, 1/2]$) ou (6.98) ($\gamma \in (1/4, 1/3]$))
(X^x, X^{ax}, X^{xx})	2-rough path associé à l'équation de la chaleur régularisée (Hypothèse 11)
$\tilde{\mathcal{Q}}_p^\kappa(I)$	Espace de processus contrôlés (Définition 6.5.3)
$(X^x, X^{ax}, X^{xx}, X^{xa}, X^{axx}, X^{xxx})$	3-rough path associé à l'équation de la chaleur (Hypothèse 12)
$f''(\varphi)$, $f \in \mathcal{X}_2$	Voir Sous-section 6.7.1

1.4.6 Notations du chapitre 7

Δ	Laplacien sur $L^2([0, 1])$ avec conditions au bord de Dirichlet
S	Semigroupe engendré par Δ
$\mathcal{B}_\kappa, \kappa \geq 0$	Espaces de Sobolev fractionnaires associés à Δ (Définition 7.2.1)
$\hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa(I)$	Espace de processus contrôlés (Proposition 7.4.3)
y	Solution du système (7.21) (cas Young) ou (7.59) (cas rugueux)
$y^{M,N}$	Approximation de la solution via le schéma (7.25) (cas Young) ou (7.61) (cas rugueux)
\bar{y}^M	Approximation de Wong-Zakai du système (7.2) associée à l'interpolation linéaire x^M de x
$X^{x,M}, X^{xx,M}$	Chemin rugueux discrétisé (Sous-sections 7.3.2 et 7.4.2)

Première partie

Retour sur le système différentiel
rugueux standard

Chapitre 2

Eléments de la théorie des k -incrément

Les constructions que nous nous apprêtons à proposer, aussi bien pour l'équation de Volterra que pour l'équation de la chaleur, s'inspirent largement de l'approche mise en avant par Gubinelli [46] dans le cadre de l'étude du système rugueux standard :

$$dy_t^i = \sigma^{ij}(y_t) dx_t^j \quad , \quad y_0 = a \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1)$$

où $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d)$ est une application régulière et $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ un bruit γ -höldérien, pour un certain coefficient $\gamma \in (0, 1)$. Aussi nous permettons-nous de consacrer ce premier chapitre à la présentation des outils et concepts qui ont permis, dans [46], une compréhension complète du système (2.1). Nous rappellerons notamment que l'interprétation de l'intégrale $\int_s^t \sigma^{ij}(y_u) dx_u^j$ passe par une préalable *dissection* de l'intégrale (de Riemann) $\int_s^t \sigma^{ij}(y_u) d\tilde{x}_u^j$ lorsque \tilde{x} est un processus différentiable (ou à variations bornées), comme la décomposition (1.5) ébauchée dans l'introduction le suggérait. Ce travail de déconstruction s'effectue à l'aide de deux opérateurs fondamentaux, l'opérateur d'incrément δ (voir Définition 2.1.2) et son inverse (en un sens à préciser, voir Théorème 2.1.1) Λ , qui confèrent à la démarche une tournure essentiellement algébrique. Pour cette raison, la théorie des k -incrément est d'ailleurs également référencée sous l'appellation *théorie de l'intégration algébrique*.

Une fois le système convenablement interprété, nous constaterons que sa résolution ne fait quant à elle intervenir que des arguments de point fixe relativement standards, qui conduisent à la mise en évidence d'une unique solution globale lorsque le champ de vecteurs σ est suffisamment régulier. Les propriétés de continuité du flot, qui constituent l'un des atouts majeurs de la méthode rough paths, seront ensuite analysées en détail.

Ce premier chapitre est plus exactement divisé en trois sections :

- La première section est dédiée à la définition des deux opérateurs δ et Λ que nous venons d'évoquer, ainsi qu'à l'énoncé de quelques unes de leurs propriétés. Au cours de cette présentation sera précisée la notion de régularité höldérienne pour un processus de plusieurs variables, notion dont nous ferons usage tout au long du chapitre.
- La seconde section verra la construction de l'intégrale rugueuse $\int_s^t y_u dx_u$, ou plus exactement les différentes constructions suivant la valeur du coefficient de régularité höldérienne γ de x . Apparaîtra ici le concept de *processus contrôlé* (Définitions 2.2.4 et 2.2.9), au centre de la théorie des k -incrément, et qui sera repris dans les chapitres suivants.

- La troisième section viendra ensuite résumer les résultats d'existence et d'unicité d'une solution pour le système (2.1), établis dans [46]. Nous reviendrons en détail sur les propriétés de continuité de cette solution vis-à-vis du processus x et de la condition initiale a (Théorème 2.3.1).

On fixe, et ce pour tout le chapitre, un horizon T fini.

2.1 Quelques outils

La théorie met en scène des processus continus de 1, 2 ou 3 variables temporelles. On définit plus généralement :

Définition 2.1.1. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et I un intervalle inclus dans $[0, T]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle k -incrément de I (à valeurs dans V) toute fonction continue g sur le simplexe

$$\mathcal{S}_k = \{(t_1, \dots, t_k) \in I^k : t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k\},$$

à valeurs dans V , et telle que $g_{t_1 t_2 \dots t_k} = 0$ s'il existe deux indices $i \neq j$ pour lesquels $t_i = t_j$. L'ensemble des k -incrément de I à valeurs dans V sera noté $\mathcal{C}_k(I; V)$.

Par exemple, si $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un processus différentiable, l'intégrale itérée d'ordre n x^n , définie par la relation itérative (1.3), est un 2-incrément à valeurs dans le produit tensoriel $(\mathbb{R}^m)^{\otimes n}$.

2.1.1 L'opérateur d'incrément δ

Il s'agit du premier objet fondamental associé au formalisme des k -incrément.

Définition 2.1.2. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et I un intervalle inclus dans $[0, T]$. On appelle opérateur d'incrément la suite $\delta = (\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'opérateurs définie par : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta_k : \mathcal{C}_k(I; V) \rightarrow \mathcal{C}_{k+1}(I; V) \quad , \quad (\delta_k g)_{t_1 \dots t_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i g_{t_1 \dots \hat{t}_i \dots t_{k+1}},$$

où la notation \hat{t}_i signifie que la i -ème variable t_i est omise. Pour davantage de clarté, nous noterons δ pour δ_k , et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'indice k étant de toute façon implicitement déterminé par la nature de l'incrément auquel l'opérateur est appliqué.

Ainsi, si $g \in \mathcal{C}_1(I; V)$, $\delta g \in \mathcal{C}_2(I; V)$ est simplement donné par $(\delta g)_{st} = g_t - g_s$ pour tous $s \leq t \in I$, tandis que si $h \in \mathcal{C}_2(I; V)$, $\delta h \in \mathcal{C}_3(I; V)$ est défini par

$$(\delta h)_{sut} = h_{st} - h_{su} - h_{ut} \quad \text{pour tous } s \leq u \leq t \in I. \quad (2.2)$$

Si l'intérêt porté à l'opérateur (ou plutôt la notation) δ_1 semble évident dans le cadre de la manipulation de fonctions höldériennes, l'extension de cet opérateur à des processus de plusieurs variables peut a priori laisser perplexe. Observez cependant qu'une fois munis de la définition (2.2), la relation de Chasles s'écrit par exemple : si x et z sont deux processus réguliers et si $h_{st} := \int_s^t z_u dx_u$ (pour tous $s < t$), alors $\delta h = 0$. C'est ce type de raisonnement algébrique élémentaire qui sera mis à contribution au cours de l'étude. Rappelons à présent la propriété fondamentale de l'opérateur δ (voir [46]) :

Proposition 2.1.3. δ est un opérateur de cohomologie, c'est-à-dire $\delta\delta = 0$. Plus précisément, la cohomologie induite par δ est exacte, autrement dit $\text{Im } \delta_k = \text{Ker } \delta_{k+1}$.

Ce résultat signifie en particulier que pour tout élément $h \in \mathcal{C}_k(I; V)$ tel que $\delta h = 0$, il existe un processus $f \in \mathcal{C}_{k-1}(I; V)$ (non unique) tel que $h = \delta f$ (par exemple, si $I = [a, b]$, $f_{t_1 \dots t_{k-1}} = h_{at_1 \dots t_{k-1}}$).

Munissons-nous dès maintenant d'une convention notationnelle pratique lorsqu'apparaissent des produits d'incrément, et qui restera en vigueur dans le reste du mémoire :

Définition 2.1.4. Soient V et W deux espaces normés et I un intervalle inclus dans $[0, T]$. Si $g \in \mathcal{C}_k(I; \mathcal{L}(V, W))$ et $h \in \mathcal{C}_l(I; W)$, pour $k, l \in \mathbb{N}^*$, le produit gh est défini comme le $(k+l-1)$ -incrément (à valeurs dans W) donné par la formule : pour tous $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{k+l-1}$,

$$(gh)_{t_1 \dots t_{k+l-1}} = g_{t_1 \dots t_k} h_{t_k t_{k+1} \dots t_{k+l-1}}. \quad (2.3)$$

Avec cette convention, le théorème de Riemann-Stieltjes s'écrit par exemple : si x est à variations bornées et si y est continu,

$$\int_0^T y_u dx_u = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \Delta} (y \delta x)_{t_i t_{i+1}},$$

où $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ est une partition de $[0, T]$ dont le pas tend vers 0.

Bien qu'élémentaires, les relations algébriques suivantes, qui rendent compte du comportement de l'opérateur δ vis-à-vis de cette structure produit, se révéleront utiles au cours de la construction de l'intégrale rugueuse :

Proposition 2.1.5. L'opérateur δ satisfait les règles de différentiation :

1. Si g, h sont deux éléments de \mathcal{C}_1 , alors

$$\delta(gh) = \delta g h + g \delta h. \quad (2.4)$$

2. Si $g \in \mathcal{C}_1$ et $h \in \mathcal{C}_2$, alors

$$\delta(gh) = \delta g h + g \delta h, \quad \delta(hg) = \delta h g - h \delta g. \quad (2.5)$$

Démonstration. Montrons simplement (2.4), les autres relations étant tout aussi triviales : si $g, h \in \mathcal{C}_1$, alors

$$[\delta(gh)]_{ts} = g_t h_t - g_s h_s = (g_t - g_s) h_t + g_s (h_t - h_s) = (\delta g)_{st} h_t + g_s (\delta h)_{st},$$

ce qui, avec la définition 2.1.4 ci-dessus, correspond à l'assertion. □

2.1.2 Espaces höldériens

Au concept très général de processus à p -variation finie utilisé dans [68] ou [41], Gubinelli substitue une formulation plus élémentaire en vue de quantifier la notion de régularité pour des processus de 2 ou 3 variables. Cette formulation, qui étend de façon naturelle la définition classique des fonctions höldériennes à une variable, va (entre autres) permettre une analyse rigoureuse de la régularité des termes qui composent les développements tels que (1.4).

Définition 2.1.6. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé, I un intervalle inclus dans $[0, T]$ et α, β, μ des paramètres positifs. On définit $\mathcal{C}_1^\alpha(I; V)$, $\mathcal{C}_2^\alpha(I; V)$ et $\mathcal{C}_3^{(\alpha, \beta)}(I; V)$ par les formules :

$$\mathcal{C}_1^\alpha(I; V) = \{h \in \mathcal{C}_1(I; V) : \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_1^\alpha(I; V)] := \sup_{s < t \in I} \frac{\|(\delta h)_{st}\|}{|t - s|^\alpha} < \infty\},$$

$$\mathcal{C}_2^\alpha(I; V) = \{h \in \mathcal{C}_2(I; V) : \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_2^\alpha(I; V)] := \sup_{s < t \in I} \frac{\|h_{st}\|}{|t - s|^\alpha} < \infty\},$$

$$\mathcal{C}_3^{(\alpha, \beta)}(I; V) = \{h \in \mathcal{C}_3(I; V) : \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^{(\alpha, \beta)}(I; V)] := \sup_{s < u < t \in I} \frac{\|h_{sut}\|}{|t - u|^\alpha |u - s|^\beta} < \infty\}.$$

Enfin, on pose $\mathcal{C}_3^\mu(I; V) := \bigoplus_{0 \leq \alpha \leq \mu} \mathcal{C}_3^{(\alpha, \mu - \alpha)}(I; V)$, et l'on munit ce dernier espace de la norme

$$\mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(I; V)] = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{N}[y^i; \mathcal{C}_3^{(\alpha_i, \mu - \alpha_i)}(I; V)], y = \sum_i y^i \right\}.$$

Il est par exemple immédiat que si $g \in \mathcal{C}_2^\alpha(I; \mathcal{L}(V, W))$ et $h \in \mathcal{C}_2^\beta(I; V)$, alors le produit gh , tel qu'il est défini par (2.3), est un élément de $\mathcal{C}_3^{\alpha + \beta}(I; W)$.

Remarque 2.1.7. Définie de cette façon, $\mathcal{N}[\cdot; \mathcal{C}_1^\alpha(I; V)]$ n'est bien entendu qu'une semi-norme sur $\mathcal{C}_1^\alpha(I; V)$, et l'on aura plutôt recours, par la suite, à la norme :

$$\mathcal{N}[\cdot; \mathcal{C}_1^{0, \alpha}(I; V)] := \mathcal{N}[\cdot; \mathcal{C}_1^0(I; V)] + \mathcal{N}[\cdot; \mathcal{C}_1^\alpha(I; V)], \quad \text{où } \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_1^0(I; V)] := \sup_{t \in I} \|h_t\|.$$

Remarque 2.1.8. Lorsque l'intervalle de temps I (resp. l'espace V) considéré est clairement déterminé par le contexte, on utilisera régulièrement le raccourci $\mathcal{C}_k^\alpha(V) := \mathcal{C}_k^\alpha(I; V)$ (resp. $\mathcal{C}_k^\alpha(I) := \mathcal{C}_k^\alpha(I; V)$). Suivant cette même idée, il nous arrivera d'écrire encore plus simplement \mathcal{C}_k^α pour $\mathcal{C}_k^\alpha(I; V)$.

2.1.3 L'opérateur Λ

Interrogeons-nous à présent sur les conditions requises en vue d'inverser l'opérateur δ_2 , procédé qui constitue véritablement la pierre angulaire de toutes les constructions de la section suivante, et qui s'appuie sur le résultat :

Théorème 2.1.1. On fixe un paramètre $\mu > 1$. Pour tout $h \in \mathcal{C}_3^\mu([0, T]; V) \cap \text{Im } \delta$, il existe un unique élément noté $\Lambda h \in \mathcal{C}_2^\mu([0, T]; V)$ tel que $\delta(\Lambda h) = h$. En outre,

$$\|\Lambda h\|_\mu \leq c_\mu \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)], \tag{2.6}$$

avec $c_\mu = 2 + 2^\mu \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\mu}$. Cette assertion donne naissance à une application linéaire continue

$$\Lambda : \mathcal{C}_3^\mu([0, T]; V) \cap \text{Im } \delta \rightarrow \mathcal{C}_2^\mu([0, T]; V)$$

telle que

$$\delta \Lambda = \text{Id}_{\mathcal{C}_3^\mu([0, T]; V) \cap \text{Im } \delta} \quad \text{et} \quad \Lambda \delta = \text{Id}_{\mathcal{C}_2^\mu([0, T]; V)}. \tag{2.7}$$

Démonstration. La preuve originale de ce résultat, basée sur le théorème de Stokes, se trouve dans [46]. Nous fournissons ici une preuve plus élémentaire, qu'il sera facile d'adapter à des contextes différents (voir le théorème 5.2.9). Pour plus de clarté dans les notations, on prend $T = 1$.

Unicité. Soient $M, M' \in \mathcal{C}_2^\mu$ tels que $\delta M = \delta M' = h$. En particulier, $\delta(M - M') = 0$, et ainsi, d'après la proposition 2.1.3, $M - M' = \delta q$, pour une certaine fonction $q \in \mathcal{C}_1$. Mais alors $q \in \mathcal{C}_1^\mu$ avec $\mu > 1$, donc q est constante, et par conséquent $M = M'$.

Existence. Par hypothèse, nous savons qu'il existe $B \in \mathcal{C}_2$ tel que $\delta B = h$. Considérons à présent la suite $(\pi^n)_n$ des partitions dyadiques de $[0, 1]$, définie par

$$\pi^n = \{0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{2^n}^n = 1\}, \text{ avec } t_i^n = \frac{i}{2^n},$$

et posons, pour tous $s, t \in [0, 1]$,

$$M_{st}^n = \begin{cases} 0 & \text{if } \pi^n \cap (s, t) = \emptyset, \\ B_{st} - B_{st_j^n} - B_{t_j^n t} & \text{si } \pi^n \cap (s, t) = \{t_j^n\}, \\ B_{st} - B_{st_j^n} - B_{t_j^n t} - \sum_{i=j}^{l-1} B_{t_i^n t_{i+1}^n} & \text{si } \pi^n \cap (s, t) = \{t_j^n \leq \dots \leq t_l^n\}. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que l'application $M^n : s, t \mapsto M_{st}^n$ est continue sur $[0, 1]^2$. Nous allons montrer que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1]^2; V)$ des fonctions continues sur $[0, 1]^2$, muni de la norme $\mathcal{N}[\cdot; \mathcal{C}_2^0(V)]$ ($\mathcal{N}[y; \mathcal{C}_2^0(V)] = \sup_{s, t \in [0, 1]} \|y_{st}\|_V$).

Soient $s, t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. On note

$$\begin{aligned} \pi^n \cap (s, t) &= \{t_j^n \leq t_{j+1}^n \leq \dots \leq t_l^n\} \\ &= \{t_{2j}^{n+1} \leq t_{2j+2}^{n+1} \leq \dots \leq t_{2l-2}^{n+1} \leq t_{2l}^{n+1}\}, \text{ avec } j \leq l \leq 2^n. \end{aligned}$$

Si $s < t_{2j-1}^{n+1}$ et $t \leq t_{2l+1}^{n+1}$, alors

$$\pi^{n+1} \cap (s, t) = \{t_{2j-1}^{n+1} \leq t_{2j}^{n+1} \leq t_{2j+1}^{n+1} \leq \dots \leq t_{2l-1}^{n+1} \leq t_{2l}^{n+1}\},$$

et dans ce cas

$$M_{st}^{n+1} - M_{st}^n = (\delta B)_{st_{2j-1}^{n+1} t_{2j}^{n+1}} + \sum_{i=j}^{l-1} (\delta B)_{t_{2i}^{n+1} t_{2i+1}^{n+1} t_{2i+2}^{n+1}},$$

ce qui, puisque $\delta B = h$, mène à

$$\|M_{st}^{n+1} - M_{st}^n\|_V \leq \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)] \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^\mu (1 + l - j).$$

On procède de la même façon dans les cas $(s \geq t_{2j-1}^{n+1}, t > t_{2l+1}^{n+1})$, $(s < t_{2j-1}^{n+1}, t > t_{2l+1}^{n+1})$ et $(s \geq t_{2j-1}^{n+1}, t \leq t_{2l+1}^{n+1})$, pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} \|M_{st}^{n+1} - M_{st}^n\|_V &\leq \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)] \left(\frac{1}{2^\mu}\right)^{n+1} (2 + l - j) \\ &\leq \frac{\mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)]}{2^\mu} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2^\mu}\right)^n + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^n \right\}, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathcal{N}[M^{n+1} - M^n; \mathcal{C}_2^0(V)] \leq \frac{\mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)]}{2^\mu} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2^\mu}\right)^n + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}}\right)^n \right\}.$$

Dans la mesure où $\mu > 1$, ceci prouve que la série $\sum_n \mathcal{N}[M^{n+1} - M^n; \mathcal{C}_2^0(V)]$ converge, et donc $\sum_n (M^{n+1} - M^n)$ converge dans $\mathcal{C}([0, 1]^2; V)$ pour la norme $\mathcal{N}[\cdot; \mathcal{C}_2^0(V)]$, ce dernier espace étant complet. Or, en invoquant le fait que $M^0 = 0$, on a $M^N = \sum_{n=0}^{N-1} (M^{n+1} - M^n)$, ce qui entraîne la convergence uniforme de M^N vers un élément $M \in \mathcal{C}([0, 1]^2; V)$. Nous pouvons dès à présent observer que pour tout n , $M_{tt}^n = 0$, d'où $M_{tt} = 0$, de telle sorte que $M \in \mathcal{C}_2$.

On fixe maintenant $0 \leq s \leq u \leq t \leq 1$ et l'on note $\pi^n \cap (s, u) = \{t_j^n, \dots, t_l^n\}$, $\pi^n \cap [u, t) = \{t_{j'}^n, \dots, t_{l'}^n\}$, d'où $\pi^n \cap (s, t) = \{t_j^n, \dots, t_l^n\} \cup \{t_{j'}^n, \dots, t_{l'}^n\}$. De cette façon,

$$M_{st}^n = B_{st} - B_{st_j^n} - B_{t_{l'}^n t} - \sum_{i=j}^{l-1} B_{t_i^n t_{i+1}^n} - \sum_{i=j'}^{l'-1} B_{t_i^n t_{i+1}^n} - B_{t_l^n t_{j'}^n}.$$

Nous supposons que $t_{j'}^n > u$, le cas $t_{j'}^n = u$ conduisant à la même relation (2.8). Alors

$$M_{st}^n = B_{st} + \left[B_{su} - B_{st_j^n} - B_{t_l^n u} - \sum_{i=j}^{l-1} B_{t_i^n t_{i+1}^n} \right] + \left[B_{ut} - B_{ut_{j'}^n} - B_{t_{l'}^n t} - \sum_{i=j'}^{l'-1} B_{t_i^n t_{i+1}^n} \right] + B_{t_n u} + B_{ut_{j'}^n} - B_{su} - B_{ut} - B_{t_l^n t_{j'}^n},$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$M_{st}^n = M_{su}^n + M_{ut}^n + h_{sut} - h_{t_l^n ut_{j'}^n}, \quad (2.8)$$

Puisque $h \in \mathcal{C}_3^\mu$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{t_l^n ut_{j'}^n} = 0$, et ainsi, en faisant tendre n vers l'infini dans (2.8), on obtient la relation algébrique escomptée, à savoir $\delta M = h$.

Montrons enfin que pour tous $s, t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\|M_{st}^n\|_V \leq c_\mu \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)] |t - s|^\mu, \quad (2.9)$$

ce qui prouvera l'inégalité (2.6) et par là même, la régularité höldérienne de M . A cette fin, fixons $s, t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Si $\pi^n \cap (s, t) = \emptyset$, le résultat est évident. Si $\pi^n \cap (s, t) = \{t_j^n\}$, $M_{st}^n = (\delta B)_{st_j^n t} = h_{st_j^n t}$, d'où $\|M_{st}^n\|_V \leq \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)] |t - s|^\mu \leq c_\mu \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)] |t - s|^\mu$. Si $\pi^n \cap (s, t) = \{t_j^n, \dots, t_l^n\}$, on choisit $k \in \{j+1, \dots, l-1\}$ tel que

$$|t_{k+1}^n - t_{k-1}^n| \leq \frac{2}{l-j-1} |t - s|.$$

A ce stade, le critère de sélection que nous venons d'énoncer n'est pas très pertinent, dans la mesure où les distances entre deux points successifs de π^n sont égales. Ce critère ne prend en fait véritablement sens que lors de l'itération de la procédure. Considérons en effet la nouvelle partition $\hat{\pi} = \{t_j^n, \dots, t_{k-1}^n, t_{k+1}^n, \dots, t_l^n\}$ et définissons \hat{M}_{st}^n suivant le même principe que M_{st}^n , en utilisant $\hat{\pi}$ au lieu de $\pi^n \cap (s, t)$. Alors

$$M_{st}^n - \hat{M}_{st}^n = B_{t_{k-1}^n t_{k+1}^n} - B_{t_{k-1}^n t_k^n} - B_{t_k^n t_{k+1}^n} = h_{t_{k-1}^n t_k^n t_{k+1}^n},$$

et de ce fait

$$\|M_{st}^n - \hat{M}_{st}^n\|_V \leq \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)] \frac{2^\mu}{(l-j-1)^\mu} |t - s|^\mu.$$

On itère ensuite le raisonnement jusqu'à épuisement de la partition, pour obtenir

$$\|M_{st}^n\|_V \leq \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)] |t - s|^\mu \left(2 + 2^\mu \sum_{k=1}^{l-j-1} \frac{1}{k^\mu} \right) \leq c_\mu \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(V)] |t - s|^\mu.$$

□

Le lien entre cet opérateur Λ et une vision plus classique de la théorie de l'intégration exprimée à l'aide de sommes de Riemann (éventuellement corrigées) sera donné par le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.9. *Soit $g \in \mathcal{C}_2(V)$ tel que $\delta g \in \mathcal{C}_3^\mu$ avec $\mu > 1$. Si $\delta f := (Id - \Lambda\delta)g$, alors*

$$(\delta f)_{st} = \lim_{|\Delta_{st}| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \Delta_{st}} g_{t_i t_{i+1}},$$

où $\Delta_{st} = \{t_0 = s, \dots, t_n = t\}$ est une partition de $[s, t]$ dont le pas $|\Delta_{st}|$ tend vers 0.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$(\delta f)_{ts} = \sum_{t_i \in \Delta_{st}} (\delta f)_{t_i t_{i+1}} = \sum_{t_i \in \Delta_{st}} g_{t_i t_{i+1}} - \sum_{t_i \in \Delta_{st}} \Lambda_{t_i t_{i+1}}(\delta g),$$

et d'observer que

$$\left\| \sum_{t_i \in \Delta_{st}} \Lambda_{t_{i+1} t_i}(\delta g) \right\|_V \leq \sum_{t_i \in \Delta_{st}} \|\Lambda_{t_i t_{i+1}}(\delta g)\|_V \leq \mathcal{N}[\Lambda(\delta g); \mathcal{C}_2^\mu(V)] |\Delta_{st}|^{\mu-1} |t - s|,$$

donc $\lim_{|\Delta_{st}| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \Delta_{st}} \Lambda_{t_{i+1} t_i}(\delta g) = 0$. □

2.2 Construction de l'intégrale rugueuse

Comme nous l'avons rappelé en introduction, la construction de l'intégrale rugueuse

$$\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j,$$

lorsque x et z sont deux processus höldériens à valeurs respectivement dans \mathbb{R}^m et $\mathbb{R}^{d,m}$, dépend de façon substantielle de la régularité des deux processus.

Remarque 2.2.1. Lors de cette construction, il faudra garder à l'esprit le fait que la définition recherchée devra permettre l'interprétation du système (2.1), ce qui signifie en particulier (même si l'argument est pour l'instant un peu heuristique) que le coefficient de régularité höldérienne κ de l'intégrand z ne pourra excéder celui de x (noté, comme jusqu'à présent, γ). En toute logique, si y est solution de (2.1), l'intégrand $z = \sigma(y)$ devrait même hériter de la régularité de x . Cette première remarque coupe ainsi court à toute possibilité d'interprétation via un argument d'intégration par parties, c'est-à-dire une définition du type

$$\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j := \left\{ z_t^{ij} x_t^j - z_s^{ij} x_s^j \right\} - \int_s^t dz_u^{ij} x_u^j.$$

2.2.1 Le cas Young ($\gamma > 1/2$)

Supposons pour l'instant les processus x et z différentiables. L'intégrale $\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j$ est alors interprétée comme l'intégrale de Lebesgue $\int_s^t z_u^{ij} \dot{x}_u^j du$. Observons à présent la décomposition élémentaire :

$$\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j = z_s^{ij} \int_s^t dx_u^j + \int_s^t (z_u^{ij} - z_s^{ij}) dx_u^j = z_s^{ij} (\delta x^j)_{st} + \int_s^t (\delta z^{ij})_{su} dx_u^j. \quad (2.10)$$

En notant $r_{st}^i := \int_s^t (\delta z^{ij})_{su} dx_u^j$, il n'est pas difficile de vérifier que $(\delta r^i)_{sut} = -(\delta z^{ij})_{su} (\delta x^j)_{ut}$, tandis que $|r_{st}^i| \leq \|\dot{z}\|_{\infty, [0, T]} \|\dot{x}\|_{\infty, [0, T]} |t - s|^2$. Ces deux relations permettent d'écrire, grâce à la seconde égalité de (2.7),

$$r_{st}^i = \Lambda_{st} (\delta r^i) = -\Lambda_{st} ((\delta z^{ij})(\delta x^j)).$$

En revenant à (2.10), on déduit la décomposition :

$$\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j = z_s^{ij} (\delta x^j)_{st} - \Lambda_{st} ((\delta z^{ij})(\delta x^j)). \quad (2.11)$$

C'est à partir de ce type d'expression qu'apparaissent les possibilités d'extension de l'intégrale à des processus x et z moins réguliers. En effet, si l'on se réfère au théorème 2.1.1, le terme $\Lambda((\delta z^{ij})(\delta x^j))$ fait sens dès que $(\delta z^{ij})(\delta x^j) \in \mathcal{C}_3^\mu(I; \mathbb{R}^d)$, pour un certain coefficient $\mu > 1$. C'est en particulier le cas si $z \in \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathbb{R}^{d, m})$ et $x \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^m)$, avec $\kappa \leq \gamma$ tels que $\kappa + \gamma > 1$.

Proposition 2.2.2 ([46]). *Soient $z \in \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathbb{R}^{d, m})$ et $x \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^m)$, avec $1/2 < \kappa \leq \gamma$. On définit l'intégrale rugueuse $\mathcal{J}(z^{ij} dx^j)$ par la formule : pour tous $s < t \in I$,*

$$\mathcal{J}_{ts}(z^{ij} dx^j) = z_s^{ij} (\delta x^j)_{st} - \Lambda_{st} ((\delta z^{ij})(\delta x^j)). \quad (2.12)$$

Alors :

- $\mathcal{J}(z^{ij} dx^j)$ est bien défini en tant qu'élément de $\mathcal{C}_2^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ via le théorème 2.1.1, et il existe $A \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$, unique à une constante près, tel que $\delta A^i = \mathcal{J}(z^{ij} dx^j)$.
- $\mathcal{J}_{st}(z^{ij} dx^j)$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j$ quand x est un processus régulier.
- On dispose de l'estimation :

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\mathcal{J}(z dx); \mathcal{C}_2^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] \\ & \leq \left\{ \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d, m})] + |I|^\kappa \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathbb{R}^{d, m})] \right\} \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^m)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

- Pour tous $s < t \in I$, l'intégrale $\mathcal{J}_{st}(z^{ij} dx^j)$ peut être décrite par la formule :

$$\mathcal{J}_{st}(z^{ij} dx^j) = \lim_{|\Delta_{st}| \rightarrow 0} \sum_{t_k \in \Delta_{st}} (z^{ij} \delta x^j)_{t_k t_{k+1}}, \quad (2.14)$$

pour toute partition $\Delta_{st} = \{s = t_0 < \dots < t_n = t\}$ de $[s, t]$ dont le pas tend vers 0.

L'estimation (2.13) est une conséquence directe de la propriété de contraction (2.6). Quant à (2.14), il suffit d'appliquer le corollaire (2.1.9), en remarquant le fait que

$$\mathcal{J}(z^{ij} dx^j) = (\text{Id} - \Lambda \delta)(z^{ij} \delta x^j).$$

Remarque 2.2.3. Ce cas de figure est souvent désigné comme le *cas Young*, en référence à l'article [106], dans lequel l'auteur établit, de façon plus directe, la convergence de la somme de Riemann (2.14). Par analogie, les constructions qui, dans la suite du mémoire, n'impliqueront que des développements à l'ordre un, seront elles aussi référencées sous cette appellation.

2.2.2 Le cas $\gamma \in (1/3, 1/2]$

Si z et x sont γ -höldériens avec $\gamma \in (1/3, 1/2]$, la décomposition (2.11) ne permet plus d'étendre la définition de l'intégrale à ces deux processus : un développement plus sophistiqué de l'intégrale (lorsque x et z sont réguliers) est alors nécessaire.

Survienent ici deux idées fondamentales, caractéristiques de la méthode rough paths.

La première idée consiste à ne plus envisager l'intégration de processus $z \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ quelconques, mais d'une classe plus spécifique de processus liés à x , appelée *classe des processus contrôlés*. Afin d'identifier la structure en question, rappelons-nous que l'intégrale rugueuse est avant tout construite en vue de l'interprétation du système $y_t^i - y_s^i = \int_s^t \sigma^{ij}(y_u) dx_u^j$, puis de sa résolution via un argument de point fixe. De cette façon, la solution y (potentielle) devra elle-même appartenir à l'ensemble que nous cherchons à cerner. Un développement à l'ordre un de l'intégrale $\int_s^t \sigma(y_u) dx_u$ incite à envisager la classe de processus suivante :

Définition 2.2.4. Soit I un intervalle de $[0, T]$ et $x \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^m)$ avec $\gamma > 1/3$. Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\eta > \gamma$, on dit que $y \in \mathcal{C}_1(I; \mathbb{R}^l)$ est un processus (γ, η) -contrôlé (par x) sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^l , si ses incréments δy se décomposent sous la forme : pour tous $s < t \in I$,

$$(\delta y^i)_{st} = y_s^{x,ij} (\delta x^j)_{st} + y_{st}^{\sharp,i}, \quad \text{avec } y^x \in \mathcal{C}_1^{\eta-\gamma}(I; \mathbb{R}^{l,m}) \text{ et } y^\sharp \in \mathcal{C}_2^\eta(I; \mathbb{R}^l). \quad (2.15)$$

L'ensemble des processus (γ, η) -contrôlés (par x) sera noté $\mathcal{Q}_x^{\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^l)$, et l'on pose, si δy admet la décomposition (2.15),

$$\mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^{\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^l)] := \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^l)] + \mathcal{N}[y^x; \mathcal{C}_1^{0,\eta-\gamma}(I; \mathbb{R}^{l,m})] + \mathcal{N}[y^\sharp; \mathcal{C}_2^\eta(I; \mathbb{R}^l)], \quad (2.16)$$

$$\mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^{0,\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^l)] := \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^l)] + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^{\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^l)]. \quad (2.17)$$

On définit ensuite $\mathcal{Q}_x^{\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^{k,l})$ ($k \in \mathbb{N}^*$) comme l'ensemble des processus $y \in \mathcal{C}_1(I; \mathbb{R}^{k,l})$ tels que $y^i = y^i \in \mathcal{Q}_x^{\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^l)$ pour tout $i = 1, \dots, k$, et l'on associe aux éléments de cet ensemble la quantité

$$\mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^{\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^{k,l})] := \sum_{i=1}^k \mathcal{N}[y^i; \mathcal{Q}_x^{\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^l)].$$

Enfin, on notera plus simplement $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^l) := \mathcal{Q}_x^{\gamma,2\gamma}(I; \mathbb{R}^l)$ et $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{k,l}) := \mathcal{Q}_x^{\gamma,2\gamma}(I; \mathbb{R}^{k,l})$.

Remarque 2.2.5. La décomposition (2.15) n'étant pas nécessairement unique, un processus contrôlé correspond plus exactement à la donnée d'un couple $(y, y^x) \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^l) \times \mathcal{C}_1^{\eta-\gamma}(I; \mathbb{R}^{l,m})$ tel que $\delta y - y^x(\delta x) \in \mathcal{C}_2^\eta(I; \mathbb{R}^l)$. La norme $\mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^{0,\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^l)] = \mathcal{N}[(y, y^x); \mathcal{Q}_x^{0,\gamma,\eta}(I; \mathbb{R}^l)]$ fait de cet ensemble un espace de Banach.

Dans un souci de clarté, nous ne mentionnerons pas systématiquement la seconde composante y^x de façon explicite, et résumerons ainsi (y, y^x) à y . Nous reviendrons sur l'aspect quelque peu artificiel de cet "enrichissement" du processus à travers la remarque 2.3.2.

Remarque 2.2.6. L'estimation suivante, immédiate à partir de la décomposition (2.15), sera plusieurs fois mise à contribution par la suite : si $I = [l_1, l_2]$, alors pour tout $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^l)$,

$$\mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^l)] \leq \{1 + \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^m)]\} \left\{ |y_{l_1}^x| + |I|^\gamma \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^l)] \right\}. \quad (2.18)$$

Si cette classe de processus présente tant d'intérêt, c'est d'abord en raison de sa stabilité vis-à-vis de l'opération de composition avec une application σ régulière :

Proposition 2.2.7 ([46]). *Soit $I = [l_1, l_2]$ un intervalle de $[0, T]$. Si $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ et $\sigma \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, alors $\sigma(y) \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$. Plus exactement, $\delta\sigma^{ij}(y) = \sigma(y)^{x,ijk}(\delta x^k) + \sigma(y)^{\sharp,ij}$, avec*

$$\sigma(y)_s^{x,ijk} = \partial_l \sigma^{ij}(y_s) y_s^{x,lk} \quad , \quad \sigma(y)_{st}^{\sharp,ij} = \left[\delta(\sigma^{ij}(y))_{st} - \partial_l \sigma^{ij}(y_s) (\delta y^l)_{st} \right] + \partial_l \sigma^{ij}(y_s) y_{st}^{\sharp,l},$$

et l'on dispose de l'estimation :

$$\mathcal{N}[\sigma(y); \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] \leq c_\sigma^1 \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)]^2 \right\}, \quad (2.19)$$

avec $c_\sigma^1 = c^1(1 + \|\sigma\|_\infty + \|D\sigma\|_\infty + \|D^2\sigma\|_\infty)$. En outre, si $y, \tilde{y} \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ avec $y_{l_1} = \tilde{y}_{l_1}$, et si $\sigma \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, alors

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\sigma(y) - \sigma(\tilde{y}); \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] \\ & \leq c_\sigma^2 \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)]^2 \right\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)], \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec $c_\sigma^2 = c^2(1 + \|\sigma\|_\infty + \|D\sigma\|_\infty + \|D^2\sigma\|_\infty + \|D^3\sigma\|_\infty)$.

Démonstration. Il s'agit d'arguments de calcul différentiel standards. Par exemple, avec les hypothèses de la proposition, en écrivant

$$\delta(\sigma^{ij}(y))_{st} - \partial_l \sigma^{ij}(y_s) (\delta y^l)_{st} = \int_0^1 dr r \int_0^1 dr' \partial_k \partial_l \sigma^{ij}(y_s + rr'(\delta y)_{st}) (\delta y^l)_{st} (\delta y^k)_{st},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \left[\delta(\sigma^{ij}(y))_{st} - \partial_l \sigma^{ij}(y_s) (\delta y^l)_{st} \right] - \left[\delta(\sigma^{ij}(\tilde{y}))_{st} - \partial_l \sigma^{ij}(\tilde{y}_s) (\delta \tilde{y}^l)_{st} \right] \right| \\ & \leq \int_0^1 dr \int_0^1 dr' \left| \partial_k \partial_l \sigma^{ij}(y_s + rr'(\delta y)_{st}) - \partial_k \partial_l \sigma^{ij}(\tilde{y}_s + rr'(\delta \tilde{y})_{st}) \right| \left| (\delta y^l)_{st} (\delta y^k)_{st} \right| \\ & \quad + \int_0^1 dr \int_0^1 dr' \left| \partial_k \partial_l \sigma^{ij}(\tilde{y}_s + rr'(\delta \tilde{y})_{st}) \right| \left| (\delta y^l)_{st} (\delta y^k)_{st} - (\delta \tilde{y}^l)_{st} (\delta \tilde{y}^k)_{st} \right| \\ & \leq c_\sigma |t - s|^{2\gamma} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^d)]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^d)]^2 \right\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^d)]. \end{aligned}$$

Les autres estimations découlent du même type de raisonnement. \square

Revenons à présent à la décomposition (2.10) de l'intégrale lorsque x et z sont réguliers, et supposons en outre que z appartienne à $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$, autrement dit que ses incréments admettent une décomposition de la forme

$$\delta z^{ij} = z^{x,ijk}(\delta x^k) + z^{\sharp,ij}, \quad \text{avec } z^x \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m,m}) \text{ et } z^\sharp \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^{d,m}). \quad (2.21)$$

On obtient dans ce cas :

$$\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j = z_s^{ij} (\delta x)_{st} + z_s^{x,ijk} \left(\int_s^t (\delta x^k)_{su} dx_u^j \right) + \int_s^t z_{su}^{\sharp,ij} dx_u^j. \quad (2.22)$$

Avec les notations (1.3) présentées dans l'introduction, (2.22) s'écrit encore

$$\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j = z_s^{ij} \mathbf{x}_{st}^{1,j} + z_s^{x,ijk} \mathbf{x}_{st}^{2,kj} + r_{st}^i, \quad (2.23)$$

avec

$$r_{st}^i = \int_s^t z_{su}^{\sharp,ij} dx_u^j = \int_s^t z_u^{ij} dx_u^j - z_s^{ij} \mathbf{x}_{st}^{1,j} - z_s^{x,ijk} \mathbf{x}_{st}^{2,kj}.$$

A partir de cette dernière expression, il est ensuite facile de montrer, en utilisant la propriété (2.5), puis les deux relations $\delta \mathbf{x}^{1,j} = 0$ et $\delta \mathbf{x}^{2,kj} = \mathbf{x}^{1,k} \mathbf{x}^{1,j}$ (directement vérifiables), que

$$\begin{aligned} (\delta r^i)_{sut} &= (\delta z^{ij})_{su} \mathbf{x}_{ut}^{1,j} + (\delta z^{x,ijk})_{su} \mathbf{x}_{ut}^{2,kj} - z_s^{x,ijk} (\mathbf{x}_{su}^{1,k} \mathbf{x}_{ut}^{1,j}) \\ &= z_{su}^{\sharp,ij} \mathbf{x}_{ut}^{1,j} + (\delta z^{x,ijk})_{su} \mathbf{x}_{ut}^{2,kj}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas Young, on déduit alors :

$$\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j = z_s^{ij} \mathbf{x}_{st}^{1,j} + z_s^{x,ijk} \mathbf{x}_{st}^{2,kj} + \Lambda_{st} \left(z_s^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj} \right). \quad (2.24)$$

A travers ce raisonnement apparaît l'autre idée fondamentale à la base de l'approche rough paths (dans le cas $\gamma \in (1/3, 1/2]$) : pour être en mesure d'étendre la décomposition (2.24), et par là même l'intégrale $\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j$, à des processus x et z moins réguliers, il suffit de justifier l'existence de l'intégrale itérée $\mathbf{x}_{st}^2 = \int_s^t (\delta x)_{su} \otimes dx_u$. Plus exactement :

Hypothèse 1. *Si $x \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^m)$ avec $\gamma \in (1/3, 1/2]$, on admet que l'on peut construire un processus $\mathbf{x}^2 \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^{m,m})$ tel que $\delta \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 \otimes \mathbf{x}^1$, où $\mathbf{x}_{st}^1 := (\delta x)_{st}$. L'ensemble $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ est alors appelé 2-rough path au-dessus de x , et l'on notera, dans un souci de concision,*

$$\|\mathbf{x}\|_\gamma := \mathcal{N}[\mathbf{x}^1; \mathcal{C}_2^\gamma(I; \mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^{m,m})].$$

Sous cette condition, et si $z \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ avec $\gamma > 1/3$, le terme $z^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj}$ qui apparaît dans (2.24) satisfait les critères algébrique et analytique du théorème 2.1.1. Il devient ainsi possible de prolonger cette décomposition et ainsi définir :

Proposition 2.2.8 ([46]). *Soit $I = [t_1, t_2]$ un intervalle de $[0, T]$. Sous l'hypothèse 1, on définit, pour tout $z \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ admettant la décomposition (2.21), l'intégrale $\mathcal{J}(z^{ij} dx^j)$ par la formule : pour tous $s < t \in I$,*

$$\mathcal{J}_{st}(z^{ij} dx^j) = z_s^{ij} \mathbf{x}_{st}^{1,j} + z_s^{x,ijk} \mathbf{x}_{st}^{2,kj} + \Lambda_{st} \left(z_s^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj} \right). \quad (2.25)$$

Alors :

- $\mathcal{J}(z^{ij} dx^j)$ est bien défini via le théorème 2.1.1 et il existe un processus contrôlé $A \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$, unique à une constante près, tel que $\delta A^i = \mathcal{J}(z^{ij} dx^j)$.
- $\mathcal{J}_{st}(z^{ij} dx^j)$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j$ quand x est un processus régulier.
- On dispose de l'estimation :

$$\mathcal{N}[A; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] \leq c \{1 + \|\mathbf{x}\|_\gamma\} \left\{ \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d,m})] + |z_{t_1}^x| + |I|^\gamma \mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] \right\}. \quad (2.26)$$

- L'intégrale $\mathcal{J}_{st}(z^{ij} dx^j)$ peut être décrite par la formule :

$$\mathcal{J}_{st}(z^{ij} dx^j) = \lim_{|\Delta_{st}| \rightarrow 0} \sum_{t_l \in \Delta_{st}} \left(z^{ij} \mathbf{x}^{1,j} + z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj} \right)_{t_l t_{l+1}}, \quad (2.27)$$

pour toute partition $\Delta_{st} = \{s = t_0 < \dots < t_n = t\}$ de $[s, t]$ dont le pas tend vers 0.

Démonstration. On a $\delta A^i = A^{x,ij} \mathbf{x}^{1,j} + A^{\sharp,i}$, avec $A^{x,ij} := z^{ij}$ et $A^{\sharp,ij} := z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj} + \Lambda(z^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj})$. D'après (2.18),

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[A^x; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}(I; \mathbb{R}^{d,m})] &= \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}(I; \mathbb{R}^{d,m})] \\ &\leq \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d,m})] + \{1 + \|\mathbf{x}\|_\gamma\} \left\{ |z_{t_1}^x| + |I|^\gamma \mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\mathcal{N}[z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R})] \leq \|\mathbf{x}\|_\gamma \mathcal{N}[z^x; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d,m,m})] \leq \|\mathbf{x}\|_\gamma \left\{ |z_{t_1}^x| + |I|^\gamma \mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] \right\},$$

et enfin, grâce à la propriété de contraction (2.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\Lambda(z^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj}); \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R})] &\leq |I|^\gamma \mathcal{N}[z^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj}; \mathcal{C}_3^{3\gamma}(I; \mathbb{R})] \\ &\leq 2 |I|^\gamma \|\mathbf{x}\|_\gamma \mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})]. \end{aligned}$$

Ces trois estimations aboutissent à (2.26). Comme dans le cas Young, la relation (2.27) est une conséquence directe du corollaire 2.1.9, en remarquant l'égalité

$$\mathcal{J}(z^{ij} dx^j) = (\text{Id} - \Lambda\delta)(z^{ij} \mathbf{x}^{1,j} + z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj}).$$

□

L'écriture (2.27) de l'intégrale comme limite d'une somme sur les points d'une partition dont le pas tend vers 0, offre un point de vue peut-être plus facile à appréhender sur cette construction : pour définir l'intégrale rugueuse lorsque $\gamma \in (1/3, 1/2]$, il suffit de *corriger* le terme principal de la somme de Riemann usuelle ($z^{ij} \mathbf{x}^{1,j}$) à l'aide d'un terme d'ordre 2 qui fait intervenir l'aire de Lévy du processus ($z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj}$). La décomposition (2.25) (à l'aide de Λ) permet toutefois une manipulation plus aisée de l'intégrale, ne serait-ce que pour établir, via la propriété de contraction (2.6), l'estimation (2.26).

Notez enfin que la proposition (2.2.8) fournit une justification supplémentaire en faveur de l'utilisation de l'espace \mathcal{Q}_x^γ . En effet, non seulement cette dernière structure est invariante lors de la composition avec une application σ régulière (Proposition 2.2.7), mais elle reste également stable lors du processus d'intégration, ce que l'on peut résumer à travers le schéma élémentaire :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d) & \xrightarrow{\text{Prop. 2.2.7}} & \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m}) & \xrightarrow{\text{Prop. 2.2.8}} & \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d) \\ y & \longmapsto & \sigma(y) & \longmapsto & \mathcal{J}(\sigma(y) dx). \end{array}$$

Le système (2.1) est ainsi bien défini dans l'espace $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ et l'on est en droit d'envisager sa résolution au sein de cet ensemble par un argument de point fixe (voir la section suivante).

2.2.3 Vers des processus moins réguliers

Si le coefficient de régularité höldérienne γ de x est inférieur à $1/3$, la formule (2.25) perd à son tour sens, le terme auquel on souhaiterait appliquer Λ (c'est-à-dire $z^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj}$) ne présentant (au mieux) qu'une régularité $3\gamma < 1$. Un développement de l'intégrale (régulière) $\int_s^t z_u^{ij} dx_u^j$ à un ordre supérieur est alors requis.

Pour mener à bien ce développement, puis étendre la décomposition obtenue à des processus x et z irréguliers, on reprend les ingrédients qui font le succès de la méthode dans le cas $\gamma \in (1/3, 1/2]$, à savoir :

- L'identification d'un espace de processus contrôlés stable vis-à-vis de la composition et du procédé d'intégration. La complexité de la structure en question est bien entendu amenée à croître lorsque la régularité de x décroît.
- L'hypothèse d'existence d'intégrales itérées issues de x .

Nous nous contenterons ici de résumer le résultat issu de cette démarche lorsque $\gamma \in (1/4, 1/3]$. Une formulation beaucoup plus générale (pour $\gamma \in (0, 1)$ quelconque) est contenue dans l'article [49] de Gubinelli.

Hypothèse 2. Si $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$ avec $\gamma \in (1/4, 1/3]$, on admet que l'on peut construire, à partir de x , deux processus $\mathbf{x}^2 \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m})$ et $\mathbf{x}^3 \in \mathcal{C}_2^{3\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m,m})$ tels que les relations algébriques suivantes soient vérifiées :

$$\delta \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 \otimes \mathbf{x}^1 \quad , \quad \delta \mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 \otimes \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^1 \otimes \mathbf{x}^2 \quad , \quad \mathbf{x}^2 + (\mathbf{x}^2)^* = \mathbf{x}^1 \otimes \mathbf{x}^1 ,$$

où l'on a noté $(\mathbf{x}^2)^*$ la transposée de \mathbf{x}^2 et $\mathbf{x}^1 := \delta x$.

Définition 2.2.9. Sous l'hypothèse 2, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on dit que $y \in \mathcal{C}_1(I; \mathbb{R}^l)$ est un processus γ -contrôlé (par x) sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^l , si l'on peut mettre en évidence les deux développements :

$$\delta z^i = y^{x,ij} \mathbf{x}^{1,j} + y^{xx,ijk} \mathbf{x}^{2,kj} + y^{\sharp,i} \quad , \quad \delta y^{x,ij} = y^{xx,ijk} \mathbf{x}^{1,k} + y^{x,\sharp,ij} , \quad (2.28)$$

avec $y^x \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{l,m})$, $y^{xx} \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{l,m,m})$, $y^\sharp \in \mathcal{C}_2^{3\gamma}(I; \mathbb{R}^l)$ et enfin $y^{x,\sharp} \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^{l,m})$. On note encore $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^l)$ l'ensemble de ces processus, et $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{k,l})$ l'ensemble des processus dont les k composantes appartiennent à $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^l)$.

Proposition 2.2.10. Si $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ et $\sigma \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, alors $z := \sigma(y) \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$. On définit ensuite l'intégrale $\mathcal{J}(z^{ij} dx^j)$ par la formule :

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}(z^{ij} dx^j) \\ &= z^{ij} \mathbf{x}^{1,j} + z^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj} + z^{xx,ijkl} \mathbf{x}^{3,lkj} + \Lambda \left(z^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + z^{x,\sharp,ijl} \mathbf{x}^{2,kj} + \delta z^{xx,ijkl} \mathbf{x}^{3,lkj} \right) . \end{aligned}$$

Cette construction coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int z^{ij} dx^j$ lorsque x est régulier, et il existe un processus $A \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$, unique à une constante près, tel que $\delta A^i = \mathcal{J}(z^{ij} dx^j)$.

Remarque 2.2.11. Dans le reste de ce chapitre, mais aussi dans les chapitres qui suivent, nous nous concentrerons quasi-exclusivement sur le cas $\gamma > 1/3$, en distinguant le cas Young ($\gamma > 1/2$) et le cas que l'on qualifiera de *rugueux* ($\gamma \in (1/3, 1/2]$). Seule la section 6.6 évoquera l'éventualité d'un bruit x γ -höldérien avec $\gamma \in (1/4, 1/3]$, en faisant intervenir une structure de processus contrôlés d'ordre 2 proche de (2.28).

2.3 Résolution du système

Les constructions mises en avant dans la section précédente sont suffisamment souples et générales pour permettre la résolution du système (2.1). C'est l'objet du résultat suivant, que nous énonçons, dans un souci de concision, pour $\gamma > 1/3$ seulement.

Théorème 2.3.1. Soit $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$ ($\gamma > 1/3$) un processus satisfaisant l'hypothèse 1, et $\sigma \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d,m})$. Sous ces conditions :

1. Le système (2.1), interprété grâce aux propositions 2.2.7 et 2.2.8, admet une unique solution $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$. Il existe en outre une fonction polynômiale $P = P_{T, \gamma} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)] \leq P(\|\mathbf{x}\|_\gamma). \quad (2.29)$$

2. L'application d'Itô

$$F_\gamma : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m}) \rightarrow \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d),$$

qui, à toute condition initiale $a \in \mathbb{R}^d$ et tout 2-rough path $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$, associe l'unique solution de (2.1) dans $\mathcal{Q}_x^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$, est localement lipschitzienne relativement à la topologie höldérienne. Plus précisément : il existe une fonction $K = K_{T, \gamma} : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, croissante par rapport à chacun de ses arguments, telle que

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[F_\gamma(a, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) - F_\gamma(\tilde{a}, \tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2); \mathcal{C}_1^{0, \gamma}([0, T]; \mathbb{R}^d)] \\ & \leq K(\|\mathbf{x}\|_\gamma, \|\tilde{\mathbf{x}}\|_\gamma) \left\{ |a - \tilde{a}| + \mathcal{N}[\mathbf{x}^1 - \tilde{\mathbf{x}}^1; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^2 - \tilde{\mathbf{x}}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m})] \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Remarque 2.3.1. L'inégalité (2.29) implique en particulier

$$|(\delta y)_{st} - \sigma(y_s)(\delta x)_{st}| \leq |t - s|^{2\gamma} P(\|\mathbf{x}\|_\gamma), \quad (2.31)$$

estimation qui sera utilisée dans la preuve du lemme 3.2.7.

Remarque 2.3.2. L'estimation (2.30) vient suggérer une définition équivalente de la notion de solution pour le système rugueux (2.1), plus en accord avec le point de vue de [41] : Un processus $y \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$ est solution de (2.1) si, pour toute suite de processus différentiables x^n qui tend vers x au sens des 2-rough paths, c'est-à-dire

$$\mathcal{N}[\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^{1,n}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^{2,n}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.32)$$

la suite des solutions y^n du système (régulier) $dy_t^{n,i} = \sigma^{ij}(y_t^n) dx_t^n$, $y_0^n = a$, converge vers y dans $\mathcal{C}_1^{0, \gamma}([0, T]; \mathbb{R}^d)$.

De prime abord, cette seconde formulation peut sembler plus commode, voire plus naturelle, car elle ne fait plus intervenir la structure intermédiaire des processus contrôlés. En cela, elle masque cependant toute la spécificité du processus de résolution que nous nous apprêtons à développer, et qui lui met en scène les espaces \mathcal{Q}_x^γ dans le cadre d'arguments de point fixe. Pour cette raison, nous avons privilégié une première interprétation en termes d'intégration de processus contrôlés, point de vue qui sera d'ailleurs repris dans les chapitres suivants. Notez que cette approche permet en outre d'envisager des trajectoires rugueuses non géométriques, c'est-à-dire des trajectoires pour lesquels l'existence d'une suite d'approximation x^n vérifiant (2.32) n'est pas assurée. Nous ne chercherons cependant pas à approfondir cette nuance.

Cette formulation du résultat de continuité des solutions affine très légèrement l'énoncé original de [46], en affranchissant la constante de Lipschitz qui apparaît dans (2.30) de sa dépendance vis-à-vis de $y = F_\gamma(a, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ et $\tilde{y} = F_\gamma(\tilde{a}, \tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2)$ via l'estimation (2.29). Pour cette raison, mais aussi pour donner une idée des arguments mis à contribution dans l'établissement de ce type d'estimation, nous nous permettons de revenir sur les grandes lignes de la preuve du théorème. Notez qu'un résultat tout à fait similaire est démontré dans [41] (pour un rough path d'ordre quelconque) à l'aide du formalisme initié par Lyons.

2.3.1 Existence et unicité de la solution

Il s'agit ici d'établir le point 1 du théorème. Nous nous concentrerons uniquement sur le cas $1/3 < \gamma \leq 1/2$, le cas $\gamma > 1/2$ relevant de toute façon d'arguments beaucoup plus simples, qui font suite à l'interprétation (2.12) de l'intégrale.

Comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, la solution du système sera obtenue par le biais d'un argument de point fixe. Le raisonnement est d'abord mis en œuvre localement, sur un petit intervalle $[0, T_0]$, puis étendu à l'intervalle entier $[0, T]$ dans un second temps.

Notations. Avant d'entrer dans les détails de la preuve, précisons que nous travaillons ici en supposant fixé un horizon T (fini), à distinguer des temps intermédiaires T_0, T_1, \dots . Ceci signifie en particulier que les constantes qui vont apparaître dans la preuve pourront dépendre de T sans mention explicite. Cette dernière remarque vaut d'ailleurs également pour la dépendance des constantes vis-à-vis du champ de vecteurs σ et de ses dérivées.

Raisonnement local. On considère un temps $T_0 \in (0, T]$ qui sera fixé de façon retrospective au cours de cette première étape. Pour tout $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])$, on définit $z = \Gamma_{T_0}(y)$ comme l'unique processus de $\mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])$ tel que $z_0 = y_0$ et $(\delta z)_{st} = \mathcal{J}_{st}(\sigma(y) dx)$ (en particulier, $z_s^x = \sigma(y_s)$). De cette façon, une solution de (2.1) sur $[0, T_0]$ correspond à un point fixe de Γ_{T_0} .

Si $y, \tilde{y} \in \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])$ avec $(y_0, y_0^x) = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_0^x) = (a, \sigma(a))$, et $z = \Gamma_{T_0}(y), \tilde{z} = \Gamma_{T_0}(\tilde{y})$, alors en utilisant successivement (2.26) et (2.19), il est facile d'établir que

$$\mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])] \leq c_x \{1 + T_0^\gamma \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])]^2\}, \quad (2.33)$$

mais aussi, grâce à (2.20),

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{Q}_x^{0,\gamma}([0, T_0])] \\ \leq c_x T_0^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^{0,\gamma}([0, T_0])] \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])]^2\}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec $c_x = c(1 + \|\mathbf{x}\|_\gamma)$ pour une certaine constante $c > 1$ (qui dépend éventuellement de T). On choisit à présent $T_0 := (16c_x^3)^{-1/\gamma}$ et l'on pose $R_{T_0} := 2c_x$, de telle sorte que, si $\mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])] \leq R_{T_0}$, alors par (2.33), $\mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])] \leq R_{T_0}$, tandis que, si en outre $\mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])] \leq R_{T_0}$, alors par (2.34),

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{Q}_x^{0,\gamma}([0, T_0])] &\leq \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^{0,\gamma}([0, T_0])] \cdot (16c_x^2)^{-1} \{1 + 8c_x^2\} \\ &\leq \frac{9}{16} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^{0,\gamma}([0, T_0])]. \end{aligned}$$

Par conséquent, Γ_{T_0} est une contraction stricte du sous-ensemble fermé de

$$\left(\mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d), \mathcal{N}[\cdot; \mathcal{Q}_x^{0,\gamma}([0, T_0]; \mathbb{R}^d)] \right)$$

suivant :

$$\mathcal{B}_{(a, \sigma(a)), R_{T_0}}^{T_0} = \{y \in \mathcal{Q}_x^{0,\gamma}([0, T_0]); (y_0, y_0^x) = (a, \sigma(a)), \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])] \leq R_{T_0}\}.$$

La restriction de Γ_{T_0} à $\mathcal{B}_{(a, \sigma(a)), R_{T_0}}^{T_0}$ admet par conséquent un point fixe, que nous noterons y^{T_0} .

Extension de la solution. Les mêmes arguments (avec le même temps T_0) qu'à l'étape précédente peuvent être appliqués à l'ensemble

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}^{2T_0} \left(y_{T_0}^{T_0}, \sigma \left(y_{T_0}^{T_0} \right) \right), R_{T_0} \\ & = \left\{ y \in \mathcal{Q}_\gamma^x([T_0, 2T_0]); (y_{T_0}, y_{T_0}^x) = \left(y_{T_0}^{T_0}, \sigma \left(y_{T_0}^{T_0} \right) \right), \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_\gamma^x([T_0, 2T_0])] \leq R_{T_0} \right\}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

ce qui fournit une extension de la solution sur $[T_0, 2T_0]$, notée y^{2T_0} . On répète ensuite la procédure jusqu'à ce que l'intervalle $[0, T]$ soit recouvert, et l'on pose alors :

$$y = \sum_{i=1}^{N_{T_0}} y^{iT_0} \cdot 1_{[(i-1)T_0, iT_0]}, \quad y^x = \sum_{i=1}^{N_{T_0}} y^{iT_0, x} \cdot 1_{[(i-1)T_0, iT_0]},$$

où N_{T_0} est le plus petit entier tel que $N_{T_0} \cdot T_0 \geq T$.

Le processus (y, y^x) est un processus contrôlé. En effet, si $kT_0 \leq s < (k+1)T_0 < \dots < lT_0 \leq t < (l+1)T_0$, avec $k < l$, on peut successivement écrire :

$$\begin{aligned} & (\delta y)_{st} \\ & = (\delta y)_{s, (k+1)T_0} + \sum_{i=k+1}^{l-1} (\delta y)_{iT_0, (i+1)T_0} + (\delta y)_{lT_0, t} \\ & = \left[y_s^x (\delta x)_{st} - y_s^{kT_0, x} (\delta x)_{(k+1)T_0, t} + y_{s, (k+1)T_0}^{kT_0, \#} \right] \\ & \quad + \sum_{i=k+1}^{l-1} \left[y_{iT_0}^{iT_0, x} (\delta x)_{iT_0, t} - y_{iT_0}^{iT_0, x} (\delta x)_{(i+1)T_0, t} + y_{iT_0, (i+1)T_0}^{iT_0, \#} \right] \\ & \quad \quad \quad + \left[y_{s, (k+1)T_0}^{kT_0, \#} + \sum_{i=k+1}^{l-1} y_{iT_0, (i+1)T_0}^{iT_0, \#} + y_{lT_0, t}^{lT_0, \#} \right] \\ & = y_s^x (\delta x)_{st} + \left[(\delta y^{kT_0, x})_{s, (k+1)T_0} (\delta x)_{(k+1)T_0, t} + \sum_{i=k+1}^{l-2} (\delta y^{iT_0, x})_{iT_0, (i+1)T_0} (\delta x)_{(i+1)T_0, t} \right. \\ & \quad \left. + (\delta y^{(l-1)T_0, x})_{(l-1)T_0, lT_0} (\delta x)_{lT_0, t} + y_{s, (k+1)T_0}^{kT_0, \#} + \sum_{i=k+1}^{l-1} y_{iT_0, (i+1)T_0}^{iT_0, \#} + y_{lT_0, t}^{lT_0, \#} \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

et de cette façon, on a bien $(\delta y)_{st} = y_s^x (\delta x)_{st} + y_{st}^\#$, avec $y^\# \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^d)$.

Il n'est ensuite pas difficile de constater, en utilisant la décomposition

$$\mathcal{J}_{st}(\sigma^{ij}(y) dx^j) = \mathcal{J}_{s, (k+1)T_0}(\sigma^{ij}(y) dx^j) + \sum_{p=k+1}^{l-1} \mathcal{J}_{pT_0, (p+1)T_0}(\sigma^{ij}(y) dx^j) + \mathcal{J}_{lT_0, t}(\sigma^{ij}(y) dx^j),$$

que le processus contrôlé (y, y^x) ainsi défini est solution de (2.1). Enfin, à partir de l'expression (2.36), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T])] \\
& \leq \sup_{k=1, \dots, N_{T_0}} \mathcal{N}[y^{kT_0}; \mathcal{Q}_x^\gamma([(k-1)T_0, kT_0])] + \{1 + \|\mathbf{x}\|_\gamma\} \sum_{k=1}^{N_{T_0}} \mathcal{N}[y^{kT_0}; \mathcal{Q}_x^\gamma([(k-1)T_0, kT_0])] \\
& \leq R_{T_0} + R_{T_0} \cdot N_{T_0} \cdot \{1 + \|\mathbf{x}\|_\gamma\} \leq 2c_x (1 + (T/T_0 + 1) (1 + \|\mathbf{x}\|_\gamma)) \\
& \leq 2c_x \left(1 + \left(1 + 16 \cdot T \cdot c_x^{3/\gamma} \right) (1 + \|\mathbf{x}\|_\gamma) \right),
\end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation (2.29).

Unicité de la solution. C'est une conséquence de l'estimation (2.34). En effet, si y et \tilde{y} sont deux solutions du système, alors $z = \Gamma_{T_1}(y) = y$ et $\tilde{z} = \Gamma_{T_1}(\tilde{y}) = \tilde{y}$, donc, en notant $\mathcal{N}_{y, \tilde{y}} = 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T])]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T])]^2$, on a, pour tout $T_1 \leq T$,

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^{0, \gamma}([0, T_1])] \leq c_x T_1^\gamma \mathcal{N}_{y, \tilde{y}} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^{0, \gamma}([0, T_1])].$$

En choisissant par exemple T_1 tel que $c_x T_1^\gamma \mathcal{N}_{y, \tilde{y}} = \frac{1}{2}$, on obtient $\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^{0, \gamma}([0, T_1])] = 0$. On itère ensuite le procédé sur $[T_1, 2T_1], [2T_1, 3T_1], \dots$ jusqu'à ce que l'intervalle $[0, T]$ soit recouvert.

Le point 1 du théorème est ainsi complètement démontré.

2.3.2 Continuité de l'application d'Itô

Abordons à présent le point 2 du théorème 2.3.1. Il est clair que si x et \tilde{x} sont deux processus directeurs distincts, les espaces \mathcal{Q}_x^γ et $\mathcal{Q}_{\tilde{x}}^\gamma$ sont eux-mêmes distincts, et l'on ne peut comparer deux éléments $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma$, $\tilde{y} \in \mathcal{Q}_{\tilde{x}}^\gamma$ relativement à une même norme de processus contrôlés. Un artifice technique supplémentaire doit être ici mis en œuvre. Il consiste à faire intervenir, pour $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma$ et $\tilde{y} \in \mathcal{Q}_{\tilde{x}}^\gamma$, la quantité

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_{x, \tilde{x}}^\gamma] = \mathcal{N}[(y, y^x) - (\tilde{y}, \tilde{y}^x); \mathcal{Q}_{x, \tilde{x}}^\gamma] := \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma] + \mathcal{N}[y^x - \tilde{y}^x; \mathcal{C}_1^{0, \gamma}] + \mathcal{N}[y^\# - \tilde{y}^\#; \mathcal{C}_2^{2\gamma}].$$

Comme dans la sous-section précédente, la preuve de l'estimation (2.30) est ensuite établie en deux temps : d'abord localement, sur un petit intervalle $[0, T_0]$, puis globalement à l'aide du lemme de Gronwall.

Raisonnement local. On considère un temps $T_0 > 0$. A partir de la décomposition

$$\begin{aligned}
\delta(y - \tilde{y})_{st} &= [\sigma(y_s) - \sigma(\tilde{y}_s)] \cdot (\delta x)_{st} + \sigma(\tilde{y}_s) \cdot \delta(x - \tilde{x})_{st} + [y_s^x \sigma'(y_s) - \tilde{y}_s^x \sigma'(\tilde{y}_s)] \cdot \mathbf{x}_{st}^2 \\
&\quad + \tilde{y}_s^x \sigma'(\tilde{y}_s) \cdot [\mathbf{x}_{st}^2 - \tilde{\mathbf{x}}_{st}^2] + \Lambda_{st} \left(\sigma(y)^\# - \sigma(\tilde{y})^\# \right) \cdot \delta x + \sigma(\tilde{y})^\# \cdot \delta(x - \tilde{x}) \\
&\quad + \delta [y^x \sigma'(y) - \tilde{y}^x \sigma'(\tilde{y})] \cdot \mathbf{x}_{st}^2 + \delta(\tilde{y}^x \sigma'(\tilde{y})) \cdot [\mathbf{x}^2 - \tilde{\mathbf{x}}^2],
\end{aligned}$$

il est facile de déduire l'estimation :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_{x, \tilde{x}}^\gamma([0, T_0])] \\
& \leq c_{x, \tilde{x}, y, \tilde{y}} \left\{ T_0^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_{x, \tilde{x}}^\gamma([0, T_0])] + \|x - \tilde{x}\|_\gamma + \|\mathbf{x}^2 - \tilde{\mathbf{x}}^2\|_{2\gamma} + |a - \tilde{a}| \right\} \quad (2.37)
\end{aligned}$$

avec

$$c_{x,\tilde{x},y,\tilde{y}} = c \left\{ 1 + \|\mathbf{x}\|_\gamma + \|\tilde{\mathbf{x}}\|_\gamma + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T])]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_{\tilde{x}}^\gamma([0, T])]^2 \right\},$$

pour une certaine constante $c > 0$. Souvenons-nous à présent des deux estimations

$$\mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_\gamma^x([0, T])] \leq P(\|\mathbf{x}\|_\gamma) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_\gamma^{\tilde{x}}([0, T])] \leq P(\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\gamma),$$

pour une même fonction polynômiale P . De cette façon, $c_{x,\tilde{x},y,\tilde{y}} \leq c_{x,\tilde{x}}$, où $c_{x,\tilde{x}} > 0$ représente là encore une expression polynômiale de $\|\mathbf{x}\|_\gamma$ et $\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\gamma$. En choisissant $T_0 = (2c_{x,\tilde{x}})^{-1/\gamma}$, on tire alors de (2.37) :

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_{x,\tilde{x}}^\gamma([0, T_0])] \leq 2c_{x,\tilde{x}} \left\{ \|x - \tilde{x}\|_\gamma + \|\mathbf{x}^2 - \tilde{\mathbf{x}}^2\|_{2\gamma} + |a - \tilde{a}| \right\}.$$

Extension de l'inégalité. Avec les mêmes arguments qu'à l'étape précédente, on obtient, pour tout $k \geq 1$ tel que $kT_0 \leq T$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_{x,\tilde{x}}^\gamma([kT_0, (k+1)T_0])] \\ & \leq 2c_{x,\tilde{x}} \left\{ \|x - \tilde{x}\|_\gamma + \|\mathbf{x}^2 - \tilde{\mathbf{x}}^2\|_{2\gamma} + |y_{kT_0} - \tilde{y}_{kT_0}| \right\} \\ & \leq 2c_{x,\tilde{x}} \left\{ \|x - \tilde{x}\|_\gamma + \|\mathbf{x}^2 - \tilde{\mathbf{x}}^2\|_{2\gamma} + |a - \tilde{a}| + T_0^\gamma \sum_{l=0}^{k-1} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_{x,\tilde{x}}^\gamma([lT_0, (l+1)T_0]) \right\} \end{aligned}$$

et par conséquent, en utilisant le lemme de Gronwall (dans sa version discrète),

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_{x,\tilde{x}}^\gamma([kT_0, (k+1)T_0])] \leq 2c_{x,\tilde{x}} \cdot e^k \left\{ \|x - \tilde{x}\|_\gamma + \|\mathbf{x}^2 - \tilde{\mathbf{x}}^2\|_{2\gamma} + |a - \tilde{a}| \right\}.$$

L'inégalité (2.30) devient alors une conséquence de l'estimation élémentaire :

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T])] \leq \sum_{k=0}^{N_{T_0}-1} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_{x,\tilde{x}}^\gamma([kT_0, (k+1)T_0])],$$

où N_{T_0} désigne le plus petit entier tel que $N_{T_0} \cdot T_0 \geq T$, de telle sorte que $N_{T_0} \leq 1 + T/T_0 \leq 1 + T \cdot (2c_{x,\tilde{x}})^\gamma$.

Chapitre 3

Un schéma d'approximation dans le cas du mBf

La solution du système différentiel rugueux standard

$$y_0 = a \in \mathbb{R}^d \quad , \quad dy_t^i = \sigma^{ij}(y_t) dx_t^j, \quad (3.1)$$

interprété au sens des rough paths, a été obtenue dans la sous-section 2.3.1 par le biais d'un argument de point fixe abstrait, qui ne donne aucune indication quant à la façon de représenter (au moins dans une version approchée) cette solution. L'objectif de la présente section va consister en la mise en place d'un schéma d'approximation numérique facilement implémentable pour le système (1.2), dans le cas particulier où $x = B^H$ est un mouvement Brownien fractionnaire (abrégé en mBf) d'indice de Hurst $H > 1/3$. On pourra par ailleurs envisager la présence d'un terme de dérive et ainsi écrire l'équation sous la forme :

$$Y_0 = a \in \mathbb{R}^d \quad , \quad dY_t^i = \sigma^{i0}(Y_t) dt + \sum_{j=1}^m \sigma^{ij}(Y_t) dB_t^j, \quad (3.2)$$

où σ est une application régulière et (B^1, \dots, B^m) un mBf m -dimensionnel d'indice $H > 1/3$.

Avant de préciser la nature de ce schéma, évoquons brièvement les cas de figure qui ont été envisagés jusqu'à présent, sans prétendre fournir une liste exhaustive des travaux relatifs à ce problème d'approximation numérique.

Dans [73], les auteurs considèrent le cas où l'indice H est strictement supérieur à $1/2$. Eu égard à la proposition 1.2.2, c'est le cas Young, suivant la nomenclature présentée dans la section précédente. Il est alors (entre autres) établi dans la référence ci-dessus que la solution du système peut être approchée via le plus élémentaire des schémas, le schéma d'Euler :

$$Y_0^n = a \quad , \quad Y_{t_{k+1}^n}^{n,i} = Y_{t_k^n}^{n,i} + \sigma^{i0}(Y_{t_k^n}^n) (t_{k+1}^n - t_k^n) + \sigma^{ij}(Y_{t_k^n}^n) (\delta B^j)_{t_k^n t_{k+1}^n}, \quad (3.3)$$

pour une partition $\mathcal{P}^{n,T} = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T\}$ de $[0, T]$ dont le pas est voué à tendre vers 0. Dans ce même contexte, l'article [74] propose une analyse détaillée du cas unidimensionnel ($m = 1$), avec la mise en évidence du taux de convergence exact du schéma (3.3) et la détermination de la loi de l'erreur asymptotique.

Bien entendu, la situation où $H = 1/2$ (mouvement Brownien standard) est encore davantage maîtrisée. Il serait vain de tenter de référencer ici l'ensemble de la littérature associée au problème de l'approximation des diffusions d'Itô, et nous nous contenterons de renvoyer le

lecteur aux deux ouvrages très complets [59] et [72]. Citons également les récentes avancées contenues dans [22], et qui viennent en partie répondre à la question de l'implémentation du schéma de Milstein multi-dimensionnel (nous reviendrons sur ce point dans un instant).

Lorsque $H < 1/2$, il convient d'abord de mentionner les deux articles [77] et [44] relatifs au cas unidimensionnel ($m = 1$). Rappelons-nous que dans cette situation, le système (3.2) peut être interprété via la méthode de Doss-Sussmann et il n'est ainsi pas nécessaire de recourir au mécanisme des rough paths.

Le cas de figure où $H < 1/2$ en présence d'un bruit multidimensionnel ($m \geq 2$) n'avait, à notre connaissance du moins, pas été traité de façon *explicite*, autrement dit n'avait pas vu la mise en place d'un algorithme concrètement implémentable, à partir de la seule simulation du processus B ou de ses incréments δB par exemple. C'est ce que nous nous proposons de réaliser ici, dans le cas où $H > 1/3$ (nul doute cependant que la stratégie pourrait s'étendre à $H > 1/4$).

Il est facile de constater, et ceci même dans le cas unidimensionnel, que le schéma d'Euler (3.3) n'est plus approprié lorsque $H < 1/2$. Examinons en effet le cas de l'équation linéaire impliquant un mBf scalaire

$$Y_0 = 1, \quad dY_t = Y_t dB_t, \quad t \in [0, 1],$$

équation dont la solution est explicitement donnée, aussi bien par l'approche de Doss-Sussman qu'au sens des rough paths, par $Y_t = e^{B_t}$. Le schéma d'Euler (3.3) appliqué à la partition uniforme $t_k^n = \frac{k}{n}$ conduit quant à lui à l'approximation (évaluée au temps 1)

$$Y_1^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + (\delta B)_{k/n, (k+1)/n} \right) = \exp \left(B_1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} |(\delta B)_{k/n, (k+1)/n}|^2 + \rho_n \right),$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ lorsque $H > 1/3$. Il est à présent bien connu que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(\delta B)_{k/n, (k+1)/n}|^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$$

si $H < 1/2$, ce qui implique $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_1^n \stackrel{\text{p.s.}}{=} 0 \neq Y_1$ et fournit ainsi le contre-exemple recherché.

Pour remédier à cette difficulté, un premier schéma d'approximation, valable pour un 2-rough path $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ quelconque, a été proposé par Davie dans [25]. Il consiste en la formule itérative :

$$\begin{aligned} y_0^n &= a \in \mathbb{R}^d \\ y_{t_{k+1}^n}^{n,i} &= y_{t_k^n}^{n,i} + \sigma^{ij}(y_{t_k^n}^n) \cdot \mathbf{x}_{t_k^n, t_{k+1}^n}^{1,j} + \partial_p \sigma^{ij}(y_{t_k^n}^n) \sigma^{pl}(y_{t_k^n}^n) \cdot \mathbf{x}_{t_k^n, t_{k+1}^n}^{2,lj}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le terme additionnel $\partial_p \sigma^{ij}(y_{t_k^n}^n) \sigma^{pl}(y_{t_k^n}^n)$ est en fait dicté par la construction même de l'intégrale rugueuse. En effet, si y est solution du système, alors nécessairement, avec les notations de la sous-section 2.2.2, $y^{x,pl} = \sigma^{pl}(y)^1$, et l'on reconnaît ainsi dans la formule (3.4) le terme principal de la décomposition (2.25) appliquée à y . La preuve de la convergence du schéma, établie dans [25], consiste ensuite en une adroite manipulation des termes résiduels de cette

1. Rappelons-nous que y est obtenue comme point fixe d'une application $\Gamma : \mathcal{Q}_x^\gamma \rightarrow \mathcal{Q}_x^\gamma$, $(y, y^x) \mapsto (z, \sigma(y))$ (voir la preuve du théorème 2.3.1).

décomposition. Une extension de l'algorithme à un rough path d'ordre quelconque peut être trouvée dans [41].

Se pose alors la question de l'implémentation de la formule (3.4). Si l'évaluation des incréments $\mathbf{x}_{t_k^n, t_{k+1}^n}^{1,j} = (\delta x^j)_{t_k^n, t_{k+1}^n}$ ne soulève a priori aucune difficulté, la simulation des termes $\mathbf{x}_{t_k^n, t_{k+1}^n}^{2,lj}$ n'est, d'une façon générale, pas du tout évidente. Le phénomène est depuis longtemps identifié dans le cas du mB standard : si $l \neq j$, on ne connaît pas explicitement la loi de la variable aléatoire $\mathbf{B}_{st}^{2,lj} = \int_s^t (\delta B^l)_{us} dB_u^j$ (où l'intégrale est par exemple comprise au sens d'Itô). Notez toutefois le cas particulier où l'hypothèse de commutativité

$$\partial_p \sigma^{ij} \cdot \sigma^{pl} = \partial_p \sigma^{il} \cdot \sigma^{pj}$$

est vérifiée (pour tous i, j, l) : on peut alors s'affranchir des termes $\mathbf{B}^{2,lj}$ en faisant apparaître les sommes

$$\mathbf{B}_{st}^{2,lj} + \mathbf{B}_{st}^{2,jl} = (\delta B^l)_{st} (\delta B^j)_{st}.$$

La situation est évidemment tout aussi problématique dans le cas où $H \in (1/3, 1/2)$. L'aire de Lévy \mathbf{B}^2 est alors interprétée via l'une des approches évoquées en introduction (intégrale symétrique, approximations du processus,...), mais ses termes non diagonaux ne sont pas davantage implémentables. La méthode que nous nous proposons d'étudier dans cette section consiste simplement à remplacer, dans l'algorithme (3.4), l'aire $\mathbf{B}_{t_k^n, t_{k+1}^n}^{2,lj}$ par le double incrément $\frac{1}{2}(\delta B^l)_{t_k^n, t_{k+1}^n} (\delta B^j)_{t_k^n, t_{k+1}^n}$, donnant ainsi naissance à la définition (on rappelle que l'on prend ici en compte le terme de dérive) :

$$\begin{aligned} Y_0^n &= a \in \mathbb{R}^d \\ Y_{t_{k+1}^n}^{n,i} &= Y_{t_k^n}^{n,i} + \Delta_n \cdot \sigma^{i0} + \left\{ \sigma^{ij} + \frac{\Delta_n}{2} \cdot \partial_p \sigma^{i0} \cdot \sigma^{pj} + \frac{\Delta_n}{2} \cdot \partial_p \sigma^{ij} \cdot \sigma^{p0} \right\} \cdot (\delta B^j)_{t_k^n, t_{k+1}^n} \\ &\quad + \frac{\Delta_n^2}{2} \cdot \partial_p \sigma^{i0} \cdot \sigma^{p0} + \frac{1}{2} \partial_p \sigma^{ij} \cdot \sigma^{pl} \cdot (\delta B^l)_{t_k^n, t_{k+1}^n} (\delta B^j)_{t_k^n, t_{k+1}^n}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $\Delta_n = \frac{T}{n}$ désigne le pas de la partition (supposée uniforme) et où l'on a noté, pour plus de clarté, $\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(Y_{t_k^n}^n)$, $\partial_p \sigma^{ij} \cdot \sigma^{pl} = \partial_p \sigma^{ij}(Y_{t_k^n}^n) \sigma^{pl}(Y_{t_k^n}^n), \dots$

La stratégie utilisée en vue d'établir la convergence de ce schéma vers la solution de (3.2) prend essentiellement appui sur les propriétés de continuité du flot du système (Théorème 2.3.1), comme nous l'expliquerons dans la section 3.2. La section 3.1 rendra quant à elle compte d'un travail préparatoire à la mise en place de cette stratégie, en abordant la question de la discrétisation de \mathbf{B}^2 . Nous profiterons en outre de cet espace pour apporter quelques précisions quant à la définition de cette aire de Lévy pour le mBf d'indice $H > 1/3$.

3.1 Quelques précisions sur l'aire de Lévy du mBf

Pour être en mesure d'appliquer le théorème 2.3.1 au système (3.2) et ainsi pouvoir affirmer l'existence et l'unicité d'une solution pour ce système (pour σ assez régulière), il suffit de justifier la validité de l'hypothèse 1, autrement dit l'existence d'une aire de Lévy $\mathbf{B}^2 \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m+1, m+1})$ telle que $\delta \mathbf{B}^2 = \delta B \otimes \delta B$, et ce lorsque $B := (\text{Id}, B^1, \dots, B^m)$, la première composante de B étant ici liée à la présence du terme de dérive.

Comme nous l'avons déjà rapporté dans la section 1.2 de l'introduction, il existe deux façons d'appréhender la construction de cette aire de Lévy du mBf, qui représente moralement

l'intégrale $\int_s^t \delta B_{us} \otimes dB_u$: soit l'on utilise une approche préexistante telle que l'intégrale symétrique, soit l'on s'appuie sur une approximation du processus (au sens des 2-rough paths) en partant par exemple d'une interpolation linéaire ou de la décomposition de Karhunen-Loève du Brownien fractionnaire. Un critère très général, énoncé par Friz et Victoir dans [42], montre que ces trois approches (intégrale symétrique, interpolation linéaire, décomposition de Karhunen-Loève) conduisent en fait à la même aire de Lévy, et par suite au même calcul stochastique.

Dans ce contexte, l'objectif de cette section est double :

- Montrer d'une part, en utilisant les résultats de [76] associés à des arguments de changements d'échelle et de stationnarité élémentaires, que l'aire de Lévy \mathbf{B}^2 introduite par Unterberger dans [102] coïncide avec les constructions que nous venons d'évoquer.
- Obtenir d'autre part un taux de convergence pour la suite

$$\mathcal{N}[\mathbf{B}^1 - \mathbf{B}^{1,n,T}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m})],$$

où $\mathbf{B}^{1,n,T}$ (resp. $\mathbf{B}^{2,n,T}$) représente une discrétisation particulière des incréments du processus (resp. une discrétisation de l'aire de Lévy) qui sera exploitée dans le cadre de l'étude de l'algorithme (3.5).

La proposition 3.1.7 viendra en fait répondre à ces deux objectifs simultanément. Pour comprendre ce résultat, rappelons d'abord brièvement la définition de l'aire de Lévy \mathbf{B}^2 obtenue à partir de l'approximation analytique du mBf.

3.1.1 L'approximation analytique du mBf

Tous les processus stochastiques que nous nous apprêtons à manipuler seront implicitement définis sur un même espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) .

Comme expliqué dans [102], une décomposition particulière de la fonction de covariance du mBf conduit à l'introduction d'un processus gaussien centré analytique X^+ défini sur le demi-plan supérieur $\Pi^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ tel que, si l'on définit en outre X^- sur Π^- par $X_w^- = \bar{X}_{\bar{w}}^+$, on ait, pour tous $z, w \in \Pi^+$,

$$E[X_z^{+'} X_w^{+'}] = E[X_{\bar{z}}^{-'} X_{\bar{w}}^{-'}] = 0, \quad E[X_z^{+'} X_{\bar{w}}^{-'}] = \frac{H(1-2H)}{2 \cos(\pi H)} (-i(z - \bar{w}))^{2H-2}. \quad (3.6)$$

Le processus $X_z^{+'}$ doit être vu comme une approximation analytique de la dérivée du mBf. Si l'on souhaite ensuite construire une approximation du mBf lui-même, il suffit de choisir, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, un chemin continu $\gamma_{\varepsilon,t} : [0, 1] \rightarrow \Pi^+$ tel que $\gamma_{\varepsilon,t}(0) = i\varepsilon$ et $\gamma_{\varepsilon,t}(1) = t + i\varepsilon$, puis de définir $X_t^{+,\varepsilon} = \int_{\gamma_{\varepsilon,t}} X_z^{+'} dz$. De la même façon, on définit le processus $X_t^{-,\varepsilon}$ par la formule $X_t^{-,\varepsilon} = \int_{\tilde{\gamma}_{\varepsilon,t}} X_z^{-'} dz$, où $\tilde{\gamma}_{\varepsilon,t} : [0, 1] \rightarrow \Pi^-$ est tel que $\tilde{\gamma}_{\varepsilon,t}(0) = -i\varepsilon$ et $\tilde{\gamma}_{\varepsilon,t}(1) = t - i\varepsilon$ (bien entendu, $X_t^{-,\varepsilon} = \bar{X}_t^{+,\varepsilon}$). L'approximation recherchée est alors obtenue en prenant :

$$X_t^\varepsilon = 2 \operatorname{Re}(X_t^{+,\varepsilon}) = X_t^{+,\varepsilon} + X_t^{-,\varepsilon}. \quad (3.7)$$

Il est clair que le processus ainsi défini est différentiable ; sa dérivée est même égale à $(X^\varepsilon)'_t = X_{t+i\varepsilon}^{+'} + X_{t-i\varepsilon}^{-'}$. Le résultat suivant, tiré de [102], fournit un premier lien entre ce dernier processus et le mBf (unidimensionnel) usuel indexé par \mathbb{R} :

Proposition 3.1.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, soit X^ε le processus donné par la relation (3.7). Alors, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E[X_t^\varepsilon X_s^\varepsilon] = \frac{1}{2} \left\{ |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H} \right\}.$$

Il est également intéressant de noter que le processus X^ε vérifie des propriétés de stationnarité et de changement d'échelle similaires à celles du mBf, propriétés qui seront d'ailleurs mises à contribution pour établir le lemme 3.1.11.

Lemme 3.1.2. *Les égalités en loi suivantes sont satisfaites :*

1. (Stationnarité)

$$\{(\delta X^\varepsilon)_{s,u+s}, 0 \leq u \leq T-s\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{X_u^\varepsilon, 0 \leq u \leq T-s\}, \quad (3.8)$$

2. (Changement d'échelle)

$$\{X_{c \cdot u}^\varepsilon, 0 \leq u \leq T/c\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{c^H X_u^{\varepsilon/c}, 0 \leq u \leq T/c\}. \quad (3.9)$$

Démonstration. Comme il s'agit de processus gaussiens centrés, il suffit de comparer leurs fonctions de covariance. Par exemple, pour tous $u, v \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} & E[(\delta X^\varepsilon)_{s,u+s}(\delta X^\varepsilon)_{s,v+s}] \\ &= E \left[\left(\int_s^{u+s} (X^\varepsilon)'_x dx \right) \left(\int_s^{v+s} (X^\varepsilon)'_y dy \right) \right] \\ &= \int_s^{u+s} dx \int_s^{v+s} dy \left\{ E \left[X_{x+i\varepsilon}^{+'} X_{y-i\varepsilon}^{-'} \right] + E \left[X_{x-i\varepsilon}^{-'} X_{y+i\varepsilon}^{+'} \right] \right\} \\ &= \frac{H(1-2H)}{2 \cos(\pi H)} \int_s^{u+s} dx \int_s^{v+s} dy \left\{ (-i(x-y) + 2\varepsilon)^{2H-2} + (i(x-y) + 2\varepsilon)^{2H-2} \right\} \\ &= \frac{H(1-2H)}{2 \cos(\pi H)} \int_0^u dx \int_0^v dy \left\{ (-i(x-y) + 2\varepsilon)^{2H-2} + (i(x-y) + 2\varepsilon)^{2H-2} \right\} \\ &= E[X_u^\varepsilon X_v^\varepsilon], \end{aligned}$$

ce qui prouve la stationnarité du processus. La propriété de changement d'échelle est ensuite établie avec les mêmes arguments. \square

De façon naturelle, la version m -dimensionnelle de cette approximation est donnée par $X^\varepsilon := (X^{\varepsilon,1}, \dots, X^{\varepsilon,m})$, où les composantes $X^{\varepsilon,i}$ sont construites à partir de copies indépendantes $X^{+'}$. On peut alors envisager l'aire de Lévy construite à partir de cette approximation, suivant la formule : pour tous $0 \leq s < t \leq T$, $1 \leq j_1, j_2 \leq m$ et $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{X}_{st}^{2,\varepsilon}(j_1, j_2) = \int_s^t dX_{u_1}^{\varepsilon,j_1} \int_s^{u_1} dX_{u_2}^{\varepsilon,j_2}, \quad (3.10)$$

où les intégrales sont simplement comprises au sens de Riemann. Notez que par intégration par parties, les éléments diagonaux de cette approximation se résument en fait à

$$\mathbf{X}^{2,\varepsilon}(j, j)_{st} = \frac{(\delta X^{\varepsilon,j})_{st}^2}{2}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Il s'avère que la suite $\mathbf{X}^{2,\varepsilon}$ converge relativement à la topologie höldérienne qui intervient dans l'hypothèse 1. C'est le résultat principal de [102], que nous résumerons par l'énoncé :

Proposition 3.1.3. *On fixe un coefficient $\gamma \in (1/3, H)$. Alors, avec les notations précédentes :*

1. Le couple $(X^\varepsilon, \mathbf{X}^{2,\varepsilon})$ converge dans $L^p(\Omega; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]^2; \mathbb{R}^{m,m}))$ pour tout $p \geq 1$ vers un élément (B, \mathbf{B}^2) , où B est un mBf d'indice de Hurst H .
2. L'incrément \mathbf{B}^2 satisfait la relation algébrique $\delta \mathbf{B}^2 = \delta B \otimes \delta B$.

Remarque 3.1.4. Si l'on a noté X^ε (plutôt que B^ε) l'approximation analytique de B , c'est pour distinguer ce processus de l'approximation $B^{n,T}$ de B par interpolation linéaire que nous nous apprêtons à introduire.

Remarque 3.1.5. La relation (3.11) passe en particulier à la limite pour donner

$$\mathbf{B}_{st}^2(j, j) = \frac{(\delta B^j)_{st}^2}{2}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Remarque 3.1.6. La prise en compte du terme de dérive dans (3.2) nécessite la définition de composantes $\mathbf{B}_{st}^2(i, 0)$ et $\mathbf{B}_{st}^2(0, i)$ ($i = 0, \dots, m$) pour l'aire de Lévy. Les formules suivantes s'imposent ici naturellement :

$$\mathbf{B}_{st}^2(i, 0) = \int_s^t (\delta B^i)_{su} du, \quad \mathbf{B}_{st}^2(0, i) = \int_s^t (\delta B^i)_{ut} du, \quad (3.12)$$

où la deuxième formule est obtenue après intégration par parties. La matrice $(\mathbf{B}_{st}^2(i, j))_{0 \leq i, j \leq m}$ ainsi étendue sera encore notée \mathbf{B}^2 .

Associée à cette dernière remarque, la proposition 3.1.3 nous indique en particulier que le processus $\mathbf{B} = (\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2)$ (où comme précédemment $\mathbf{B}^1 := \delta B$) est un 2-rough path au-dessus de $B = (\text{Id}, B^1, \dots, B^m)$, au sens de l'hypothèse 1. On peut ensuite s'appuyer sur cet élément pour appliquer le théorème 2.3.1, et obtenir ainsi l'interprétation et la résolution trajectorielles du système (2.1).

Pour faire le lien entre cette approche et les méthodes évoquées ci-dessus, autrement dit entre \mathbf{B}^2 et les constructions plus classiques de l'aire de Lévy, envisageons à présent une discrétisation de ce processus \mathbf{B} limite. A cette fin, on introduit une partition uniforme $\mathcal{P}_{n,T} = \{t_k^n = \frac{kT}{n}, k = 0, \dots, n\}$ de l'intervalle $[0, T]$, à partir de laquelle on définit successivement :

- L'approximation $B^{n,T}$ de B par interpolation linéaire : pour tous $t \in [0, T]$, si $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ est tel que $t_k^n \leq t < t_{k+1}^n$, alors

$$B_t^{n,T} = B_{t_k^n} + \left(\frac{t - t_k^n}{T/n} \right) (\delta B)_{t_k^n t_{k+1}^n}. \quad (3.13)$$

- L'aire de Lévy $\mathbf{B}^{2,n,T}$ issue de $B^{n,T}$, définie au sens de Riemann par :

$$\mathbf{B}_{st}^{2,n,T}(i, j) = \int_s^t \int_s^{u_1} d\mathbf{B}_{u_2}^{n,T,(i)} d\mathbf{B}_{u_1}^{n,T,(j)}. \quad (3.14)$$

L'objectif du reste de cette section va alors consister à établir :

Proposition 3.1.7. *Soit $\mathbf{B} = (\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2)$ le 2-rough path donné par la proposition 3.1.3 et $\mathbf{B}^{n,T} = (\mathbf{B}^{1,n,T}, \mathbf{B}^{2,n,T})$ sa discrétisation, suivant le procédé évoqué ci-dessus. Alors, pour tout $\gamma \in (1/3, H)$, il existe une variable aléatoire positive $\theta_{\gamma,H,T}$, finie presque sûrement, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{N}[\mathbf{B}^1 - \mathbf{B}^{1,n,T}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^{m+1})] + \mathcal{N}[\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m+1,m+1})] \leq \theta_{\gamma,H,T} \cdot \frac{\sqrt{\log n}}{n^{H-\gamma}}. \quad (3.15)$$

Suivant ce résultat, le 2-rough path $\mathbf{B} = (\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2)$ issu de l'approximation analytique du mBf, coïncide avec la limite obtenue en utilisant une interpolation linéaire du processus, et donc, via les résultats de [42], avec les autres constructions de l'aire de Lévy. Notez que le taux de convergence fourni par l'estimation (3.15) est comparable à celui qui apparaît dans [42], avec une légère amélioration en la présence du facteur logarithmique.

3.1.2 Discrétisation du 2-rough path

Nous étudierons d'abord la convergence de la première composante (autrement dit la convergence de l'interpolation linéaire vers le mBf en norme höldérienne), avant d'aborder la question beaucoup plus délicate de la convergence de l'aire de Lévy approchée.

Convergence du $\mathbf{B}^{1,n,T}$

On s'appuiera simplement sur le résultat suivant, emprunté à [104, Théorème 3.1] :

Proposition 3.1.8. *Il existe une constante $h^* > 0$ et une variable aléatoire positive $\theta_{H,h^*,T}$, finie presque sûrement, telle que*

$$\sup_{t \in [0, T-h]} |(\delta B)_{t,t+h}| \leq \theta_{H,h^*,T} \cdot h^H \cdot \sqrt{|\log(1/h)|}, \quad (3.16)$$

pour tout $h \in (0, h^*)$.

Corollaire 3.1.9. *Pour tout coefficient $\gamma \in (1/3, H)$, il existe une variable aléatoire positive $\theta_{H,\gamma,T}$, finie presque sûrement, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{N}[\mathbf{B}^{1,n,T} - \mathbf{B}^1; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T], \mathbb{R}^{m+1})] \leq \theta_{H,\gamma,T} \cdot \sqrt{\log(n)} \cdot n^{-(H-\gamma)}. \quad (3.17)$$

Démonstration. Il s'agit donc d'estimer la quantité $|\delta(B^{n,T} - B)_{st}|$ pour $s, t \in [0, T]$. Remarquons tout d'abord qu'il existe un réel $x_{H,\gamma} > 0$ telle que l'application $f : (0, T] \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^{H-\gamma} \sqrt{|\log(1/x)|}$ soit croissante sur $(0, x_{H,\gamma})$. Sans perte de généralité, nous supposons que $T/n \leq \inf(x_{H,\gamma}, h^*)$, où h^* est la constante définie par la proposition 3.1.8.

(i) Considérons le cas où $|t - s| \geq \frac{T}{n}$, avec par exemple $t_k^n \leq s < t_{k+1}^n \leq t_l^n \leq t < t_{l+1}^n$ pour $k < l$ (on rappelle que $t_k^n = kT/n$). Ainsi,

$$B_s^{n,T} = B_{t_k^n} + \left(\frac{s - t_k^n}{T/n}\right) \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n} \quad \text{et} \quad B_t^{n,T} = B_{t_l^n} + \left(\frac{t - t_l^n}{T/n}\right) \delta B_{t_l^n t_{l+1}^n},$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} |\delta(B^{n,T} - B)_{st}| &\leq |\delta B_{t_k^n s}| + |\delta B_{t_l^n t}| + |\delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}| + |\delta B_{t_l^n t_{l+1}^n}| \\ &\leq 4\theta_{H,T} \sqrt{|\log(n/T)|} \left(\frac{T}{n}\right)^H \leq \theta_{H,T} |t - s|^\gamma \sqrt{|\log(n)|} n^{-(H-\gamma)} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'estimation (3.16) pour obtenir la seconde inégalité.

(ii) Si $|t - s| < T/n$ avec $t_k^n \leq s < t < t_{k+1}^n$, alors

$$(\delta B^{n,T})_{st} = \frac{t - s}{T/n} (\delta B)_{t_k^n t_{k+1}^n}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} |\delta(B^{n,T} - B)_{st}| &\leq |\delta B_{st}| + |\delta B_{st}^{n,T}| \\ &\leq \theta_{H,T} \sqrt{|\log(1/(t-s))|} |t-s|^H + \theta_{H,T} |t-s| \sqrt{|\log(n/T)|} \left(\frac{T}{n}\right)^{H-1} \\ &\leq \theta_{H,T} \sqrt{|\log(1/(t-s))|} |t-s|^H + \theta_{H,T} |t-s|^\gamma \sqrt{|\log(n)|} n^{-(H-\gamma)}. \end{aligned}$$

En utilisant la croissance de $x \mapsto x^{H-\gamma} \sqrt{|\log(1/x)|}$, on déduit

$$|\delta(B^{n,T} - B)_{st}| \leq \theta_{H,T} |t-s|^\gamma \sqrt{|\log(n)|} n^{-(H-\gamma)}.$$

(iii) Si $|t-s| < T/n$ et $t_k^n \leq s < t_{k+1}^n \leq t < t_{k+2}^n$, on écrit $|\delta(B^{n,T} - B)_{st}| \leq |\delta(B^{n,T} - B)_{st_{k+1}^n}| + |\delta(B^{n,T} - B)_{t_{k+1}^n t}|$ pour se ramener ainsi au cas précédent.

L'estimation (3.17) résulte à présent de la combinaison des trois cas (i)-(iii). \square

Convergence de l'aire de Lévy

La preuve de l'estimation $\mathcal{N}[\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \leq \theta \cdot \sqrt{\log n} n^{-(H-\gamma)}$ prendra essentiellement appui sur l'estimation suivante, tir e de l'un des principaux résultats de [76] :

Proposition 3.1.10. *Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante K_p telle que, pour tous $1 \leq i, j \leq m$,*

$$\left(\mathbf{E} \left| \mathbf{B}_{0,T}^2(i, j) - \mathbf{B}_{0,T}^{2,n,T}(i, j) \right|^p\right)^{1/p} \leq K_p \cdot T^{2H} \cdot n^{-2H+1/2}. \quad (3.18)$$

Démonstration. Observons tout d'abord que la variable aléatoire $\mathbf{B}_{0,T}^2 - \mathbf{B}_{0,T}^{2,n,T}$ appartient à la somme des deux premiers chaos de Wiener associés B , et par conséquent tous les moments de $\mathbf{B}_{0,T}^2 - \mathbf{B}_{0,T}^{2,n,T}$ sont équivalents (voir [81] pour un exposé complet de ces notions). Il suffit donc de montrer l'existence d'une constante $K > 0$ telle que, pour tous $i, j = 1, \dots, m$,

$$\left(\mathbf{E} \left| \mathbf{B}_{0,T}^2(i, j) - \mathbf{B}_{0,T}^{2,n,T}(i, j) \right|^2\right)^{1/2} \leq K \cdot T^{2H} \cdot n^{-2H+1/2}. \quad (3.19)$$

Considérons d'abord les éléments diagonaux de $\mathbf{B}_{0,T}^2 - \mathbf{B}_{0,T}^{2,n,T}$. On sait que $\mathbf{B}_{0,T}^2(j, j) = (B_T^{(j)})^2/2$, tandis que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{0,T}^{2,n,T}(j, j) &= \int_0^T B_u^{n,T,(j)} dB_u^{n,T,(j)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k^n}^{(j)} \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left(\frac{n}{T}\right)^2 \left(u - \frac{kT}{n}\right) \left(\delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{(j)}\right)^2 du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{t_k^n}^{(j)} \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{(j)} + \frac{1}{2} \left(\delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{(j)}\right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(B_T^{(j)}\right)^2, \end{aligned}$$

et ainsi $\mathbf{B}_{0,T}^2(j, j) - \mathbf{B}_{0,T}^{2,n,T}(j, j) = 0$.

Envisageons à présent un terme (i, j) non-diagonal du processus, et supposons sans perte de généralité que $i > j$. En procédant comme ci-dessus, on obtient

$$\int_0^T B_u^{n,T,(i)} dB_u^{n,T,(j)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_k^n}^{(i)} + B_{t_{k+1}^n}^{(i)}) \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{(j)}.$$

Nous pouvons alors faire appel à [76, Théorèmes 1.1 et 1.2] pour conclure :

$$\left(\mathbf{E} \left| \mathbf{B}_{0,T}^2(i, j) - \mathbf{B}_{0,T}^{2,n,T}(i, j) \right|^2 \right)^{1/2} \leq K \cdot T^{2H} \cdot n^{-2H+1/2}. \quad (3.20)$$

□

Il s'agit à présent de passer de l'estimation ponctuelle (3.18) (en norme L^p sur Ω) à une estimation en norme höldérienne (presque sûre). Pour cela, nous associerons deux résultats techniques qui surviennent assez naturellement dans ce contexte : un premier résultat relatif aux changements d'échelle pour l'aire de Lévy \mathbf{B}^2 (et son approximation $\mathbf{B}^{2,n,T}$), puis une adaptation du lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey aux processus de deux variables.

Lemme 3.1.11. *Pour tout point $s \in \mathcal{P}_{n,T}$,*

$$\{(\delta B)_{s,u+s}, (\delta B^{n,T})_{s,u+s}, 0 \leq u \leq T-s\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{(B_u, B_u^{n,T}), 0 \leq u \leq T-s\}. \quad (3.21)$$

Par ailleurs, si $c > 0$,

$$\{(B_{cu}, B_{cu}^{n,T}), 0 \leq u \leq T/c\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{c^H (B_u, B_u^{n,T/c}), 0 \leq u \leq T/c\}. \quad (3.22)$$

Enfin, si $s, t \in \mathcal{P}_{n,T}$ avec $s \leq t$, on a

$$(\mathbf{B}_{st}^2(i, j), \mathbf{B}_{st}^{2,n,T}(i, j)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t-s)^{2H} (\mathbf{B}_{01}^2(i, j), \mathbf{B}_{01}^{2,n,T/(t-s)}(i, j)) \quad (3.23)$$

pour tous $i, j = 1, \dots, m$.

Démonstration. C'est une conséquence des propriétés classiques de stationnarité et de changement d'échelle pour le mBf et son approximation analytique ((3.8) et (3.9)). Toutefois, la rédaction exhaustive des différents arguments successivement mis en œuvre est assez longue, et pour cette raison, nous la reportons en appendice. □

Lemme 3.1.12. *Soit $\kappa > 0$, $p \geq 1$ et V un espace vectoriel normé quelconque. Il existe une constante $C_{\kappa,p,V} > 0$ telle que pour tout processus $R \in \mathcal{C}_2([0, T]; V)$,*

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[R; \mathcal{C}_2^\kappa([0, T]; V)] \\ & \leq C_{\kappa,p,V} \left(\int_0^T \int_0^T \frac{|R_{uv}|^{2p}}{|u-v|^{2\kappa p+2}} du dv \right)^{1/(2p)} + C_{\kappa,p,V} \mathcal{N}[\delta R; \mathcal{C}_3^\kappa([0, T]; V)]. \end{aligned}$$

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [46] pour la preuve originale de ce résultat, qui généralise le lemme classique de Garsia-Rodemich-Rumsey (obtenu en prenant $R = \delta f$). Une version un peu plus générale du lemme sera de toute façon établie dans le chapitre 5 (voir Proposition 5.5.7). □

Munis de ces deux lemmes techniques, nous sommes en mesure d'établir le taux de convergence escompté :

Proposition 3.1.13. *Pour tout coefficient $\gamma \in (1/3, H)$, il existe une variable aléatoire positive $\theta_{H,\gamma,T}$, finie presque sûrement, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{N}[\mathbf{B}^{2,n,T} - \mathbf{B}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m+1, m+1})] \leq \theta_{H,\gamma,T} \cdot \sqrt{\log(n)} \cdot n^{-(H-\gamma)}.$$

Démonstration. Dans un souci de clarté, les constantes qui apparaîtront dans cette preuve pourront dépendre de γ et T , mais aussi des paramètres intermédiaires p et ε , sans mention explicite. Ces constantes seront d'ailleurs toutes désignées par la même notation K . Nous noterons également $A^{n,T} := \mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}$.

Considérons tout d'abord les termes impliquant la première composante de B : on a par exemple, à partir des expressions (3.12),

$$\left| A_{st}^{n,T}(i, 0) \right| \leq |t - s|^{1+\gamma} \mathcal{N}[B^{n,T} - B; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^{m+1})],$$

ce qui donne l'estimation attendue grâce à (3.17). Le traitement de $A_{st}^{n,T}(0, i)$ est ensuite similaire. Pour les termes $A_{st}^{n,T}(i, j)$, avec $1 \leq i, j \leq m$, on procède en plusieurs étapes.

Etape 1. Cherchons tout d'abord à établir l'estimation : pour tous $p \geq 1$,

$$\left(\mathbf{E} \left| A_{st}^{n,T}(i, j) \right|^p \right)^{1/p} \leq K |t - s|^{2\gamma} \cdot (n^{-2(H-\gamma)} + n^{-H}), \quad s, t \in [0, T], \quad (3.24)$$

et ce pour tous $i, j = 1, \dots, m$, ou plutôt, par symétrie, pour tous $1 \leq j \leq i \leq m$. A cette fin, nous distinguerons trois cas.

(i) Si $|t - s| \geq \frac{T}{n}$ et $s, t \in \mathcal{P}_{n,T}$, i.e. $s = \frac{kT}{n}$ et $t = \frac{lT}{n}$ avec $k < l$. Alors, d'après le lemme 3.1.11,

$$A_{st}^{n,T}(i, j) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{B}_{01}^2(i, j) - \mathbf{B}_{01}^{2,n,T/(t-s)}(i, j).$$

Or, puisque $\frac{T}{t-s} = \frac{n}{l-k}$, $\mathbf{B}_{01}^{2,n,T/(t-s)}(i, j) = \mathbf{B}_{01}^{2,l-k,1}(i, j)$, et donc, d'après la proposition 3.1.10,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} \left| A_{st}^{n,T}(i, j) \right|^p \right)^{1/p} &\leq K \cdot |t - s|^{2H} \cdot |l - k|^{-2H+1/2} \leq K \cdot |t - s|^{1/2} \cdot n^{-2H+1/2} \\ &\leq K \cdot |t - s|^{2\gamma} \cdot n^{-2(H-\gamma)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

où nous avons en outre utilisé le fait que $\gamma > 1/4$.

(ii) Si $(t - s) \geq \frac{T}{n}$ avec $t_k^n \leq s < t_{k+1}^n \leq t_l^n \leq t < t_{l+1}^n$, alors, en utilisant la relation cohomologique $\delta(\delta A^{n,T}(i, j))_{st_{k+1}^n t_l^n t} = 0$, on obtient la décomposition

$$\begin{aligned} A_{st}^{n,T}(i, j) &= A_{st_{k+1}^n}^{n,T}(i, j) + A_{t_{k+1}^n t_l^n}^{n,T}(i, j) + A_{t_l^n t}^{n,T}(i, j) \\ &\quad + \delta(A^{n,T}(i, j))_{st_{k+1}^n t} + \delta(A^{n,T}(i, j))_{t_{k+1}^n t_l^n t}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le terme $A_{t_{k+1}^n t_l^n}^{n,T}(i, j)$ est estimé à l'aide du cas (i) :

$$\left(\mathbf{E} \left| A_{t_{k+1}^n t_l^n}^{n,T}(i, j) \right|^p \right)^{1/p} \leq K \cdot |t_l^n - t_{k+1}^n|^{2\gamma} \cdot n^{-2(H-\gamma)} \leq K \cdot |t - s|^{2\gamma} \cdot n^{-2(H-\gamma)}.$$

Pour traiter les deux derniers termes de (3.26), souvenons-nous de la relation algébrique

$$\delta(A^{n,T}(i, j)) = \delta B^{(i)} \cdot \delta B^{(j)} - \delta B^{n,T,(i)} \cdot \delta B^{n,T,(j)}, \quad (3.27)$$

qui entraîne ici

$$|\delta(A^{n,T}(i, j))_{st_{k+1}^n t}| \leq |(\delta B^{(i)})_{st_{k+1}^n}| \cdot |(\delta B^{(j)})_{t_{k+1}^n t}| + |(\delta B^{n,T,(i)})_{st_{k+1}^n}| \cdot |(\delta B^{n,T,(j)})_{t_{k+1}^n t}|,$$

estimation à partir de laquelle on déduit aisément, en appliquant par exemple l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\left(\mathbf{E} \left| \delta(A^{n,T}(i, j))_{st_{k+1}^n t} \right|^p \right)^{1/p} \leq K \cdot |t - s|^H \cdot (T/n)^H \leq K \cdot |t - s|^{2\gamma} \cdot (n^{-2(H-\gamma)} + n^{-H}).$$

Le moment $\mathbf{E}[\delta(A^{n,T}(i, j))_{t_{k+1}^n t}^p]$ peut bien sûr être majoré de la même façon.

Quant au terme $A_{st_{k+1}^n}^{n,T}(i, j)$, remarquons d'une part que

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} \left| \mathbf{B}_{st_{k+1}^n}^2(i, j) \right|^p \right)^{1/p} &= |t_{k+1}^n - s|^{2H} \left(\mathbf{E} \left| \mathbf{B}_{01}^2 \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq K \cdot |t - s|^{2\gamma} \cdot n^{-2(H-\gamma)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

tandis que, d'autre part,

$$\left| \int_s^{t_{k+1}^n} \delta B_{su}^{n,T,(i)} dB_u^{n,T,(j)} \right| = \left| \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{n,T,(i)} \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{n,T,(j)} \int_s^{t_{k+1}^n} \frac{(u - t_k^n)}{(T/n)^2} du \right| \leq \left| \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{n,T,(i)} \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{n,T,(j)} \right|.$$

cette dernière estimation conduisant là encore facilement à

$$\left(\mathbf{E} \left| \int_s^{t_{k+1}^n} (\delta B_{su}^{n,T,(i)}) dB_u^{n,T,(j)} \right|^p \right)^{1/p} \leq K \cdot |t - s|^{2\gamma} \cdot n^{-2(H-\gamma)}. \quad (3.29)$$

L'association de (3.28) et (3.29) donne effectivement

$$\left(\mathbf{E} \left| A_{st_{k+1}^n}^{n,T}(i, j) \right|^p \right)^{1/p} \leq K |t - s|^{2\gamma} \cdot n^{-2(H-\gamma)}.$$

Le raisonnement est également valable pour $A_{t_k^n t}^{n,T}(i, j)$.

(iii) Il reste à analyser le cas $(t - s) < \frac{T}{n}$. Pour $t_k^n \leq s < t < t_{k+1}^n$, on a

$$\left(\mathbf{E} \left| \int_s^t (\delta B^{(i)})_{su} dB_u^{(j)} \right|^p \right)^{1/p} \leq K \cdot |t - s|^{2H} \leq K \cdot |t - s|^{2\gamma} \cdot n^{-2(H-\gamma)},$$

et

$$\left| \int_s^t \delta B_{su}^{n,T,(i)} dB_u^{n,T,(j)} \right| \leq \frac{(t - s)^2}{2(T/n)^2} \left| \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{n,T,(i)} \right| \left| \delta B_{t_k^n t_{k+1}^n}^{n,T,(j)} \right|,$$

d'où

$$\left(\mathbf{E} \left| \int_s^t (\delta B_{su}^{n,T,(i)}) dB_u^{n,T,(j)} \right|^p \right)^{1/p} \leq K \cdot |t - s|^{2\gamma} \cdot n^{-2(H-\gamma)}.$$

Le cas $((t - s) < \frac{T}{n}, t_k^n \leq s < t_{k+1}^n \leq t < t_{k+2}^n)$ donne lieu à un traitement et un résultat similaires, ce qui achève la preuve de (3.24).

Etape 2. Pour appliquer le lemme 3.1.12, il faut (d'abord) être en mesure de contrôler la norme $\mathcal{N}[\delta(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}); \mathcal{C}_3^{2\gamma}]$ de façon presque sûre. Pour cela, remarquons que la relation (3.27) s'écrit également

$$\delta(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}) = [\delta(B - B^{n,T})] \otimes \delta B + \delta B^{n,T} \otimes [\delta(B - B^{n,T})].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & |\delta(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T})_{sut}| \\ & \leq |t - u|^\gamma |s - u|^\gamma (2\mathcal{N}[\delta B; \mathcal{C}_2^\gamma] \cdot \mathcal{N}[\delta(B - B^{n,T}); \mathcal{C}_2^\gamma] + (\mathcal{N}[\delta(B - B^{n,T}); \mathcal{C}_2^\gamma])^2) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathcal{N}[\delta(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}); \mathcal{C}_3^{2\gamma}] \leq 2\mathcal{N}[\delta B; \mathcal{C}_2^\gamma] \cdot \mathcal{N}[\delta(B - B^{n,T}); \mathcal{C}_2^\gamma] + (\mathcal{N}[\delta(B - B^{n,T}); \mathcal{C}_2^\gamma])^2.$$

En utilisant le lemme 3.1.9, on déduit à présent

$$\mathcal{N}[\delta(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}); \mathcal{C}_3^{2\gamma}] \leq \theta_{H,\gamma,T} \cdot \sqrt{\log(n)} \cdot n^{-(H-\gamma)}. \quad (3.30)$$

Etape 3. Associé à (3.30), le lemme 3.1.12 entraîne

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T}); \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T])] \\ & \leq K \left(\int_0^T \int_0^T \frac{|(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T})_{uv}|^{2p}}{|u - v|^{4\gamma p + 2}} du dv \right)^{1/(2p)} + K \cdot \theta_{H,\gamma,T} \cdot \sqrt{\log(n)} \cdot n^{-(H-\gamma)}. \end{aligned}$$

pour tout $p \geq 1$. Il reste donc à montrer que

$$|R_{n,p}| \leq \theta_{\gamma,H,T} \cdot \sqrt{\log(n)} \cdot n^{-(H-\gamma)} \quad (3.31)$$

où

$$R_{n,p} := \left(\int_0^T \int_0^T \frac{|(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T})_{uv}|^{2p}}{|u - v|^{4\gamma p + 2}} du dv \right)^{1/(2p)}.$$

Pour cela, on commence par utiliser l'estimation (3.24) (en remplaçant γ par $\gamma + \varepsilon/2$, pour ε assez petit), pour déduire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|R_{n,p}|^{2p} & \leq \int_0^T \int_0^T \frac{\mathbf{E}|(\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^{2,n,T})_{uv}|^{2p}}{|u - v|^{4\gamma p + 2}} du dv \\ & \leq K \int_0^T \int_0^T \frac{|u - v|^{4\gamma p + 2\varepsilon p}}{|u - v|^{4\gamma p + 2}} du dv \cdot (n^{-4(H-\gamma-\varepsilon/2)p} + n^{-2Hp}), \end{aligned}$$

et donc, en choisissant $p > \frac{1}{\varepsilon}$,

$$\mathbf{E}|R_{n,p}|^{2p} \leq K(n^{-4(H-\gamma)p+2\varepsilon p} + n^{-2Hp}).$$

Posons $\alpha = \min\{2(H - \gamma) - \varepsilon, H\}$. D'après l'inégalité de Tchebychev, on a, pour tout $\eta > 0$,

$$P(n^{\alpha-\varepsilon}|R_{n,p}| > \eta) \leq \frac{\mathbf{E}|R_{n,p}|^{2p}}{\eta^{2p}} n^{2p(\alpha-\varepsilon)} \leq K \frac{n^{-2p\varepsilon}}{\eta^{2p}}.$$

d'où, puisque $p > 1/\varepsilon$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n^{\alpha-\varepsilon} |R_{n,p}| > \eta) < \infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli implique alors $n^{\alpha-\varepsilon} |R_{n,p}| \rightarrow 0$ p.s. lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui conduit à (3.31) en choisissant $\varepsilon > 0$ de façon appropriée, dans la mesure où

$$\alpha - \varepsilon = \min\{2(H - \gamma - \varepsilon), H - \varepsilon\} > H - \gamma.$$

□

3.2 Etude du schéma

La stratégie visant à établir la convergence du schéma (3.5) vers la solution de (3.2) est basée sur l'observation suivante : la formule (3.5) correspond au schéma de Milstein *classique* (en présence de processus réguliers) appliqué à l'approximation de Wong-Zakai du système dirigée par $B^{n,T}$, autrement dit au système régulier

$$d\bar{Y}_t^{n,i} = \sigma^{i0}(\bar{Y}_t^n) dt + \sigma^{ij}(\bar{Y}_t^n) dB_t^{n,T,j}, \quad \bar{Y}_0^n = a \in \mathbb{R}^d, \quad (3.32)$$

où, on le rappelle, $B^{n,T}$ est défini par (3.13). Il est en effet facile de constater que $(\delta B^{n,T})_{t_k^n t_{k+1}^n} = (\delta B)_{t_k^n t_{k+1}^n}$, tandis que

$$\mathbf{B}_{t_k^n t_{k+1}^n}^{2,n,T} = \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} (\delta B^{n,T,l})_{t_k^n u} dB_u^{n,T,j} = \frac{1}{2} (\delta B^l)_{t_k^n t_{k+1}^n} (\delta B^j)_{t_k^n t_{k+1}^n}.$$

Cette observation n'est évidemment valable que lorsque l'on fait coïncider le pas $\Delta_n = \frac{T}{n}$ du schéma avec le pas de discrétisation de B .

La convergence du schéma est alors établie en deux temps : on effectue une première transition entre la solution Y du système initial et la solution \bar{Y}^n du système approché (3.32), puis l'on analyse du passage de \bar{Y}^n à sa discrétisation Y^n via l'algorithme de Milstein.

La première étape n'est en fait qu'une conséquence directe de l'association du théorème de continuité du flot (inégalité (2.30)) et de l'estimation (3.15). L'ensemble aboutit à :

Proposition 3.2.1. *Supposons que $\sigma \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m+1})$ et soit $\gamma \in (1/3, H)$. Alors, avec les notations ci-dessus, il existe une variable aléatoire positive $\theta_{\gamma,H,\sigma,T}$, finie p.s., telle que*

$$\mathcal{N}[Y - \bar{Y}^n; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)] \leq \theta_{\gamma,H,\sigma,T} \frac{\sqrt{\log n}}{n^{H-\gamma}}. \quad (3.33)$$

Remarque 3.2.2. On ne peut malheureusement pas transformer cette estimation presque sûre en une estimation dans $L^1(\Omega)$. C'est l'un des inconvénients de la méthodes rough paths : elle fait apparaître des constantes aléatoires (ici $\theta_{\gamma,H,\sigma,T}$) non intégrables, comme le montrerait une rapide analyse de la preuve du théorème 2.3.1.

Le passage de \bar{Y}^n à Y^n va quant à lui nécessiter une étude relativement approfondie de la procédure de discrétisation de Milstein dans le cas où le processus directeur x est régulier. C'est l'objet de la section qui suit.

3.2.1 Le schéma de Milstein pour les EDO dirigées par un processus régulier

Nous considérons ici le système général :

$$y_{t_0} = a \in \mathbb{R}^d, \quad dy_t^i = \sigma^{ij}(y_t) dx_t^j, \quad t \in [t_0, \infty[, \quad (3.34)$$

lorsque $x = (x^1, \dots, x^l)$ est un processus continu, différentiable par morceaux, et $\sigma \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d,l})$. Le flot associé à ce système sera noté $\Phi(a; t_0, \cdot)$, ou en d'autres termes :

$$y_t = \Phi(a; t_0, t) \iff y_t \text{ est l'évaluation en } t \text{ de la solution de (3.34).}$$

Le schéma de Milstein associé à (3.34) (lorsque l'équation est envisagée sur $[0, T]$) est défini par

$$y_{t_{k+1}}^{n,i} = y_{t_k}^{n,i} + \sigma^{ij}(y_{t_k}^n) \cdot (\delta x^j)_{t_k t_{k+1}} + \partial_p \sigma^{ij}(y_{t_k}^n) \sigma^{pl}(y_{t_k}^n) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\delta x^l)_{t_k u} dx_u^j, \quad (3.35)$$

où $t_k = t_k^n = \frac{kT}{n}$. On notera $\Psi^n(a; t_p, \cdot)$ le flot numérique induit par ce schéma, c'est-à-dire la suite $(y_{t_k}^n)_{k \geq p}$ telle que $y_{t_p}^n = a$ et pour tout $k \geq p$, la relation itérative (3.35) est vérifiée.

Commençons par examiner la divergence des flots exacts et numériques entre deux temps successifs t_k et t_{k+1} de la partition :

Lemme 3.2.3. *Avec les notations précédentes, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, pour tout $k = 0, \dots, n$,*

$$|\Phi(a; t_k, t_{k+1}) - \Psi^n(a; t_k, t_{k+1})| \leq c_\sigma M_{t_k t_{k+1}}^x, \quad \text{avec } M_{st}^x := \left(\int_s^t |\dot{x}_u| du \right)^3. \quad (3.36)$$

Démonstration. Il suffit de partir du développement de Taylor : si $y := \Phi(a; t_k, \cdot)$,

$$\begin{aligned} & \Phi(a; t_k, t_{k+1}) - \Psi^n(a; t_k, t_{k+1}) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} du \int_0^1 dr [\partial_p \sigma^{ij}(a + r(\delta y)_{t_k u}) - \partial_p \sigma^{ij}(a)] \sigma^{pl}(a) (\delta x^l)_{t_k u} \dot{x}_u^j \\ & \quad + \int_{t_k}^{t_{k+1}} du \int_0^1 dr \partial_p \sigma^{ij}(a + r(\delta y)_{t_k u}) \left(\int_{t_k}^u \delta(\sigma^{pl}(y))_{t_k v} dx_v \right) \dot{x}_u^j, \end{aligned}$$

et l'on utilise ensuite le fait que

$$|(\delta y^i)_{st}| = \left| \int_s^t \sigma^{ij}(y_u) dx_u^j \right| \leq \|\sigma\|_\infty \int_s^t |\dot{x}_u| du.$$

□

En considérant le couple $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1 := \delta x, \mathbf{x}^2 := \int \delta x \otimes dx)$ comme un 2-rough path, l'inégalité (2.30) implique par ailleurs :

Lemme 3.2.4. *Soit $\gamma \in (1/3, 1)$. On rappelle que*

$$\|\mathbf{x}\|_\gamma := \mathcal{N}[\mathbf{x}^1; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^l)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{l,l})]. \quad (3.37)$$

Il existe une fonction croissante $C_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\frac{|\Phi(z; s, t) - \Phi(\tilde{z}; s, t) - (z - \tilde{z})|}{|t - s|^\gamma} \leq C_T(\|\mathbf{x}\|_\gamma) \cdot |z - \tilde{z}| \quad (3.38)$$

et

$$|\Phi(z; s, t) - \Phi(\tilde{z}; s, t)| \leq C_T(\|\mathbf{x}\|_\gamma) \cdot |z - \tilde{z}| \quad (3.39)$$

pour tous $s, t \in [0, T]$ et $z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^d$.

Forts de ces deux résultats préliminaires, nous sommes en mesure de mettre en œuvre un raisonnement classique d'analyse numérique visant à contrôler la différence entre la solution y du système (3.34) et le flot numérique y^n issu du schéma (3.35). Ce sont ces estimations qui assureront dans un instant la transition entre \bar{Y}^n à Y^n .

Proposition 3.2.5. *Soit $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^l$ un processus continu, différentiable par morceaux, $\sigma \in C^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,l})$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On considère le flot Φ associé au système (3.34) et le flot numérique Ψ^n défini par la relation (3.35). On rappelle que pour tout $k = 0, \dots, n$, $t_k = t_k^n = kT/n$, et l'on pose $y_{t_k} = \Phi(a; 0, t_k)$ et $y_{t_k}^n = \Psi^n(a; 0, t_k)$. Avec ces notations, il existe une fonction croissante $\tilde{C}_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que l'on ait, pour tous $0 \leq p < q \leq n$,*

$$|y_{t_q} - y_{t_q}^n| \leq \tilde{C}_T(\|\mathbf{x}\|_\gamma) \cdot \sum_{k=0}^{q-1} M_{t_k t_{k+1}}^x \quad (3.40)$$

$$|\delta(y - y^n)_{t_p t_q}| \leq \tilde{C}_T(\|\mathbf{x}\|_\gamma) \cdot \left\{ \sum_{k=p}^{q-1} M_{t_k t_{k+1}}^x + |t_q - t_p|^\gamma \cdot \sum_{k=0}^{p-1} M_{t_k t_{k+1}}^x \right\} \quad (3.41)$$

où l'incrément M^x est défini dans (3.36).

Démonstration. Par définition, $y_{t_k}^n = \Phi(y_{t_k}^n; t_k, t_k)$ et $y_{t_k} = \Phi(y_{t_0}^n; t_0, t_k)$, et donc

$$y_{t_q} - y_{t_q}^n = \sum_{k=0}^{q-1} (\Phi(y_{t_k}^n; t_k, t_q) - \Phi(y_{t_{k+1}}^n; t_{k+1}, t_q)).$$

Remarquons à présent la relation

$$\Phi(y_{t_k}^n; t_k, t_q) = \Phi(\Phi(y_{t_k}^n; t_k, t_{k+1}); t_{k+1}, t_q),$$

qui implique, grâce à (3.39),

$$\left| \Phi(y_{t_k}^n; t_k, t_q) - \Phi(y_{t_{k+1}}^n; t_{k+1}, t_q) \right| \leq C_T(\|\mathbf{x}\|_\gamma) \cdot \left| \Phi(y_{t_k}^n; t_k, t_{k+1}) - y_{t_{k+1}}^n \right|.$$

On utilise ensuite (3.36) pour affirmer que

$$\left| \Phi(y_{t_k}^n; t_k, t_{k+1}) - y_{t_{k+1}}^n \right| = \left| \Phi(y_{t_k}^n; t_k, t_{k+1}) - \Psi^n(y_{t_k}^n; t_k, t_{k+1}) \right| \leq C \cdot M_{t_k t_{k+1}}^x,$$

ce qui permet de déduire (3.40). Si $q \geq p$, on écrit

$$\begin{aligned} \delta(y - y^n)_{t_p t_q} &= (\Phi(y_{t_p}; t_p, t_q) - y_{t_p}) - (\Psi^n(y_{t_p}^n; t_p, t_q) - y_{t_p}^n) \\ &= (\Phi(y_{t_p}; t_p, t_q) - y_{t_p}) - (\Phi(y_{t_p}^n; t_p, t_q) - y_{t_p}^n) - (\Psi^n(y_{t_p}^n; t_p, t_q) - \Phi(y_{t_p}^n; t_p, t_q)). \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on peut ensuite montrer

$$\left| \Psi^n(z_p^n; t_p, t_q) - \Phi(z_p^n; t_p, t_q) \right| \leq C_T(\|\mathbf{x}\|_\gamma) \cdot \sum_{k=p}^{q-1} M_{t_k t_{k+1}}^x. \quad (3.42)$$

(3.41) est finalement obtenu en combinant (3.38) et (3.40). \square

3.2.2 Application au mBf

Sous l'hypothèse $\sigma \in \mathcal{C}^{3,\mathbf{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d,m+1})$ (qui sera dorénavant adoptée), on rappelle que Y^n désigne la suite définie par le schéma (3.2), tandis que \bar{Y}^n représente la solution du système approché (3.32). La proposition 3.2.5, appliquée à ce dernier système, conduit à un premier contrôle :

Proposition 3.2.6. *Pour tout $\gamma \in (1/3, H)$, il existe une variable aléatoire $\theta_{\gamma,H,T}$, finie p.s., telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sup_{p,q=0,\dots,n-1, p < q} \frac{|\delta(\bar{Y}^n - Y^n)_{t_p t_q}|}{|t_q - t_p|^\gamma} \leq \theta_{\gamma,H,T} \frac{\sqrt{\log n}}{n^{H-\gamma}}. \quad (3.43)$$

Démonstration. Pour faire apparaître $|\delta(\bar{Y}^n - Y^n)_{t_p t_q}|$, il suffit de prendre $x = B^{n,T}$ dans la proposition 3.2.5, où n est le même pas de discrétisation que dans le schéma numérique (3.5), puisque, comme nous l'avons souligné au début de cette section, Y^n coïncide avec la discrétisation de Milstein du système (3.2.5). En utilisant (3.16), on sait en outre que

$$M_{t_k t_{k+1}}^x = |(\delta B)_{t_k t_{k+1}}|^3 \leq \theta_{H,T} \frac{(\log n)^{3/2}}{n^{3H}},$$

et donc, d'après (3.40) et (3.15),

$$\begin{aligned} |\delta(\bar{Y}^n - Y^n)_{t_p t_q}| &\leq \theta_{\gamma,H,T} C_T (\|\mathbf{B}^{n,T}\|_\gamma) \left\{ \frac{|q-p|}{n^{3H}} (\log n)^{3/2} + |t_q - t_p|^\gamma \frac{p \cdot (\log n)^{3/2}}{n^{3H}} \right\} \\ &\leq \theta_{\gamma,H,T} |t_q - t_p|^\gamma \frac{(\log n)^{3/2}}{n^{3H-1}}, \end{aligned}$$

où l'expression de la variable aléatoire $\theta_{\gamma,H,T}$ varie d'une ligne à l'autre. (3.43) est maintenant une conséquence de l'inégalité stricte $3H - 1 > H - \gamma$. □

Le reste de cette section va consister à établir que l'estimation (3.43) reste valable sur l'intervalle entier $[0, T]$ (et plus seulement sur les points t_p, t_q de la partition) lorsque Y^n est étendu sur $[0, T]$ par interpolation linéaire des points $Y_{t_0}^n, Y_{t_1}^n, \dots, Y_{t_n}^n$.

Intervient ici un premier résultat technique, hérité de (3.16) via l'estimation (2.29), relatif au comportement local des variations de \bar{Y}^n :

Lemme 3.2.7. *Il existe une constante $h^{**} > 0$ et une variable aléatoire positive $\theta_{H,h^{**},\sigma,T}$, finie p.s., telle que pour tout $h \in (0, h^{**})$ et tout $n \geq \frac{T}{h^{**}}$,*

$$\sup_{t \in [0, T-h]} |(\delta \bar{Y}^n)_{t, t+h}| \leq \theta_{H,h^{**},\sigma,T} \cdot h^H \cdot \sqrt{|\log(1/h)|}.$$

Démonstration. Comme dans la preuve du lemme 3.1.9, on note $x_H > 0$ la constante telle que l'application $x \mapsto x^H \sqrt{|\log(1/x)|}$ soit croissante $(0, x_H]$. On pose ensuite $h^{**} = \min(x_H, h^*)$, où h^* désigne la constante définie par le lemme 3.1.8. Soient $s, t \in [0, T]$ tels que $|t - s| \leq h^{**}$.

(i) De (2.31), on tire

$$|(\delta \bar{Y}^n)_{st} - \sigma(\bar{Y}_s^n)(\delta B^{n,T})_{st}| \leq |t - s|^{2\gamma} G(\|\mathbf{B}^{n,T}\|_\gamma)$$

pour $1/3 < \gamma < H$ et une certaine fonction croissante $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. En choisissant γ suffisamment proche de H , on obtient

$$|(\delta \bar{Y}^n)_{st} - \sigma(\bar{Y}_s^n)(\delta B^{n,T})_{st}| \leq \theta_{H,h^*,\sigma,T} |t-s|^H \sqrt{\log\left(\frac{1}{|t-s|}\right)}.$$

(ii) Supposons d'abord que $t_l \leq s \leq t \leq t_{l+1}$. On a

$$|\sigma(\bar{Y}_s^n)(\delta B^{n,T})_{st}| \leq \theta_{H,h^*,\sigma,T} \cdot |t-s| \cdot (n/T)^{1-H} \sqrt{|\log(n/T)|},$$

et puisque $|t-s| \leq T/n$, i.e. $n/T \leq 1/(t-s)$, il en découle

$$|\sigma(\bar{Y}_s^n)(\delta B^{n,T})_{st}| \leq \theta_{H,h^*,\sigma,T} \cdot (t-s)^H \cdot \sqrt{|\log(1/(t-s))|}.$$

(iii) Si $t_{l-1} \leq s \leq t_l \leq t_p \leq t \leq t_{p+1}$ avec $l \leq p$, alors

$$(\delta B^{n,T})_{st} = (B_t^{n,T} - B_{t_p}) + (\delta B)_{t_l t_p} + (B_{t_l} - B_s^{n,T}). \quad (3.44)$$

Comme dans la preuve du lemme 3.1.9, cette relation mène facilement, lorsque $|t-s| \leq T/n$, à

$$|\sigma(\bar{Y}_s^n)(\delta B^{n,T})_{st}| \leq \theta_{H,h^*,\sigma,T} \cdot (t-s)^H \cdot \sqrt{|\log(1/(t-s))|} \quad (3.45)$$

Si $|t-s| > T/n$, la décomposition (3.44) implique

$$|\sigma(\bar{Y}_s^n)(\delta B^{n,T})_{st}| \leq 2\theta_{H,h^*,\sigma,T} \cdot (T/n)^H \sqrt{|\log(n/T)|} + \theta_{H,h^*,\sigma,T} \cdot (t_p - t_l)^H \cdot \sqrt{|\log(1/(t_p - t_l))|}.$$

et l'on retrouve l'estimation (3.45) grâce à la croissance de $x \mapsto x^H \sqrt{|\log(1/x)|}$.

(iv) L'assertion est maintenant obtenue en combinant les étapes (i)-(iii). \square

Proposition 3.2.8. *Soit $\{Y_t^n, t \in [0, T]\}$ le processus obtenu par interpolation linéaire des points $Y_{t_0}^n, Y_{t_1}^n, \dots, Y_{t_n}^n$. Pour tout $\gamma \in (1/3, H)$, il existe une variable aléatoire positive $\theta_{\gamma, H, T}$, finie p.s., telle que pour tout $n > 1$,*

$$\mathcal{N}[Y^n - \bar{Y}^n; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)] \leq \theta_{\gamma, H, T} \cdot \sqrt{\log(n)} \cdot n^{-(H-\gamma)}.$$

Démonstration. On introduit tout d'abord l'interpolation linéaire U^n de \bar{Y}^n associée à la partition uniforme de pas T/n . A partir du résultat du lemme 3.2.7, on peut procéder comme dans la preuve du lemme 3.1.9 pour obtenir

$$\mathcal{N}[U^n - \bar{Y}^n; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)] \leq \theta_{H, \gamma, T} \cdot \sqrt{\log(n)} \cdot n^{-(H-\gamma)}.$$

Il suffit donc d'examiner la différence entre les deux processus linéaires par morceaux U^n et Y^n . Si $s \in [t_l, t_{l+1}]$ et $t \in [t_k, t_{k+1}]$ pour $l \leq k$, on a

$$\delta(U^n - Y^n)_{st} = \delta(\bar{Y}^n - Y^n)_{t_l t_k} + \frac{t-t_k}{T/n} \delta(\bar{Y}^n - Y^n)_{t_k t_{k+1}} - \frac{s-t_l}{T/n} \delta(\bar{Y}^n - Y^n)_{t_l t_{l+1}}. \quad (3.46)$$

(i) Si $l+1 < k$, alors en appliquant (3.43) aux trois termes de (3.46), on obtient, puisque $(s-t_l) \leq T/n$ et $(t-t_k) \leq T/n$,

$$|\delta(U^n - Y^n)_{st}| \leq \theta_{H, \gamma, T} |t-s|^\gamma \cdot n^{-(H-\gamma)} \sqrt{\log(n)}. \quad (3.47)$$

(ii) Si $l = k$, (3.46) se simplifie en

$$\delta(U^n - Y^n)_{st} = \frac{t-s}{T/n} \delta(\bar{Y}^n - Y^n)_{t_k t_{k+1}}$$

et ainsi (3.43), associée au fait que $|t-s| \leq T/n$, fournit à nouveau l'estimation (3.47).

Le cas $k = l + 1$ peut ensuite être traité de façon similaire, ce qui achève la preuve de la proposition. \square

En associant les estimations des propositions 3.2.1 et 3.2.8, on obtient le résultat de convergence escompté :

Théorème 3.2.1. *Supposons que $\sigma \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m+1})$ et soit $\{Y_t^n, t \in [0, T]\}$ le processus obtenu par interpolation linéaire des points $Y_{t_0}^n, Y_{t_1}^n, \dots, Y_{t_n}^n$ issus du schéma (3.5). Pour tout coefficient $\gamma \in (1/3, H)$, il existe une variable aléatoire positive $\theta_{\gamma, H, \sigma, T}$ telle que, si Y désigne la solution du système (3.2), alors pour tout $n \geq 2$,*

$$\mathcal{N}[Y - Y^n; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)] \leq \theta_{\gamma, H, \sigma, T} \frac{\sqrt{\log n}}{n^{H-\gamma}}. \quad (3.48)$$

3.2.3 Résultats de simulation numérique

Pour apprécier l'efficacité de l'algorithme (3.5), envisageons l'exemple élémentaire

$$Y_0 = a \in \mathbb{R} \quad , \quad dY_t = Y_t \cdot (dB_t^1 + dB_t^2), \quad (3.49)$$

pour lequel nous disposons de la solution explicite $Y_t = e^{B_t^1 + B_t^2}$. La figure 3.2.3, qui rend compte à la fois de l'application du schéma d'Euler et du schéma de type Milstein (3.5), vient illustrer le phénomène que nous évoquions en introduction : lorsque $H < 1/2$ (ici $H = 0.4$), le schéma d'Euler ne converge plus vers la solution du système et il devient ainsi nécessaire d'inclure des termes d'ordre deux dans l'algorithme.

Il eut été ensuite intéressant de pouvoir comparer le taux de convergence qui apparaît dans (3.48) avec des taux plus classiques lorsque B est un mB standard ou lorsque B est unidimensionnel (voir par exemple [77]). Survient ici l'un des inconvénients de l'approche rough paths que nous avons suivie (outre celui mentionné dans la remarque 3.2.2) : cette méthode ne met en évidence qu'une estimation en norme höldérienne de la différence entre la solution exacte et la solution approchée. Le coefficient γ dans (3.48) est en effet supposé strictement supérieur à $1/3$ et il n'est pas envisageable, eu égard aux arguments utilisés dans la preuve de ce résultat, de faire converger γ vers 0 pour obtenir un taux de convergence étroit en norme infinie.

Permettons-nous cependant une conjecture quant à la vitesse de convergence de $\|Y - Y^n\|_{\infty, [0, T]}$, conjecture que viendront dans un instant appuyer deux exemples numériques.

Conjecture : On suppose l'indice de Hurst H strictement supérieur à $1/3$. Soit Y la solution du système (3.2) et Y^n le processus obtenu par interpolation linéaire des points $Y_{t_0}^n, Y_{t_1}^n, \dots, Y_{t_n}^n$ issus du schéma (3.5). Il existe une variable aléatoire positive $\theta_{H, T}$, finie p.s., telle que, pour tout $n \geq 2$,

$$\|Y - Y^n\|_{\infty, [0, T]} \leq \theta_{H, T} \cdot \sqrt{\log n} \cdot \left(n^{-H} + n^{-2H+1/2} \right). \quad (3.50)$$

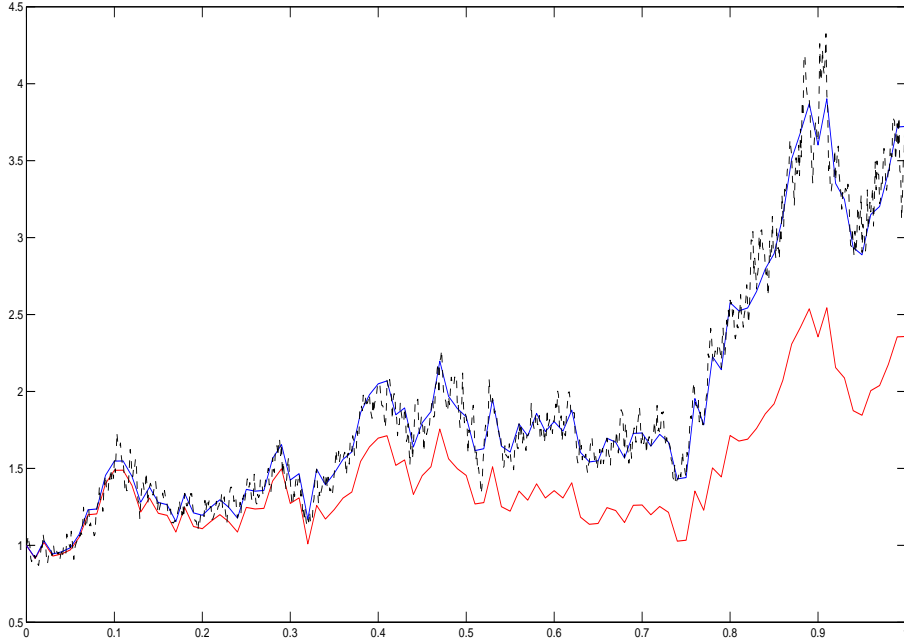


FIGURE 3.1 – Application du schéma d’Euler (en rouge) et du schéma (3.5) (en bleu) à l’approximation de la solution de (3.49) (en pointillés).

Remarque 3.2.9. L’estimation (3.50) est conforme aux résultats établis dans le cas du Brownien standard ($H = 1/2$). Il est en effet prouvé dans [15] que le schéma (3.5) appliqué au système particulier

$$Y_0^1 = Y_0^2 = 0 \quad , \quad dY_t^1 = dW_t^1 \quad , \quad dY_t^2 = Y_t^1 dW_t^2 \quad ,$$

est exactement d’ordre $n^{-1/2}$, résultat qui souligne par ailleurs le coût de l’approximation $\mathbf{W}_{st}^2 \approx \frac{1}{2}(\delta W)_{st} \otimes (\delta W)_{st}$ (on sait que le schéma de Milstein original est d’ordre n^{-1}).

Pour tenter d’appréhender la norme $\|Y - Y^n\|_{\infty, [0, T]}$, nous avons appliqué l’algorithme au système :

$$Y_0 = 1, \quad dY_t = \cos(Y_t) dB_t^1 + \sin(Y_t) dB_t^2, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.51)$$

Observons que pour montrer (3.50), il suffirait en fait d’établir l’inégalité

$$\sup_{k=0, \dots, n} \left| Y_{t_k^n} - Y_{t_k} \right| \leq \theta_{H, T} \frac{\sqrt{\log n}}{n^{2H-1/2}}.$$

En effet, si $Y^{\mathcal{P}^{n, T}}$ désigne l’interpolation linéaire de Y relativement à la partition $\mathcal{P}^{n, T} = \{t_k^n, k = 0, \dots, n\}$, il est facile de prouver en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 3.2.7, que

$$\|Y - Y^{\mathcal{P}^{n, T}}\|_{\infty, [0, T]} \leq 2 \sup_{k=0, \dots, n} \sup_{t_k^n \leq s < t \leq t_{k+1}^n} |(\delta Y)_{st}| \leq \theta_{H, T} \frac{\sqrt{\log n}}{n^H},$$

pour une certaine variable aléatoire $\theta_{H,T}$ finie p.s. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|Y - Y^n\|_{\infty, [0, T]} &\leq \theta_{H,T} \frac{\sqrt{\log n}}{n^H} + \|Y^{\mathcal{P}^{n,T}} - Y^n\|_{\infty, [0, T]} \\ &\leq \theta_{H,T} \frac{\sqrt{\log n}}{n^H} + \sup_{k=0, \dots, n} |Y_{t_k^n} - Y_{t_k^n}^n|. \end{aligned}$$

Les figures 3.2.3 et 3.2.3 représentent justement la fonction

$$n \mapsto \log_2 \left(\sup_{k=0, \dots, 2^n} \left| Y_{\frac{k}{2^n}} - Y_{\frac{k}{2^n}}^{2^n} \right| \right), \quad (3.52)$$

pour le système (3.51). Chacun des points matérialise en fait l'erreur moyenne commise sur 50 réalisations du mBf.

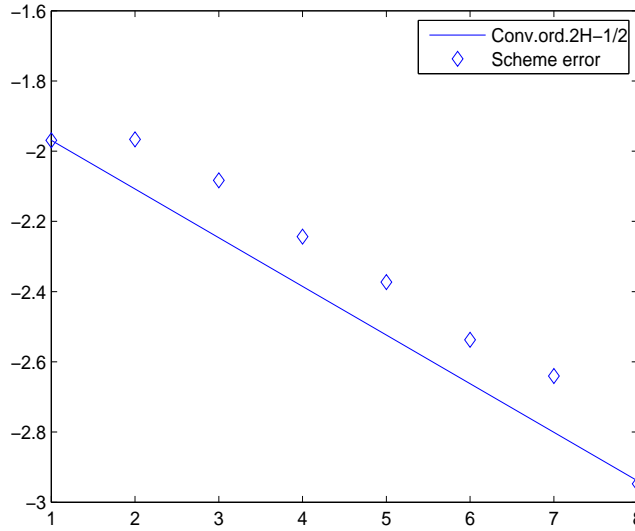


FIGURE 3.2 – Représentation de la fonction $n \mapsto \log_2 \left(\sup_{k=0, \dots, 2^n} \left| Y_{\frac{k}{2^n}} - Y_{\frac{k}{2^n}}^{2^n} \right| \right)$ associée au système (3.51) lorsque $H = 0.35$.

Remarque 3.2.10. Comme il est de coutume dans l'analyse des erreurs commises par un schéma numérique, la solution exacte Y , dont nous ne connaissons pas explicitement la loi, est en fait remplacée dans (3.52) par une approximation Y^{N_0} très fine elle-même obtenue via l'algorithme, pour un certain paramètre N_0 très grand fixé.

3.3 Appendix

Preuve du lemme 3.1.11. On rappelle que les points de la partition $\mathcal{P}_{n,T}$ sont donnés par $t_k^n = \frac{kT}{n}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Introduisons à présent deux applications $F_-^{n,T}$ et $F_+^{n,T}$ associées à cette

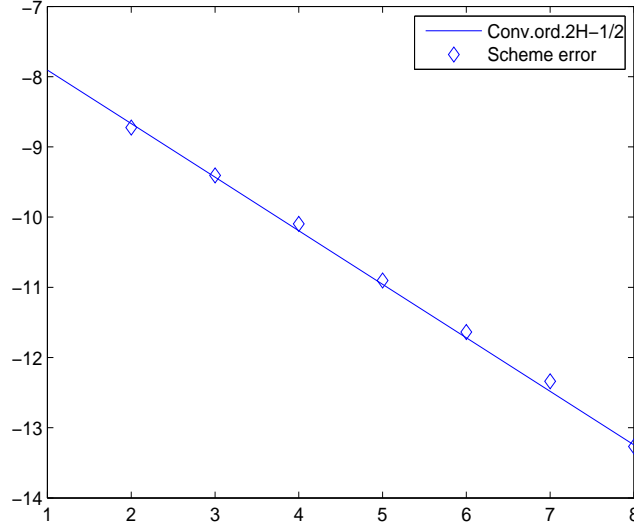


FIGURE 3.3 – Représentation de la fonction $n \mapsto \log_2 \left(\sup_{k=0, \dots, 2^n} \left| Y_{\frac{k}{2^n}} - Y_{\frac{k-1}{2^n}} \right| \right)$ associée au système (3.51) lorsque $H = 0.8$.

partition : pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $F_-^{n,T}(u) := t_i^n$ et $F_+^{n,T}(u) := t_{i+1}^n$ si $t_i^n \leq u < t_{i+1}^n$. Avec ces notations, on peut écrire $B_u^{n,T} = G^{n,T}(B)_u$, où l'application mesurable $G^{n,T} : \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^m)$ est définie par

$$G^{n,T}(y)_u := y_{F_-^{n,T}(u)} + \frac{u - F_-^{n,T}(u)}{T/n} \left(y_{F_+^{n,T}(u)} - y_{F_-^{n,T}(u)} \right), \quad u \in \mathbb{R}^+. \quad (3.53)$$

Afin d'établir (3.21), observons que $F_{\pm}^{n,T}(u+s) = F_{\pm}^{n,T}(u) + s$ si $s \in \mathcal{P}_{n,T}$. Il est alors facile de constater que

$$((\delta B)_{s, \cdot+s}, (\delta B^{n,T})_{s, \cdot+s}) = ((\delta B)_{s, \cdot+s}, G^{n,T}((\delta B)_{s, \cdot+s})),$$

et ainsi, grâce à la propriété de stationnarité du mBf, on a :

$$((\delta B)_{s, \cdot+s}, (\delta B^{n,T})_{s, \cdot+s}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B, G^{n,T}(B)) = (B, B^{n,T}).$$

La preuve de (3.22) est tout à fait similaire. On part de la relation $F_{\pm}^{n,T}(c \cdot u) = c \cdot F_{\pm}^{n,T/c}(u)$ pour écrire $B_{cu}^{n,T} = G^{n,T/c}(B_c)_u$. En utilisant cette fois la propriété de changement d'échelle du mBf, on déduit

$$(B_c, B_c^{n,T}) = (B_c, G^{n,T/c}(B_c)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (c^H B, G^{n,T/c}(c^H B)),$$

et (3.22) est à présent une conséquence de la linéarité de $G^{n,T/c}$.

Pour montrer (3.23), commençons par remarquer que, p.s.,

$$(\mathbf{B}_{st}^2, \mathbf{B}_{st}^{2,n,T}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\mathbf{X}(\eta)_{st}^2, \mathbf{X}(\eta)_{st}^{2,n,T} \right),$$

où $\mathbf{X}(\eta)^{2,n,T}$ est l'aire de Lévy associée à la discrétisation $X(\eta)^{n,T}$ de $X(\eta)$. La convergence de la première composante est une conséquence de la proposition 3.1.3, tandis que, pour établir $\mathbf{X}(\eta)_{st}^{2,n,T} \rightarrow \mathbf{B}_{st}^{2,n,T}$, il suffit d'observer que $\mathbf{X}(\eta)_{st}^{2,n,T}$ peut s'écrire à l'aide d'évaluations de $X(\eta)$ en des points fixés de la partition, puis d'utiliser à nouveau la proposition 3.1.3. En faisant maintenant appel à la notation $G^{m,T}$ définie par (3.53), ainsi qu'aux propriétés de stationnarité et de changement d'échelle de $X(\eta)$ (Lemme 3.1.2), on déduit successivement, pour toute fonction continue bornée $\varphi : (\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m)^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& E \left[\varphi \left(\mathbf{B}_{st}^2, \mathbf{B}_{st}^{2,n,T} \right) \right] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} E \left[\varphi \left(\mathbf{X}(\eta)_{st}^2, \mathbf{X}(\eta)_{st}^{2,n,T} \right) \right] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} E \left[\varphi \left(\sum_{i=0}^m \left\{ X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)+s} - X(\eta)_s \right\} \otimes \left\{ X(\eta)_{\frac{i+1}{m}(t-s)+s} - X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)+s} \right\}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{i=0}^m \left\{ X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)+s}^{n,T} - X(\eta)_s^{n,T} \right\} \otimes \left\{ X(\eta)_{\frac{i+1}{m}(t-s)+s}^{n,T} - X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)+s}^{n,T} \right\} \right) \right] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} E \left[\varphi \left(\sum_{i=0}^m \left\{ X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)+s} - X(\eta)_s \right\} \otimes \left\{ \left[X(\eta)_{\frac{i+1}{m}(t-s)+s} - X(\eta)_s \right] \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \left[X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)+s} - X(\eta)_s \right] \right\}, \right. \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=0}^m G^{n,T}(X(\eta)_{\cdot+s} - X(\eta)_s)_{\frac{i}{m}(t-s)} \otimes \left\{ G^{n,T}(X(\eta)_{\cdot+s} - X(\eta)_s)_{\frac{i+1}{m}(t-s)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - G^{n,T}(X(\eta)_{\cdot+s} - X(\eta)_s)_{\frac{i}{m}(t-s)} \right\} \right) \right] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} E \left[\varphi \left(\sum_{i=0}^m X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)} \otimes \left\{ X(\eta)_{\frac{i+1}{m}(t-s)} - X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)} \right\}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{i=0}^m G^{n,T}(X(\eta))_{\frac{i}{m}(t-s)} \otimes \left\{ G^{n,T}(X(\eta))_{\frac{i+1}{m}(t-s)} - G^{n,T}(X(\eta))_{\frac{i}{m}(t-s)} \right\} \right) \right] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} E \left[\varphi \left(\sum_{i=0}^m X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)} \otimes \left\{ X(\eta)_{\frac{i+1}{m}(t-s)} - X(\eta)_{\frac{i}{m}(t-s)} \right\}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{i=0}^m G^{n,T/(t-s)}(X(\eta)_{\cdot(t-s)})_{\frac{i}{m}} \otimes \left\{ G^{n,T/(t-s)}(X(\eta)_{\cdot(t-s)})_{\frac{i+1}{m}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - G^{n,T/(t-s)}(X(\eta)_{\cdot(t-s)})_{\frac{i}{m}} \right\} \right) \right] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} E \left[\varphi \left((t-s)^{2H} \sum_{i=0}^m X \left(\frac{\eta}{t-s} \right)_{\frac{i}{m}} \otimes \left\{ X \left(\frac{\eta}{t-s} \right)_{\frac{i+1}{m}} - X \left(\frac{\eta}{t-s} \right)_{\frac{i}{m}} \right\}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (t-s)^{2H} \sum_{i=0}^m G^{n,T/(t-s)} \left(X \left(\frac{\eta}{t-s} \right) \right)_{\frac{i}{m}} \otimes \left\{ G^{n,T/(t-s)} \left(X \left(\frac{\eta}{t-s} \right) \right)_{\frac{i+1}{m}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - G^{n,T/(t-s)} \left(X \left(\frac{\eta}{t-s} \right) \right)_{\frac{i}{m}} \right\} \right) \right) \right] \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} E \left[\varphi \left((t-s)^{2H} \mathbf{X} \left(\frac{\eta}{t-s} \right)_{01}^2, (t-s)^{2H} \mathbf{X} \left(\frac{\eta}{t-s} \right)_{01}^{2,n,T/(t-s)} \right) \right] \\
&= E \left[\varphi \left((t-s)^{2H} \mathbf{B}_{01}^2, (t-s)^{2H} \mathbf{B}_{01}^{2,n,T/(t-s)} \right) \right],
\end{aligned}$$

et la propriété (3.23) est ainsi démontrée. \square

Deuxième partie

L'équation de Volterra rugueuse

Présentation

La méthode des rough paths ayant conduit à une compréhension et un traitement très complets du système différentiel rugueux standard (2.1), il est à présent naturel de s'interroger sur la flexibilité de cette approche déterministe à travers la considération de systèmes différentiels moins classiques.

Un premier pas en cette direction a été franchi par [75], article dans lequel les auteurs envisagent l'équation avec retard rugueuse :

$$\begin{cases} y_t^i = \xi_0 + \int_0^t \sigma^{ij}(y_u, y_{u-r_1}, \dots, y_{u-r_k}) dx_u^j & \text{pour tout } t \geq 0, \\ y_t = \xi_t & \text{si } t \in [-r_k, 0], \end{cases} \quad (3.54)$$

où $r_1 < \dots < r_k$ sont des instants fixés. Le principe général qui a guidé leur analyse, et dont nous inspirerons notamment dans le chapitre 5, peut être résumé de la façon suivante : *pour offrir une interprétation raisonnable du système (3.54), puis le résoudre, il suffit d'adapter les outils utilisés dans le cas standard (processus contrôlés, intégrales itérées,...) à ce contexte "avec retard", en partant de l'observation du comportement algébrique des solutions du système lorsque x est un processus régulier.* Il est par exemple montré (dans le cas $\gamma \in (1/3, 1/2]$) qu'en tenant compte de la particularité du problème, une version modifiée de l'aire de Lévy, décrite (moralement) par l'expression

$$\mathbf{x}_{st}^{2,\text{retard}}(\nu) := \int_s^t dx_u \otimes \int_{s+\nu}^{u+\nu} dx_v, \quad \nu \in [-r_k, 0],$$

s'impose spontanément lors de la construction de l'intégrale $\int_0^t \sigma(y_u, y_{u-r_1}, \dots, y_{u-r_k}) dx_u$.

Dans les deux chapitres qui suivent, nous nous proposons de poursuivre ce projet d'extension de la méthode rough paths en envisageant le cas de l'équation de Volterra rugueuse :

$$y_t^i = a^i + \int_0^t \sigma^{ij}(t, u, y_u) dx_u^j, \quad (3.55)$$

où $a \in \mathbb{R}^d$ est une condition initiale donnée. La spécificité de ce système, par rapport à (2.1), tient bien sûr à la dépendance de l'intégrand $\sigma(t, u, y_u)$ vis-à-vis de la variable courante t . L'équation ne peut d'ailleurs se mettre sous la forme différentielle classique $dy_t = \sigma(y_t) dx_t$, et l'on parle plutôt d'équation intégrale.

La version régulière du système (lorsque x est différentiable) a été introduite par Volterra mais surtout étudiée par Traian Lalescu dans son mémoire de thèse "Sur les équations de Volterra" (1908) (repris en 1911 dans l'ouvrage "Introduction to the Theory of Integral Equations" de l'auteur). Elle a depuis été fréquemment employée dans le cadre de modèles issus de la biologie ou de la physique. Le livre [90] fournit une collection de solutions explicites pour des fonctions σ particulières, ainsi que de nombreuses méthodes de résolution du système.

La situation où $x = W$ désigne un mouvement Brownien standard et σ est déterministe a été traitée de façon exhaustive par Berger et Mizel à travers les deux articles [5, 6] (voir aussi [65]), dans lesquels l'intégrale $\int_0^t \sigma(t, u, y_u) dW_u$ est comprise au sens d'Itô. Leurs résultats ont ensuite été étendus au cas des semi-martingales dans [91].

Si la fonction σ est elle-même aléatoire, ce qui semble davantage plausible dans un certain nombre de modèles, et si cette fonction s'écrit par exemple

$$\sigma(t, u, Y_u) = \tilde{\sigma}(H_t, t, u, Y_u),$$

pour un processus $(H_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ donné, l'intégrand n'est plus nécessairement adapté à la filtration du Brownien : il faut alors faire appel à des méthodes de calcul anticipant comme le calcul de Malliavin. C'est ce qui est entrepris dans [3, 16, 17, 86, 83, 87]. Il est intéressant de noter que dans cette dernière référence, le système de Volterra étudié vient modéliser le taux de croissance d'un actif financier, et va ainsi au-delà des applications classiques inspirées par la biologie ou la physique.

Eu égard à l'ensemble des travaux que nous venons de citer, il semble assez légitime d'aspirer à une extension des résultats à un processus x plus général encore, avec notamment à l'esprit le cas du mBf. La démarche que nous adopterons à cet effet, inspirée comme nous l'annonçons de la théorie des rough paths, sera restituée en deux temps :

- Une première étape, retranscrite dans le chapitre 4, consistera à envisager le système via l'interprétation standard de l'intégrale rugueuse $\int_0^t \sigma(t, u, y_u) dx_u$, telle qu'elle est présentée dans la section 2.2 (on "fixe" simplement la variable t). On constatera notamment que si cette approche générale permet un traitement satisfaisant du cas Young ($\gamma > 1/2$), elle se révèle malheureusement limitée lorsque $\gamma \leq 1/2$: le raisonnement standard ne permet en effet pas d'établir l'existence d'une solution *globale* du système, définie sur tout intervalle $[0, T]$ donné.
- Pour tenter de remédier à cette difficulté technique, le chapitre 5 proposera ensuite une analyse approfondie du cas particulier où le noyau se présente sous la forme particulière

$$\sigma(t, u, y) = \phi(t - u) \tilde{\sigma}(y),$$

avec ϕ et $\tilde{\sigma}$ des fonctions régulières. Dans ce contexte, une réorganisation astucieuse du système conduira à la mise en place d'un formalisme particulier, dit *convolutionnel*, basé sur une version du 2-rough path mieux adaptée au problème.

Remarquons dès à présent que dans les deux cas, le caractère déterministe de la construction permettra de passer outre la distinction que nous évoquions ci-dessus entre intégrands adaptés et anticipants.

A notre connaissance, les considérations des deux chapitres qui suivent constituent la première tentative d'application de la méthode rough paths à l'équation de Volterra (3.55). Dans la situation où $x = B^H$ est un mBf d'indice de Hurst $H > 1/4$, il s'agit ainsi des premiers résultats d'existence et d'unicité (p.s) d'une solution pour (3.55). Comme dans le cas du système standard, l'approche rough paths ne prend véritablement tout son sens que lorsque $H \leq 1/2$. Le cas Young $H > 1/2$ sera néanmoins examiné dans un premier temps, ne serait-ce que parce qu'il amorce généralement la décomposition algébrique qui intervient dans le cas rugueux. Notez qu'une analyse plus approfondie de ce cas $H > 1/2$ a récemment été donnée dans [7], à partir des idées de [82].

Chapitre 4

Une première approche

L'équation de Volterra rugueuse

$$y_t = a + \int_0^t \sigma(t, u, y_u) dx_u, \quad (4.1)$$

sera ici analysée dans les trois contextes suivants :

- (i) *Le cas Young* (Section 4.1) : Lorsque x est un processus γ -höldérien avec $\gamma > 1/2$, et en supposant l'application $\sigma : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ suffisamment régulière vis-à-vis de ses trois variables, nous verrons qu'il est possible d'interpréter le système (4.1) au sens de Young, c'est-à-dire à partir des constructions de la sous-section 2.2.1.
- (ii) *Le cas Young avec singularité* (Section 4.2) : Toujours lorsque $\gamma > 1/2$, nous évoquerons ensuite la possibilité de traiter la présence d'une singularité au niveau des deux variables temporelles, c'est-à-dire un noyau de la forme

$$\sigma(t, u, y) = (t - u)^{-\alpha} \psi(y),$$

pour un certain coefficient $\alpha > 0$ et une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ assez régulière. Il n'est alors plus possible de faire directement appel à la décomposition (2.12), et l'interprétation au sens de Young passe par l'analyse attentive des sommes de Riemann associées à l'intégrale $\int_0^t \sigma(t, u, y_u) dx_u$. Le raisonnement conduit globalement à l'hypothèse $\gamma - \alpha > 1/2$. Sous cette condition, le système (4.1) peut être interprété et résolu dans l'espace $\mathcal{C}_1^\kappa([0, T]; \mathbb{R}^d)$, pour tout $\kappa \in (1/2, \gamma)$.

- (iii) *Le cas rugueux* (Section 4.3) : Lorsque $\gamma \in (1/3, 1/2]$, les éléments caractéristiques de la méthode des rough paths (processus contrôlés, intégrales itérées,...) doivent entrer en scène pour permettre de donner sens à l'intégrale $\int_0^t \sigma(t, u, y_u) dx_u$. Comme dans la section 2.3.1, la résolution du système s'effectue ensuite via un argument de point fixe dans l'espace des processus contrôlés (Définition 2.2.4), et mène à l'obtention d'une solution locale, définie sur un petit intervalle $[0, T_0]$, $0 < T_0 \leq T$. Nous mettrons par ailleurs en évidence les difficultés techniques qui surviennent lorsque l'on cherche à étendre cette solution locale en une solution globale définie sur $[0, T]$.

Dans la mesure où il s'agit à notre connaissance de résultats nouveaux, nous nous efforcerons de fournir dans les trois cas une rédaction exhaustive des raisonnements et des estimations utilisés. On pourra ainsi trouver à travers les preuves de ce chapitre les quelques détails passés sous silence dans les démonstrations du chapitre 2.

Evoquons succinctement la stratégie générale que nous avons adoptée pour obtenir les différents résultats à venir. Comme dans le cas du système différentiel rugueux standard (2.1), il semble naturel de chercher à interpréter et à résoudre l'équation (4.1) dans un espace höldérien. C'est l'approche suggérée par le formalisme des k -incrément, à travers l'intervention des deux opérateurs δ et Λ . Dans ce contexte, la grande différence entre le système standard et l'équation de Volterra (d'un point de vue pour l'instant heuristique) tient au fait que les incréments de la solution potentielle y de (4.1) entre deux instants $s < t$ dépendent de toute la trajectoire (de 0 à t), et pas seulement de son comportement entre s et t . En effet, si $s < t$, on a

$$(\delta y)_{st} = \int_s^t \sigma(t, u, y_u) dx_u + \int_0^s [\sigma(t, u, y_u) - \sigma(s, u, y_u)] dx_u. \quad (4.2)$$

De façon prévisible, la première intégrale qui apparaît dans (4.2) peut être traitée comme dans le cas des diffusions. Autrement dit, sous certaines conditions de régularité pour σ , la variable supplémentaire t dans l'intégrale ne joue ici aucun rôle proéminent. C'est la seconde intégrale de (4.2) qui constitue véritablement la spécificité de l'analyse de l'équation de Volterra, en impliquant l'intégralité du passé des trajectoires de x et y . Pour récupérer des incréments de la forme $|t - s|^\kappa$ de l'estimation de ce second terme, et ouvrir ainsi la voie à des arguments de points fixes classiques, il faut alors recourir aux propriétés de régularité de σ vis-à-vis de sa première variable. Dans tous les cas, l'estimation du membre de droite de (4.2) ne pourra s'effectuer qu'en faisant apparaître la norme de y sur l'intervalle $[0, t]$ entier. Lorsque $\gamma \in (1/3, 1/2]$, cette dépendance va se révéler rédhitoire dans la mise en place de l'argument classique de prolongement de la solution ; seule l'existence d'une solution locale pourra ainsi être établie dans la section 4.3. Comme nous l'annonçons dans la présentation de cette partie, nous ne sommes parvenus à surmonter ce problème d'extension que dans le cas particulier développé dans le chapitre suivant, par le biais d'une transformation du système et d'un procédé technique de localisation.

Concluons cette introduction en précisant plusieurs notations spécifiques à ce chapitre. Comme nous venons de l'évoquer, la première variable temporelle t de σ sera amenée à jouer un rôle bien distinct des deux autres variables $(u, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$. Pour cette raison, nous noterons fréquemment $\mathcal{Y}_u := (u, y_u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ et $\sigma_t(\mathcal{Y}_u) := \sigma(t, \mathcal{Y}_u)$. Par ailleurs, pour éviter toute confusion dans la notation des indices, nous ne ferons pas directement apparaître les dérivées partielles $\partial_l \sigma$ par rapport à chacune des $(d+2)$ variables réelles de la fonction, mais plutôt les opérateurs différentiels associés à σ , notés

$$D\sigma : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d+2}, \mathbb{R}^{d,m}),$$

$$D^2\sigma : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \text{Bil}(\mathbb{R}^{d+2}, \mathbb{R}^{d,m}), \quad \dots$$

Enfin, on rappelle que si U est un ouvert d'un espace normé E , la notation $\mathcal{C}^{n,\mathbf{b}}(U; \mathbb{R}^{k,l})$ désigne l'ensemble des fonctions $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^{k,l}$ n -fois différentiables, à dérivée bornées. En vue d'affiner les hypothèses de régularité sur σ , on fera en outre intervenir les espaces intermédiaires définis pour tout $\kappa \in (0, 1)$ par

$$\mathcal{C}^{n,\mathbf{b},\kappa}(U; \mathbb{R}^{k,l}) := \left\{ \sigma \in \mathcal{C}^{n,\mathbf{b}}(U; \mathbb{R}^{k,l}) : \sup_{x \neq y} \sup_{i,j} \frac{|D^n \sigma^{ij}(x) - D^n \sigma^{ij}(y)|}{\|x - y\|_E^\kappa} < \infty \right\}.$$

4.1 Le cas Young

Dans cette section, nous supposons que le coefficient de régularité höldérienne γ de x est supérieur à $1/2$. Rappelons brièvement la définition de l'intégrale qui s'impose dans ce contexte (voir la sous-section 2.2.1) :

Proposition 4.1.1. *Si $z \in \mathcal{C}_1^\rho([0, T]; \mathbb{R}^{d,n})$ pour un certain $\rho > 0$ tel que $\rho + \gamma > 1$, alors, pour tous $s, t \in [0, T]$, l'intégrale de Riemann $\int_s^t z_u d\tilde{x}_u$ (\tilde{x} différentiable) s'étend au processus x à travers la formule :*

$$\mathcal{J}_{st}(z dx) := z_s(\delta x)_{st} - \Lambda_{st}(\delta z \delta x). \quad (4.3)$$

En outre, $\mathcal{J}(z dx) \in \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$ et

$$\mathcal{N}[\mathcal{J}(z dx); \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)] \leq c_x \left\{ \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0([0, T]; \mathbb{R}^{d,n})] + T^\rho \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\rho([0, T]; \mathbb{R}^{d,n})] \right\}. \quad (4.4)$$

Munis de cette définition, on souhaiterait pouvoir écrire le système de Volterra rugueux (4.1) sous la forme

$$y_t = a + \mathcal{J}_{0t}(\sigma(t, \cdot, y_\cdot) dx). \quad (4.5)$$

Le lemme élémentaire suivant vient garantir la validité de cette écriture :

Lemme 4.1.2. *Si $y \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$ et $\sigma \in \mathcal{C}^{1,b}([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,n})$, alors, pour tout $t \geq 0$, $\sigma(t, \cdot, y_\cdot) \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^{d,n})$ et*

$$\mathcal{N}[\sigma(t, \cdot, y_\cdot); \mathcal{C}_1^\gamma] \leq c_\sigma (T^{1-\gamma} + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma]). \quad (4.6)$$

Démonstration. Il s'agit d'une estimation évidente : si $0 \leq u < v \leq T$,

$$|\sigma(t, v, y_v) - \sigma(t, u, y_u)| \leq \|D\sigma\|_\infty (|v - u| + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma]|v - u|^\gamma),$$

et donc $\mathcal{N}[\sigma(t, \cdot, y_\cdot); \mathcal{C}_1^\gamma] \leq \|D\sigma\|_\infty (T^{1-\gamma} + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma])$. □

Le résultat principal de cette section est à présent le suivant :

Théorème 4.1.1. *On suppose que le processus x est un élément de $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$ avec $\gamma > 1/2$. Soit $\kappa \in (0, 1)$ tel que $\kappa(1 + \gamma) > 1$, $a \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathcal{C}^{2,b,\kappa}([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m+1})$. Alors l'équation (4.5) admet une unique solution dans $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$.*

Evidemment, ce théorème peut être appliqué aux trajectoires d'un mBf pour donner :

Corollaire 4.1.3. *Soit B un mBf m -dimensionnel d'indice de Hurst $H > 1/2$ défini sur espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) . Soit $\gamma \in (1/2, H)$ et $\kappa \in (0, 1)$ tels que $\kappa(1 + \gamma) > 1$, $a \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathcal{C}^{2,b,\kappa}([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m+1})$. Alors le système*

$$Y_t^i = a + \int_0^t \sigma^{i0}(t, u, Y_u) du + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(t, u, Y_u) dB_u^j,$$

interprété de façon trajectorielle grâce à la proposition 4.1.1, admet (p.s) une unique solution dans $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$.

Dans un souci de clarté, nous diviserons la preuve du théorème 4.1.1 en deux propositions : nous mettrons d'abord en évidence l'existence et l'unicité d'une solution locale, définie sur un petit intervalle $[0, T_0]$ avec $0 < T_0 \leq T$, puis nous ferons appel à des arguments de recollement succesifs pour étendre cette solution sur $[0, T]$.

On rappelle que les notations \mathcal{Y} et σ_t ont été précisées au cours de l'introduction de ce chapitre, et que l'on a posé, dans le chapitre 2,

$$\mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}] := \sup_{t \in [0, T]} |y_t| + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma].$$

Proposition 4.1.4 (Existence et unicité locales). *Sous les hypothèses du théorème 4.1.1, il existe un temps $T_0 \in (0, T]$ tel que l'équation (4.5) admet une unique solution dans $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. C'est le même type d'argument de point fixe que dans la preuve du théorème 2.3.1. Pour le mettre en œuvre, on associe à chaque $y \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])$ l'élément $z = \Gamma(y)$ défini par

$$z_t = \Gamma(y)_t = y_0 + \mathcal{J}_{0t}(\sigma_t(\mathcal{Y})) dx.$$

La solution que nous cherchons apparaîtra comme un point fixe de Γ à l'intérieur d'une boule invariante.

Etape 1 : Invariance d'une boule. On fixe un temps $T_1 \in (0, T]$ (T_1 sera précisé de façon rétrospective). Soit $y \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])$ tel que $y_0 = a$ et posons $z := \Gamma(y)$, où, bien entendu, l'application Γ est adaptée à l'intervalle $[0, T_1]$.

A ce stade, souvenons-nous de la spécificité de l'équation de Volterra. Comme dans (4.2), l'incrément $(\delta z)_{ts}$ peut être décomposé en une somme de deux termes qui recevront un traitement distinct : $I_{st}^1 = \mathcal{J}_{st}(\sigma_t(\mathcal{Y})) dx$ et $I_{st}^2 = \mathcal{J}_{os}([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y})) dx$. Le point de départ pour estimer ces deux intégrales est bien sûr l'inégalité (4.4). Toutefois, en ce qui concerne I_{st}^2 , il est clair que cette dernière estimation ne suffira pas à faire émerger des incréments en $|t - s|$ (on cherche une estimation $\mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma]$, donc une relation de la forme $|I_{st}^2| \leq |t - s|^\gamma f(y)$). C'est ici qu'entre en jeu le résultat technique suivant, qui amorce en outre l'argument de contraction de l'étape 2 :

Lemme 4.1.5. *Soit $I = [a, b] \subset [0, T]$ et $y, \tilde{y} \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ tels que $y_a = \tilde{y}_a$. Alors, sous les hypothèses du théorème 4.1.1, on a, pour tous $s, t \in I$,*

$$\mathcal{N}[[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}); \mathcal{C}_1^\gamma(I)] \leq c_\sigma |t - s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma(I)]\}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{C}_1^\gamma(I)] \leq c_\sigma \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma(I)] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)]\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)], \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}) - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{C}_1^{\kappa\gamma}(I)] \\ \leq c_\sigma |t - s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma(I)]^\kappa + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)]^\kappa\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Démonstration. Voir Appendix. □

Entrons à présent dans le détail des estimations. Pour traiter I^1 , on utilise (4.4) pour déduire

$$\begin{aligned} |I_{st}^1| &\leq c_x |t - s|^\gamma \{ \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}); \mathcal{C}_1^0([0, T_1])] + T_1^\gamma \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \} \\ &\leq c_{x,\sigma} |t - s|^\gamma \{ 1 + T_1^\gamma \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \}, \end{aligned}$$

et ainsi, grâce au lemme 4.1.2, $\mathcal{N}[I^1; \mathcal{C}_2^\gamma] \leq c_{x,\sigma} \{ 1 + T_1^\gamma \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \}$.

On décompose ensuite I^2 en $I^2 = I^{2,1} + I^{2,2}$, avec

$$I_{st}^{2,1} = [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}_0) (\delta x)_{0s} \quad \text{et} \quad I_{st}^{2,2} = \Lambda_{0s}(\delta([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y})) \delta x).$$

Remarquons d'abord que $|I_{st}^{2,1}| \leq \|D\sigma\|_\infty |t - s| \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] T_1^\gamma$, et donc $\mathcal{N}[I^{2,1}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T_1])] \leq c_{x,\sigma} T_1$. Quant à $I^{2,2}$, on utilise la propriété de contraction (2.6) et l'estimation (4.7) pour obtenir

$$\begin{aligned} |I_{st}^{2,2}| &\leq c_x \mathcal{N}[[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] T_1^\gamma \\ &\leq c_{x,\sigma} |t - s| \{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \} T_1^{2\gamma}, \end{aligned}$$

de telle sorte que $\mathcal{N}[I^{2,2}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T_1])] \leq c_{x,\sigma} T_1^{1+\gamma} (1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1]))$.

En rassemblant ces différentes estimations, on déduit

$$\mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \leq c_{x,\sigma} \{ 1 + T_1^\gamma \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \}.$$

On choisit alors $T_1 \in (0, T]$ tel que pour tout $0 < T_0 \leq T_1$, il existe un rayon A_{T_0} pour lequel la boule

$$B_{T_0,a}^{A_{T_0}} = \{ y \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0]) : y_0 = a, \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \leq A_{T_0} \}$$

est invariante par Γ . Le rayon A_{T_0} est par ailleurs choisi comme fonction croissante de T_0 , ce qui sera utilisé dans l'étape suivante.

Etape 2 : Propriété de contraction. On fixe un temps $T_0 \in (0, T_1]$ et soit $y, \tilde{y} \in B_{T_0,a}^{A_{T_0}}$. On pose $z := \Gamma(y)$, $\tilde{z} := \Gamma(\tilde{y})$ et l'on décompose à nouveau $\delta(z - \tilde{z})$ en $\delta(z - \tilde{z}) = J^{1,1} + J^{1,2} + J^2$, avec

$$J_{st}^{1,1} = (\sigma_t(\mathcal{Y}_s) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}_s)) (\delta x)_{st} \quad , \quad J_{st}^{1,2} = \Lambda_{st} \left(\delta(\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}})) \delta x \right),$$

$$J_{st}^2 = \Lambda_{0s} \left(\delta([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}) - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}})) \delta x \right).$$

Estimons maintenant la norme γ -höldérienne de chacun de ces trois termes.

Cas de $J^{1,1}$: On a $\mathcal{N}[J^{1,1}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T_0])] \leq \|D\sigma\|_\infty \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^0([0, T_0])] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma]$. Cependant, puisque $y_0 = \tilde{y}_0 = a$, $y_s - \tilde{y}_s = y_s - \tilde{y}_s - (y_0 - \tilde{y}_0)$, donc $\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^0([0, T_0])] \leq \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] T_0^\gamma$ et ainsi

$$\mathcal{N}[J^{1,1}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T_0])] \leq c_{x,\sigma} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] T_0^\gamma.$$

Cas de $J^{1,2}$: Les inégalités (2.6) et (4.8) fournissent :

$$\begin{aligned} |J_{st}^{1,2}| &\leq c \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] |t - s|^{2\gamma} \\ &\leq c_{x,\sigma} |t - s|^\gamma (1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]) \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] T_0^\gamma, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathcal{N}[J^{1,2}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T_0])] \leq c_{x,\sigma} (1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]) \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] T_0^\gamma.$$

Cas de J^2 : Par (2.6) et (4.9),

$$\begin{aligned} |J_{st}^2| &\leq c \mathcal{N}[[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}) - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{C}_1^{\kappa\gamma}([0, T_0])] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] T_0^{\gamma(1+\kappa)} \\ &\leq c_{\sigma,x} |t - s|^\gamma T_0^{1+\gamma\kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]^\kappa + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]^\kappa\}, \end{aligned}$$

ou en d'autres termes

$$\mathcal{N}[J^2; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T_0])] \leq c_{\sigma,x} T_0^{1+\gamma\kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]^\kappa + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]^\kappa\}.$$

Par conséquent, $\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \leq c_{\sigma,x} T_0^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \{1 + A_{T_0}\}$ et puisque l'on a supposé $z_0 = \tilde{z}_0$, $\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}([0, T_0])] \leq c_{\sigma,x} T_0^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}([0, T_0])] \{1 + A_{T_0}\}$. Le rayon A_{T_0} décroissant lorsque T_0 tend vers 0, il existe un temps $T_0 \in (0, T_1]$ tel que l'application Γ , restreinte à la boule invariante $B_{T_0,a}^{A_{T_0}}$, est une contraction stricte. D'où l'existence d'un point fixe dans cet ensemble.

L'unicité de cette solution locale est facile à établir à partir des estimations de l'étape 2. En effet, si y et \tilde{y} sont deux solutions dans $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])$, on a, pour tout $T_{0,0} \leq T_0$,

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}([0, T_{0,0}])] \leq c_{\sigma,x} T_{0,0}^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}([0, T_{0,0}])] \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]\},$$

ce qui permet d'affirmer que $y|_{[0, T_{0,0}]} = \tilde{y}|_{[0, T_{0,0}]}$ pour $T_{0,0}$ assez petit. On itère ensuite la démarche sur $[T_{0,0}, 2T_{0,0}]$, $[2T_{0,0}, 3T_{0,0}]$, ... jusqu'à ce que l'intervalle $[0, T_0]$ soit recouvert. \square

Proposition 4.1.6 (Extension de la solution). *Sous les hypothèses du théorème 4.1.1, la solution locale $y^{(1)}$ définie par la proposition précédente peut être prolongée en une unique solution globale dans $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Nous allons en fait montrer l'existence d'une constante $\varepsilon > 0$, **indépendante** de $y^{(1)}$, telle que $y^{(1)}$ puisse être prolongée en une solution sur $[0, T_0 + \varepsilon]$. La conclusion découlera ensuite d'une simple itération de la procédure.

A cette fin, on introduit la fonction Γ définie pour tout $z \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])$ tel que $z|_{[0, T_0]} = y^{(1)}$ par

$$\hat{z}_t = \Gamma(z)_t = \begin{cases} y_t^{(1)} & \text{si } t \in [0, T_0] \\ a + \mathcal{J}_{0t}(\sigma_t(\mathcal{Z})) dx & \text{si } t \in [T_0, T_0 + \varepsilon] \end{cases}.$$

Comme dans la preuve précédente, nous cherchons un point fixe de Γ .

Etape 1 : Invariance d'une boule. Pour estimer $\mathcal{N}[\hat{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])]$, on considère séparément les trois cas $(s, t \in [0, T_0])$, $(s, t \in [T_0, T_0 + \varepsilon])$ et $(s \leq T_0 \leq t \leq T_0 + \varepsilon)$.

Dans le premier cas, on a simplement $\mathcal{N}[\hat{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \leq \mathcal{N}[y^{(1)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]$. Si $s, t \in [T_0, T_0 + \varepsilon]$, on décompose $(\delta\hat{z})_{st}$ comme précédemment, c'est-à-dire $(\delta\hat{z})_{st} = I_{st}^{1,1} + I_{st}^{1,2} + I_{st}^{2,1} + I_{st}^{2,2}$, avec

$$\begin{aligned} I_{st}^{1,1} &= \sigma_t(\mathcal{Z}_s) (\delta x)_{st} \quad , \quad I_{st}^{1,2} = \Lambda_{st}(\delta(\sigma_t(\mathcal{Z})) \delta x), \\ I_{st}^{2,1} &= [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Z}_0) (\delta x)_{0s} \quad , \quad I_{st}^{2,2} = \Lambda_{0s}(\delta([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Z})) \delta x). \end{aligned}$$

Majorons individuellement chacun de ces termes : d'abord, en utilisant (2.6) et (4.6), on déduit

$$\begin{aligned} \left| I_{st}^{1,2} \right| &\leq c \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Z}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] |t - s|^{2\gamma} \\ &\leq c_{\sigma,x} \{1 + \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])]\} |t - s|^{2\gamma}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'affirmer $\mathcal{N}[I^{1,2}; \mathcal{C}_2^\gamma([T_0, T_0 + \varepsilon])] \leq c_{\sigma,x} \varepsilon^\gamma \{1 + \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])]\}$. Grâce à (2.6) et (4.7), nous disposons ensuite de l'estimation suivante pour $I_{st}^{2,2}$:

$$\begin{aligned} \left| I_{st}^{2,2} \right| &\leq c \mathcal{N}[(\sigma_t - \sigma_s)(\mathcal{Z}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] T^{2\gamma} \\ &\leq c_{\sigma,x} |t - s| \{1 + \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])]\}, \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{N}[I^{2,2}; \mathcal{C}_2^\gamma([T_0, T_0 + \varepsilon])] \leq c_{\sigma,x} \varepsilon^{1-\gamma} \{1 + \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])]\}$.

Puisque trivialement $\mathcal{N}[I^{i,1}; \mathcal{C}_2^\gamma([T_0, T_0 + \varepsilon])] \leq c_{\sigma,x}$ pour $i = 1, 2$, on déduit ainsi

$$\mathcal{N}[\hat{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([T_0, T_0 + \varepsilon])] \leq c_{\sigma,x} \{1 + \varepsilon^{1-\gamma} \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])]\}.$$

Enfin, l'estimation dans le troisième cas $0 \leq s \leq T_0 \leq t \leq T_0 + \varepsilon$ est une conséquence des deux cas précédents : en effet,

$$\begin{aligned} |(\delta \hat{z})_{st}| &= |(\delta \hat{z})_{sT_0} + (\delta \hat{z})_{T_0t}| \\ &\leq \mathcal{N}[y^{(1)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] |T_0 - s|^\gamma + \mathcal{N}[\hat{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([T_0, T_0 + \varepsilon])] |t - T_0|^\gamma \\ &\leq \left\{ \mathcal{N}[y^{(1)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] + \mathcal{N}[\hat{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([T_0, T_0 + \varepsilon])]\right\} |t - s|^\gamma. \end{aligned}$$

En rassemblant ces différentes estimations, on obtient :

$$\mathcal{N}[\hat{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \leq c_{\sigma,x}^1 \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^{(1)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] + \varepsilon^{1-\gamma} \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])]\right\}.$$

Il est alors naturel de poser

$$\varepsilon = (2c_{\sigma,x}^1)^{-1/(1-\gamma)} \quad (\varepsilon \text{ ne dépend pas } y^{(1)}) \text{ et } N_1 = 2c_{\sigma,x}^1 \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^{(1)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])]\right\},$$

de telle sorte que si $\mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \leq N_1$, alors $\mathcal{N}[\hat{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \leq \frac{N_1}{2} + \frac{N_1}{2} = N_1$. En d'autres termes, la boule

$$B_{y^{(1)}, T_0, \varepsilon}^{N_1} = \left\{ z \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon]) : z_{|[0, T_0]} = y^{(1)}, \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \leq N_1 \right\}$$

est stable par Γ .

Etape 2 : Propriété de contraction. Nous allons dans un premier temps chercher à mettre en évidence l'existence d'une constante $\eta \in (0, \varepsilon]$ telle que l'application Γ précédemment définie (adaptée à l'intervalle $[0, T_0 + \eta]$) satisfait une propriété de contraction une fois restreinte à une certaine boule (invariante).

Soit $z^{(1)}, z^{(2)} \in B_{y^{(1)}, T_0, \eta}^{N_1}$ et posons $\hat{z}^{(1)} = \Gamma(z^{(1)})$, $\hat{z}^{(2)} = \Gamma(z^{(2)})$. Bien entendu, puisque, par définition de Γ , $\hat{z}^{(1)}$ et $\hat{z}^{(2)}$ coïncident sur $[0, T_0]$, on a $\mathcal{N}[\hat{z}^{(1)} - \hat{z}^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \eta])] = \mathcal{N}[\hat{z}^{(1)} - \hat{z}^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([T_0, T_0 + \eta])]$. Si $T_0 \leq s < t \leq T_0 + \eta$, on utilise, comme dans la preuve de la proposition 4.1.4, la décomposition $\delta(\hat{z}^{(1)} - \hat{z}^{(2)})_{st} = J_{st}^{1,1} + J_{st}^{1,2} + J_{st}^2$, où

$$J_{st}^{1,1} = (\sigma_t(\mathcal{Z}_s^{(1)}) - \sigma_t(\mathcal{Z}_s^{(2)})) (\delta x)_{st} \quad , \quad J_{st}^{1,2} = \Lambda_{st}(\delta(\sigma_t(\mathcal{Z}^{(1)}) - \sigma_t(\mathcal{Z}^{(2)})) \delta x),$$

$$J_{st}^2 = \Lambda_{0s}(\delta([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Z}^{(1)}) - [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Z}^{(2)})) \delta x),$$

et l'on estime ensuite chacun de ces termes séparément. Pour $J^{1,1}$, on a

$$\left| J_{st}^{1,1} \right| \leq \|D\sigma\|_\infty \|z_s^{(1)} - z_s^{(2)}\| \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] |t - s|^\gamma.$$

Or

$$\left| z_s^{(1)} - z_s^{(2)} \right| = \left| [z_s^{(1)} - z_s^{(2)}] - [z_{T_0}^{(1)} - z_{T_0}^{(2)}] \right| \leq \mathcal{N}[z^{(1)} - z^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \eta])] \eta^\gamma, \quad (4.10)$$

et donc

$$\mathcal{N}[J^{1,1}; \mathcal{C}_2^\gamma([T_0, T_0 + \eta])] \leq c_{x,\sigma} \eta^\gamma \mathcal{N}[z^{(1)} - z^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \eta])]. \quad (4.11)$$

Le terme $J_{st}^{1,2}$ peut quant à lui être majoré de la façon suivante : d'après (2.6) et (4.8),

$$\begin{aligned} \left| J_{st}^{1,2} \right| &\leq c \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Z}^{(1)}) - \sigma_t(\mathcal{Z}^{(2)}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \eta])] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] |t - s|^{2\gamma} \\ &\leq c_{\sigma,x} |t - s|^\gamma \eta^\gamma \{1 + 2N_1\} \mathcal{N}[z^{(1)} - z^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \eta])]. \end{aligned}$$

Enfin, il découle de la conjugaison de (2.6) et (4.9) :

$$\begin{aligned} \left| J_{st}^2 \right| &\leq c \mathcal{N}[[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Z}^{(1)}) - [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Z}^{(2)}); \mathcal{C}_1^{\kappa\gamma}([0, T_0 + \eta])] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] T^{\gamma(1+\kappa)} \\ &\leq c_{\sigma,x} |t - s|^\gamma \eta^{1-\gamma} \{1 + 2N_1^\kappa\} \mathcal{N}[z^{(1)} - z^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \eta])]. \end{aligned}$$

Ces différentes bornes sur $J_{st}^{1,1}$, $J_{st}^{1,2}$ et J_{st}^2 conduisent à l'inégalité :

$$\mathcal{N}[\hat{z}^{(1)} - \hat{z}^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \eta])] \leq c_{\sigma,x} \eta^{1-\gamma} \{1 + N_1^\kappa + N_1\} \mathcal{N}[z^{(1)} - z^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \eta])],$$

puis, en utilisant à nouveau l'estimation (4.10),

$$\mathcal{N}[\hat{z}^{(1)} - \hat{z}^{(2)}; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}([0, T_0 + \eta])] \leq c_{\sigma,x}^1 \eta^{1-\gamma} \{1 + N_1^\kappa + N_1\} \mathcal{N}[z^{(1)} - z^{(2)}; \mathcal{C}_1^{0,\gamma}([0, T_0 + \eta])].$$

On peut à présent choisir $\eta \in (0, \varepsilon]$ tel que $c_{\sigma,x}^1 \eta^{1-\gamma} \{1 + N_1^\kappa + N_1\} \leq \frac{1}{2}$, et l'application Γ devient ainsi une contraction stricte sur $B_{y^{(1)}, T_0, \eta}^{N_1}$. Il est facile de vérifier que la boule $B_{y^{(1)}, T_0, \eta}^{N_1}$ est elle aussi invariante par Γ , d'où l'existence d'un point fixe dans cet ensemble, noté $y^{(1),\eta}$.

Remarquons à présent que les arguments que nous venons d'utiliser s'appliquent aux ensembles stables (voir le lemme 4.1.7 ci-dessus)

$$\left\{ z \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + 2\eta]) : z_{[0, T_0 + \eta]} = y^{(1),\eta}, \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + 2\eta])] \leq N_1 \right\}.$$

Par exemple, pour établir l'équivalent de la relation (4.11) sur cet intervalle étendu, il suffit d'écrire, si $s \in [T_0 + \eta, T_0 + 2\eta]$,

$$\left| z_s^{(1)} - z_s^{(2)} \right| = \left| [z_s^{(1)} - z_s^{(2)}] - [z_{T_0 + \eta}^{(1)} - z_{T_0 + \eta}^{(2)}] \right| \leq \mathcal{N}[z^{(1)} - z^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + 2\eta])] \eta^\gamma.$$

Ce constat permet d'étendre $y^{(1),\eta}$ en une solution $y^{(1),2\eta}$ sur $[0, T_0 + 2\eta]$, puis $y^{(1),3\eta}$ sur $[0, T_0 + 3\eta]$,... jusqu'à ce que $[0, T_0 + \varepsilon]$ soit recouvert, comme nous le souhaitions initialement.

La question de l'unicité de cette solution peut ensuite être traitée comme dans la preuve de la proposition 4.1.4, à partir des estimations mises en évidence dans l'argument de contraction. \square

Lemme 4.1.7. *Avec les notations de la preuve précédente, les ensembles*

$$\left\{ z \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + l\eta]) : z_{|[0, T_0 + (l-1)\eta]} = y^{(1), (l-1)\eta}, \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + l\eta])] \leq N_1 \right\}$$

sont stables par Γ .

Démonstration. Si z appartient à un tel ensemble, on définit

$$\tilde{z}_t = \begin{cases} z_t & \text{if } t \in [0, T_0 + l\eta] \\ z_{T_0 + l\eta} & \text{if } t \in [T_0 + l\eta, T_0 + \varepsilon] \end{cases}.$$

Clairement, $\tilde{z} \in B_{y^{(1), T_0, \varepsilon}}^{N_1}$, et donc, grâce à la première étape de la preuve précédente, $\Gamma(\tilde{z}) \in B_{y^{(1), T_0, \varepsilon}}^{N_1}$. A présent, puisque $y^{(1), (l-1)\eta}$ est solution sur $[0, T_0 + (l-1)\eta]$, on a $\Gamma(\tilde{z})_{|[0, T_0 + (l-1)\eta]} = y^{(1), (l-1)\eta}$, ce qui signifie que $\Gamma(\tilde{z})$ est un prolongement de $\Gamma(z)$, et de ce fait

$$\mathcal{N}[\Gamma(z); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + l\eta])] \leq \mathcal{N}[\Gamma(\tilde{z}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \leq N_1.$$

□

Nous l'avons souligné dans le chapitre 2 et utilisé dans le chapitre 3 : l'un des résultats fondamentaux de la théorie des rough paths (appliquée au système différentiel standard) est la continuité de l'application d'Itô associée au système, telle qu'elle est retranscrite par l'inégalité 2.30. Dans ce contexte de l'équation de Volterra-Young, nous disposons du résultat analogue suivant :

Proposition 4.1.8. *On définit l'application d'Itô F par $F(a, x) = y$, où y est l'unique solution (donnée par le théorème 4.1.1) du système de Volterra (4.5). Alors F est localement lipschitzienne. Plus précisément, il existe une application $C : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, bornée sur tout ensemble compact, telle que pour tout $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}^d$, $x, \tilde{x} \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T])$,*

$$\mathcal{N}[F(a, x) - F(\tilde{a}, \tilde{x}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T])] \leq C(\mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T])], \mathcal{N}[\tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T])]) \{ |a - \tilde{a}| + \mathcal{N}[x - \tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T])] \}. \quad (4.12)$$

Démonstration. L'inégalité (4.12) découle en fait facilement des différentes estimations établies au cours des preuves des propositions 4.1.4 et 4.1.6. Nous n'esquisserons ainsi que les grandes lignes du raisonnement.

On fixe deux éléments $(a, x), (\tilde{a}, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}_1^\gamma([0, T])$ et l'on pose $y = F(a, x)$, $\tilde{y} = F(\tilde{a}, \tilde{x})$.

Etape 1 : inégalité locale. On considère un temps $T_0 \leq T$ qui sera fixé à la fin de cette première étape. Dans un souci de concision, on introduit la notation

$$R = \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma]\} \{1 + \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] + \mathcal{N}[\tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma]\}.$$

Par définition de y, \tilde{y} , on a $y_t = a + \mathcal{J}_{0t}(\sigma_t(\mathcal{Y})) dx$ et $\tilde{y}_t = \tilde{a} + \mathcal{J}_{0t}(\sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}})) d\tilde{x}$, donc, pour tous $s, t \in [0, T_0]$, $\delta(y - \tilde{y})_{st} = I_{st}^{1,1,\Delta} + I_{st}^{1,2,\Delta} + I_{st}^{2,1,\Delta} + I_{st}^{2,2,\Delta}$, avec

$$I_{st}^{1,1,\Delta} = \sigma_t(\mathcal{Y}_s)(\delta x)_{st} - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}_s)(\delta \tilde{x})_{st} \quad , \quad I_{st}^{1,2,\Delta} = \Lambda_{st} \left(\delta(\sigma_t(\mathcal{Y}))\delta x - \delta(\sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}))\delta \tilde{x} \right),$$

$$I_{st}^{2,1,\Delta} = [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}_0)(\delta x)_{0s} - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}_0)(\delta \tilde{x})_{0s},$$

$$I_{st}^{2,2} = \Lambda_{0s} \left(\delta([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}))\delta x - \sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}))\delta\tilde{x} \right).$$

En écrivant par exemple

$$I_{st}^{1,1,\Delta} = \sigma_t(\mathcal{Y}_s)\delta(x - \tilde{x})_{st} + [\sigma_t(\mathcal{Y}_s) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}_s)](\delta\tilde{x})_{st}, \quad (4.13)$$

des estimations similaires à celles de la preuve de la proposition 4.1.4 conduisent à

$$\mathcal{N}[I^{1,1,\Delta}; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T_0])] \leq c_\sigma R \{T_0^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] + |a - \tilde{a}| + \mathcal{N}[x - \tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma]\}.$$

On procède ensuite de la même façon pour $I^{1,2,\Delta}$, $I^{2,1,\Delta}$, $I^{2,2,\Delta}$ pour finalement obtenir

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \leq c_\sigma^1 R \{T_0^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] + |a - \tilde{a}| + \mathcal{N}[x - \tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma]\}.$$

On choisit à présent $T_0 = (2c_\sigma^1 R)^{-1/\gamma}$, ce qui permet d'affirmer

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] \leq 2c_\sigma^1 R \{|a - \tilde{a}| + \mathcal{N}[x - \tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma]\}.$$

Etape 2 : Prolongement de l'inégalité. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 4.1.6, conjointement à des décompositions telles que (4.13), il n'est pas difficile d'établir : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \\ & \leq c_\sigma^2 R \{ \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0])] + |a - \tilde{a}| + \mathcal{N}[x - \tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma] + \varepsilon^{1-\gamma} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en prenant $\varepsilon = (2c_\sigma^2 R)^{-1/(1-\gamma)}$, on obtient

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \leq 2c_\sigma^2 R(2c_\sigma^1 R + 1) \{|a - \tilde{a}| + \mathcal{N}[x - \tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma]\}.$$

On répète ensuite la démarche sur $[0, T_0 + 2\varepsilon]$, $[0, T_0 + 3\varepsilon]$, \dots , $[0, T_0 + l(R)\varepsilon]$ où $T_0 + l(R)\varepsilon = T$, et finalement $\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T])] \leq D(R) \{|a - \tilde{a}| + \mathcal{N}[x - \tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma]\}$ pour une certaine fonction croissante $D : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$.

Etape 3 : Conclusion. Il reste à observer que le même type de raisonnement permet de montrer que $\mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma] \leq G(\mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma])$ et $\mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma] \leq G(\mathcal{N}[\tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma])$ pour une certaine fonction $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ bornée sur tout ensemble compact (nous aurions également pu mettre en évidence cette estimation à partir de la preuve du théorème 4.1.1). Ainsi,

$$R \leq \{1 + G(\mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma]) + G(\mathcal{N}[\tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma])\} \{1 + \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] + \mathcal{N}[\tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma]\}$$

et l'inégalité (4.12) est vérifiée avec $C(a, b) = D(\{1 + G(a) + G(b)\} \{1 + a + b\})$. □

4.2 Le cas Young en présence d'une singularité

4.2.1 Interprétation du système

Cette section est consacrée à l'étude d'un cas particulier du système (4.1), dans lequel le champ de vecteurs σ présente une singularité en (t, u) sur la diagonale. Plus précisément, nous considérerons ici l'équation

$$y_t = a + \int_0^t (t - u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u, \quad (4.14)$$

avec $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,n}$ une application suffisamment régulière, $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^n)$ avec $\gamma > 1/2$ et α est un coefficient positif dans un intervalle à préciser. Ainsi, l'application σ qui apparaît dans (4.1) aura tendance à exploser aux abords de la diagonale

$$D \times \mathbb{R}^d = \left\{ (t, t, y), t \in [0, T], y \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

La présence de cette singularité nous empêche d'utiliser directement la décomposition (2.10) pour définir l'intégrale rugueuse $\int_0^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u$. Une définition au sens de Young, c'est-à-dire comme limite de sommes de Riemann, demeure néanmoins possible si α est assez petit :

Lemme 4.2.1. *On fixe $t \in [0, T]$ et l'on suppose que les trois coefficients α, κ, γ sont tels que*

$$\gamma > 1/2 \quad , \quad \alpha < \kappa < \gamma \quad , \quad \gamma + \kappa - \alpha > 1.$$

Enfin, soit $y \in \mathcal{C}_1^\kappa([0, T]; \mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{C}^{1,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$. Alors, pour toute suite de partitions $\Delta_k([0, t]) := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t\}$ dont le pas tend vers 0 et telle que $t_k \rightarrow t$, la somme de Riemann

$$\sum_{\Delta_k([s,t])} (t-t_i)^{-\alpha} \psi(y_{t_i}) (\delta x)_{t_i t_{i+1}}$$

converge lorsque k tend vers l'infini. On définit alors naturellement

$$\int_s^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\Delta_k([s,t])} (t-t_i)^{-\alpha} \psi(y_{t_i}) (\delta x)_{t_i t_{i+1}}. \quad (4.15)$$

Démonstration. Il suffit de traduire, en termes de sommes de Riemann, la décomposition (a priori formelle)

$$\int_0^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u = \int_0^t \frac{\psi(y_u) - \psi(y_t)}{(t-u)^\alpha} dx_u + \psi(y_t) \left\{ \frac{x_t}{t^\alpha} + \alpha \int_0^t \frac{x_u - x_t}{(t-u)^{\alpha+1}} du \right\}. \quad (4.16)$$

La convergence de la somme associée à $\int_0^t \frac{x_u - x_t}{(t-u)^{\alpha+1}} du$ est évidente, tandis que la convergence de la somme associée à $\int_0^t \frac{\psi(y_u) - \psi(y_t)}{(t-u)^\alpha} dx_u$ est une conséquence du théorème de Young. En effet, la fonction $\varphi : u \rightarrow \frac{\psi(y_t) - \psi(y_u)}{(t-u)^\alpha}$ appartient à $\mathcal{C}_1^{\kappa-\alpha}([0, t]; \mathbb{R}^{d,m})$, puisque, si $0 < u < v < t$,

$$\begin{aligned} & |\varphi_v - \varphi_u| \\ & \leq |\psi(y_t) - \psi(y_v)| |(t-v)^{-\alpha} - (t-u)^{-\alpha}| \\ & \quad + |(t-u)^{-\alpha}| |\psi(y_t) - \psi(y_v) - (\psi(y_t) - \psi(y_u))| \\ & \leq c_1 \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] |t-v|^\kappa \left(\frac{1}{|t-v|^\alpha} \right)^{1-(\kappa-\alpha)} \left(\frac{|v-u|}{|t-v|^{\alpha+1}} \right)^{\kappa-\alpha} + \frac{c_2}{|v-u|^\alpha} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] |v-u|^\kappa \\ & \leq c_1 \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] |v-u|^{\kappa-\alpha} + c_2 \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] |v-u|^{\kappa-\alpha}, \end{aligned}$$

et si $u < v = t$, comme $\varphi_t = 0$,

$$|\varphi_v - \varphi_u| = \frac{|\psi(y_v) - \psi(y_u)|}{|(v-u)^\alpha} \leq c \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] |v-u|^{\kappa-\alpha}.$$

Le critère de convergence de Young est ainsi vérifié puisque l'on a supposé $\gamma + \kappa - \alpha > 1$. \square

Remarque 4.2.2. Suivant la définition (4.15), nous allons établir les estimations nécessaires à la résolution du système (4.14) à l'aide de manipulations de sommes de Riemann. Nous aurions également pu prendre appui sur la décomposition (4.16) et ainsi se ramener à des intégrales de Young plus classiques. Les calculs sont en fait tout aussi laborieux dans les deux cas. Ces calculs permettraient ainsi de prendre conscience de la convivialité du cadre offert par les mécanismes de l'intégration algébrique (lorsque ces mécanismes peuvent être directement appliqués).

Une autre approche du problème eut consisté à faire appel à une procédure de régularisation de la singularité (remplacer $(t-u)^{-\alpha}$ par $(t-u+\varepsilon)^{-\alpha}$) pour utiliser les résultats de la section précédente. Toutefois, comme nous l'expliquerons dans la remarque 4.2.7, cette méthode requièrerait elle aussi, dans l'argument de passage à la limite sur ε , plusieurs estimations de sommes de Riemann similaires à celles que nous nous apprêtons à montrer.

Pour amorcer la résolution du système (4.14), il est primordial de contrôler la norme hôlderienne de l'intégrale définie par (4.15) (en tant que processus de t), comme nous l'avons fait dans le cas régulier à travers l'estimation (4.4). Avant d'aborder cette tâche, permettons-nous d'étiqeter, en vue de références ultérieures, l'estimation élémentaire suivante :

Lemme 4.2.3. *Soit $0 < s < t \leq T$. Pour tout $\beta \in [0, 1]$, il existe une constante c_β telle que pour tout $u \in (0, s)$,*

$$|(t-u)^{-\alpha} - (s-u)^{-\alpha}| \leq c_\beta |s-u|^{-\alpha-\beta} |t-s|^\beta. \quad (4.17)$$

Démontrons à présent le résultat de régularité escompté :

Proposition 4.2.4. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 4.2.1, et en supposant en outre que $\kappa < \gamma - \alpha$, on pose $z_t := \int_0^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u$ pour tout $t \in [0, T]$. Alors, pour tout $T_0 \leq T$, le processus z est un élément de $\mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0])$, et l'estimation suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0])] \leq c_{\psi, x} T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0])]\}. \quad (4.18)$$

Démonstration. Comme dans la section précédente, on part de la décomposition $(\delta z)_{st} = I_{st} + II_{st}$, avec

$$I_{st} = \int_s^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u \quad \text{et} \quad II_{st} = \int_0^s [(t-u)^{-\alpha} - (s-u)^{-\alpha}] \psi(y_u) dx_u, \quad (4.19)$$

et l'on estime chacun de ces deux termes séparément.

Cas de I : L'intégrale est en particulier obtenue comme limite (lorsque n tend vers l'infini) de la suite

$$J_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} (t-s_n^i)^{-\alpha} \psi(y_{s_n^i}) (\delta x)_{s_n^i, s_n^{i+1}}, \quad \text{avec } s_n^i = s + \frac{i(t-s)}{2^n}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left[(t-s_{n+1}^{2i+1})^{-\alpha} \psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha} \psi(y_{s_{n+1}^{2i}}) \right] (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left[(t-s_{n+1}^{2i+1})^{-\alpha} - (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha} \right] \psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2^n-1} (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha} \left[\psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(y_{s_{n+1}^{2i}}) \right] (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &:= A + B. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Or

$$|A| \leq \|\psi\|_\infty \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] \frac{|t-s|^\gamma}{(2^{n+1})^\gamma} \sum_{i=0}^{2^n-1} |(t-s_{n+1}^{2i+1})^{-\alpha} - (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha}|,$$

et en faisant apparaître une somme télescopique adéquate,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^n-1} |(t-s_{n+1}^{2i+1})^{-\alpha} - (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha}| \\ &= (t-s)^{-\alpha} \sum_{i=0}^{2^n-1} \left\{ \left(1 - \frac{2i+1}{2^{n+1}}\right)^{-\alpha} - \left(1 - \frac{2i}{2^{n+1}}\right)^{-\alpha} \right\} \\ &\leq (t-s)^{-\alpha} \left(1 - \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)^{-\alpha} \leq (t-s)^{-\alpha} (2^{n+1})^\alpha. \end{aligned} \quad (4.21)$$

D'où

$$|A| \leq c_{\psi,x} |t-s|^{\gamma-\alpha} \left(\frac{1}{2^{\gamma-\alpha}}\right)^{n+1} \leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} \left(\frac{1}{2^{\gamma-\alpha}}\right)^{n+1}. \quad (4.22)$$

En ce qui concerne B , on a

$$|B| \leq \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha}\right) \|\psi'\|_\infty \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] \frac{|t-s|^\kappa}{(2^{n+1})^\kappa} \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] \frac{|t-s|^\gamma}{(2^{n+1})^\gamma},$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^n-1} (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha} &= (t-s)^{-\alpha} \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(1 - \frac{2i}{2^{n+1}}\right)^{-\alpha} \leq \frac{2^{n+1}}{(t-s)^\alpha} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\alpha} \\ &\leq \frac{2^{n+1}}{1-\alpha} (t-s)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} |B| &\leq c_{\psi,x} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] |t-s|^{\kappa+\gamma-\alpha} \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma-1}}\right)^{n+1} \\ &\leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] T_0^{\gamma-\alpha} \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma-1}}\right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

En revenant à (4.20), on obtient

$$|J_{n+1} - J_n| \leq T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]\} v_n,$$

où v_n est le terme général d'une série convergente. On écrit ensuite $J_N = J_0 + \sum_{n=0}^{N-1} (J_{n+1} - J_n)$, de telle sorte qu'en laissant N tendre vers l'infini, on déduit

$$\left| \int_s^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u \right| \leq |J_0| + T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]\}.$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$|J_0| = |(t-s)^{-\alpha} \psi(y_s) (\delta x)_{st}| \leq \|\psi\|_\infty \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] |t-s|^{\gamma-\alpha} \leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} \quad (4.24)$$

pour conclure

$$|I_{st}| \leq T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]\}.$$

Cas de II : On utilise la même stratégie qu'avec I , en partant cette fois de la partition $s_n^i = \frac{is}{2^n}$ et de la suite

$$J_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_{s,t}(s_n^i) \psi(y_{s_n^i}) (\delta x)_{s_n^i, s_n^{i+1}}, \quad \text{où } f_{s,t}(u) := [(t-u)^{-\alpha} - (s-u)^{-\alpha}].$$

Alors

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left\{ f_{s,t}(s_{n+1}^{2i+1}) \psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - f_{s,t}(s_{n+1}^{2i}) \psi(y_{s_{n+1}^{2i}}) \right\} (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left\{ f_{s,t}(s_{n+1}^{2i+1}) - f_{s,t}(s_{n+1}^{2i}) \right\} \psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2^n-1} f_{s,t}(s_{n+1}^{2i}) \left\{ \psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(y_{s_{n+1}^{2i}}) \right\} (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &:= D + E. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Pour traiter D , remarquons que la fonction $u \mapsto f_{s,t}(u)$ est décroissante $[0, s)$, d'où

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |f_{s,t}(s_{n+1}^{2i+1}) - f_{s,t}(s_{n+1}^{2i})| \leq \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} |f_{s,t}(s_{n+1}^{i+1}) - f_{s,t}(s_{n+1}^i)| \leq \left| f_{s,t} \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} s \right) \right|. \tag{4.26}$$

En outre, suivant l'estimation élémentaire (4.17) appliquée à $\beta = \kappa$, on a $|f_{s,t} \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} s \right)| \leq \frac{c}{s^{\alpha+\kappa}} |t-s|^\kappa (2^{\alpha+\kappa})^{n+1}$, et ainsi

$$\begin{aligned} |D| &\leq c \|\psi\|_\infty \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] s^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \left(\frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\kappa}} \right)^{n+1} \\ &\leq c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \left(\frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\kappa}} \right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Quant à E , on fait à nouveau appel à (4.17) mais ici avec $\beta = \gamma - \alpha$ pour déduire

$$\begin{aligned} |E| &\leq c \|\psi'\|_\infty \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] s^\kappa |t-s|^{\gamma-\alpha} \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma}} \right)^{n+1} \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(1 - \frac{2i}{2^{n+1}} \right)^{-\gamma} \\ &\leq c_{\psi,x} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] s^\kappa |t-s|^{\gamma-\alpha} \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma-1}} \right)^{n+1} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\gamma} \\ &\leq c_{\psi,x} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] |t-s|^\kappa |t-s|^{\gamma-\alpha-\kappa} T_0^\kappa \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma-1}} \right)^{n+1}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

et donc

$$|E| \leq c_{\psi,x} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] T_0^{\gamma-\alpha} |t-s|^\kappa \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma-1}} \right)^{n+1}.$$

Avec les mêmes arguments que pour I , ces estimations permettent d'affirmer que

$$\left| \int_0^s [(t-u)^{-\alpha} - (s-u)^{-\alpha}] \psi(y_u) dx_u \right| \leq |J_0| + c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]\}.$$

Puisque $|t^{-\alpha} - s^{-\alpha}| \leq c s^{-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa$, le terme J_0 peut être majoré par :

$$|J_0| = |\{t^{-\alpha} - s^{-\alpha}\} (\delta x)_{0s}| \leq \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] s^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa, \quad (4.29)$$

de telle sorte que

$$|II_{st}| = \left| \int_0^s [(t-u)^{-\alpha} - (s-u)^{-\alpha}] \psi(y_u) dx_u \right| \leq c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]\}.$$

Finalement, en revenant à la décomposition (4.19), les estimations de I et II que nous venons de mettre en évidence fournissent

$$\mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\kappa] \leq c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} (1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]),$$

ce qui constitue le résultat annoncé. □

4.2.2 Résolution de l'équation

Grâce aux considérations de la sous-section précédente, nous sommes en mesure de donner sens au système (4.14), et l'on sait en outre que, sous les hypothèses de la proposition 4.2.4, si $y \in \mathcal{C}_1^\kappa$, le processus $z = \int_0^\cdot (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u$ appartient lui-même à \mathcal{C}_1^κ . Cette propriété de stabilité va permettre la mise en place d'un argument de point fixe et ainsi nous mener au résultat principal de cette section :

Théorème 4.2.1. *On suppose que $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^n)$ pour un certain coefficient $\gamma \in (1/2, 1)$, et que $\psi \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,n})$. Si $\alpha \in (0, 1/2)$ est tel que $\gamma - \alpha > 1/2$, alors pour tout $\kappa \in (1 - (\gamma - \alpha); \gamma - \alpha)$, l'équation (4.14), interprétée grâce au lemme 4.2.1, admet une unique solution dans $\mathcal{C}_1^\kappa([0, T]; \mathbb{R}^d)$.*

On fixe $\kappa \in (1 - (\gamma - \alpha), \gamma - \alpha)$. Comme dans la section 4.1, nous résoudrons le système en identifiant sa solution avec le point fixe de l'application Γ définie, pour tout $y \in \mathcal{C}_1^\kappa([0, T]; \mathbb{R}^d)$, par

$$z_t = \Gamma(y)_t = a + \int_0^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u. \quad (4.30)$$

Nous diviserons à nouveau la preuve en deux propositions, avec une résolution d'abord locale, puis un argument de prolongement.

Proposition 4.2.5 (Existence locale). *Sous les hypothèses du théorème 4.2.1, il existe un temps $T_0 \in (0, T]$ tel que l'équation (4.14) admet une unique solution $y^{(1)}$ dans $\mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Etape 1 : Invariance d'une boule. C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.2.4 : pour tout temps T_0 assez petit, il existe un rayon A_{T_0} tel que l'ensemble

$$\mathcal{B}_{a, T_0} = \{y \in \mathcal{C}^\kappa([0, T_0]), y_0 = a, \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] \leq A_{T_0}\}$$

est invariant par Γ .

Etape 2 : Propriété de contraction. Soit $y, \tilde{y} \in \mathcal{B}_{a, T_0}$, à partir desquels on définit, suivant (4.30), $z := \Gamma(y)$, $\tilde{z} := \Gamma(\tilde{y})$. Ainsi, $\delta(z - \tilde{z})_{st} = III_{st} + IV_{st}$, avec

$$\begin{aligned} III_{st} &= \int_s^t (t-u)^{-\alpha} [\psi(y_u) - \psi(\tilde{y}_u)] dx_u \\ IV_{st} &= \int_0^s [(t-u)^{-\alpha} - (s-u)^{-\alpha}] [\psi(y_u) - \psi(\tilde{y}_u)] dx_u. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Pour estimer ces deux termes, nous ferons appel à la même stratégie que dans la preuve de la proposition 4.2.4, stratégie qui consiste à faire intervenir les sommes de Riemann dyadiques associées à chacune des intégrales.

Cas de III : On introduit

$$s_n^i = s + \frac{i(t-s)}{2^n}, \quad J_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} (t-s_n^i)^{-\alpha} [\psi(y_{s_n^i}) - \psi(\tilde{y}_{s_n^i})] (\delta x)_{s_n^i, s_n^{i+1}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} &J_{n+1} - J_n \\ &= \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} \left\{ [(t-s_{n+1}^{2i+1})^{-\alpha} - (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha}] [\psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i+1}})] \right\} (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2^n-1} \left\{ (t-s_{n+1}^{2i+1})^{-\alpha} [\psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(y_{s_{n+1}^{2i}}) + \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i}})] \right\} (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &:= F + G. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Pour F , on a, puisque $(y - \tilde{y})_0 = 0$,

$$|F| \leq \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] \frac{|t-s|^\gamma}{(2^{n+1})^\gamma} \|\psi'\|_\infty \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] T_0^\kappa \sum_{i=0}^{2^n-1} |(t-s_{n+1}^{2i+1})^{-\alpha} - (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha}|,$$

qui, grâce à (4.21), entraîne

$$|F| \leq c_{\psi, x} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] |t-s|^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \left(\frac{1}{2^{\gamma-\alpha}} \right)^{n+1} T_0^\kappa. \quad (4.33)$$

En ce qui concerne G , l'inégalité (4.8) permet d'abord d'affirmer que

$$\begin{aligned} &\left| \psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(y_{s_{n+1}^{2i}}) + \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i}}) \right| \\ &\leq c_\psi \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa]\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] \frac{|t-s|^\kappa}{(2^{n+1})^\kappa}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (t-s_{n+1}^{2i})^{-\alpha} \leq \frac{2^{n+1}}{(t-s)^\alpha} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\alpha},$$

et ainsi

$$|G| \leq c_{\psi, x} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] \{1 + 2A_{T_0}\} |t-s|^\kappa \left(\frac{1}{2^{\gamma+\kappa-1}} \right)^{n+1} |t-s|^{\gamma-\kappa}. \quad (4.34)$$

L'association de (4.33) et (4.34) conduit à

$$|III_{st}| \leq |J_0| + \sum_{i=0}^{\infty} |J_{n+1} - J_n| \leq |J_0| + c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha} \{1 + 2A_{T_0}\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] |t - s|^\kappa.$$

En outre,

$$\begin{aligned} |J_0| &= |(t-s)^{-\alpha} [\psi(y_s) - \psi(\tilde{y}_s)] (\delta x)_{st}| \\ &\leq |t-s|^\kappa |t-s|^{\gamma-\alpha-\kappa} \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] \|D\psi\|_\infty \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] s^\kappa, \\ &\leq c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} |t-s|^\kappa \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] \end{aligned} \quad (4.35)$$

ce qui induit finalement

$$|III_{st}| \leq c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} \{1 + 2A_{T_0}\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] |t - s|^\kappa.$$

Cas de IV : La suite des approximations en jeu ici est donnée par :

$$s_n^i = \frac{is}{2^n}, \quad J_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_{s,t}(s_n^i) [\psi(y_{s_n^i}) - \psi(\tilde{y}_{s_n^i})] (\delta x)_{s_n^i, s_n^{i+1}}.$$

Avec ces notations, la différence $J_{n+1} - J_n$ peut être décomposée en :

$$\begin{aligned} &J_{n+1} - J_n \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left\{ [f_{s,t}(s_{n+1}^{2i+1}) - f_{s,t}(s_{n+1}^{2i})] [\psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i+1}})] \right\} (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2^n-1} \left\{ f_{s,t}(s_{n+1}^{2i}) [\psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(y_{s_{n+1}^{2i}}) + \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i}})] \right\} (\delta x)_{s_{n+1}^{2i+1}, s_{n+1}^{2i+2}} \\ &:= H + K. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pour estimer ces deux termes, on introduit un paramètre $\lambda \in (\kappa, \gamma - \alpha)$. A partir de (4.26), et en invoquant (4.17) avec $\beta = \lambda$, on obtient

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} |f_{s,t}(s_{n+1}^{2i+1}) - f_{s,t}(s_{n+1}^{2i})| \leq c |t-s|^\lambda \frac{(2^{\alpha+\lambda})^{n+1}}{s^{\alpha+\lambda}},$$

qui, associé à l'estimation $|\psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i+1}})| \leq \|\psi'\|_\infty \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] s^\kappa$, fournit

$$\begin{aligned} |H| &\leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa |t-s|^{\lambda-\kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] s^{\gamma+\kappa-\alpha-\lambda} \left(\frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\lambda}} \right)^{n+1} \\ &\leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa T_0^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] \left(\frac{1}{2^{\gamma-\alpha-\lambda}} \right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

En vue d'estimer $|K|$, souvenons-nous que

$$\begin{aligned} &\left| \psi(y_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i+1}}) - \psi(y_{s_{n+1}^{2i}}) + \psi(\tilde{y}_{s_{n+1}^{2i}}) \right| \\ &\leq c_\psi \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa]\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] \frac{s^\kappa}{(2^{n+1})^\kappa}. \end{aligned}$$

A l'aide de (4.17) appliqué à $\beta = \gamma - \alpha$, il découle

$$\begin{aligned}
|K| &\leq c_{\psi,x} |t-s|^{\gamma-\alpha} \{1+2A_{T_0}\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] s^\kappa \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma}}\right)^{n+1} \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(1-\frac{2i}{2^{n+1}}\right)^{-\gamma} \\
&\leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa |t-s|^{\gamma-\alpha-\kappa} \{1+2A_{T_0}\} \\
&\quad \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] T_0^\kappa \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma-1}}\right)^{n+1} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\gamma} \quad (4.38) \\
&\leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa T_0^{\gamma-\alpha} \{1+2A_{T_0}\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] \left(\frac{1}{2^{\kappa+\gamma-1}}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

En rassemblant les estimations de H et K , on déduit, suivant le même principe qu'avec III,

$$|IV_{st}| \leq |J_0| + c_{\psi,x} \{1+2A_{T_0}\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] |t-s|^\kappa T_0^{\gamma-\alpha}.$$

Or $J_0 = [t^{-\alpha} - s^{-\alpha}] [\psi(y_0) - \psi(\tilde{y}_0)] (\delta x)_{0s} = 0$, et ainsi

$$|IV_{st}| \leq c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha} \{1+2A_{T_0}\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] |t-s|^\kappa.$$

Nous venons ainsi de prouver que

$$\mathcal{N}[z-\tilde{z}; \mathcal{C}_1^\kappa] \leq c_{\psi,x} T_0^{\gamma-\alpha-\kappa} \{1+2A_{T_0}\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa].$$

La propriété de contraction escomptée est donc clairement satisfaite lorsque Γ est restreinte à l'ensemble invariant \mathcal{B}_{a,T_0} , pour T_0 suffisamment petit. D'où l'existence et l'unicité d'une solution pour (4.14) sur $[0, T_0]$. □

Proposition 4.2.6 (Existence globale). *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.2.1, la solution locale $y^{(1)} \in \mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0])$ peut être prolongée de façon unique en une solution globale dans $\mathcal{C}_1^\kappa([0, T])$.*

Démonstration. Nous utilisons le même schéma général que dans la preuve de la proposition 4.1.6, en insérant les estimations de la preuve précédente.

Etape 1 : Invariance d'une boule. Soit $\varepsilon > 0$ et $y \in \mathcal{C}^\kappa([0, T_0 + \varepsilon])$ tel que $y|_{[0, T_0]} = y^{(1)}$. On pose

$$z_t = \Gamma(y)_t = \begin{cases} y_t^{(1)} & \text{si } t \in [0, T_0] \\ a + \int_0^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u & \text{si } t \in [T_0, T_0 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Pour $s, t \in [T_0, T_0 + \varepsilon]$, on considère la décomposition (4.19) de $(\delta z)_{st}$. En ce qui concerne I , on utilise (4.20), ainsi que les estimations (4.22), (4.23) et (4.24), pour établir

$$\left| \int_s^t (t-u)^{-\alpha} \psi(y_u) dx_u \right| \leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa \{1 + \varepsilon^{\gamma-\alpha} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]\}.$$

Quant à II , on déduit de (4.25), (4.27), (4.28) et (4.29) l'estimation

$$\left| \int_0^s [(t-u)^{-\alpha} - (s-u)^{-\alpha}] \psi(y_u) dx_u \right| \leq c_{\psi,x} |t-s|^\kappa \{1 + \varepsilon^{\gamma-\alpha-\kappa} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]\}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\kappa([T_0, T_0 + \varepsilon])] \leq c_{\psi, x} \{1 + \varepsilon^{\gamma - \alpha - \kappa} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa]\}.$$

En suivant les arguments de la preuve de la proposition 4.1.6, on obtient alors l'existence d'une constante ε , indépendante de $y^{(1)}$, et d'un rayon N_1 , tels que la boule

$$\mathcal{B}_{y^{(1)}, T_0, \varepsilon} := \left\{ y \in \mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0 + \varepsilon]) : y|_{[0, T_0]} = y^{(1)}, \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] \leq N_1 \right\}$$

est invariante par Γ .

Etape 2 : Propriété de contraction. Soit $\eta \leq \varepsilon$, et considérons $y, \tilde{y} \in \mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0 + \eta])$ tels que $y|_{[0, T_0]} = \tilde{y}|_{[0, T_0]} = y^{(1)}$, $\mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa] \leq N_1$ et $\mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] \leq N_1$. On pose $z = \Gamma(y)$, $\tilde{z} = \Gamma(\tilde{y})$.

Pour $s, t \in [T_0, T_0 + \eta]$, on reprend cette fois la décomposition (4.31) de $\delta(z - \tilde{z})_{st}$. En vue de traiter *III*, on utilise (4.32), (4.33), (4.34) et (4.35), ce qui conduit à

$$|III_{st}| \leq c_{\psi, x} \eta^{\gamma - \alpha - \kappa} |t - s|^\kappa \{1 + 2N_1\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa].$$

Pour le terme *IV*, la décomposition (4.36), associée à (4.37), (4.38) et au fait que $\psi(y_0) = \psi(\tilde{y}_0)$, fournit

$$|IV_{st}| \leq c_{\psi, x} \eta^{\lambda - \kappa} |t - s|^\kappa \{1 + 2N_1\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa].$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{C}_1^\kappa([T_0, T_0 + \eta])] \leq c_{\psi, x} \eta^{\lambda - \kappa} \{1 + 2N_1\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa].$$

La fin de la preuve suit à présent le même schéma que la preuve de la proposition 4.1.6. \square

Remarque 4.2.7. Une autre approche naturelle pour cette équation de Volterra-Young singulière eut consisté à remplacer dans un premier temps le noyau $K_{ts} = |t - s|^{-\alpha}$ par $K_{ts}^\varepsilon = |t - s + \varepsilon|^{-\alpha}$. Le système associé à cette régularisation

$$y_t^\varepsilon = a + \int_0^t K_{tu}^\varepsilon \psi(y_u^\varepsilon) dx_u \quad (4.39)$$

peut alors être résolu dans $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T])$ en utilisant le théorème 4.1.1. On établit dans un second temps la convergence de l'approximation y^ε dans $\mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0])$ à partir des arguments de la proposition 4.2.4. En effet, si l'on suit la preuve de (4.18) (ce qui implique l'étude de sommes de Riemann), il n'est pas difficile de vérifier que

$$\mathcal{N}[y^\varepsilon; \mathcal{C}_1^{\kappa_0}([0, T_0])] \leq c_{\psi, x} |T_0|^{\gamma - \alpha - \kappa_0} \{1 + \mathcal{N}[y^\varepsilon; \mathcal{C}_1^{\kappa_0}([0, T_0])]\}$$

uniformément en $\varepsilon \in (0, 1]$, pourvu que $\gamma - \alpha - \kappa_0 > 0$. En particulier, si T_0 est assez petit, la suite (y^ε) est bornée dans $\mathcal{C}_1^{\kappa_0}([0, T_0])$, et donc elle converge (au moins le long d'une sous-suite) vers un élément $y \in \mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0])$, pour tout $\kappa < \kappa_0$. Pour voir que y est effectivement solution du problème sur $[0, T_0]$, il suffit ensuite de justifier le passage à la limite dans (4.39). Là encore, ceci peut être fait en suivant les arguments de la preuve du lemme 4.2.1, sous la condition supplémentaire $\gamma + \kappa - \alpha > 1$, qui viendra garantir la bonne définition de l'intégrale $\int_s^t K_{tu} \psi(y_u) dx_u$.

Cette procédure de régularisation ne fournit cependant qu'une solution locale (et à ce stade non nécessairement unique) de (4.14). Le prolongement de la solution requiert ensuite un traitement spécifique : même à l'aide d'un argument de compacité, la preuve devrait suivre le schéma général qui nous a mené au théorème 4.2.1, et il semble ainsi difficile d'éviter la manipulation de sommes de Riemann.

Remarque 4.2.8. Dans la mesure où nous avons suivi les mêmes étapes que dans la preuve du théorème 4.1.1, il est clair que la propriété de régularité (4.12) de l'application d'Itô reste vraie pour l'équation en présence d'une singularité.

4.3 Le cas rugueux

Dans cette section, nous revenons à l'étude de l'équation de Volterra sous la forme (4.1) avec σ une application régulière de ses trois variables, mais en supposant cette fois que le coefficient de régularité γ de x appartient à l'intervalle $(1/3, 1/2]$. Cette dernière hypothèse implique en particulier que nous ne pouvons plus nous tourner vers une interprétation de l'intégrale $\int_0^t \sigma(t, u, y_u) dx_u$ au sens de Young ; le mécanisme des rough paths doit ainsi entrer en jeu.

4.3.1 Interprétation du système

Pour être en mesure de s'appuyer sur les constructions de la sous-section 2.2.2, on rappelle qu'il faut au préalable admettre l'existence d'une aire de Lévy associée au processus x :

Hypothèse 3. *On suppose que le processus $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$ ($\gamma \in (1/3, 1/2]$) qui dirige l'équation (4.1) permet la construction d'une aire de Lévy $\mathbf{x}^2 \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m})$ telle que $\delta \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 \otimes \mathbf{x}^1$ ($\mathbf{x}^1 := \delta x$).*

Se pose ensuite la question de l'applicabilité de la proposition 2.2.8 dans le contexte de l'équation (4.1). Un premier élément de réponse est apporté par le résultat suivant, dans lequel on fera usage des notations $\sigma_t : u, y \mapsto \sigma(t, u, y)$, $\mathcal{Y}_u := (u, y_u)$ et $D_3\sigma(t, u, y)(h) := D\sigma(t, u, y)(0, 0, h)$ pour $h \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 4.3.1. *On fixe un temps $T_0 \in [0, T]$. Soit $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$ (Définition 2.2.4) admettant la décomposition $\delta y^i = y^{x,ij} \mathbf{x}^{1,j} + y^{\#,i}$. Si $\sigma \in \mathcal{C}^{2,b}([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, alors, pour tout $t \in [0, T_0]$, $\sigma_t(\mathcal{Y}) \in \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^{d,m})$, avec $\sigma_t(\mathcal{Y})_u^{x,ijk} = D_3\sigma^{ij}(t, \mathcal{Y}_u)(y_u^{x,k})$. En outre,*

$$\mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}); \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^{d,m})] \leq c_\sigma \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)]^2 \right\}. \quad (4.40)$$

Démonstration. Puisque l'on a supposé $\sigma \in \mathcal{C}^{2,b}([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, il s'agit d'une conséquence de la proposition 2.2.7. Il n'est en effet pas difficile d'identifier \mathcal{Y} en tant qu'élément de $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d+1})$ en prenant $\mathcal{Y}^{x,0j} := 0$, $\mathcal{Y}^{\#,0} := t - s$, $\mathcal{Y}^{x,ij} := y^{x,ij}$, $\mathcal{Y}^{\#,i} := y^{\#,i}$ ($i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, m$). Avec cette identification,

$$\mathcal{N}[\mathcal{Y}; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d+1})] \leq c \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] \right\}. \quad (4.41)$$

La proposition 2.2.7 entraîne alors $\sigma_t(\mathcal{Y}) \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ et

$$\mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}); \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] \leq c_{\sigma_t} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)]^2 \right\},$$

avec $c_{\sigma_t} = c \{ 1 + \|D\sigma_t\|_\infty + \|D^2\sigma_t\|_\infty \} \leq c \{ 1 + \|D\sigma\|_\infty + \|D^2\sigma\|_\infty \}$. \square

Ce résultat permet d'appliquer la construction (2.25) à l'intégrant $\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y})$ (lorsque $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$) pour tout $t \in [0, T_0]$ fixé, et par là même d'affirmer l'existence d'un processus $\tilde{z}^t \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$ tel que $\tilde{z}_0^t = 0$ et pour tous $0 \leq u < v \leq T_0$,

$$(\delta \tilde{z}^t)_{uv} = \mathcal{J}_{uv}(\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y}) dx^j).$$

Avec ces notations, on définit de façon naturelle l'intégrale qui intervient dans l'équation (4.1), lorsque $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$, par la formule

$$\mathcal{J}_{0t}(\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y}) dx^j) := \dot{z}_t^{t,i},$$

et le système devient

$$y_t^i = a^i + \mathcal{J}_{0t}(\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y}) dx^j) \quad , \quad a \in \mathbb{R}^d. \quad (4.42)$$

Le résultat de la proposition 2.2.8 nous garantit alors que l'équation ainsi définie coïncide avec l'équation de Volterra (régulière) si x est différentiable, ce qui témoigne de la légitimité de cette interprétation.

4.3.2 Résolution du système

Une série de manipulations algébriques élémentaires permet d'établir que la décomposition (4.2), qui constituait le point de départ de notre raisonnement dans les deux sections précédentes, reste vraie pour l'intégrale rugueuse : si $z_t^i = a^i + \mathcal{J}_{0t}(\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y}) dx^j)$, alors

$$(\delta z^i)_{st} = \mathcal{J}_{st}(\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y}) dx^j) + \mathcal{J}_{0s}([\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij}](\mathcal{Y}) dx^j). \quad (4.43)$$

Pour résoudre le système (4.1), nous souhaiterions nous inspirer de la méthode adoptée dans le cas des diffusions, et ainsi chercher à mettre en place un argument de point fixe dans l'espace \mathcal{Q}_x^γ . Bien entendu, cette démarche requiert en premier lieu l'identification du processus z ci-dessus en tant que processus contrôlé. A cette fin, observons qu'à partir de (4.43), on peut écrire $(\delta z^i)_{st} = \sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}_s) \mathbf{x}_{st}^{1,j} + z_{st}^{\#,i}$, avec

$$\begin{aligned} z_{st}^{\#,i} := & [\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y}_s) - \sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}_s)] \mathbf{x}_{st}^{1,j} + \sigma_t^{ij}(\mathcal{Y})_s^{x,ijk} \mathbf{x}_{st}^{2,kj} + \Lambda_{st} \left(\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y})^\# \mathbf{x}^{1,j} + \delta \sigma_t^{ij}(\mathcal{Y})^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj} \right) \\ & + \mathcal{J}_{0s}([\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij}](\mathcal{Y}) dx^j). \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $z_s^{x,ij} := \sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}_s)$ pour tous $s \in [0, T_0]$, le couple (z, z^x) définira un processus contrôlé (dans $\mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$) si l'on parvient à montrer que $z^x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$ et $z^\# \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$. Ces deux résultats de régularité seront en fait vérifiés au cours de la preuve du théorème 4.3.1. Une solution de (4.42) sur l'intervalle $[0, T_0]$ ($0 \leq T_0 \leq T$) correspond ensuite à un point fixe de l'application

$$\Gamma : \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d), \quad (y, y^x) \mapsto (z, z^x). \quad (4.44)$$

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat d'existence et d'unicité *locales* que nous avons annoncé dans l'introduction de ce chapitre :

Théorème 4.3.1. *Soit $\kappa \in (0, 1)$ tel que $\gamma(\kappa + 2) > 1$, $\sigma \in \mathcal{C}^{3,b,\kappa}([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors il existe un temps $T_0 \in (0, T]$ tel que l'équation (4.42) admet une unique solution dans $\mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$.*

Comme dans le cas Young, nous allons montrer que l'application Γ définie par (4.44) est une contraction stricte (Proposition 4.3.4) une fois restreinte à un certain sous-ensemble invariant (Proposition 4.3.3). Les estimations suivantes seront pour cela mises à contribution :

Lemme 4.3.2. *On fixe un temps $T_0 \in [0, T]$. Soit $y, \tilde{y} \in \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)$ tels que $y_0 = \tilde{y}_0$ et $y_0^x = \tilde{y}_0^x$. Alors, sous les hypothèses du théorème 4.3.1, on a, pour tous $s, t \in [0, T_0]$,*

$$\mathcal{N}[[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}); \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^{d,m})] \leq c_\sigma |t - s| \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)]^2 \right\}, \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^{d,m})] \\ & \leq c_\sigma \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)]^2 \right\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)], \end{aligned} \quad (4.46)$$

et

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}) - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{Q}_x^{\gamma, \gamma + \gamma\kappa}([0, T_0]; \mathbb{R}^{d,m})] \leq c_\sigma |t - s| \\ & \cdot \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)]^{1+\kappa} + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)]^{1+\kappa} \right\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0]; \mathbb{R}^d)]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Démonstration. Voir Appendix. □

La première étape du raisonnement consiste à mettre en évidence l'existence d'un ensemble de boules (relativement à la semi-norme des processus contrôlés) stables par Γ :

Proposition 4.3.3 (Invariance d'une boule). *Sous les hypothèses du théorème 4.3.1, il existe un temps $T_0 \in (0, T]$ tel que pour tout temps $T_1 \in (0, T_0]$, la boule*

$$B_{T_1}^{A_{T_1}} = \{y \in \mathcal{Q}^\gamma([0, T_1]; \mathbb{R}^d) : y_0 = a, y_0^x = \sigma(0, 0, a), \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1]; \mathbb{R}^d)] \leq A_{T_1}\}$$

est invariante par l'application Γ définie par (4.44), pour un certain rayon A_{T_1} assez grand.

Démonstration. On fixe (temporairement) un temps $T_0 \leq T$ et un rayon A_{T_0} . Soit $y \in B_{T_0}^{A_{T_0}}$ admettant la décomposition $\delta y^i = y^{x,ij} \mathbf{x}^{1,j} + y^{\#,i}$, et posons $(z, z^x) := \Gamma(y, y^x)$. Nous avons vu que $\delta z^i = z^{x,ij} \mathbf{x}^{1,j} + z^{\#,i}$, avec $z_s^{x,ij} := \sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}_s)$ et

$$z^{\#,i} = z^{\#,i,0} + z^{\#,i,1,1} + z^{\#,i,1,2} + z^{\#,i,2,1} + z^{\#,i,2,2}, \quad (4.48)$$

avec

$$\begin{aligned} z_{st}^{\#,0,i} & := \left[\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij} \right] (\mathcal{Y}_s) \mathbf{x}_{st}^{1,j}, & z_{st}^{\#,1,1,i} & := \sigma_t(\mathcal{Y})_s^{x,ijk} \mathbf{x}_{st}^{2,kj} \\ z_{st}^{\#,1,2,i} & := \Lambda_{st}(\sigma_t(\mathcal{Y})^{\#,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta(\sigma_t(\mathcal{Y})^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj})), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_{st}^{\#,2,1,i} & := \left[\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij} \right] (\mathcal{Y}_0) \mathbf{x}_{0s}^{1,j} + [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y})_0^{x,ijk} \mathbf{x}_{0s}^{2,kj} \\ z_{st}^{\#,2,2,i} & := \Lambda_{0s} \left([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y})^{\#,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y})^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj} \right). \end{aligned}$$

Vérifions que cette décomposition identifie effectivement z en tant qu'élément de \mathcal{Q}_x^γ , c'est-à-dire $z^x \in \mathcal{C}_1^\gamma$ et $z^\# \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}$. Pour z^x , observons que si $0 \leq s < t \leq T_1$,

$$\begin{aligned} |(\delta z^{x,ij})_{st}| & = |\sigma^{ij}(t, \mathcal{Y}_t) - \sigma^{ij}(s, \mathcal{Y}_s)| \\ & \leq |\sigma^{ij}(t, \mathcal{Y}_t) - \sigma^{ij}(s, \mathcal{Y}_t)| + |\sigma^{ij}(s, \mathcal{Y}_t) - \sigma^{ij}(s, \mathcal{Y}_s)| \\ & \leq \|D\sigma\|_\infty |t - s| + |\delta(\sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}))_{st}|. \end{aligned}$$

Or, en se référant à (2.18),

$$\begin{aligned} |\delta(\sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}))_{st}| &\leq c_x |t - s|^\gamma \left\{ \left| D_3 \sigma^{ij}(s, \mathcal{Y}_0)(y_0^{x,k}) \right| + T_0^\gamma \mathcal{N}[\sigma_s(\mathcal{Y}); \mathcal{Q}_x^\gamma] \right\} \\ &\leq c_{x,\sigma} |t - s|^\gamma \{1 + T_0^\gamma \mathcal{N}[\sigma_s(\mathcal{Y}); \mathcal{Q}_x^\gamma]\}, \end{aligned}$$

ce qui, associé à l'estimation (4.40), donne $\mathcal{N}[z^x; \mathcal{C}_1^\gamma] \leq c_{x,\sigma} \{1 + T_0^\gamma \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^2\}$.

Estimons à présent la norme 2γ -höldérienne du terme résiduel.

Cas de $z^{\sharp,0,i}$: Clairement, $\mathcal{N}[z^{\sharp,0,i}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \leq \|D\sigma\|_\infty \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] T_0^{1-\gamma} \leq c_{\sigma,x}$.

Cas de $z^{\sharp,1,1,i}$: Puisque $|\sigma_t(\mathcal{Y})_0^{x,ijk}| = |D_3 \sigma^{ij}(t, \mathcal{Y}_0)(y_0^{x,k})| \leq c_\sigma$, on a, grâce à (4.40),

$$\begin{aligned} |z_{st}^{\sharp,1,1,i}| &\leq c_\sigma |t - s|^{2\gamma} \mathcal{N}[\mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \{1 + T_0^\gamma \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y})^x; \mathcal{C}_1^\gamma]\} \\ &\leq c_{\sigma,x} |t - s|^{2\gamma} \{1 + T_0^\gamma \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^2\}. \end{aligned}$$

Cas de $z^{\sharp,1,2,i}$: En utilisant (2.6) et (4.40), on obtient

$$\begin{aligned} |z^{\sharp,1,2,i}| &\leq c |t - s|^{3\gamma} \left\{ \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y})^\sharp; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] + \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y})^x; \mathcal{C}_1^\gamma] \mathcal{N}[\mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \right\} \\ &\leq c_x |t - s|^{3\gamma} \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}); \mathcal{Q}_x^\gamma] \leq c_{x,\sigma} |t - s|^{2\gamma} T_0^\gamma \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^2\}. \end{aligned}$$

Cas de $z^{\sharp,2,1,i}$:

$$\begin{aligned} |z_{st}^{\sharp,2,1,i}| &\leq \|D\sigma\|_\infty |t - s| T_0^\gamma \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] + |D_3 \sigma(t, \mathcal{Y}_0) - D_3 \sigma(s, \mathcal{Y}_0)| |y_0^x| \mathcal{N}[\mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] T_0^{2\gamma} \\ &\leq c_{x,\sigma} |t - s|^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Cas de $z^{\sharp,2,2,i}$: En se référant successivement à (2.6) et (4.45), il découle

$$\begin{aligned} |z^{\sharp,2,2,i}| &\leq c T_0^{3\gamma} \left\{ \mathcal{N}[(\sigma_t - \sigma_s)(\mathcal{Y})^\sharp; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] + \mathcal{N}[(\sigma_t^t - \sigma_s^s)(\mathcal{Y})^x; \mathcal{C}_1^\gamma] \mathcal{N}[\mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \right\} \\ &\leq c_x T_0^{3\gamma} \mathcal{N}[(\sigma_t^t - \sigma_s^s)(\mathcal{Y}); \mathcal{Q}_x^\gamma] \leq c_{x,\sigma} T_0^{3\gamma} |t - s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^2\}. \end{aligned}$$

L'association de ces différentes estimations conduit à $\mathcal{N}[z^\sharp; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \leq c_{\sigma,x} \{1 + T_0^\gamma \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^2\}$. Ceci achève de montrer que $(z, z^x) \in \mathcal{Q}_x^\gamma$, et l'on dispose en outre de l'estimation $\mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_x^\gamma] \leq c_{x,\sigma} \{1 + T_0^\gamma \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^2\}$. Pour garantir la propriété de stabilité annoncée, il suffit maintenant de définir T_0 comme le plus grand temps $\tau \in (0, T]$ tel que l'équation $c_{\sigma,x} \{1 + \tau^\gamma A^2\} = A$ admette une unique solution A_τ . □

Passons à présent à la propriété de contraction, qui viendra achever la preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution locale pour le système (4.42).

Proposition 4.3.4 (Propriété de contraction). *Sous les hypothèses du théorème 4.3.1, et avec les notations de la proposition 4.3.3, il existe un temps $T_1 \in (0, T_0]$ tel que pour tout $T_2 < T_1$, l'application Γ est une contraction stricte sur la boule (invariante) $B_{T_2}^{A_{T_2}}$.*

Démonstration. Soit y, \tilde{y} deux éléments de $B_{T_1}^{A_{T_1}}$, et posons $z = \Gamma(y)$, $\tilde{z} = \Gamma(\tilde{y})$. Ainsi,

$$\delta(z^i - \tilde{z}^i) = (z^{x,ij} - \tilde{z}^{x,ij}) \mathbf{x}^{1,j} + (z^{\sharp,i} - \tilde{z}^{\sharp,i}),$$

où $z_s^{x,ij} = \sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}_s)$, $\tilde{z}_s^{x,ij} = \sigma_s^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_s)$, et $z^{\sharp,i}$ est donné par (4.48), avec une expression similaire pour $\tilde{z}^{\sharp,i}$. Estimons chacun des termes de

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] &= \mathcal{N}[z^x - \tilde{z}^x; \mathcal{C}_1^0([0, T_1])] + \mathcal{N}[z^x - \tilde{z}^x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \\ &\quad + \mathcal{N}[z^\sharp - \tilde{z}^\sharp; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T_1])] + \mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])]. \end{aligned}$$

Cas de $\mathcal{N}[z^x - \tilde{z}^x; \mathcal{C}_1^0([0, T_1])]$: Si $s \in [0, T_1]$,

$$|z_s^{x,ij} - \tilde{z}_s^{x,ij}| = |\sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}_s) - \sigma_s^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_s)| \leq \|D\sigma\|_\infty |y_s - \tilde{y}_s|.$$

Or $y_0 = \tilde{y}_0$, donc $|y_s - \tilde{y}_s| \leq T_1^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])]$ et $\mathcal{N}[z^x - \tilde{z}^x; \mathcal{C}_1^0([0, T_1])] \leq c_\sigma T_1^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]$.

Cas de $\mathcal{N}[z^x - \tilde{z}^x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])]$: Si $0 \leq s < t \leq T_1$,

$$\begin{aligned} |(z_t^{x,ij} - \tilde{z}_t^{x,ij}) - (z_s^{x,ij} - \tilde{z}_s^{x,ij})| &= |\sigma_t^{ij}(\mathcal{Y}_t) - \sigma_t^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_t) - \sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}_s) + \sigma_s^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_s)| \\ &\leq |[\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij}](\mathcal{Y}_t) - [\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij}](\tilde{\mathcal{Y}}_t)| + |\delta(\sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}) - \sigma_s^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}))_{st}|. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} |[\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij}](\mathcal{Y}_t) - [\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij}](\tilde{\mathcal{Y}}_t)| &\leq \|D(\sigma_t - \sigma_s)\|_\infty |y_t - \tilde{y}_t| \\ &\leq \|D^2\sigma\|_\infty |t - s| \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] T_1^\gamma \\ &\leq c_\sigma |t - s|^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}^\gamma([0, T_1])] T_1, \end{aligned}$$

tandis que, d'après (2.18) et (4.46),

$$\begin{aligned} &|\delta(\sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}) - \sigma_s^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}))_{st}| \\ &\leq |t - s|^\gamma \mathcal{N}[\sigma_s^{ij}(\mathcal{Y}) - \sigma_s^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \\ &\leq c_x |t - s|^\gamma \left\{ |(\sigma_s(\mathcal{Y}) - \sigma_s(\tilde{\mathcal{Y}}))_0^x| + T_1^\gamma \mathcal{N}[\sigma_s(\mathcal{Y}) - \sigma_s(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] \right\} \\ &\leq c_{x,\sigma} |t - s|^\gamma T_1^\gamma \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]^2 \right\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] \end{aligned}$$

puisque $(\sigma_s(\mathcal{Y}) - \sigma_s(\tilde{\mathcal{Y}}))_0^x = 0$. Ainsi, en tenant compte du fait que $y, \tilde{y} \in B_{T_1}^{A_{T_1}}$, on obtient $\mathcal{N}[z^x - \tilde{z}^x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] \leq c_{x,\sigma} \{1 + A_{T_1}^2\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] T_1^\gamma$.

Cas de $\mathcal{N}[z^\sharp - \tilde{z}^\sharp; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T_1])]$: Comme $(y_0, y_0^x) = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_0^x)$, $(z - \tilde{z})^\sharp := z^\sharp - \tilde{z}^\sharp$ se résume en fait à la somme de

$$\begin{aligned} (z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,0,i} &:= \{[\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij}](\mathcal{Y}_s) - [\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij}](\tilde{\mathcal{Y}}_s)\} \mathbf{x}_{st}^{1,j} \\ (z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,1,1,i} &:= [\sigma_t(\mathcal{Y})_s^{x,ijk} - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}})_s^{x,ijk}] \mathbf{x}_{st}^{2,kj} \\ (z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,1,2,i} &:= \Lambda_{st}((\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}))^{\sharp,ij} \mathbf{x}^{1,j} + \delta(\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}))^{x,ijk} \mathbf{x}^{2,kj}) \\ (z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,2,i} &:= \Lambda_{0s}([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y})^{\sharp,ij} - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}})^{\sharp,ij}) \mathbf{x}^{1,j} \\ &\quad + \delta([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y})^{x,ijk} - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}})^{x,ijk}) \mathbf{x}^{2,kj}. \end{aligned}$$

Etude de $(z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,0}$: On a

$$\begin{aligned} & \left| (z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,0,i} \right| \\ & \leq c_x |t - s|^\gamma \|D(\sigma_t - \sigma_s)\|_\infty \left| \mathcal{Y}_s - \tilde{\mathcal{Y}}_s \right| \\ & \leq c_x |t - s|^{1+\gamma} \|D^2\sigma\|_\infty |y_s - \tilde{y}_s| \\ & \leq c_{x,\sigma} |t - s|^{2\gamma} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])] T_1^{1-\gamma} \leq c_{x,\sigma} |t - s|^{2\gamma} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] T_1^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Etude de $(z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,1,1}$: Puisque $(\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}))_0^x = 0$, on obtient, grâce à (4.46),

$$\begin{aligned} & \left| (z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,1,1,i} \right| \\ & \leq c_x |t - s|^{2\gamma} \left| (\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}))_s^x \right| \leq c_x |t - s|^{2\gamma} \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] T_1^\gamma \\ & \leq c_x |t - s|^{2\gamma} \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]^2\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] T_1^\gamma. \end{aligned}$$

Etude de $(z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,1,2}$: Par (2.6) et (4.46),

$$\begin{aligned} & \left| (z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,1,2,i} \right| \\ & \leq c_x |t - s|^{3\gamma} \mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] \\ & \leq c_{\sigma,x} |t - s|^{2\gamma} \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]^2\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] T_1^\gamma. \end{aligned}$$

Etude de $(z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,2}$: D'après (2.6) et (4.47),

$$\begin{aligned} \left| (z - \tilde{z})_{st}^{\sharp,2,i} \right| & \leq c_x T_1^{\gamma(\kappa+2)} \mathcal{N}[[\sigma_i^t - \sigma_i^s](\mathcal{Y}) - [\sigma_i^t - \sigma_i^s](\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{Q}_x^{\gamma, \gamma(1+\kappa)}([0, T_1])] \\ & \leq c_{x,\sigma} T_1^{\gamma(\kappa+2)} |t - s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]^{1+\kappa} + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]^{1+\kappa}\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])]. \end{aligned}$$

En rassemblant ces différentes estimations, on obtient finalement $\mathcal{N}[(z - \tilde{z})_{st}^{\sharp}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T_1])] \leq c_{x,\sigma} \{1 + A_{T_1}^2\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] T_1^\gamma$, qui, associé à la précédente majoration de $\mathcal{N}[(z - \tilde{z})_{st}^x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T_1])]$, donne

$$\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] \leq c_{x,\sigma} \{1 + A_{T_1}^2\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_1])] T_1^\gamma.$$

Si l'on définit $T_1 \in (0, T_0]$ comme le plus grand temps tel que $c_{x,\sigma} \{1 + A_{T_1}^2\} T_1^\gamma \leq 1/2$, il est à présent clair que la propriété de contraction recherchée est satisfaite sur $[0, T_1]$. \square

Nous savons, grâce aux résultats contenus dans [20] ou [102] (rappelés en introduction et dans le chapitre 3), que le processus $B := (\text{Id}, B^1, \dots, B^m)$, où (B^1, \dots, B^m) est un mBf m -dimensionnel d'indice de Hurst $H > 1/3$, satisfait l'hypothèse 3. Nous sommes donc en mesure d'appliquer le résultat du théorème 4.3.1 dans ce contexte pour obtenir :

Corollaire 4.3.5. *Soit (B^1, \dots, B^m) un mBf m -dimensionnel d'indice de Hurst $H > 1/3$, $a \in \mathbb{R}^d$. Soit $\gamma > 1/3$ et κ tel que $\gamma(\kappa + 2) > 1$. Si $\sigma \in \mathcal{C}^{3, \mathbf{b}, \kappa}([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d, m+1})$, alors il existe un temps aléatoire $T_0 \in (0, T]$ tel que, p.s, le système*

$$Y_t^i = a^i + \int_0^t \sigma^{i0}(t, u, Y_u) du + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{ij}(t, u, Y_u) dB_u^j, \quad i = 1, \dots, d,$$

interprété de façon trajectorielle grâce aux propositions 4.3.1 et 2.2.8, admet une unique solution dans l'espace des processus γ -contrôlés sur $[0, T_0]$ associé à $B := (\text{Id}, B^1, \dots, B^m)$.

4.3.3 Prolongement de la solution

Pour clore ce chapitre, évoquons brièvement les difficultés techniques qui surgissent lorsque l'on cherche à prolonger la solution locale $y^{(1)}$ donnée par le théorème 4.3.1 via la méthode utilisée dans le cas Young (Proposition 4.1.6).

Une première étape consisterait à mettre en évidence l'existence d'une constante $\varepsilon > 0$, indépendante de $y^{(1)}$, et un rayon N_1 , tels que la boule

$$\{y \in \mathcal{Q}^\gamma([0, T_0 + \varepsilon]) : (y, y^x)|_{[0, T_0]} = (y^{(1)}, (y^{(1)})^x), \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \leq N_1\}$$

soit stable par Γ . En réalité, si $z := \Gamma(y)$ pour un élément y dans cette boule, une série d'estimations standards, similaires à celles établies dans la preuve de la proposition 4.3.3, montre que

$$\mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])] \leq c_1 \mathcal{N}[y^{(1)}; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0])] + c_2 \left\{ 1 + \varepsilon^\lambda \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma([0, T_0 + \varepsilon])]^2 \right\}, \quad (4.49)$$

pour un certain coefficient $\lambda > 0$ et deux constantes c_1, c_2 avec $c_1 \geq 2$. Il est alors clair qu'en raison de la présence de l'exposant 2 dans cette dernière expression, la constante ε qui assurerait la stabilité de l'ensemble doit dépendre de $y^{(1)}$, ce qui est contraire à la règle que l'on s'est prescrite.

Imaginons plus précisément que les arguments de la preuve de la proposition 4.1.6 restent valables en partant de (4.49), ce qui signifierait que l'on ait pu trouver une constante $\varepsilon > 0$ et une suite de rayons (N_i) tels que

$$c_1 N_i + c_2 \left\{ 1 + \varepsilon^\lambda N_{i+1}^2 \right\} \leq N_{i+1}. \quad (4.50)$$

En particulier, $N_{i+1} \geq c_1 N_i \geq 2N_i$, donc la suite (N_i) diverge vers l'infini. Par ailleurs, pour que l'inégalité (4.50) admette effectivement une solution N_{i+1} positive, la relation $1 - 4\varepsilon^\lambda c_2 (c_1 N_i + c_2) \geq 0$ doit être satisfaite, de telle sorte que (N_i) doit être bornée, d'où la contradiction.

Il convient également de remarquer que même si l'on autorise ε à varier d'un intervalle à l'autre pour devenir une suite ε_i telle que $\sum_i \varepsilon_i = \infty$ (condition qui garantit le recouvrement de $[0, T]$), alors les mêmes arguments que ci-dessus aboutissent à l'inégalité $\frac{N_1}{2} 2^i \leq N_i \leq \frac{c}{\varepsilon_{i+1}^\lambda}$, de telle sorte que $\varepsilon_i \leq \frac{c}{(2^{1/\lambda})^i}$, ce qui contredit bien sûr l'hypothèse $\sum_i \varepsilon_i = \infty$.

C'est cette faille dans notre appréhension du système général (4.1) qui nous a poussés vers l'analyse d'un cas particulier de l'équation de Volterra, pour lequel une modification du formalisme classique (basé sur δ) permet d'éliminer, en un sens à préciser, le terme qui lie $(\delta y)_{st}$ à son passé sur $[0, s]$ dans la décomposition (4.2). Cette étude fait l'objet du chapitre suivant.

4.4 Appendix

Nous avons réuni dans cette section les quelques preuves de résultats de régularité qui restaient en suspens.

Preuve du lemme 4.1.5. Pour (4.7), il suffit bien sûr d'observer que si $u < v$,

$$\begin{aligned} |[\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}_v) - [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}_u)| &\leq \|D(\sigma_t - \sigma_s)\|_\infty |\mathcal{Y}_v - \mathcal{Y}_u| \\ &\leq \|D^2 \sigma\|_\infty |t - s| (|v - u| + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma] |v - u|^\gamma), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Afin d'établir (4.8), on introduit l'opérateur R défini pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{1,b}(\mathbb{R}^{d+1})$ et tous $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{d+1}$, par

$$R\varphi(\xi, \xi') := \int_0^1 D\varphi(\alpha\xi + (1-\alpha)\xi') d\alpha.$$

Clairement, $\|R\varphi\|_\infty \leq \|D\varphi\|_\infty$ et $\|R\varphi(\xi_1, \xi'_1) - R\varphi(\xi_2, \xi'_2)\| \leq \|D^2\varphi\|_\infty(|\xi_1 - \xi_2| + |\xi'_1 - \xi'_2|)$. Avec cette notation, si $u < v$,

$$\begin{aligned} & \left| [\sigma_t(\mathcal{Y}_v) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}_v)] - [\sigma_t(\mathcal{Y}_u) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}_u)] \right| \\ &= \left| R\sigma_t(\mathcal{Y}_v, \tilde{\mathcal{Y}}_v)(\mathcal{Y}_v - \tilde{\mathcal{Y}}_v) - R\sigma_t(\mathcal{Y}_u, \tilde{\mathcal{Y}}_u)(\mathcal{Y}_u - \tilde{\mathcal{Y}}_u) \right| \\ &\leq \left| R\sigma_t(\mathcal{Y}_v, \tilde{\mathcal{Y}}_v)([\mathcal{Y}_v - \tilde{\mathcal{Y}}_v] - [\mathcal{Y}_u - \tilde{\mathcal{Y}}_u]) \right| + \left| [R\sigma_t(\mathcal{Y}_v, \tilde{\mathcal{Y}}_v) - R\sigma_t(\mathcal{Y}_u, \tilde{\mathcal{Y}}_u)](\mathcal{Y}_u - \tilde{\mathcal{Y}}_u) \right| \\ &\leq \|D\sigma_t\|_\infty |[y_v - \tilde{y}_v] - [y_u - \tilde{y}_u]| \\ &\quad + \|D^2\sigma_t\|_\infty (2|v - u| + |y_v - y_u| + |\tilde{y}_v - \tilde{y}_u|) |y_u - \tilde{y}_u| \\ &\leq \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma] |v - u|^\gamma \{ \|D\sigma\|_\infty + \|D^2\sigma\|_\infty (2T^{1-\gamma} + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma]) T^\gamma \}, \end{aligned}$$

où, dans la dernière inégalité, on a utilisé le fait que $y_u - \tilde{y}_u = [y_u - \tilde{y}_u] - [y_0 - \tilde{y}_0]$. L'estimation (4.8) est ainsi démontrée.

En ce qui concerne (4.9), remarquons tout d'abord qu'il ne s'agit pas d'une conséquence de (4.8), dans la mesure où nous ne disposons pas nécessairement d'une inégalité du type $\|D^2(\sigma_t - \sigma_s)\|_\infty \leq c|t - s|$. Un argument un peu plus fin doit donc être mis en œuvre. Pour cela, introduisons l'opérateur L défini pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{2,b,\kappa}(\mathbb{R}^{d+2})$ et tous $s, t \in \mathbb{R}$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{d+1}$ par

$$L\varphi(s, t, \xi, \xi') := \int_0^1 \int_0^1 D^2\varphi(s + \mu(t - s), \xi + \lambda(\xi' - \xi)) d\mu d\lambda.$$

Ainsi, $L\varphi(s, t, \xi, \xi')$ est une application bilinéaire de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que $\|L\varphi\|_\infty \leq \|D^2\varphi\|_\infty$ et $\|L\varphi(s, t, \xi_1, \xi'_1) - L\varphi(s, t, \xi_2, \xi'_2)\| \leq \|D^2\varphi\|_\kappa (|\xi_1 - \xi_2|^\kappa + |\xi'_1 - \xi'_2|^\kappa)$.

Avec cette notation, il est facile de vérifier que

$$\sigma(t, \xi) - \sigma(s, \xi) - \sigma(t, \xi') + \sigma(s, \xi') = L\sigma(s, t, \xi, \xi')((t - s, 0), (0, \xi' - \xi))$$

pour tous $s, t \in [0, T]$, $\xi, \xi' \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, de telle sorte que

$$\begin{aligned} & \left| [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}_u) - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}_u) - [\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}_v) + [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}_v) \right| \tag{4.51} \\ &= \left| L\sigma(s, t, \mathcal{Y}_u, \tilde{\mathcal{Y}}_u)((t - s, 0), (0, \mathcal{Y}_u - \tilde{\mathcal{Y}}_u)) \right. \\ &\quad \left. - L\sigma(s, t, \mathcal{Y}_v, \tilde{\mathcal{Y}}_v)((t - s, 0), (0, \mathcal{Y}_v - \tilde{\mathcal{Y}}_v)) \right| \\ &\leq \left| L\sigma(s, t, \mathcal{Y}_u, \tilde{\mathcal{Y}}_u)((t - s, 0), (0, [\mathcal{Y}_u - \tilde{\mathcal{Y}}_u] - [\mathcal{Y}_v - \tilde{\mathcal{Y}}_v])) \right| \\ &\quad + \left| [L\sigma(s, t, \mathcal{Y}_u, \tilde{\mathcal{Y}}_u) - L\sigma(s, t, \mathcal{Y}_v, \tilde{\mathcal{Y}}_v)]((t - s, 0), (0, \mathcal{Y}_v - \tilde{\mathcal{Y}}_v)) \right| \\ &\leq \|D^2\sigma\|_\infty |t - s| |[y_u - \tilde{y}_u] - [y_v - \tilde{y}_v]| \\ &\quad + \|D^2\sigma\|_\kappa (2|u - v|^\kappa + \|y_u - y_v\|^\kappa + |\tilde{y}_u - \tilde{y}_v|^\kappa) |t - s| |y_v - \tilde{y}_v| \\ &\leq c_\sigma |t - s| \{ \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\kappa] |u - v|^\gamma \\ &\quad + (2|u - v|^\kappa + |u - v|^{\kappa\gamma} \{ \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma]^\kappa + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma]^\kappa \}) \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^\gamma] T^\gamma \}, \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat escompté. \square

Preuve du lemme 4.3.2. Les normes que nous envisagerons dans ce qui suit seront (implicitement) relatives à l'intervalle $[0, T_0]$. Les estimations (4.45) et (4.46) sont une conséquence de la proposition 2.2.7. En effet, en identifiant \mathcal{Y} en tant qu'élément de \mathcal{Q}_x^γ comme dans la preuve de la proposition 4.3.1 et en utilisant (4.41), on déduit de (2.19) :

$$\mathcal{N}[(\sigma_t - \sigma_s)(\mathcal{Y}); \mathcal{Q}_x^\gamma] \leq c_{\sigma_t - \sigma_s} \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]\},$$

avec

$$\begin{aligned} c_{\sigma_t - \sigma_s} &= c \{1 + \|\sigma_t - \sigma_s\|_\infty + \|D(\sigma_t - \sigma_s)\|_\infty + \|D^2(\sigma_t - \sigma_s)\|_\infty\} \\ &\leq c |t - s| \{1 + \|D\sigma\|_\infty + \|D^2\sigma\|_\infty + \|D^3\sigma\|_\infty\}, \end{aligned}$$

tandis que, d'après (2.20),

$$\mathcal{N}[\sigma_t(\mathcal{Y}) - \sigma_t(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{Q}_x^\gamma] \leq c_{\sigma_t} \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]^2\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma],$$

avec

$$\begin{aligned} c_{\sigma_t} &= c \{1 + \|\sigma_t\|_\infty + \|D\sigma_t\|_\infty + \|D^2\sigma_t\|_\infty + \|D^3\sigma_t\|_\infty\} \\ &\leq c \{1 + \|\sigma\|_\infty + \|D\sigma\|_\infty + \|D^2\sigma\|_\infty + \|D^3\sigma\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Cherchons à présent à établir l'inégalité (4.47). A cette fin, notons $\zeta_{st}^{ij} := D_2(\sigma_t^{ij} - \sigma_s^{ij})$, de telle sorte que $[(\sigma_t - \sigma_s)(\mathcal{Y})]^{x,ijk} = \zeta_{st}^{ij}(\mathcal{Y})(y^{x,k})$. Ainsi, $\delta([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}) - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}))_{uv}^{x,ijk} = A_{uv}^{st,ijk} + B_{uv}^{st,ijk} + C_{uv}^{st,ijk} + D_{uv}^{st,ijk}$, avec

$$\begin{aligned} A_{uv}^{st,ijk} &:= \delta(\zeta_{st}^{ij}(\mathcal{Y}))_{uv}([y - \tilde{y}]_v^{x,k}) \quad , \quad B_{uv}^{st,ijk} := \zeta_{st}^{ij}(\mathcal{Y}_u)(\delta([y - \tilde{y}]_u^{x,k}))_{uv}, \\ C_{uv}^{st,ijk} &:= [\zeta_{st}^{ij}(\mathcal{Y}_v) - \zeta_{st}^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_v)]((\delta \tilde{y}^{x,k})_{uv}) \quad , \quad D_{uv}^{st,ijk} := \delta([\zeta_{st}^{ij}(\mathcal{Y}) - \zeta_{st}^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}})])_{uv}(\tilde{y}_u^{x,k}). \end{aligned}$$

Etant donnée la régularité supposée de σ , nous pouvons utiliser le résultat du lemme 4.1.5 pour affirmer

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[A^{st}, \mathcal{C}_2^{\kappa\gamma}] &\leq \mathcal{N}[D_2(\sigma_t - \sigma_s)(\mathcal{Y}); \mathcal{C}_1^\gamma] T^{\gamma(1-\kappa)} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma] \\ &\leq c_\sigma |t - s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[D^{st}; \mathcal{C}_2^{\kappa\gamma}] &\leq \mathcal{N}[D_2(\sigma_t - \sigma_s)(\mathcal{Y}) - D_2(\sigma_t - \sigma_s)(\tilde{\mathcal{Y}}); \mathcal{C}_1^{\kappa\gamma}] \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma] \\ &\leq c_\sigma |t - s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^\kappa + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]^\kappa\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma] \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]. \end{aligned}$$

Il est par ailleurs facile de constater que $\mathcal{N}[B^{st}; \mathcal{C}_1^{\kappa\gamma}] \leq c_\sigma |t - s| \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]$, tandis que $\mathcal{N}[C^{st}; \mathcal{C}_1^{\kappa\gamma}] \leq c_\sigma |t - s| \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma] \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]$, d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{N}([\sigma_t^t - \sigma_s^s](\mathcal{Y}) - [\sigma_t^t - \sigma_s^s](\tilde{\mathcal{Y}}))^x; \mathcal{C}_1^{\kappa\gamma}] \\ \leq c_\sigma |t - s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^{1+\kappa} + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]^{1+\kappa}\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]. \quad (4.52) \end{aligned}$$

En ce qui concerne $r_{uv}^{st} := ([\sigma_t - \sigma_s](\mathcal{Y}) - [\sigma_t - \sigma_s](\tilde{\mathcal{Y}}))^\sharp$, nous savons que son expression est donnée, en notant $\varphi_{uv}(r) := \mathcal{Y}_u + r(\mathcal{Y}_v - \mathcal{Y}_u)$, $\tilde{\varphi}_{uv}(r) := \tilde{\mathcal{Y}}_u + r(\tilde{\mathcal{Y}}_v - \tilde{\mathcal{Y}}_u)$ et $\sigma_{st} := \sigma_t - \sigma_s$, par $r_{uv}^{st} = r_{uv}^{st,1} + r_{uv}^{st,2} + r_{uv}^{st,3}$, avec

$$r_{uv}^{st,1,ij} = \int_0^1 dr [D_1 \sigma_{st}^{ij}(\varphi_{uv}(r)) - D_1 \sigma_{st}^{ij}(\tilde{\varphi}_{uv}(r))](v - u),$$

$$r_{uv}^{st,2,ij} = D_2\sigma_{st}^{ij}(\mathcal{Y}_u)(y_{uv}^\#) - D_2\sigma_{st}^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_u)(\tilde{y}_{uv}^\#),$$

$$r_{uv}^{st,3,ij} = \int_0^1 dr \{ [D_2\sigma_{st}^{ij}(\varphi_{uv}(r)) - D_2\sigma_{st}^{ij}(\mathcal{Y}_u)]((\delta y)_{uv}) - [D_2\sigma_{st}^{ij}(\tilde{\varphi}_{uv}(r)) - D_2\sigma_{st}^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_u)]((\delta \tilde{y})_{uv}) \}.$$

Il est tout d'abord aisé d'établir $\mathcal{N}[r^{st,1}; \mathcal{C}_2^{\gamma+\gamma\kappa}] \leq c_\sigma |t-s| \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]$. Pour estimer $r^{st,2}$, on utilise l'écriture

$$r_{uv}^{st,2,ij} = [D_2\sigma_{st}^{ij}(\mathcal{Y}_u) - D_2\sigma_{st}^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_u)](y_{uv}^\#) + D_2\sigma_{st}^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_u)([y_{uv}^\# - \tilde{y}_{uv}^\#]),$$

qui mène directement à $\mathcal{N}[r^{st,2}; \mathcal{C}_2^{\gamma+\gamma\kappa}] \leq c_\sigma |t-s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]$. Enfin, on décompose $r^{st,3}$ en $r^{st,3} = r^{st,3,1} + r^{st,3,2}$, avec

$$r_{uv}^{st,3,1,ij} = \int_0^1 dr [D_2\sigma_{st}^{ij}(\varphi_{uv}(r)) - D_2\sigma_{st}^{ij}(\mathcal{Y}_u)](\delta(y-\tilde{y})_{uv}),$$

$$r_{uv}^{st,3,2,ij} = \int_0^1 dr \left[D_2\sigma_{st}^{ij}(\varphi_{uv}(r)) - D_2\sigma_{st}^{ij}(\mathcal{Y}_u) - D_2\sigma_{st}^{ij}(\tilde{\varphi}_{uv}(r)) + D_2\sigma_{st}^{ij}(\tilde{\mathcal{Y}}_u) \right] ((\delta \tilde{y})_{uv}).$$

Clairement, $\mathcal{N}[r^{st,3,1}; \mathcal{C}_2^{\gamma+\gamma\kappa}] \leq c_\sigma |t-s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]$. Pour conclure, il suffit d'observer que l'incrément double qui apparaît entre crochets dans $r_{uv}^{st,3,2}$ peut être traité exactement comme (4.51) (on remplace $[\sigma_t - \sigma_s]$ par $D_2[\sigma_t - \sigma_s]$ et \mathcal{Y}_v par $\varphi_{uv}(r)$), ce qui conduit à

$$\mathcal{N}[r^{st,3,2}; \mathcal{C}_2^{\gamma+\gamma\kappa}] \leq c_\sigma |t-s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^\kappa + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]^\kappa\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma] \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma].$$

Nous venons ainsi de prouver que l'inégalité

$$\mathcal{N}[r^{st}; \mathcal{C}_2^{\gamma+\gamma\kappa}] \leq c_\sigma |t-s| \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_x^\gamma]^{1+\kappa} + \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma]^{1+\kappa}\} \mathcal{N}[y-\tilde{y}; \mathcal{Q}_x^\gamma],$$

qui, associée à (4.52), entraîne (4.47). □

Chapitre 5

Le cadre convolutionnel

5.1 Introduction

Nous poursuivons notre analyse de l'équation de Volterra rugueuse

$$y_t^i = a^i + \int_0^t \sigma^{ij}(t, u, y_u) dx_u^j, \quad t \in [0, T], \quad (5.1)$$

avec x un bruit γ -höldérien m -dimensionnel, en nous concentrant sur le cas particulier où le champ de vecteurs σ se décompose en

$$\sigma^{ij}(t, u, y) = \phi(t - u) \psi^{ij}(y), \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.2)$$

avec

- $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d,m}$ une application régulière,
- $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ un noyau que l'on peut écrire sous la forme

$$\phi(v) = \int_{\mathcal{A}} d\xi S_v(\xi) \tilde{\phi}(\xi), \quad (5.3)$$

pour une certaine fonction $S : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ qui satisfait les trois conditions : pour tout $\xi \in \mathcal{A}$, pour tous $t, t' \geq 0$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$,

$$|S_t(\xi)| \leq 1 \quad , \quad |S_t(\xi) - 1| \leq c_\alpha |\xi|^\alpha t^\alpha \quad , \quad S_{t+t'}(\xi) = S_t(\xi) \cdot S_{t'}(\xi). \quad (5.4)$$

Notez que les trois conditions (5.4) sont en particulier satisfaites par le noyau de Laplace ($\mathcal{A} = \mathbb{R}^+$, $S_t(\xi) = e^{-\xi t}$) et le noyau de Fourier ($\mathcal{A} = \mathbb{R}$, $S_t(\xi) = e^{-2i\pi\xi t}$), qui sont, à vrai dire, les deux exemples que nous avons à l'esprit.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que pour ce modèle particulier, les difficultés techniques liées au prolongement de la solution donnée par le théorème 4.3.1 peuvent être surmontées pour donner naissance à une solution *globale* définie sur un intervalle $[0, T]$ quelconque. A cette fin, nous avons d'abord pris appui sur les deux observations élémentaires successives (on suppose pour l'instant x différentiable) :

- Si σ est donnée par (5.2), alors en appliquant le théorème de Fubini, le système (5.1) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} y_t^i &= a^i + \int_{\mathcal{A}} \tilde{y}_t^i(\xi) \tilde{\phi}(\xi) d\xi \\ \tilde{y}_t^i(\xi) &= \int_0^t S_{t-v}(\xi) dx_v^j \psi^{ij}(y_v). \end{cases} \quad (5.5)$$

– Avec ces notations, et à $\xi \in \mathcal{A}$ fixé, les incréments de $\tilde{y}^i(\xi)$ se décomposent en

$$\begin{aligned}\tilde{y}_t^i(\xi) - \tilde{y}_s^i(\xi) &= \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u) + \int_0^s [S_{t-u}(\xi) - S_{s-u}(\xi)] dx_u^j \psi^{ij}(y_u) \\ &= \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u) + [S_{t-s}(\xi) - 1] \int_0^s S_{u-s}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u),\end{aligned}$$

où pour obtenir cette dernière relation, on a mis à contribution la propriété d'additivité $S_{t+t'}(\xi) = S_t(\xi) \cdot S_{t'}(\xi)$. En posant $a_{ts}(\xi) := S_{t-s}(\xi) - 1$, on obtient

$$\tilde{y}_t^i(\xi) - \tilde{y}_s^i(\xi) = \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij} \left(a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_u(\xi) \right) + a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s(\xi). \quad (5.6)$$

Si l'on compare le système (4.2) à la formulation (5.6), il apparaît immédiatement que la dépendance des variations du processus inconnu (ici \tilde{y}) entre deux temps $s < t$ vis-à-vis de son "passé" (sur $[0, s]$) est réduite à une dépendance vis-à-vis du seul "présent" s . C'est cette observation heuristique qui va permettre la mise en évidence d'une solution cette fois *globale* pour le système, d'abord sous la forme (5.6), puis, en posant simplement $y_t := \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_t(\xi)$, sous la forme initiale (5.1), et ce lorsque x est un processus γ -höldérien avec $\gamma > 1/3$.

Bien entendu, la transformation du système (5.1) en (5.6) présente un coût non négligeable : le processus inconnu n'est plus à valeurs fini-dimensionnelles mais à valeurs fonctionnelles, ce qui nous conduira à manipuler, outre les espaces de processus höldériens introduits dans la sous-section 2.1.2, des espaces de fonctions particuliers liés à $\tilde{\phi}$. Sous l'hypothèse d'intégrabilité $\int_{\mathcal{A}} d\xi (1 + |\xi|^\alpha) |\tilde{\phi}(\xi)| < \infty$, avec α un paramètre à préciser, nous serons ainsi incités à introduire l'espace

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_{\alpha, \tilde{\phi}} := \{h : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathcal{A}} d\xi (1 + |\xi|^\alpha) |\tilde{\phi}(\xi)| |h(\xi)| < \infty\}. \quad (5.7)$$

La résolution du système (5.6) s'effectuera ensuite dans un espace de processus höldériens à valeurs dans \mathcal{L}_α .

L'autre idée fondamentale qui va guider notre analyse de l'équation (5.6) est inspirée des considérations développées dans [51] dans le cadre des EDPS (nous reviendrons en détail sur ces considérations dans la partie suivante). Elle consiste à introduire un nouvel opérateur d'incrément, noté $\tilde{\delta}$, qui agit sur les processus de deux variables à valeurs fonctionnelles de la façon suivante : si $s < t$,

$$(\tilde{\delta}\tilde{h})_{ts}(\xi) := (\delta\tilde{h})_{ts}(\xi) - a_{ts}(\xi) \tilde{h}_s(\xi). \quad (5.8)$$

Avec cette notation, le système (5.6) devient alors

$$(\tilde{\delta}\tilde{y}^i)_{ts}(\xi) = \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij} \left(a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_u(\xi) \right). \quad (5.9)$$

En réalité, si nous nous permettons de substituer à l'incrément classique δ une formulation "convolutionnelle" basée sur $\tilde{\delta}$, c'est parce que ce dernier objet rend lui aussi possible la construction d'une théorie de l'intégration, par le biais d'un opérateur d'inversion que l'on notera $\tilde{\Lambda}$ (voir Section 5.2). En cela, notre démarche est à rapprocher des idées contenues dans [75] : le traitement du système va passer par une préalable adaptation des outils classiques de la théorie (δ , Λ , espaces höldériens, intégrales itérées) aux comportements algébriques induits par $\tilde{\delta}$, avec notamment la mise en avant d'un chemin $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2)$ mieux adapté au problème

que le 2-rough path usuel $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$. L'aire de Lévy standard $\mathbf{x}^2 = \iint dx \otimes dx$ sera par exemple remplacée par l'aire de Lévy "convolée"

$$\tilde{\mathbf{x}}_{ts}^2(\xi) := \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u \otimes (\delta x)_{us}. \quad (5.10)$$

Comme dans le cas des diffusions, ce type de définition est dans un premier temps purement formel si x est höldérien ; l'existence et la régularité de ce processus sont admises pour conduire à l'interprétation de l'intégrale $\int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u)$ qui intervient dans le système. Le sens à donner à la définition (5.10) lorsque x est γ -höldérien ($\gamma > 1/3$) ne sera examiné que dans un second temps.

Vous l'aurez sans doute remarqué à travers les expressions (5.8) et (5.10) : la formulation (5.9) de l'équation nous incite à adopter une convention notationnelle inversée pour les variables temporelles, avec des indices qui apparaîtront dans l'ordre décroissant. Nous noterons ainsi par exemple, si $s < u < t$, $f \in \mathcal{C}_1$, $g \in \mathcal{C}_2$,

$$(\delta f)_{ts} = f_t - f_s \quad , \quad (\delta g)_{tus} = g_{ts} - g_{tu} - g_{us}.$$

Le chapitre est organisé de la façon suivante :

- La section 5.2 est consacrée à l'étude de l'opérateur d'incrément $\tilde{\delta}$, défini par (5.8) pour les processus de deux variables temporelles et étendu de façon naturelle aux processus de n variables temporelles, à valeurs fonctionnelles. Cette section verra ainsi se déployer la même démarche que lors de la présentation de δ (Section 2.1), pour aboutir à l'existence de l'opérateur d'inversion $\tilde{\Lambda}$ associé à $\tilde{\delta}|_{\mathcal{C}_3}$ (Théorème 5.2.9).
- Dans la section 5.3, nous revisiterons le cas Young ($\gamma > 1/2$) à partir du formalisme issu de $\tilde{\delta}$. Ce premier exemple nous permettra avant tout de nous familiariser avec les outils présentés dans la section 5.2 dans le cadre de l'interprétation du système (5.9). Le résultat d'existence et d'unicité d'une solution contenu dans le théorème 5.3.2 est à mettre en parallèle avec les résultats de la section 4.1.
- La section 5.4 abordera quant à elle le cas $\gamma \in (1/3, 1/2]$, qui restait problématique avec le formalisme classique. Dans ce contexte, le théorème 5.4.1 constitue à notre connaissance le premier résultat d'existence et d'unicité d'une solution globale pour le système (5.1).
- Dans la section 5.5, nous montrerons que ces différents résultats, exprimés sous des hypothèses relativement abstraites sur x , peuvent en fait être appliqués, sous certaines conditions d'intégrabilité pour $\tilde{\phi}$, à un 2-rough path $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ standard. L'approche que nous développerons dans ce chapitre est ainsi valable lorsque l'équation (5.1) est par exemple dirigée par un mBf multi-dimensionnel, d'indice $H > 1/3$.
- Enfin, l'appendix contient la preuve de la proposition 5.5.7, preuve dont l'aspect technique aurait pu nuire à la lisibilité de la section 5.5.

5.2 L'opérateur d'incrément $\tilde{\delta}$

Comme nous venons de le voir, l'analyse (heuristique) du système (5.1) lorsque σ est donné par (5.2), fait apparaître un opérateur $\tilde{\delta}$, perturbation de δ par le noyau S via

$$a_{ts}(\xi) := S_{t-s}(\xi) - 1.$$

Dans cette section, nous allons constater que grâce aux hypothèses sur S contenues dans (5.4), $\tilde{\delta}$ conserve certaines propriétés fondamentales de δ , à partir desquelles nous avons pu introduire, dans la section 2.1, les outils permettant une analyse efficace des systèmes rugueux.

5.2.1 Incréments

Nous l'avons déjà évoqué en introduction : eu égard à l'ordre d'apparition des indices dans le membre de droite de (5.9), il se révèle plus commode d'inverser la convention notationnelle que nous utilisons jusqu'à présent pour les variables temporelles. Pour tout intervalle I de \mathbb{R}^+ , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout espace V , la notation $\mathcal{C}_k(I; V)$ désignera donc désormais l'ensemble des processus h continus, à valeurs dans V , définis sur le simplexe

$$\mathcal{S}_k(I) := \{(t_1, \dots, t_k) \in I^k : t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_k\},$$

et tels que $h_{t_1 \dots t_k} = 0$ s'il existe $i \neq j$ pour lesquels $t_i = t_j$.

Notez que cette convention préfigure en outre le formalisme qui sera adopté dans la partie III.

5.2.2 Espaces fonctionnels sous-jacents

Conformément à la (première) définition (5.8), $\tilde{\delta}$ sera amené à agir sur des processus à valeurs fonctionnelles. Anticipons ici sur les sections suivantes en présentant les espaces fonctionnels qui vont s'imposer assez naturellement dans l'analyse de (5.9) (voir par exemple la proposition 5.3.1). Il s'agit des espaces de type \mathcal{L}^1 induits par la norme

$$\mathcal{N}[\tilde{g}; \mathcal{L}_\beta(V)] = \mathcal{N}[\tilde{g}; \mathcal{L}_{\beta, \tilde{\phi}}(V)] := \int_{\mathcal{A}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)| (1 + |\xi|^\beta) \|\tilde{g}(\xi)\|_V, \quad (5.11)$$

où $\beta > 0$ est un paramètre fixé et V un espace euclidien. On définit ensuite

$$\tilde{\mathcal{C}}_{k, \beta}(I; V) := \mathcal{C}_k(I; \mathcal{L}_\beta(V)). \quad (5.12)$$

L'opérateur d'incrément classique δ agit naturellement sur ces espaces à travers la formule :

$$\text{Si } \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{C}}_{k, \beta}(I; V), \quad (\delta \tilde{h})_{t_1 \dots t_{k+1}}(\xi) := \delta(\tilde{h}(\xi))_{t_1 \dots t_{k+1}}, \quad \xi \in \mathcal{A}. \quad (5.13)$$

L'opérateur $\tilde{\delta}$ est quant à lui étendu à $\tilde{\mathcal{C}}_{k, \beta}(I; V)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) de la façon suivante :

Définition 5.2.1. *Soit I un intervalle de \mathbb{R}^+ , V un espace euclidien. Pour tout $\beta > 0$ on définit la suite d'opérateurs $\tilde{\delta}_k : \tilde{\mathcal{C}}_{k, \beta}(I; V) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{k+1, \beta}(I; V)$ par la formule : si $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{C}}_{k, \beta}(I; V)$, alors pour tout $\xi \in \mathcal{A}$,*

$$(\tilde{\delta}_k \tilde{h})_{t_1 \dots t_{k+1}}(\xi) := (\delta_k \tilde{h})_{t_1 \dots t_{k+1}}(\xi) - a_{t_1 t_2}(\xi) \tilde{h}_{t_2 \dots t_{k+1}}(\xi), \quad (t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathcal{S}_{k+1}(I). \quad (5.14)$$

En particulier, si $s < u < t \in I$,

$$(\tilde{\delta}_1 \tilde{h})_{ts}(\xi) = \tilde{h}_t(\xi) - S_{t-s}(\xi) \tilde{h}_s(\xi) \quad , \quad (\tilde{\delta}_2 \tilde{h})_{tus}(\xi) = \tilde{h}_{ts}(\xi) - \tilde{h}_{tu}(\xi) - S_{t-u}(\xi) \tilde{h}_{us}(\xi).$$

Dans un souci de clarté, nous utiliserons une même notation $\tilde{\delta}$ pour désigner tous les opérateurs $\tilde{\delta}_k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 5.2.2. Dans le reste de ce chapitre, nous ne mentionnerons explicitement la variable dite *spatiale* (en référence au vocabulaire des EDP) ξ que dans de rares cas où une confusion aurait été possible. La plupart du temps, nous écrirons ainsi plus simplement $\tilde{\delta}\tilde{h} = \delta\tilde{h} - a \cdot \tilde{h}$.

La convention pour les produits d'incrément donnée par (2.3) sera par ailleurs conservée dans les contextes suivants :

Lemme 5.2.3. *Soit $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{C}}_{n,\beta}(I; \mathbb{R}^{k,l})$ et $L \in \mathcal{C}_m(I; \mathbb{R}^l)$. Alors le produit $\tilde{M}L$, défini par la relation*

$$(\tilde{M}L)_{t_1 \dots t_{m+n-1}}(\xi) = \tilde{M}_{t_1 \dots t_n}(\xi) L_{t_n \dots t_{m+n-1}},$$

appartient à $\tilde{\mathcal{C}}_{m+n-1,\beta}(I; \mathbb{R}^k)$. En outre, lorsque $n = 2$, les relations algébriques suivantes sont vérifiées :

$$\delta(\tilde{M}L) = \delta\tilde{M}L - \tilde{M}\delta L, \quad \text{et} \quad \tilde{\delta}(\tilde{M}L) = \tilde{\delta}\tilde{M}L - \tilde{M}\delta L. \quad (5.15)$$

Démonstration. La première partie de l'assertion est une conséquence évidente de l'estimation élémentaire

$$|\tilde{M}_{t_1 \dots t_n}(\xi) L_{t_n \dots t_{m+n-1}}|_{\mathbb{R}^k} \leq |\tilde{M}_{t_1 \dots t_n}(\xi)|_{\mathbb{R}^{k,l}} |L_{t_n \dots t_{m+n-1}}|_{\mathbb{R}^n}.$$

Quant aux relations algébriques, la première découle simplement de la proposition 2.1.5, tandis que pour la deuxième, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}(\tilde{M}L)_{t_1 \dots t_{m+2}} \\ &= \delta(\tilde{M}L)_{t_1 \dots t_{m+2}} - a_{t_1 t_2} \tilde{M}_{t_2 t_3} L_{t_3 \dots t_{m+2}} \\ &= (\delta\tilde{M})_{t_1 t_2 t_3} L_{t_3 \dots t_{m+2}} - \tilde{M}_{t_1 t_2} (\delta L)_{t_2 \dots t_{m+2}} - a_{t_1 t_2} \tilde{M}_{t_2 t_3} L_{t_3 \dots t_{m+2}} \\ &= [(\delta\tilde{M})_{t_1 t_2 t_3} - a_{t_1 t_2} \tilde{M}_{t_2 t_3}] L_{t_3 \dots t_{m+2}} - (\tilde{M}\delta L)_{t_1 \dots t_{m+2}}. \end{aligned}$$

□

Munis de ces notations et résultats préliminaires, nous sommes en mesure de prouver que la propriété de cohomologie $\delta\delta = 0$, qui amorçait les constructions de la théorie de l'intégration algébrique standard, reste vraie pour $\tilde{\delta}$:

Proposition 5.2.4. $\tilde{\delta}\tilde{\delta} = 0$. *On a même, pour tout $\beta > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Im } \tilde{\delta}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{k,\beta}(I;V)} = \text{Ker } \tilde{\delta}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{k+1,\beta}(I;V)}$.*

Démonstration. Si $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{C}}_{k,\beta}(I; V)$, alors en utilisant la relation $\delta\delta = 0$ et le résultat du lemme 5.2.3, on déduit

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}\tilde{\delta}\tilde{F} &= (\delta - a)[(\delta - a)\tilde{F}] = \delta\delta\tilde{F} - \delta(a\tilde{F}) - a\delta\tilde{F} + a a \tilde{F} \\ &= -\delta a \tilde{F} + a \delta\tilde{F} - a \delta\tilde{F} + a a \tilde{F} = a a \tilde{F} - \delta a \tilde{F}. \end{aligned}$$

Il n'est ensuite pas difficile de vérifier, à partir de l'additivité $S_t \cdot S_{t'} = S_{t+t'}$, que

$$(\delta a)_{tus} = a_{tu} a_{us}, \quad (t, u, s) \in \mathcal{S}_3(I),$$

ce qui donne $\tilde{\delta}\tilde{\delta}\tilde{F} = 0$.

La relation $\text{Im } \tilde{\delta}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{k,\beta}(I;V)} = \text{Ker } \tilde{\delta}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{k+1,\beta}(I;V)}$ peut être prouvée comme dans la proposition 2.1.3 : si $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{C}}_{k+1,\beta}(I; V)$ est tel que $\tilde{\delta}\tilde{A} = 0$, on pose $\tilde{B}_{t_1 \dots t_n} = \tilde{A}_{t_1 \dots t_n s}$, avec s un temps arbitraire dans I . Alors

$$\begin{aligned} [\tilde{\delta}\tilde{B}]_{t_1 \dots t_{n+1}} &= [\delta\tilde{B}]_{t_1 \dots t_{n+1} s} + (-1)^{n+1} \tilde{A}_{t_1 \dots t_{n+1}} - a_{t_1 t_2} \tilde{A}_{t_2 \dots t_n s} \\ &= [\tilde{\delta}\tilde{A}]_{t_1 \dots t_{n+1} s} + (-1)^{n+1} \tilde{A}_{t_1 \dots t_{n+1}} = (-1)^{n+1} \tilde{A}_{t_1 \dots t_{n+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\tilde{C} = (-1)^{n+1}\tilde{B}$, on obtient $\tilde{\delta}\tilde{C} = \tilde{A}$. □

Remarque 5.2.5. A partir de la relation $\tilde{\delta}\tilde{\delta} = 0$, une récurrence immédiate conduit à la formule : pour toute partition $\{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ de l'intervalle $[s, t]$, pour tout $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\beta}([s, t]; V)$,

$$(\tilde{\delta}\tilde{f})_{ts} = \sum_{i=0}^{n-1} S_{t-t_{i+1}} \cdot (\tilde{\delta}\tilde{f})_{t_{i+1}t_i}. \quad (5.16)$$

Ce type de décomposition sera plusieurs fois mis à contribution par la suite, notamment dans les preuves du lemme 5.2.8 et du corollaire 5.2.10. Il s'agit en quelque sorte de l'analogie de la formule télescopique usuelle $(\delta f)_{ts} = \sum_{i=0}^{n-1} (\delta f)_{t_{i+1}t_i}$ dans le formalisme convolutionnel.

Le complexe de cochaîne $(\tilde{\mathcal{C}}_{k,\beta}(I; V), \tilde{\delta})$ représentera la structure à la base de toutes les constructions de ce chapitre. Essayons de donner un aperçu de la pertinence de cette structure dans le cadre de l'analyse du système (5.9). Pour ce faire, on pose, pour tous processus lisses $f : [0, T] \rightarrow W$, $g : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(W, V)$,

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}g f)(\xi) := \int_s^t S_{t-u}(\xi) dg_u f_u, \quad \xi \in \mathcal{A}, \quad (5.17)$$

et pour tout $h : [0, T]^2 \rightarrow W$ lisse,

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}g h)(\xi) := \int_s^t S_{t-u}(\xi) dg_u h_{us}. \quad (5.18)$$

La relation de Chasles usuelle $\delta(\int f dg) = 0$ devient alors :

Proposition 5.2.6. *Avec les notations (5.17) et (5.18), on a, si $f : [0, T] \rightarrow W$ et $g : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(W, V)$ sont deux applications lisses,*

$$\tilde{\delta}\left(\mathcal{J}(\tilde{d}g f)\right) = 0 \quad , \quad \tilde{\delta}\left(\mathcal{J}(\tilde{d}g \delta f)\right) = \mathcal{J}(\tilde{d}g) \delta f. \quad (5.19)$$

Démonstration. Les deux relations sont immédiates : si $s < u < t$,

$$\tilde{\delta}\left(\mathcal{J}(\tilde{d}g f)\right)_{tus} = \mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}g f) - \mathcal{J}_{tu}(\tilde{d}g f) - S_{t-u} \cdot \mathcal{J}_{us}(\tilde{d}g f),$$

et $S_{t-u} \cdot \mathcal{J}_{us}(\tilde{d}g f) = \int_s^u S_{t-v} dg_v f_v$, tandis que, à partir de cette dernière observation,

$$\tilde{\delta}\left(\mathcal{J}(\tilde{d}g \delta f)\right) = \int_u^t S_{t-v} dg_v (\delta f)_{vs} - \int_u^t S_{t-v} dg_v (\delta f)_{vu} = \left(\int_u^t S_{t-v} dg_v\right) (\delta f)_{us}.$$

□

5.2.3 Espaces höldériens et application $\tilde{\Lambda}$

Il s'agit ici d'adapter les espaces de processus introduits dans la sous-section 2.1.2 au contexte convolutionnel que nous venons de présenter. Si $\mu, \beta, \gamma > 0$ sont trois paramètres fixés, I un intervalle de \mathbb{R}^+ et V un espace euclidien, on commence par définir

$$\tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I; V) := \{\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}(I; V) : \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I; V)] := \sup_{s < t \in I} \frac{\mathcal{N}[\tilde{y}_{ts}; \mathcal{L}_\beta(V)]}{|t - s|^\mu} < \infty\},$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{1,\beta}^\mu(I; V) := \{\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\beta}(I; V) : \tilde{\delta}\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I; V)\}. \quad (5.20)$$

Ensuite, en ce qui concerne les processus de 3 variables, on définit d'abord, comme dans le cas standard, l'espace intermédiaire $\tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^{(\gamma,\rho)}(I; V)$ associé à la norme

$$\mathcal{N}[\tilde{h}; \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^{(\gamma,\rho)}(I; V)] := \sup_{s < u < t \in I} \frac{\mathcal{N}[\tilde{h}_{tus}; \mathcal{L}_\beta(V)]}{|t - u|^\gamma |u - s|^\rho},$$

puis $\tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I; V) := \bigoplus_{0 \leq \alpha \leq \mu} \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^{(\alpha, \mu - \alpha)}(I; V)$. On munit enfin ce dernier espace de la norme

$$\mathcal{N}[\tilde{h}; \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I; V)] := \inf \left\{ \sum_i \mathcal{N}[h_i; \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^{(\rho_i, \mu - \rho_i)}(I; V)]; h = \sum_i h_i, 0 < \rho_i < \mu \right\}.$$

On remarquera notamment les deux différences substantielles par rapport aux espaces höldériens définis dans la sous-section 2.1.2 :

- L'espace d'arrivée est ici supposé fonctionnel ; il dépend en outre d'un paramètre $\beta > 0$.
- La définition (5.20) de $\tilde{\mathcal{C}}_{1,\beta}^\mu(I; V)$ fait appel à l'incrément convolutionnel $\tilde{\delta}$.

Remarque 5.2.7. Comme dans les sections précédentes, il nous arrivera d'utiliser les raccourcis $\tilde{\mathcal{C}}_{k,\beta}^\mu(I)$, $\tilde{\mathcal{C}}_{k,\beta}^\mu(V)$ ou même $\tilde{\mathcal{C}}_{k,\beta}^\mu$ lorsque l'intervalle de temps I et/ou l'espace V sont clairement déterminés par le contexte.

Il est intéressant de noter que le résultat élémentaire qui stipule que $\text{Im } \delta_1 \cap \mathcal{C}_2^\mu(V) = \{0\}$ si $\mu > 1$, admet l'analogie direct :

Lemme 5.2.8. *Soit $\beta > 0$. Si $\mu > 1$, alors $\text{Im } \tilde{\delta}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{1,\beta}(I;V)} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(V) = \{0\}$.*

Démonstration. Soit $\tilde{M} = \tilde{\delta}\tilde{f} \in \text{Im } \tilde{\delta}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{1,\beta}(I;V)} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(V)$. Suivant (5.16), on peut écrire, pour tous $s < t$, $\tilde{M}_{ts} = \sum_{i=0}^{n-1} S_{t-t_{i+1}} \cdot \tilde{M}_{t_{i+1}t_i}$, et ce pour toute partition $\Pi_{ts} = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ de l'intervalle $[s, t]$. En utilisant cette fois l'hypothèse $|S_t(\xi)| \leq 1$ contenue dans (5.4), on déduit

$$\mathcal{N}[\tilde{M}_{ts}; \mathcal{L}_\beta(V)] \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{N}[\tilde{M}_{t_{i+1}t_i}; \mathcal{L}_\beta(V)] \leq \mathcal{N}[\tilde{M}; \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(V)] |t - s| |\Pi_{ts}|^{\mu-1},$$

et ce dernier terme tend vers 0 lorsque le pas $|\Pi_{ts}|$ tend vers 0. \square

Fort de ces différents constats, il est maintenant possible de reprendre les idées de la preuve du théorème 2.1.1 en vue d'établir l'existence d'un opérateur d'inversion $\tilde{\Lambda}$ adapté au formalisme induit par $\tilde{\delta}$:

Proposition 5.2.9. *Soit $\mu > 1, \beta > 0$, I un intervalle de \mathbb{R}^+ et V un espace euclidien. Pour tout $\tilde{h} \in \text{Ker } \tilde{\delta}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}(I;V)} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I; V)$, il existe un unique élément $\tilde{\Lambda}\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I; V)$ tel que $\tilde{\delta}(\tilde{\Lambda}\tilde{h}) = \tilde{h}$. Cet élément vérifie en outre la propriété de contraction :*

$$\mathcal{N}[\tilde{\Lambda}\tilde{h}; \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I; V)] \leq c_\mu \mathcal{N}[\tilde{h}; \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I; V)], \quad (5.21)$$

avec c_μ une constante qui ne dépend que de μ . Cette assertion donne ainsi naissance à une application linéaire continue

$$\tilde{\Lambda} : \text{Ker } \tilde{\delta}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}(I;V)} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I; V) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I; V)$$

telle que

$$\tilde{\delta}\tilde{\Lambda} = Id_{\text{Ker}\tilde{\delta}_{|\tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}(I;V) \cap \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I;V)}} \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}\tilde{\delta} = Id_{\tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I;V)}. \quad (5.22)$$

Démonstration. Unicité. Soit $\tilde{M}, \tilde{M}' \in \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I;V)$ tels que $\tilde{\delta}\tilde{M} = \tilde{\delta}\tilde{M}' = \tilde{h}$. En particulier, $\tilde{\delta}(\tilde{M} - \tilde{M}') = 0$, donc $\tilde{M} - \tilde{M}' \in \text{Im}\tilde{\delta}_{|\tilde{\mathcal{C}}_{1,\beta}(I;V) \cap \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\mu(I;V)}$. En appliquant le résultat du lemme 5.2.8, on déduit $\tilde{M} = \tilde{M}'$.

Existence. On suit point par point la preuve du théorème 2.1.1. On considère d'abord $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}(I;V)$ tel que $\tilde{\delta}\tilde{B} = \tilde{h}$ et l'on construit

$$\tilde{M}_{ts}^n := \begin{cases} 0 & \text{si } \pi^n \cap (s, t) = \emptyset \\ (\tilde{\delta}\tilde{B})_{tt_l^n s} & \text{si } \pi^n \cap (s, t) = \{t_j^n\} \end{cases}$$

et si $\pi^n \cap (s, t) = \{t_j^n \leq \dots \leq t_l^n\}$,

$$\tilde{M}_{ts}^n := \tilde{B}_{ts} - \tilde{B}_{tt_l^n} - \sum_{i=j}^{l-1} S_{t-t_{i+1}^n} \cdot \tilde{B}_{t_{i+1}t_i} - S_{t-t_j^n} \cdot \tilde{B}_{t_j^n s},$$

où π^n représente une partition n -dyadique de I .

Il est facile de vérifier que \tilde{M}^n est continu de $\mathcal{S}_2(I)$ dans $\mathcal{L}_\beta(V)$. Par ailleurs, si par exemple $\pi^n \cap (s, t) = \{t_{2j}^{n+1} \leq t_{2j+2}^{n+1} \leq \dots \leq t_{2l}^{n+1}\}$, avec $s < t_{2j-1}^{n+1}$ et $t > t_{2l+1}^{n+1}$, alors

$$\tilde{M}_{ts}^{n+1} - \tilde{M}_{ts}^n = (\tilde{\delta}\tilde{B})_{tt_{2l+1}^{n+1}t_{2l}^{n+1}} + S_{t-t_{2j}^{n+1}} \cdot (\tilde{\delta}\tilde{B})_{t_{2j}^{n+1}t_{2j-1}^{n+1}s} + \sum_{i=j}^{l-1} S_{t-t_{2i+2}^{n+1}} \cdot (\tilde{\delta}\tilde{B})_{t_{2i+2}^{n+1}t_{2i+1}^{n+1}t_{2i}^{n+1}},$$

et puisque $\tilde{\delta}\tilde{B} = \tilde{h}$, on déduit

$$\mathcal{N}[\tilde{M}_{ts}^{n+1} - \tilde{M}_{ts}^n; \mathcal{L}_\beta(V)] \leq \frac{\mathcal{N}[\tilde{h}; \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I;V)]}{2^\mu} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2^\mu} \right)^n + \left(\frac{1}{2^{\mu-1}} \right)^n \right\}.$$

L'estimation reste valable pour les autres cas d'intersection de π^n avec (s, t) . En utilisant les mêmes arguments que pour Λ , on obtient l'existence d'une limite \tilde{M} de \tilde{M}^n dans $\tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}(I;V)$.

La relation $\tilde{\delta}\tilde{M} = \tilde{h}$ peut ensuite être établie suivant le procédé développé dans la preuve du théorème 2.1.1, tout comme l'estimation

$$\mathcal{N}[\tilde{M}_{ts}^n; \mathcal{L}_\beta(V)] \leq c_\mu \mathcal{N}[\tilde{h}; \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I;V)] |t - s|^\mu.$$

□

Nous disposons également d'un équivalent du corollaire 2.1.9, pour relier les expressions basées sur $\tilde{\Lambda}$ à des formulations plus classiques en termes de sommes de Riemann :

Corollaire 5.2.10. *Soit $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}(I;V)$ tel que $\tilde{\delta}\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{C}}_{3,\beta}^\mu(I;V)$, pour un certain coefficient $\mu > 1$. Si $\tilde{\delta}\tilde{f} := (Id - \tilde{\Lambda}\tilde{\delta})\tilde{g}$, alors*

$$(\tilde{\delta}\tilde{f})_{ts} = \lim_{|\Pi_{ts}| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n S_{t-t_{i+1}} \cdot \tilde{g}_{t_{i+1}t_i} \quad \text{in } \mathcal{L}_\beta,$$

où la limite est relative à toute partition $\Pi_{ts} = \{t_0 = s, \dots, t_n = t\}$ de $[s, t]$ dont le pas tend vers 0.

Démonstration. Ce sont les mêmes arguments que dans le cas standard (voir Corollaire 2.1.9), à partir de la décomposition $(\tilde{\delta}\tilde{f})_{ts} = \sum_i S_{t-t_{i+1}} \cdot (\tilde{\delta}\tilde{f})_{t_{i+1}t_i}$.

□

5.3 Le cas Young

On rappelle que l'on souhaite résoudre le système sous la forme (5.9), qui s'écrit aussi, avec la notation (5.17),

$$\tilde{y}_0 := 0, \quad \delta\tilde{y} = \mathcal{J} \left(\tilde{d}x \psi \left(a + \int_{\mathcal{A}} d\eta \tilde{\phi}(\eta) \tilde{y}(\eta) \right) \right). \quad (5.23)$$

Cette expression n'a pour l'instant de sens que lorsque x est différentiable. L'objectif de cette section est d'étendre, grâce aux outils introduits dans la section précédente, la définition du système à un processus x γ -höldérien avec $\gamma > 1/2$, puis de résoudre le système à partir de cette interprétation. Nous suivrons à cette fin la même démarche que dans le cas standard (sous-section 2.2.1), et commencerons ainsi par une dissection de l'intégrale lorsque x est régulier.

5.3.1 Considérations heuristiques et interprétation du système

On suppose pour l'instant x et \tilde{y} différentiables (en temps) et l'on pose successivement $y^i := a^i + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}^i(\xi)$, $z^{ij} := \psi^{ij}(y)$. Avec ces notations, l'intégrale à interpréter correspond à $\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})$.

La première question à se poser, avant de chercher à décomposer cette intégrale, est celle de la régularité escomptée de l'intégrand z , et donc de y (on supposera ψ régulier), si x et \tilde{y} deviennent moins réguliers. Pour répondre à cette question, on observera la décomposition

$$(\delta y^i)_{ts} = \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) (\delta \tilde{y})_{ts}(\xi) = \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) (\delta \tilde{y}^i)_{ts}(\xi) + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi). \quad (5.24)$$

Comme \tilde{y} désigne la solution (potentielle) du système (5.23) et que $|S_t(\xi)| \leq 1$, on peut s'attendre à ce que $\delta\tilde{y}$ hérite de la régularité de x , autrement dit $\left| (\delta\tilde{y})_{ts}(\xi) \right| \leq c_x |t-s|^\gamma$ (uniformément en ξ), ce qui conduirait, sous la condition d'intégrabilité $\int_{\mathcal{A}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)| < \infty$, à une estimation du premier terme de (5.24) du type : $\left| \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) (\delta \tilde{y}^i)_{ts}(\xi) \right| \leq c_x |t-s|^\gamma$.

Pour récupérer des incréments de la forme $|t-s|^\gamma$ du terme $\int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi)$, nous solliciterons la troisième hypothèse contenue dans (5.4), à savoir

$$|a_{ts}(\xi)| = |S_{t-s}(\xi) - 1| \leq c_\gamma |t-s|^\gamma |\xi|^\gamma. \quad (5.25)$$

C'est ici qu'interviennent les espaces $\mathcal{L}_\beta(V)$ introduits dans la sous-section 5.2.2. Il découle en effet de (5.25)

$$\left| \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s(\xi) \right| \leq c_\gamma |t-s|^\gamma \mathcal{N}[\tilde{y}_s; \mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^d)]. \quad (5.26)$$

En revenant à la décomposition (5.24), il apparaît ainsi qu'à partir d'un processus \tilde{y} évoluant dans $\mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^d)$, on devrait récupérer un processus y , puis un processus z , höldériens au sens classique.

Ces considérations (que quantifiera plus précisément la proposition 5.3.1) vont nous guider dans le processus de dissection de l'intégrale $\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})$, puisque nous n'aurons désormais aucun scrupule à faire apparaître l'incrément *standard* δz . On partira ainsi simplement, comme dans le cas des diffusions, de la décomposition (on suppose toujours x régulier)

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij}) = \mathcal{J}(\tilde{d}x^j) z_s^{ij} + \mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j \delta z^{ij}), \quad (5.27)$$

avec $\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j) := \mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j 1) = \int_s^t S_{t-u} dx_u^j$. Si x est seulement höldérien, une première hypothèse, directement inspirée par la méthodologie des rough paths, s'impose donc naturellement :

Hypothèse 4. Soit $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$, avec $\gamma > 1/2$. On suppose qu'il existe une suite x^ε de processus différentiables vérifiant

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

et telle que la suite des processus

$$\tilde{X}_{ts}^{x^\varepsilon, i}(\xi) := \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^{\varepsilon, i}$$

converge vers un élément X^x relativement à la topologie de l'espace $\tilde{\mathcal{C}}_{2, \gamma}^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$. En particulier,

$$\tilde{X}^x \in \mathcal{C}_{2, \gamma}^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad \tilde{\delta} \tilde{X}^x = 0.$$

Si x est différentiable, on choisit systématiquement $x^\varepsilon := x$.

Théorème 5.3.1. Soit $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ un processus qui satisfait l'hypothèse 4, I un intervalle de $[0, T]$. Pour tout $z \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d, m})$, on pose, pour tout $\xi \in \mathcal{A}$,

$$\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})(\xi) := \tilde{X}^{x, j}(\xi) z^{ij} + \tilde{\Lambda}(\tilde{X}^{x, j} \delta z^{ij})(\xi) = (Id - \tilde{\Lambda} \tilde{\delta})(\tilde{X}^{x, j} z^{ij})(\xi). \quad (5.28)$$

Alors

1. $\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})$ est bien défini en tant qu'élément de $\tilde{\mathcal{C}}_{2, \gamma}^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$, et coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{t-v}(\xi) dx_v^j z_v^{ij}$ quand x est différentiable.
2. On dispose de l'estimation :

$$\mathcal{N}[\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij}); \tilde{\mathcal{C}}_{2, \gamma}^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] \leq c_x \left\{ \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d, m})] + |I|^\gamma \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d, m})] \right\}, \quad (5.29)$$

où on rappelle que l'on a défini $\mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d, m})] := \sup_{s \in I} |z_s|$.

3. Pour tous $s < t \in I$,

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij}) = \lim_{|\Pi_{ts}| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} S_{t-t_{k+1}} \cdot \tilde{X}_{t_{k+1}, t_k}^{x, j} z_{t_k}^{ij} \quad \text{dans } \mathcal{L}_\gamma, \quad (5.30)$$

où la limite est relative à toute partition $\Pi_{ts} = \{t_0 = s, \dots, t_n = t\}$ de $[s, t]$ dont le pas tend vers 0.

Démonstration. Pour montrer que l'intégrale définie par (5.28) coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j z_u^{ij}$ lorsque x est différentiable, revenons à la décomposition (5.27), qui s'écrit aussi

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j \delta z^{ij}) = \mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij}) - \tilde{X}_{ts}^{x, j} z_s^{ij}.$$

En appliquant l'opérateur $\tilde{\delta}$ aux deux membres de cette relation, et en utilisant (5.19) et (5.15), on obtient

$$\tilde{\delta} \left(\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij}) \right) = -\tilde{\delta} \tilde{X}^{x, j} z^{ij} + \tilde{X}^{x, j} \delta z^{ij} = \tilde{X}^{x, j} \delta z^{ij},$$

et donc, via (5.22),

$$\mathcal{J}(\tilde{d}x^j \delta z^{ij}) = \tilde{\Lambda} \left(\tilde{X}^{x, j} \delta z^{ij} \right),$$

ce qui permet de retrouver (5.28).

Le fait que la formule (5.28) soit bien définie dans $\tilde{\mathcal{C}}_{2,\gamma}^\gamma$ lorsque $z \in \mathcal{C}_1^\gamma$ est une conséquence de l'hypothèse 4. En effet, grâce à cette hypothèse, on sait que $\tilde{X}^x \delta z \in \mathcal{C}_{3,\gamma}^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^d) \cap \text{Ker } \tilde{\delta}|_{\mathcal{C}_{2,\gamma}(I; \mathbb{R}^d)}$, et l'on est de cette façon en droit d'appliquer $\tilde{\Lambda}$. L'estimation (5.29) est ensuite une conséquence immédiate de la propriété de contraction (5.21). Enfin, l'écriture (5.30) découle du corollaire 5.2.10. \square

Afin de donner pleinement sens au système (5.23) par l'intermédiaire de la définition (5.28), nous prendrons appui sur la proposition suivante, qui vient préciser les considérations précédant le théorème 5.3.1 :

Proposition 5.3.1. *Soit $I = [l_1, l_2]$ un intervalle de $[0, T]$, $\psi \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$. Pour tout $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$, on pose $y := a + \int_{\mathcal{A}} d\eta \tilde{\phi}(\eta) \tilde{y}(\eta)$. On introduit par ailleurs la notation supplémentaire*

$$\mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}(I; \mathbb{R}^d)] := \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^0(I; \mathbb{R}^d)] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma(I; \mathbb{R}^d)],$$

avec $\mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^0(I; \mathbb{R}^d)] := \sup_{s \in I} \mathcal{N}[\tilde{y}_s; \mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^d)]$. Alors $\psi(y) \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ et

$$\mathcal{N}[\psi(y); \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] \leq c_\psi \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}(I; \mathbb{R}^d)]. \quad (5.31)$$

En outre, si $\tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ sont tels que $\tilde{y}_{l_1}^{(1)} = \tilde{y}_{l_1}^{(2)}$, alors

$$\mathcal{N}[\psi(y^{(1)}) - \psi(y^{(2)}); \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d,m})] \leq c_\psi |I|^\gamma \mathcal{N}[\tilde{y}^{(1)} - \tilde{y}^{(2)}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}(I; \mathbb{R}^d)], \quad (5.32)$$

$$\mathcal{N}[\psi(y^{(1)}) - \psi(y^{(2)}); \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] \leq c_\psi \left\{ 1 + \mathcal{N}[\tilde{y}^{(2)}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}(I; \mathbb{R}^d)] \right\} \mathcal{N}[\tilde{y}^{(1)} - \tilde{y}^{(2)}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}(I; \mathbb{R}^d)]. \quad (5.33)$$

Démonstration. On reprend les arguments évoqués lors de l'analyse de (5.24) et basés sur l'hypothèse (5.25) : Ainsi,

$$\begin{aligned} |\delta(\psi(y))_{ts}| &\leq \|D\psi\|_\infty \int_{\mathcal{A}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)| |(\delta\tilde{y})_{ts}(\xi)| \\ &\leq \|D\psi\|_\infty \left\{ \int_{\mathcal{A}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)| |(\delta\tilde{y})_{ts}(\xi)| + \int_{\mathcal{A}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)| |a_{ts}(\xi)| |\tilde{y}_s(\xi)| \right\} \\ &\leq c_\gamma \|D\psi\|_\infty |t - s|^\gamma \left\{ \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^0] \right\}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à (5.31).

L'inégalité (5.32) peut être obtenue de la même façon, après avoir remarqué que, pour tout $s \in I$,

$$\left| \psi(y_s^{(1)}) - \psi(y_s^{(2)}) \right| \leq \|D\psi\|_\infty \int_{\mathcal{A}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)| \left| \delta(\tilde{y}^{(1)} - \tilde{y}^{(2)})_{s\ell_1}(\xi) \right|.$$

En ce qui concerne (5.33), il suffit d'invoquer l'estimation classique

$$\begin{aligned} \left| \delta(\psi(y^{(1)}) - \psi(y^{(2)}))_{ts} \right| &\leq \|D\psi\|_\infty \left| \delta(y^{(1)} - y^{(2)})_{ts} \right| + \|D^2\psi\|_\infty \left| \delta(y^{(2)})_{ts} \right| \\ &\quad \left(\left| y_t^{(1)} - y_t^{(2)} \right| + \left| y_s^{(1)} - y_s^{(2)} \right| \right). \end{aligned}$$

\square

5.3.2 Résolution de l'équation

Le théorème 5.3.1, associé à la proposition 5.3.1, fournit, sous l'hypothèse 4, une interprétation légitime du système (5.23). Dans ce contexte, le résultat principal de cette section s'énonce de la façon suivante :

Théorème 5.3.2. *Soit x un processus qui satisfait l'hypothèse 4 et $\psi \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$. Alors l'équation (5.23), interprétée grâce au théorème 5.3.1 et à la proposition 5.3.1, admet une unique solution dans $\tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ (nous fixerons cette constante dans un instant), $l \in \mathbb{N}$, et supposons que nous ayons déjà construit une solution $\tilde{y}^{(l)} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, l\varepsilon])$. Si $l = 0$, alors $\tilde{y}^{(0)} = \tilde{y}_0^{(0)} = 0$. La preuve va consister à montrer que l'on peut étendre $\tilde{y}^{(l)}$ en une solution $\tilde{y}^{(l+1)} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, (l+1)\varepsilon])$, par l'intermédiaire d'un argument de point fixe.

Etape 1 : Existence de boules invariantes. Soit $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, (l+1)\varepsilon])$ telle que $\tilde{y}_{|[0, l\varepsilon]} = \tilde{y}^{(l)}$ et notons $\tilde{z} = \Gamma(\tilde{y})$ l'élément de $\tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])$ caractérisé par $\tilde{z}_{|[0, l\varepsilon]} = \tilde{y}^{(l)}$ et pour tous $s, t \in [0, (l+1)\varepsilon]$, $(\tilde{\delta}\tilde{z})_{ts} = \mathcal{J}_{ts} \left(\tilde{d}_x \psi(y) \right)$, où, comme dans la proposition 5.3.1, $y := a + \int_{\mathcal{A}} d\eta \tilde{\phi}(\eta) \tilde{y}(\eta)$.

L'estimation (5.29) nous indique d'abord que

$$\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([l\varepsilon, (l+1)\varepsilon])] \leq c_x \left\{ \mathcal{N}[\psi(y); \mathcal{C}_1^0([0, (l+1)\varepsilon])] + \varepsilon^\gamma \mathcal{N}[\psi(y); \mathcal{C}_1^\gamma([0, (l+1)\varepsilon])] \right\},$$

ce qui, avec (5.31), donne

$$\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([l\varepsilon, (l+1)\varepsilon])] \leq c_{x,\psi}^1 \left\{ 1 + \varepsilon^\gamma \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\}.$$

Si $0 \leq s \leq l\varepsilon \leq t \leq (l+1)\varepsilon$, on utilise la relation $\tilde{\delta}\tilde{\delta} = 0$ pour déduire

$$0 = (\tilde{\delta}\tilde{\delta}\tilde{z})_{t,l\varepsilon,s} = (\tilde{\delta}\tilde{z})_{ts} - (\tilde{\delta}\tilde{z})_{t,l\varepsilon} - S_{t-l\varepsilon} \cdot (\tilde{\delta}\tilde{z})_{l\varepsilon,s},$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[(\tilde{\delta}\tilde{z})_{ts}; \mathcal{L}_\gamma] &\leq \mathcal{N}[(\tilde{\delta}\tilde{z})_{t,l\varepsilon}; \mathcal{L}_\gamma] + \mathcal{N}[(\tilde{\delta}\tilde{z})_{l\varepsilon,s}; \mathcal{L}_\gamma] \\ &\leq 2 \max \left(\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([l\varepsilon, (l+1)\varepsilon]), \mathcal{N}[\tilde{y}^{(l)}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, l\varepsilon])] \right) |t-s|^\gamma. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $s \in [0, (l+1)\varepsilon]$, $\tilde{z}_s = (\tilde{\delta}\tilde{z})_{s0}$, et donc

$$\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^0([0, (l+1)\varepsilon])] \leq \mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])] T^\gamma.$$

Nous sommes ainsi invités à poser

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \left(4c_{x,\psi}^1 (1 + T^\gamma) \right)^{-1/\gamma} \\ N_{l+1} &:= \max \left(2(1 + T^\gamma) \mathcal{N}[\tilde{y}^{(l)}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, l\varepsilon]), 4c_{x,\psi}^1 (1 + T^\gamma) \right). \end{aligned}$$

En effet, pour de telles valeurs, il est facile de vérifier, à partir de ce qui précède, que si $\mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])] \leq N_{l+1}$, alors $\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, (l+1)\varepsilon])] \leq \frac{N_{l+1}}{1+T^\gamma}$ et $\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^0([0, (l+1)\varepsilon])] \leq \frac{N_{l+1}}{1+T^\gamma} T^\gamma$, d'où $\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])] \leq N_{l+1}$. En d'autres termes, la boule

$$B_{\tilde{y}^{(l)}, (l+1)\varepsilon}^{N_{l+1}} = \{ \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon]) : \tilde{y}_{|[0, l\varepsilon]} = \tilde{y}^{(l)}, \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])] \leq N_{l+1} \}$$

est stable par Γ .

L'indépendance de ε par rapport à la condition initiale $\tilde{y}^{(l)}$ nous permettra de répéter le procédé (avec le même ε) et ainsi d'obtenir une suite de rayons $(N_k)_{k \geq 1}$ telle que les ensembles $B_{\tilde{y}, k \varepsilon}^{N_k}$ sont invariants par Γ . La définition de cette dernière application devra bien sûr être adaptée à chacun de ces ensembles.

Etape 2 : Propriété de contraction. Nous allons à présent chercher une division de l'intervalle $[l\varepsilon, (l+1)\varepsilon]$ en sous-intervalles $[l\varepsilon, l\varepsilon + \eta]$, $[l\varepsilon + \eta, l\varepsilon + 2\eta]$, ... de même longueur η (qui pourra dépendre de ε et l), et sur lesquels la propriété de contraction de Γ est vérifiée.

Soit $\tilde{y}^a, \tilde{y}^b \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, l\varepsilon + \eta])$ tels que $\tilde{y}_{[0, l\varepsilon]}^a = \tilde{y}_{[0, l\varepsilon]}^b = \tilde{y}^{(l)}$, $\mathcal{N}[\tilde{y}^a; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])] \leq N_{l+1}$, $\mathcal{N}[\tilde{y}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])] \leq N_{l+1}$ et notons $\tilde{z}^a = \Gamma(\tilde{y}^a)$, $\tilde{z}^b = \Gamma(\tilde{y}^b)$, où Γ est définie comme à l'étape 1, mais restreinte à $\tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, l\varepsilon + \eta])$. En se référant à nouveau à (5.29), on déduit

$$\mathcal{N}[\tilde{z}^a - \tilde{z}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([l\varepsilon, l\varepsilon + \eta])] \leq c_{\gamma,x} \{ \mathcal{N}[\psi(y^a) - \psi(y^b); \mathcal{C}_1^0([l\varepsilon, l\varepsilon + \eta])] + \eta^\gamma \mathcal{N}[\psi(y^a) - \psi(y^b); \mathcal{C}_1^\gamma([l\varepsilon, l\varepsilon + \eta])] \},$$

puis, d'après (5.32) et (5.33),

$$\mathcal{N}[\tilde{z}^a - \tilde{z}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([l\varepsilon, l\varepsilon + \eta])] \leq c_{x,\psi}^2 \{1 + N_{l+1}\} \eta^\gamma \mathcal{N}[\tilde{y}^a - \tilde{y}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([l\varepsilon, l\varepsilon + \eta])].$$

Puisque les processus $\tilde{y}^a - \tilde{y}^b$, $\tilde{z}^a - \tilde{z}^b$ s'annulent sur $[0, l\varepsilon]$, il en découle

$$\mathcal{N}[\tilde{z}^a - \tilde{z}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, l\varepsilon + \eta])] \leq c_{x,\psi}^2 \{1 + N_{l+1}\} \eta^\gamma \mathcal{N}[\tilde{y}^a - \tilde{y}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, l\varepsilon + \eta])].$$

En outre, $(\tilde{z}^a - \tilde{z}^b)_s = \tilde{\delta}(\tilde{z}^a - \tilde{z}^b)_{s, l\varepsilon}$, de telle sorte que $\mathcal{N}[\tilde{z}^a - \tilde{z}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^0([0, l\varepsilon + \eta])] \leq \mathcal{N}[\tilde{z}^a - \tilde{z}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])] \eta^\gamma$. On obtient finalement

$$\mathcal{N}[\tilde{z}^a - \tilde{z}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])] \leq c_{x,\psi}^2 \{1 + N_{l+1}\} (1 + T^\gamma) \eta^\gamma \mathcal{N}[\tilde{y}^a - \tilde{y}^b; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])].$$

On fixe $\eta = \inf \left(\varepsilon, (2c_{x,\psi}^2 \{1 + N_{l+1}\} (1 + T^\gamma))^{-1/\gamma} \right)$. Γ devient alors une contraction stricte sur l'ensemble

$$\{ \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta]) : \tilde{y}_{[0, l\varepsilon]} = \tilde{y}^{(l)}, \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])] \leq N_{l+1} \}.$$

En utilisant l'invariance de $B_{\tilde{y}^{(l)}, (l+1)\varepsilon}^{N_{l+1}}$, il est facile de constater que ce dernier ensemble est lui-même invariant par Γ (voir le lemme 5.3.2 ci-dessous). Par conséquent, il existe un unique point fixe dans cet ensemble, que nous noterons $\tilde{y}^{(l),\eta}$. Dans la mesure où η ne dépend pas de $\tilde{y}^{(l)}$, le même calcul reste ensuite vrai sur l'ensemble (invariant)

$$\{ \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + 2\eta]) : \tilde{y}_{[0, l\varepsilon + \eta]} = \tilde{y}^{(l),\eta}, \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + 2\eta])] \leq N_{l+1} \}.$$

Ainsi, $\tilde{y}^{(l),\eta}$ peut être prolongé en une solution $\tilde{y}^{(l),2\eta}$ définie sur $[0, l\varepsilon + 2\eta]$ et en itérant la démarche jusqu'à ce que l'intervalle $[l\varepsilon, (l+1)\varepsilon]$ soit recouvert, on obtient le prolongement $\tilde{y}^{(l+1)}$ escompté. \square

Lemme 5.3.2. *Avec les notations de la preuve précédente, l'ensemble*

$$\{ \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta]) : \tilde{y}_{[0, l\varepsilon]} = \tilde{y}^{(l)}, \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])] \leq N_{l+1} \}$$

est stable par Γ .

Démonstration. On considère un élément \tilde{y} dans cet ensemble et $\tilde{z} := \Gamma(\tilde{y})$. Définissons

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \tilde{y}_t & \text{si } t \leq l\varepsilon + \eta \\ S_{t-(l\varepsilon+\eta)} \cdot \tilde{y}_{l\varepsilon+\eta} & \text{si } t \in [l\varepsilon + \eta, (l+1)\varepsilon]. \end{cases}$$

Le processus \hat{y} est clairement continu et appartient ainsi à $\hat{y} \in \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])$. En outre, si $s, t \in [l\varepsilon + \eta, (l+1)\varepsilon]$, $(\tilde{\delta}\tilde{y})_{ts} = 0$, tandis que si $s \leq l\varepsilon + \eta \leq t$, $(\tilde{\delta}\hat{y})_{ts} = S_{t-(l\varepsilon+\eta)} \cdot (\tilde{\delta}\tilde{y})_{l\varepsilon+\eta,s}$, de telle sorte que $\mathcal{N}[\hat{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, (l+1)\varepsilon])] \leq \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^\gamma([0, l\varepsilon + \eta])]$. Puisque $\mathcal{N}[\hat{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^0([0, (l+1)\varepsilon])] \leq \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^0([0, l\varepsilon + \eta])]$, on déduit $\mathcal{N}[\hat{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])] \leq \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])] \leq N_{l+1}$, ce qui signifie que $\hat{y} \in B_{\tilde{y}^{(l),(l+1)\varepsilon}}^{N_{l+1}}$. Or nous savons, d'après la première étape de la preuve précédente, que $B_{\tilde{y}^{(l),(l+1)\varepsilon}}^{N_{l+1}}$ est stable par Γ , et donc, si $\hat{z} := \Gamma(\hat{y})$, $\mathcal{N}[\hat{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])] \leq N_{l+1}$. Il est ensuite évident que $\tilde{z} = \hat{z}_{[0, l\varepsilon + \eta]}$, ce qui mène finalement à $\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, l\varepsilon + \eta])] \leq \mathcal{N}[\hat{z}; \tilde{\mathcal{C}}_{1,\gamma}^{0,\gamma}([0, (l+1)\varepsilon])] \leq N_{l+1}$. \square

Pour clore cette section, nous pouvons finalement revenir à la formulation originale de l'équation de Volterra :

Corollaire 5.3.3. *Sous l'hypothèse 4, et en supposant que $\psi \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, le système*

$$y_t^i = a^i + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \int_0^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u), \quad t \in [0, T], \quad (5.34)$$

interprété grâce au théorème 5.3.1, admet une unique solution dans $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$. En outre, si $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont deux processus qui satisfont l'hypothèse 4, et si l'on note $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$ les solutions de (5.34) associées à ces deux processus (de même condition initiale a), alors

$$\mathcal{N}[y^{(1)} - y^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)] \leq K_{x^{(1)}, x^{(2)}} \mathcal{N}[\tilde{X}^{x^{(1)}} - \tilde{X}^{x^{(2)}}; \tilde{\mathcal{C}}_{2,\gamma}^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)], \quad (5.35)$$

avec $K_{x^{(1)}, x^{(2)}} := K(\mathcal{N}[\tilde{X}^{x^{(1)}}; \tilde{\mathcal{C}}_{2,\gamma}^\gamma], \mathcal{N}[\tilde{X}^{x^{(2)}}; \tilde{\mathcal{C}}_{2,\gamma}^\gamma])$, pour une certaine fonction K croissante en ses deux arguments.

Démonstration. Si \tilde{y} désigne la solution du système (5.23) donnée par le théorème 5.3.2, il suffit de poser, pour tout $t \in [0, T]$, $y_t := a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_t(\xi)$.

Le caractère lipschitzien de l'application d'Itô peut être établi avec les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 4.1.8, d'abord appliqués à \tilde{y} , puis à y . \square

5.4 Le cas rugueux

Notre objectif est toujours de résoudre l'équation sous la forme (5.23) (puis (5.34)), mais nous supposons cette fois le coefficient de régularité höldérienne γ de x dans l'intervalle $(1/3, 1/2]$. La définition (5.28) n'est alors plus valable et, comme dans la section 4.3, des développements d'ordre deux deviennent nécessaires en vue d'interpréter le système. Nous adopterons pour cela la même stratégie que dans le cas des diffusions (sous-section 2.2.2), stratégie caractérisée par deux étapes :

- Une première phase d'identification de la structure algébrique de la solution potentielle \tilde{y} , qui aboutira à l'introduction d'un espace $\tilde{\mathcal{Q}}$ de processus contrôlés.
- L'extension de l'intégrale qui intervient dans le système au cas où $x \in \mathcal{C}_1^\gamma$ et $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Q}}$.

5.4.1 Processus convolutionnels contrôlés

Commençons par quelques considérations heuristiques. Comme dans le cas Young, le système sera étudié sous la forme

$$\tilde{y}_t^i(\xi) = \int_0^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u) \quad , \quad y_u^i = a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_u^i(\xi). \quad (5.36)$$

On suppose pour l'instant x différentiable. L'équation (5.36) admet dans ce cas une unique solution \tilde{y} , dont les incréments (convolutionnels) peuvent être décomposés en

$$(\tilde{\delta}\tilde{y}^i)_{ts}(\xi) = \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u) = \tilde{X}_{ts}^{x,j}(\xi) \psi^{ij}(y_s) + \tilde{r}_{ts}^i(\xi), \quad (5.37)$$

avec

$$\tilde{X}_{ts}^{x,j}(\xi) = \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \quad , \quad \tilde{r}_{ts}^i(\xi) = \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j (\delta\psi^{ij}(y))_{us}. \quad (5.38)$$

Cette décomposition élémentaire fait d'ores et déjà apparaître la structure amenée à jouer le rôle de \mathcal{Q}_x^γ (Définition 2.2.4) dans l'étude du système (5.36). Approfondissons légèrement l'analyse de (5.37) : si x et y sont γ -höldériens ($\gamma \in (1/3, 1/2]$), on s'attend à ce que, d'une part, \tilde{X}^x évolue dans un espace du type $\tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$, pour un certain coefficient $\beta > 0$, et d'autre part, $\tilde{r} \in \tilde{\mathcal{C}}_{2,\beta}^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^d)$. Pour des raisons techniques qui émergeront dans la preuve du théorème 5.4.1, nous serons en fait incités à prendre $\beta = 1$ pour obtenir une solution globale pour le système (5.36). Comme dans la section précédente, étiquetons l'hypothèse d'existence et de régularité du processus \tilde{X}^x , qui représente moralement $\int_s^t S_{t-u} dx_u$:

Hypothèse 5. Soit $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$, avec $\gamma \in (1/3, 1/2]$. On suppose qu'il existe une suite x^ε de processus différentiables vérifiant

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

et telle que la suite des processus

$$\tilde{X}_{ts}^{x^\varepsilon, i}(\xi) := \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^{\varepsilon, i}$$

converge vers un élément X^x relativement à la topologie de l'espace $\tilde{\mathcal{C}}_{2,\gamma}^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$. En particulier,

$$\tilde{X}^x \in \mathcal{C}_{2,\gamma}^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad \tilde{\delta}\tilde{X}^x = 0.$$

Si x est différentiable, on choisit systématiquement $x^\varepsilon := x$.

Notations : Dans un souci de concision, nous utiliserons désormais le raccourci

$$\tilde{\mathcal{C}}_k^\gamma(I; V) := \tilde{\mathcal{C}}_{k,1}^\gamma(I; V), \quad k \in \{1, 2, 3\}. \quad (5.39)$$

Fixons également dès à présent l'hypothèse d'intégrabilité sur $\tilde{\phi}$ qui nous permettra de mener le raisonnement à terme :

Hypothèse 6. On supposera dans cette section que

$$\int_{\mathcal{A}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)| (1 + |\xi|) < \infty.$$

Eu égard aux considérations ci-dessus, le cadre de résolution du système (5.36) s'impose assez naturellement :

Définition 5.4.1. *On suppose l'hypothèse 5 satisfaite. Pour tout intervalle I de $[0, T]$, on appellera processus convolutionnel contrôlé (par \tilde{X}^x) sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^d , tout élément \tilde{y} dans $\tilde{\mathcal{C}}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ dont les incréments convolutionnels se décomposent sous la forme*

$$(\tilde{\delta y}^i)_{ts} = \tilde{X}_{ts}^{x,j} \tilde{y}^{x,ij} + \tilde{y}_{ts}^{\sharp,i}, \quad \text{avec } \tilde{y}^x \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m}) \text{ et } \tilde{y}^\sharp \in \tilde{\mathcal{C}}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^d), \quad (5.40)$$

L'ensemble des processus convolutionnels contrôlés sur I sera noté $\tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ et l'on munit cet espace de la semi-norme

$$\mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] := \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] + \mathcal{N}[\tilde{y}^x; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d,m})] + \mathcal{N}[\tilde{y}^x; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] + \mathcal{N}[\tilde{y}^\sharp; \tilde{\mathcal{C}}_2^{2\kappa}]. \quad (5.41)$$

Remarque 5.4.2. Il convient de souligner qu'en dépit de sa notation, le processus \tilde{y}^x qui intervient dans la décomposition (5.40) est à valeurs fini-dimensionnelles, et non fonctionnelles.

Afin de donner sens au système (5.36) lorsque $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^k)$, il est à présent important d'identifier la structure algébrique de l'intégrand $\psi(y_u)$, où $y_u := a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_u(\xi)$. A cette fin, remarquons tout d'abord que, si $\tilde{\delta y}$ admet la décomposition (5.40), les incréments de y s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\delta y^i)_{ts} &= \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) (\delta \tilde{y}^i)_{ts}(\xi) \\ &= \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) (\tilde{\delta y}^i)_{ts}(\xi) + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi) \\ &= \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{X}_{ts}^{x,j}(\xi) \tilde{y}_s^{x,ij} + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_{ts}^{\sharp,i}(\xi) + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi) \\ &= X_{ts}^{x,j} \tilde{y}_s^{x,ij} + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_{ts}^{\sharp,i}(\xi) + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi), \end{aligned} \quad (5.42)$$

où $X_{ts}^{x,j} := \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{X}_{ts}^{x,j}(\xi)$ est bien défini en tant qu'élément de $\mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$, grâce à l'hypothèse 5.

Essayons d'analyser la décomposition (5.42) du point de vue de la régularité höldérienne. En ce qui concerne le dernier terme de cette décomposition, rappelons-nous l'inégalité $|a_{ts}(\xi)| \leq c |\xi| |t - s|$, qui induit

$$\left| \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi) \right| \leq |t - s| \mathcal{N}[\tilde{y}_s; \mathcal{L}_1],$$

et laisse par là même entendre que le terme en question est très régulier. Par ailleurs, la définition de $\tilde{y}^{\sharp,i}$ permet d'affirmer que

$$\left| \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_{ts}^{\sharp,i}(\xi) \right| \leq |t - s|^{2\gamma} \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma].$$

Forts de ces deux constats, il serait tentant d'envisager (et ce fut notre première idée) une structure algébrique du type

$$\{y : (\delta y^i)_{ts} = X_{ts}^{x,j} y_s^{x,ij} + y_{ts}^{\sharp,i}, \text{ avec } y^x \in \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^{m,l}) \text{ et } y^\sharp \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^k)\}.$$

Il est en effet possible de montrer que cette structure est stable vis-à-vis de l'opération de composition avec une application régulière, ce qui assurerait la transition entre y et $\psi(y)$.

Un développement un peu plus subtil de la décomposition (5.42) conduit toutefois à des manipulations algébriques plus élémentaires. Il suffit pour cela d'observer que l'opérateur \tilde{X}^x se décompose lui-même en

$$\tilde{X}_{ts}^x(\xi) = \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u = (\delta x)_{ts} + \int_s^t a_{tu}(\xi) dx_u.$$

Lorsque $x \in \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)$, cette dernière opération est à ce stade purement formelle, et pour cette raison, nous ne la retranscrivons qu'au travers de l'hypothèse abstraite (on rappelle que $\mathbf{x}^1 := \delta x$) :

Hypothèse 7. *Sous l'hypothèse 5, on admettra que la suite des processus*

$$\tilde{X}_{ts}^{ax^\varepsilon, i}(\xi) := \int_s^t a_{tu}(\xi) dx_u^{\varepsilon, i},$$

relativement à la topologie de l'espace $\tilde{\mathcal{C}}_{2,0}^{1+\gamma}(\mathbb{R}^m)$ (on rappelle que ce type d'espace a été défini dans la sous-section 5.2.3). En particulier

$$\tilde{X}^{ax} \in \tilde{\mathcal{C}}_{2,0}^{1+\gamma}(\mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{ts}^x(\xi) = \mathbf{x}_{ts}^1 + \tilde{X}_{ts}^{ax}(\xi). \quad (5.43)$$

Remarque 5.4.3. L'hypothèse de régularité qui apparaît dans (5.43) est bien entendu suggérée par l'estimation $|a_{ts}(\xi)| \leq c|\xi| |t-s|$, en ayant parallèlement à l'esprit le fait que l'on travaille avec l'espace \mathcal{L}_1 .

En revenant à présent à (5.42), les incréments de y peuvent être développés en

$$(\delta y^i)_{ts} = \mathbf{x}_{ts}^{1,j} (L_{\tilde{\phi}} \tilde{y}_s^{x,ij}) + \left[X_{ts}^{ax,j} \tilde{y}_s^{x,ij} + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_{ts}^{\sharp, i}(\xi) + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi) \right], \quad (5.44)$$

où l'on a noté

$$L_{\tilde{\phi}} := \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \quad \text{et} \quad X_{ts}^{ax} := \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{X}_{ts}^{ax}(\xi). \quad (5.45)$$

Nous sommes ainsi ramenés, grâce à l'hypothèse de régularité (5.43), à la même structure de processus contrôlés que dans l'analyse des systèmes ordinaires, et nous venons d'établir la transition suivante :

Proposition 5.4.4. *Sous les hypothèses 5 et 7, si $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ admet la décomposition $\tilde{\delta y}^i = \tilde{X}^{x,j} \tilde{y}^{x,ij} + \tilde{y}^{\sharp, i}$, alors le processus y défini par $y := a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}(\xi)$ est un processus contrôlé standard (au sens de la définition 2.2.4), qui admet la décomposition $\delta y^i = \mathbf{x}^{1,j} y^{x,ij} + y^{\sharp, i}$, avec*

$$y_t^{x,ij} = L_{\tilde{\phi}} \tilde{y}_t^{x,ij} \quad , \quad y_{ts}^{\sharp, i} = X_{ts}^{ax,j} \tilde{y}_s^{x,ij} + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_{ts}^{\sharp, i}(\xi) + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi). \quad (5.46)$$

La structure recherchée pour l'intégrant $\psi(y)$ découle immédiatement de ce dernier résultat. On dispose en effet, grâce à la proposition 2.2.7, de la propriété : si $y \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, alors $z := \psi(y) \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$, où l'espace $\mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ a lui aussi été introduit dans la définition 2.2.4.

5.4.2 Intégration convolutionnelle des processus contrôlés

En tenant compte des transitions qui ont été établies dans la sous-section précédente, l'interprétation du système (5.36) se résume désormais à l'obtention d'un prolongement de l'intégrale $\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})$ lorsque x est γ -höldérien ($\gamma \in (1/3, 1/2]$) et $z \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$. Dans la perspective d'un argument de point fixe, il est par ailleurs primordial que ce prolongement donne naissance à un élément de l'espace $\tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$.

Pour construire l'intégrale en question, nous nous appuyerons, comme dans le cas standard, sur l'existence a priori d'une *aire de Lévy convolutionnelle* adaptée au problème :

Hypothèse 8. *Sous l'hypothèse 5, on admettra que la suite des processus*

$$\tilde{X}_{ts}^{x^\varepsilon x^\varepsilon, ij}(\xi) := \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^{\varepsilon, i} (\delta x^{\varepsilon, j})_{us}$$

converge vers un élément \tilde{X}^{xx} relativement à la topologie de l'espace $\tilde{\mathcal{C}}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m})$. En particulier,

$$\tilde{X}^{xx} \in \tilde{\mathcal{C}}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^{m,m}) \quad \text{et} \quad (\tilde{\delta} \tilde{X}^{xx})_{tus} = \tilde{X}_{tu}^x \otimes (\delta x)_{us}. \quad (5.47)$$

Une fois munis de l'hypothèse 8, voici la façon naturelle d'envisager l'intégration d'un processus contrôlé :

Proposition 5.4.5. *On suppose les hypothèses 5 et 8 satisfaites, et soit $I = [l_1, l_2]$ un intervalle fixé de $[0, T]$. Pour tout processus $z \in \mathcal{Q}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ admettant la décomposition*

$$\delta z^{ij} = \mathbf{x}^{1,k} z^{x,ijk} + z^{\sharp, ij}, \quad (5.48)$$

on pose, pour tous $s < t \in I$,

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij}) := \tilde{X}_{ts}^{x,j} z_s^{ij} + \tilde{X}_{ts}^{xx,jk} z_s^{x,ijk} + \tilde{\Lambda}_{ts} \left(\tilde{X}^{x,j} z^{\sharp, ij} + \tilde{X}^{xx,jk} \delta z^{x,ijk} \right). \quad (5.49)$$

Alors :

1. $\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})$ est bien défini en tant qu'élément de $\tilde{\mathcal{C}}_2^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ et pour tout $\xi \in \mathcal{A}$, $\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij})(\xi)$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j z_u^{ij}$ lorsque x est différentiable.
2. Pour tout $\tilde{h} \in \mathcal{L}_1$, il existe un unique processus $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ tel que $\tilde{A}_{t_1} = \tilde{h}$ et $\tilde{\delta} \tilde{A}^i = \mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})$.
3. Pour tous $s < t \in I$, $\xi \in \mathcal{A}$, $\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij})$ peut être décrit par la formule :

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij}) = \lim_{|\Pi_{ts}| \rightarrow 0} \sum_{l=0}^n \left[\tilde{X}_{t_{l+1}, t_l}^{x,j} z_{t_l}^{ij} + \tilde{X}_{t_{l+1}, t_l}^{xx,jk} z_{t_l}^{x,ijk} \right] \quad \text{dans } \mathcal{L}_1, \quad (5.50)$$

où la limite est relative à toute partition $\Pi_{ts} = \{t_0 = s, \dots, t_n = t\}$ de $[s, t]$ dont le pas tend vers 0.

Démonstration. (1) Si x est une fonction différentiable, alors, comme dans le cas Young, on commence par écrire

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij})(\xi) = \int_s^t S_{t-v}(\xi) dx_v^j z_v^{ij} = \tilde{X}_{ts}^{x,j}(\xi) z_s^{ij} + \int_s^t S_{t-v}(\xi) dx_v^j (\delta z^{ij})_{vs}.$$

En injectant la décomposition (5.48) de $(\delta z^{ij})_{vs}$ dans cette relation, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij})(\xi) &= \tilde{X}_{ts}^{x,j}(\xi) z_s^{ij} + \int_s^t S_{t-v}(\xi) dx_v^j \left[\mathbf{x}_{vs}^{1,k} z_s^{x,ijk} + z_{vs}^{\sharp,ij} \right] \\ &= \tilde{X}_{ts}^{x,j}(\xi) z_s^{ij} + \tilde{X}_{ts}^{xx,jk}(\xi) z_s^{x,ijk} + \int_s^t S_{t-v}(\xi) dx_v z_{vs}^{\sharp,ij}, \end{aligned}$$

et ainsi, avec la notation (5.18),

$$\mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{\sharp,ij}) = \mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j z^{ij}) - \tilde{X}_{ts}^{x,j} z_s^{ij} - \tilde{X}_{ts}^{xx,jk} z_s^{x,ijk}. \quad (5.51)$$

Appliquons à présent l'opérateur $\tilde{\delta}$ aux deux membres de cette égalité : grâce aux relations (5.19), (5.15), (5.48) et (5.47), on déduit successivement

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} \left(\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{\sharp,ij}) \right) &= \tilde{X}^{x,j} \delta z^{ij} - \tilde{\delta} \tilde{X}^{xx,jk} z^{x,ijk} + \tilde{X}^{xx,jk} \delta z^{x,ijk} \\ &= \tilde{X}^{x,j} (\mathbf{x}^{1,k} z^{x,ijk}) + \tilde{X}^{x,j} z^{\sharp,ij} - (\tilde{X}^{x,j} \mathbf{x}^{1,k}) z^{x,ijk} + \tilde{X}^{xx,jk} \delta z^{x,ijk} \\ &= \tilde{X}^{x,j} z^{\sharp,ij} + \tilde{X}^{xx,jk} \delta z^{x,ijk}, \end{aligned}$$

et l'on est donc en droit de dire, via (5.22),

$$\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{\sharp,ij}) = \tilde{\Lambda} \left(\tilde{X}^{x,j} z^{\sharp,ij} + \tilde{X}^{xx,jk} \delta z^{x,ijk} \right).$$

En revenant à (5.51), on récupère la décomposition (5.49). Le prolongement de la décomposition à un processus x irrégulier n'est ensuite qu'une conséquence des conditions algébriques et analytiques contenues dans l'hypothèse 8.

Quant à (3), il suffit d'appliquer le corollaire 5.2.10, après avoir observé la relation algébrique

$$\tilde{\delta} \tilde{A}^i = (\text{Id} - \tilde{\Lambda} \tilde{\delta}) (\tilde{X}^{x,j} z^{ij} + \tilde{X}^{xx,jk} z^{x,ijk}).$$

□

Remarque 5.4.6. Comme nous l'avons déjà évoqué, une autre idée, en vue d'identifier la structure de l'intégrant, aurait consisté à s'affranchir de l'hypothèse 7 et d'envisager l'espace alternatif $\mathcal{Q}_x^{\gamma,\text{alt}} = \{z : \delta z_{ts}^{ij} = X_{ts}^{x,k} z_s^{x,ijk} + z_{ts}^{\sharp,ij}\}$, avec $X_{ts}^x = \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{X}_{ts}^x(\xi)$. Un raisonnement similaire à celui de la preuve de la proposition 5.4.5 aurait alors conduit à une décomposition de l'intégrale de la forme

$$\mathcal{J}^{\text{alt}}(\tilde{d}x^j z^{ij}) = \tilde{X}^{x,j} z^{ij} + \tilde{X}^{xx,\text{alt},jk} z^{x,ijk} + \tilde{\Lambda} \left(\tilde{X}^{x,j} z^{\sharp,ij} + \tilde{X}^{xx,\text{alt},jk} \delta y^{x,ijk} - \tilde{X}^{3,\text{alt},jk} z^{x,ijk} \right), \quad (5.52)$$

où les deux processus $\tilde{X}^{xx,\text{alt}}$ et $\tilde{X}^{3,\text{alt}}$ sont définis, lorsque x est régulier, par les formules : pour tout $\xi \in \mathcal{A}$,

$$\tilde{X}_{ts}^{xx,\text{alt}}(\xi) := \int_s^t S_{t-v}(\xi) dx_v \otimes X_{vs}^x, \quad \tilde{X}_{tus}^{3,\text{alt}}(\xi) := \int_s^t S_{t-v}(\xi) dx_v \otimes (\delta X^x)_{vus}. \quad (5.53)$$

D'une certaine façon, l'aire de Lévy $\tilde{X}^{xx,\text{alt}}$ ainsi définie semble plus en accord avec le formalisme convolutionnel utilisé dans ce chapitre, puisqu'elle est construite à partir de l'itération de l'incrément (convolutionnel) élémentaire \tilde{X}^x . Cette observation est plus claire encore lorsque l'on applique le théorème de Fubini pour écrire $\tilde{X}_{ts}^{xx,\text{alt}}(\xi) = \int_{\mathcal{A}} d\eta \tilde{\phi}(\eta) \hat{X}^{xx,\text{alt}}(\xi, \eta)$, avec

$$\hat{X}^{xx,\text{alt}}(\xi, \eta) := \int_s^t S_{t-v}(\xi) dx_v \otimes \int_s^v S_{v-w}(\eta) dx_w.$$

Deux inconvénients majeurs viennent cependant contrarier cette impression :

- D'un point de vue algébrique, le recours à $\tilde{X}^{xx,alt}$ entraîne l'apparition du processus supplémentaire $\tilde{X}^{3,alt}$ dans la décomposition (5.52), processus issu de la relation

$$(\delta\tilde{X}^{xx,alt})_{tus} = \tilde{X}_{tu}^x \otimes X_{us}^x + \tilde{X}_{tus}^{3,alt}.$$

- En termes d'applications, l'extension des formules (5.53) à certains processus x höldériens seulement est beaucoup plus difficile (notez que, dans le cas du mBf notamment, elle est toutefois possible, en utilisant par exemple l'approximation analytique du mBf). Nous verrons dans la section 5.5 que l'extension de \tilde{X}^{xx} ne fait quant à elle appel qu'à un argument d'intégration par parties élémentaire, grâce aux résultats préexistants sur les trajectoires rugueuses.

Pour ces deux raisons, nous avons privilégié ici une formulation qui fait apparaître l'hypothèse supplémentaire 7.

5.4.3 Processus contrôlés localisés

A ce stade, nous sommes pleinement en mesure de donner sens au système (5.36) sous les hypothèses 7 et 8, comme vient le résumer la boucle :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{Q}_x^\gamma & \xrightarrow{\text{Prop. 5.4.4}} & \mathcal{Q}_x^\gamma & \xrightarrow{\text{Prop. 2.2.7}} & \mathcal{Q}_x^\gamma & \xrightarrow{\text{Prop. 5.4.5}} & \tilde{Q}_x^\gamma \\ \tilde{y}^i & \longmapsto & y^i = a^i + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}^i(\xi) & \longmapsto & \psi^{ij}(y) & \longmapsto & (\delta\tilde{z}^i) = \mathcal{J}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)). \end{array}$$

La preuve de l'existence (et de l'unicité) d'une solution *globale* pour ce système va résulter d'une succession d'arguments de point fixe dans les espaces $\tilde{Q}_x^\gamma(I_n)$, pour une certaine suite I_n d'intervalles qui couvrent $[0, T]$. Le recollement de ces différentes solutions locales nécessitera un contrôle simultané des normes de \tilde{y} et de la condition initiale $\tilde{h}^n = \tilde{y}_{l_n}$ sur chaque intervalle $I_n = [l_n, l_{n+1}]$, lors de la procédure décrite par le schéma ci-dessus.

L'idée la plus naturelle consiste à décomposer la recherche d'un tel contrôle en trois estimations successives, correspondant aux trois opérations qui apparaissent dans la procédure, et ce lorsque l'espace intermédiaire $\mathcal{Q}_x^\gamma(I)$ est muni de sa norme usuelle $\mathcal{N}[\cdot; \mathcal{Q}_x^\gamma(I)]$, définie par (2.16).

L'utilisation de cette dernière norme ne permet malheureusement pas d'obtenir un contrôle suffisamment optimal, exprimé en termes de $\mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{Q}_x^\gamma(I_n)]$ et $\mathcal{N}[\tilde{y}_{l_n}; \mathcal{L}_1]$, et un argument technique supplémentaire doit être mis en œuvre. Cet argument passe par l'introduction d'un sous-espace (affine) particulier de $\mathcal{Q}_x^\gamma(I_n)$, qui permettra essentiellement d'isoler les termes dépendant de la condition initiale \tilde{y}_{l_n} .

On supposera dans cette sous-section que le processus x satisfait l'hypothèse 8, et l'on fixe un intervalle $I = [l_1, l_2]$ arbitraire de $[0, T]$.

Définition 5.4.7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}_2^1(I; \mathbb{R}^k)$. Un processus $y \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^k)$ sera dit γ -contrôlé (par x) autour de f sur I si ses incréments se décomposent de la façon suivante : pour tous $s < t \in I$,

$$(\delta y^i)_{ts} - f_{ts}^i = \mathbf{x}_{ts}^{1,j} y_s^{x,ij} + y_{ts}^{b,i} \text{ avec } y^x \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{m,k}) \text{ et } y^b \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^k). \quad (5.54)$$

On notera $\mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^k)$ l'ensemble de ces processus, et à tout $y \in \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^k)$, on associe la quantité

$$\mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^k)] := \mathcal{N}[y^x; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{k,m})] + \mathcal{N}[y^x; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{k,m})] + \mathcal{N}[y^b; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I; \mathbb{R}^{k,m})] + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^k)].$$

Comme dans le cas des processus contrôlés standards, on définit ensuite, pour tout $f \in \mathcal{C}_2^1(I; \mathbb{R}^{k,l})$, $\mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^{k,l})$ comme l'ensemble des processus $y \in \mathcal{C}_1^\gamma(I; \mathbb{R}^{k,l})$ tels que, pour tout $j = 1, \dots, l$, $y^j \in \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^k)$, et l'on associe à ces éléments la quantité

$$\mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^{k,l})] := \sum_{j=1}^l \mathcal{N}[y^j; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^k)].$$

Evidemment, $\mathcal{A}_{x,0}^\gamma(I) = \mathcal{Q}_x^\gamma(I)$ et plus généralement, pour tout $f \in \mathcal{C}_2^1(I; \mathbb{R}^k)$, $\mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I) \subset \mathcal{Q}_x^\gamma(I)$. Le point essentiel de cette procédure de localisation autour de f réside dans le fait que ce dernier incrément n'intervient pas (directement) dans le calcul de $\mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,h}^\gamma(I; \mathbb{R}^k)]$.

Observons de quelle manière les ensembles $\mathcal{A}_{x,f}^\gamma$ apparaissent lors de l'intégration (contre ξ) d'un processus convolutionnel contrôlé :

Proposition 5.4.8. *On suppose les hypothèses 5 et 7 satisfaites. Soit $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^k)$ tel que $\tilde{y}_{l_1} = \tilde{h} \in \mathcal{L}_1$ et $\tilde{\delta}\tilde{y} = \tilde{X}^{x,j} \tilde{y}^{x,ij} + \tilde{y}^{\sharp,i}$. On pose $y := a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}(\xi)$. Alors $y \in \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^k)$, avec $f_{ts} := \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) S_{s-l_1}(\xi) \tilde{h}(\xi)$. En outre,*

$$\mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] \leq c_x \left\{ \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] + |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[\tilde{h}; \mathcal{L}_1] \right\}. \quad (5.55)$$

Démonstration. A partir de (5.44), on peut écrire, pour tous $s < t \in I$,

$$\begin{aligned} (\delta y^i)_{ts} &= \mathbf{x}_{ts}^{1,j} (L_{\tilde{\phi}} \tilde{y}_s^{x,ij}) + \tilde{X}_{ts}^{ax,j} \tilde{y}_s^{x,ij} + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_{ts}^{\sharp,i}(\xi) + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) \tilde{y}_s^i(\xi) \\ &= \mathbf{x}_{ts}^{1,j} (L_{\tilde{\phi}} \tilde{y}_s^{x,ij}) + \tilde{X}_{ts}^{ax,j} \tilde{y}_s^{x,ij} + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_{ts}^{\sharp,i}(\xi) + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) (\tilde{\delta}\tilde{y}^i)_{sl_1}(\xi) + f_{ts}^i. \end{aligned}$$

On pose alors $y_s^{x,ij} := L_{\tilde{\phi}} \tilde{y}_s^{x,ij}$, $y_{ts}^{b,i} := \tilde{X}_{ts}^{ax,j} \tilde{y}_s^{x,ij} + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \left\{ \tilde{y}_{ts}^{\sharp,i}(\xi) + a_{ts}(\xi) (\tilde{\delta}\tilde{y}^i)_{sl_1}(\xi) \right\}$. Clairement,

$$\mathcal{N}[y^b; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \leq c_x \left\{ \mathcal{N}[\tilde{y}^x; \mathcal{C}_1^0] + \mathcal{N}[\tilde{y}^\sharp; \tilde{\mathcal{C}}_2^{2\gamma}] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{C}}_1^\gamma] \right\} \leq c_x \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma],$$

et $|(\delta y)_{ts}| \leq |f_{ts}| + |t-s|^\gamma \mathcal{N}[X^x; \mathcal{C}_2^\gamma] \mathcal{N}[\tilde{y}^x; \mathcal{C}_1^0] + |t-s|^{2\gamma} \mathcal{N}[y^b; \mathcal{C}_2^{2\gamma}]$. Or $|f_{ts}| \leq |t-s| \mathcal{N}[\tilde{h}; \mathcal{L}_1]$, d'où $\mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma] \leq |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[\tilde{h}; \mathcal{L}_1] + c_x \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma]$, et (5.55) est ainsi prouvé. \square

Le résultat qui suit constitue l'analogie de la proposition 2.2.7 dans le contexte des processus contrôlés localisés :

Proposition 5.4.9. *Soit $y \in \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ avec $y_{l_1} = h$ et $\delta y^i - f^i = \mathbf{x}^{1,j} y^{x,ij} + y^{b,i}$, et considérons une fonction $\psi \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$. Alors $\psi(y) \in \mathcal{A}_{x,D\psi(h)f}^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ et l'estimation suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}[\psi(y); \mathcal{A}_{x,D\psi(h)f}^\gamma(I)] \\ &\leq c_{x,\psi} \left\{ 1 + \mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I)]^2 + |I|^{1-\gamma} \mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I)] \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I)] + |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I)] \right\}. \quad (5.56) \end{aligned}$$

En outre, si $y^{(1)}, y^{(2)} \in \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$ avec $y_{l_1}^{(1)} = y_{l_1}^{(2)}$, alors

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}[\psi(y^{(1)}) - \psi(y^{(2)}); \mathcal{Q}_x^\gamma(I)] \\ &\leq c_{x,\psi} \mathcal{N}[y^{(1)} - y^{(2)}; \mathcal{Q}_x^\gamma(I)] \left\{ 1 + \mathcal{M}[y^{(1)}; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I)]^2 + \mathcal{M}[y^{(2)}; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I)]^2 \right. \\ &\quad \left. + |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I)] (1 + \mathcal{N}[y^{(1)}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)] + \mathcal{N}[y^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)]) \right\}. \quad (5.57) \end{aligned}$$

Démonstration. Pour tous $s, t \in I$,

$$\begin{aligned}
\delta(\psi^{ij}(y))_{ts} &= \int_0^1 d\lambda \partial_l \psi^{ij}(y_s + \lambda(\delta y)_{ts})(\delta y^l)_{ts} \\
&= \int_0^1 d\lambda \partial_l \psi^{ij}(y_s + \lambda(\delta y)_{ts}) f_{ts}^l + \int_0^1 d\lambda \partial_l \psi^{ij}(y_s + \lambda(\delta y)_{ts})(\mathbf{x}_{ts}^{1,k} y_s^{x,lk} + y_{ts}^{b,l}) \\
&= D\psi(h) f_{ts} + \mathbf{x}_{ts}^{1,k} \psi(y)_s^{x,ijk} + \psi(y)_{ts}^{b,1,ij} + \psi(y)_{ts}^{b,1,ij}, \tag{5.58}
\end{aligned}$$

où l'on a noté $\psi(y)_s^{x,ijk} := \partial_l \psi^{ij}(y_s) y_s^{x,lk}$,

$$\begin{aligned}
\psi(y)_{ts}^{b,1,ij} &:= \mathbf{x}_{ts}^{1,k} \int_0^1 d\lambda [\partial_l \psi^{ij}(y_s + \lambda(\delta y)_{ts}) - \partial_l \psi^{ij}(y_s)] y_s^{x,lk} + \int_0^1 d\lambda \partial_l \psi^{ij}(y_s + \lambda(\delta y)_{ts}) y_{ts}^{b,l}, \\
\psi(y)_{ts}^{b,2,ij} &:= \int_0^1 d\lambda [\partial_l \psi^{ij}(y_s + \lambda(\delta y)_{ts}) - \partial_l \psi^{ij}(y_s)] f_{ts}^l + [\partial_l \psi^{ij}(y_s) - \partial_l \psi^{ij}(y_{l_1})] f_{ts}^l.
\end{aligned}$$

Une succession d'arguments de calcul différentiel standard permet aisément d'établir

$$\mathcal{N}[\psi(y)^x; \mathcal{C}_1^0] + \mathcal{N}[\psi(y)^x; \mathcal{C}_1^\gamma] + \mathcal{N}[\psi(y)^{b,1}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \leq c_{x,\psi} \left\{ 1 + \mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma] \right\}.$$

Par ailleurs,

$$\left| \psi(y)_{ts}^{b,2} \right| \leq \|D^2\psi\|_\infty \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\gamma] \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1] \left\{ |t-s|^{1+\gamma} + |s-l_1|^\gamma |t-s| \right\},$$

d'où $\mathcal{N}[\psi(y)^{b,2}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \leq c_\psi \mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma] \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1] |I|^{1-\gamma}$. En revenant finalement à la décomposition (5.58), on obtient :

$$\begin{aligned}
&|\delta(\psi(y))_{ts}| \\
&\leq \|D\psi\|_\infty |t-s| \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1] + |t-s|^\gamma \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] \mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma] \|D\psi\|_\infty + |t-s|^{2\gamma} \mathcal{N}[\psi(y)^b; \mathcal{C}_2^{2\gamma}],
\end{aligned}$$

de telle sorte que $\mathcal{N}[\psi(y); \mathcal{C}_1^\gamma] \leq c_{\psi,x} \left\{ |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1] + \mathcal{M}[y; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma] + \mathcal{N}[\psi(y)^b; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \right\}$, ce qui achève la preuve de (5.56).

En ce qui concerne (5.57), commençons par écrire, avec les notations de (5.58),

$$\begin{aligned}
&\delta(\psi^{ij}(y^{(1)}) - \psi^{ij}(y^{(2)}))_{ts} \\
&= \mathbf{x}_{ts}^{1,k} [\psi(y^{(1)})_s^{x,ijk} - \psi(y^{(2)})_s^{x,ijk}] + [\psi(y^{(1)})_{ts}^{b,1,ij} - \psi(y^{(2)})_{ts}^{b,1,ij}] + [\psi(y^{(1)})_{ts}^{b,2,ij} - \psi(y^{(2)})_{ts}^{b,2,ij}].
\end{aligned}$$

Si l'on se réfère à la preuve de la proposition 2.2.7, on déduit sans effort

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}[\psi(y^{(1)})^x - \psi(y^{(2)})^x; \mathcal{C}_1^0(I)] + \mathcal{N}[\psi(y^{(1)})^x - \psi(y^{(2)})^x; \mathcal{C}_1^\gamma(I)] + \mathcal{N}[\psi(y^{(1)})^{b,1} - \psi(y^{(2)})^{b,1}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I)] \\
&\leq c_{x,\psi} \left\{ 1 + \mathcal{M}[y^{(1)}; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I)]^2 + \mathcal{M}[y^{(2)}; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I)]^2 \right\} \mathcal{N}[y^{(1)} - y^{(2)}; \mathcal{Q}_x^\gamma(I)].
\end{aligned}$$

Pour le terme $\psi(y^{(1)})^{b,2} - \psi(y^{(2)})^{b,2}$, remarquons d'abord l'estimation

$$\begin{aligned}
&\left| \psi(y^{(1)})^{b,2} - \psi(y^{(2)})^{b,2} \right| \leq |t-s| \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I)] \\
&\left\{ \int_0^1 d\lambda \left| D\psi(y_s^{(1)} + \lambda(\delta y^{(1)})_{ts}) - D\psi(y_s^{(1)}) - D\psi(y_s^{(2)} + \lambda(\delta y^{(2)})_{ts}) + D\psi(y_s^{(2)}) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| D\psi(y_s^{(1)}) - D\psi(y_{l_1}^{(1)}) - D\psi(y_s^{(2)}) + D\psi(y_{l_1}^{(2)}) \right| \right\}.
\end{aligned}$$

En faisant à nouveau appel aux arguments de la preuve de la proposition 2.2.7, il est facile de vérifier à partir de cette dernière écriture que

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\psi(y^{(1)})^{b,2} - \psi(y^{(2)})^{b,2}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(I)] \\ & \leq c_\psi |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I)] \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^{(1)}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)] + \mathcal{N}[y^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)] \right\} \mathcal{N}[y^{(1)} - y^{(2)}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)]. \end{aligned}$$

L'inégalité (5.57) est ensuite immédiate. \square

Soulignons à nouveau le fait que $\mathcal{A}_{x,f}^\gamma$ est un sous-ensemble de \mathcal{Q}_x^γ ; ceci signifie en particulier que pour tout élément $z \in \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$, l'intégrale $\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})$ peut être définie via la proposition 5.4.5. Dans ce contexte particulier, nous disposons de l'estimation suivante :

Proposition 5.4.10. *On suppose les hypothèses 5 et 8 satisfaites. Si $z \in \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})$, alors la semi-norme du processus $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)$ défini par $\tilde{z}_{l_1} = \tilde{h} \in \mathcal{L}_1$ et $\tilde{\delta}\tilde{z}^i = \mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij})$ peut être majorée par*

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I; \mathbb{R}^d)] \\ & \leq c_x \left\{ \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I; \mathbb{R}^{d,m})] + |z_{l_1}^x| + |I|^\gamma \mathcal{M}[z; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I; \mathbb{R}^{d,m})] + |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I; \mathbb{R}^{d,m})] \right\}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Démonstration. D'après la proposition 5.4.5, la décomposition de \tilde{z} en tant que processus convolutionnel contrôlé est donnée par $\tilde{\delta}\tilde{z}^i = \tilde{X}^{x,j} \tilde{z}^{x,ij} + \tilde{z}^{\#,i}$, avec $\tilde{z}^x = z$ et $\tilde{z}^\# = \tilde{z}^{\#,1} + \tilde{z}^{\#,2}$, où

$$\tilde{z}^{\#,1,i} = \tilde{X}^{xx,jk} z^{x,ijk} \quad \text{et} \quad \tilde{z}^{\#,2,i} = \tilde{\Lambda}(\tilde{X}^{x,j} (z^{b,ij} + f^{ij}) + \tilde{X}^{xx,jk} \delta z^{x,ijk}).$$

Puisque $(\delta z^{ij})_{ts} = f_{ts}^{ij} + \mathbf{x}_{ts}^{1,k} z_s^{x,ijk} + z_{ts}^{b,ij} = f_{ts}^{ij} + \mathbf{x}_{ts}^{1,k} z_{l_1}^{x,ijk} + \mathbf{x}_{ts}^{1,k} (\delta z^{x,ijk})_{sl_1} + z_{ts}^{b,ij}$,

$$\mathcal{N}[\tilde{z}; \mathcal{C}_1^\gamma(I)] = \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\gamma(I)] \leq c_x \left\{ |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I)] + |z_{l_1}^x| + |I|^\gamma \mathcal{M}[z; \mathcal{A}_{f,h}^\gamma(I)] \right\}.$$

Quant au terme résiduel, en écrivant $\tilde{z}_{ts}^{\#,1,i} = \tilde{X}_{ts}^{xx,jk} z_{l_1}^{x,ijk} + \tilde{X}_{ts}^{xx,jk} (\delta z^{x,ijk})_{sl_1}$, on a d'abord $\mathcal{N}[\tilde{z}^{\#,1}; \tilde{\mathcal{C}}_2^{2\gamma}] \leq c_x \left\{ |z_{l_1}^x| + |I|^\gamma \mathcal{M}[z; \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I)] \right\}$, tandis que, grâce à la propriété de contraction (2.6),

$$\mathcal{N}[\tilde{z}^{\#,2}; \tilde{\mathcal{C}}_2^{2\gamma}(I)] \leq c_x \left\{ |I|^\gamma \mathcal{M}[z; \mathcal{A}_{x,h}^\gamma(I)] + |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I)] \right\}.$$

Finalement, comme $\tilde{\delta}\tilde{z}^i = \tilde{X}^{x,j} \tilde{z}^{x,ij} + \tilde{z}^{\#,i}$,

$$\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{C}}_1^\gamma(I)] \leq c_x \left\{ \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I)] + |z_{l_1}^x| + |I|^\gamma \mathcal{M}[z; \mathcal{A}_{f,h}^\gamma(I)] + |I|^{1-\gamma} \mathcal{N}[f; \mathcal{C}_2^1(I)] \right\},$$

ce qui achève la preuve de (5.59). \square

5.4.4 Résolution de l'équation

Nous sommes à présent en mesure de résoudre le système :

Théorème 5.4.1. *On suppose les hypothèses 5, 7 et 8 satisfaites. Si $\psi \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, alors l'équation (5.23), interprétée grâce à la proposition 5.4.5, admet une unique solution dans $\tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Comme nous l'annonçons, la preuve va consister en une succession d'arguments de point fixe sur une suite d'intervalles $(I_n)_n$ qui recouvrent $[0, T]$. Nous considérerons plus exactement la suite donnée par :

$$I_n^N = [l_n^N, l_{n+1}^N] \quad \text{avec } l_0^N = 0 \text{ et } \varepsilon_n = \varepsilon_n^N = l_{n+1}^N - l_n^N = \frac{1}{N+n}, \quad (5.60)$$

où N est un paramètre qui sera fixé au cours de la preuve.

Sur chacun de ces intervalles, la procédure se déroule (comme d'habitude) en deux temps : nous commençons par établir l'existence de sous-ensembles invariants pour l'application Γ associée au système, puis nous montrons que Γ , restreinte à certains de ces sous-ensembles, est une contraction stricte.

Les résultats établis dans la sous-section 5.4.3 montrent que pour contrôler l'image $\tilde{z} := \Gamma(\tilde{y})$ d'un processus $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)$, il est important de disposer d'une estimation de la norme de \tilde{y} dans $\tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)$, mais aussi de la norme de la condition initiale $\tilde{h}_n := \tilde{y}_{l_n^N}$. C'est ce principe général qui va guider notre raisonnement.

Etape 1 : Invariance de boules. On fixe momentanément le paramètre N qui intervient dans la définition (5.60) des intervalles I_n^N , et l'on introduit deux paramètres supplémentaires $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ dont les valeurs seront déterminées dans un instant. On considère les ensembles

$$B_n^{\tilde{h}_n} := \{ \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N) : \tilde{y}_{l_n^N} = \tilde{h}_n, \tilde{y}_{l_n^N}^x = \psi(h_n), \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \leq (N+n)^{\alpha_2} \},$$

où $\tilde{h}_n \in \mathcal{L}_1$ est tel que $\mathcal{N}[\tilde{h}_n; \mathcal{L}_1] \leq (N+n)^{\alpha_1}$ et $h_n := a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{h}_n(\xi)$. Si $\tilde{y} \in B_n^{\tilde{h}_n}$, $\tilde{z} := \Gamma(\tilde{y})$ désigne l'élément de $\tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)$ défini par les deux conditions : $\tilde{z}_{l_n^N} = \tilde{h}_n$ et pour tous $s, t \in I_n^N$, $(\tilde{\delta}\tilde{z})_{ts} = \mathcal{I}_{ts}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y))$, où $y := a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}(\xi)$.

Avec ces notations, nous allons prouver que α_1 et α_2 peuvent être choisis de telle sorte que, d'une part, les ensembles $B_n^{\tilde{h}_n}$ soient stables par Γ , et, d'autre part, que la propriété suivante soit vérifiée :

$$(H) \quad \text{Si } \tilde{y} \in B_n^{\tilde{h}_n}, \text{ alors } \mathcal{N}[\tilde{y}_{l_{n+1}^N}; \mathcal{L}_1] \leq (N+n+1)^{\alpha_1}.$$

Cette dernière condition permettra de garantir la possibilité de recoller les points fixes successifs, comme nous le verrons à la fin de la preuve.

Soit $\tilde{y} \in B_n^{\tilde{h}_n}$, $\tilde{z} := \Gamma(\tilde{y})$. En vue d'appliquer les résultats de la sous-section 5.4.3, on notera, pour tous $s < t \in I_n^N$,

$$y_t := a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_t(\xi), \quad f_{ts}^n := \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) a_{ts}(\xi) S_{s-l_n^N}(\xi) \tilde{h}_n(\xi), \quad g_{ts}^n := D\psi(y_{l_n^N}) f_{ts}^n. \quad (5.61)$$

L'estimation (5.59) montre tout d'abord que

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \\ & \leq c_x \left\{ \mathcal{N}[\psi(y); \mathcal{C}_1^0(I_n^N)] + \left| \psi(y)_{l_n^N}^x \right| + \varepsilon_n^\gamma \mathcal{M}[\psi(y); \mathcal{A}_{x, g^n}^\gamma(I_n^N)] + \varepsilon_n^{1-\gamma} \mathcal{N}[g^n; \mathcal{C}_2^1(I_n^N)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Or, d'après les propositions 5.4.9 et 5.4.8, on sait que

$$\psi(y)_{l_n^N}^{x,ijk} = \partial_p \psi^{ij}(y_{l_n^N}) y_{l_n^N}^{x,pk} = \partial_p \psi^{ij}(y_{l_n^N}) (L_{\tilde{\phi}} \tilde{y}_{l_n^N}^{x,pk}) = L_{\tilde{\phi}} \partial_p \psi^{ij}(y_{l_n^N}) \psi^{pk}(h_n),$$

et donc $\left| \psi(y)_{l_n^N}^x \right| \leq c_\psi$. Par ailleurs, il est évident que

$$\mathcal{N}[g^n; \mathcal{C}_2^1(I_n^N)] \leq \|D\psi\|_\infty \mathcal{N}[f^n; \mathcal{C}_2^1(I_n^N)] \leq c_\psi \mathcal{N}[\tilde{h}_n; \mathcal{L}_1].$$

Il découle ainsi de (5.62)

$$\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \leq c_{x,\psi} \left\{ 1 + \varepsilon_n^\gamma \mathcal{M}[\psi(y); \mathcal{A}_{x,g^n}^\gamma(I_n^N)] + \varepsilon_n^{1-\gamma} \mathcal{N}[\tilde{h}_n; \mathcal{L}_1] \right\}.$$

En mettant ensuite à contribution les estimations (5.56) et (5.55), on obtient

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \\ & \leq c_{x,\psi}^1 \left\{ 1 + \varepsilon_n^{1-\gamma} \mathcal{N}[\tilde{h}_n; \mathcal{L}_1] + \varepsilon_n^\gamma \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)]^2 + \varepsilon_n \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \mathcal{N}[\tilde{h}_n; \mathcal{L}_1] + \varepsilon_n^{2-\gamma} \mathcal{N}[\tilde{h}_n; \mathcal{L}_1]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Pour établir la stabilité de $B_n^{\tilde{h}_n}$, c'est-à-dire prouver que $\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \leq (N+n)^{\alpha_2}$ (pour N assez grand), une première série de conditions s'imposent alors naturellement :

$$\begin{cases} \alpha_1 - (1 - \gamma) < \alpha_2 \\ 2\alpha_2 - \gamma < \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 1 < \alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 2 + \gamma < \alpha_2, \end{cases} \quad (5.64)$$

système qui se résume en fait à

$$\begin{cases} \alpha_2 < \gamma \\ \alpha_1 < 1 - \gamma + \alpha_2. \end{cases} \quad (5.65)$$

Si $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ vérifient ces conditions et N est suffisamment grand, la propriété de stabilité de $B_n^{\tilde{h}_n}$ est alors vérifiée. En effet, à partir de (5.63), on déduit $\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \leq 6c_{x,\psi}^1 (N+n)^{\alpha_3}$, où α_3 désigne le plus grand élément parmi les membres de gauche du système (5.64). Comme $\alpha_3 < \alpha_2$, on peut choisir N tel que pour tout $n \geq 0$, $(N+n)^{\alpha_2 - \alpha_3} \geq 6c_{x,\psi}^1$, et donc $\mathcal{N}[\tilde{z}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \leq (N+n)^{\alpha_2}$.

Il reste à analyser la condition (H). Pour cela, écrivons

$$\tilde{y}_{l_{n+1}^N}^i = S_{\varepsilon_n} \tilde{y}_{l_n^N}^i + (\tilde{\delta} \tilde{y}^i)_{l_{n+1}^N l_n^N} = S_{\varepsilon_n} \tilde{h}_n^i + \tilde{X}_{l_{n+1}^N l_n^N}^{x,j} \psi^{ij}(h_n) + \tilde{y}_{l_{n+1}^N l_n^N}^{\sharp,i},$$

ce qui conduit à

$$\left| \tilde{y}_{l_{n+1}^N}^i \right| \leq \left| \tilde{h}_n \right| + c_{x,\psi} \varepsilon_n^\gamma + \varepsilon_n^{2\gamma} \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \leq (N+n)^{\alpha_1} + c_{x,\psi} (N+n)^{-\gamma} + (N+n)^{\alpha_2 - 2\gamma}. \quad (5.66)$$

Observons ensuite l'équivalent $\frac{c_{x,\psi} m^{-\gamma + m\alpha_2 - 2\gamma}}{(m+1)^{\alpha_1 - m\alpha_1}} \sim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{x,\psi} m^{-\gamma + m\alpha_2 - 2\gamma}}{\alpha_1 m^{\alpha_1 - 1}}$, qui nous indique qu'en ajoutant à (5.65) la condition (compatible)

$$\alpha_1 > 1 - \gamma, \quad (5.67)$$

on peut trouver N suffisamment grand tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(N+n)^{\alpha_1} + c_{x,\psi} (N+n)^{-\gamma} + (N+n)^{\alpha_2 - \gamma} \leq (N+n+1)^{\alpha_1}.$$

On choisit donc N de cette façon pour obtenir, à partir de (5.66), la propriété (H).

Etape 2 : Propriété de contraction. Soit $\tilde{y}^{(1)}, \tilde{y}^{(2)} \in B_n^{\tilde{h}_n}$, $\tilde{z}^{(1)} := \Gamma(\tilde{y}^{(1)})$, $\tilde{z}^{(2)} := \Gamma(\tilde{y}^{(2)})$, et l'on définit $y^{(1)}, y^{(2)}$ comme dans (5.61). La propriété recherchée va là encore découler des estimations de la sous-section 5.4.3. Pour cela, il convient d'abord d'observer que si $y^{(1)}, y^{(2)} \in \mathcal{A}_{x,f}^\gamma(I)$, alors $y^{(1)} - y^{(2)} \in \mathcal{A}_{x,0}^\gamma(I)$ et $\mathcal{N}[y^{(1)} - y^{(2)}; \mathcal{A}_{x,0}^\gamma(I)] = \mathcal{N}[y^{(1)} - y^{(2)}; \mathcal{Q}_x^\gamma(I)]$. Ainsi, d'après (5.59),

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(2)}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \\ & \leq c \left\{ \mathcal{N}[\psi(y^{(1)}) - \psi(y^{(2)}); \mathcal{C}_1^0(I_n^N)] + \left| \psi(y^{(1)})_{I_n^N}^x - \psi(y^{(2)})_{I_n^N}^x \right| + \varepsilon_n^\gamma \mathcal{N}[\psi(y^{(1)}) - \psi(y^{(2)}); \mathcal{Q}_x^\gamma(I_n^N)] \right\}. \end{aligned}$$

Or $\psi(y^{(1)})_{I_n^N}^x = \psi(y^{(2)})_{I_n^N}^x$ et $\mathcal{N}[\psi(y^{(1)}) - \psi(y^{(2)}); \mathcal{C}_1^0(I_n^N)] \leq \varepsilon_n^\gamma \mathcal{N}[\psi(y^{(1)}) - \psi(y^{(2)}); \mathcal{Q}_x^\gamma(I_n^N)]$. En associant ces deux observations aux estimations (5.57) et (5.55), on déduit aisément

$$\mathcal{N}[\tilde{z}^{(1)} - \tilde{z}^{(2)}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)] \leq c_{x,\psi} J_{N+n} \mathcal{N}[\tilde{y}^{(1)} - \tilde{y}^{(2)}; \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma(I_n^N)],$$

avec

$$J_n = n^{-\gamma} + n^{-\gamma+2\alpha_2} + n^{2\alpha_1-(2-\gamma)} + n^{\alpha_1-1} + n^{\alpha_1+\alpha_2-1},$$

et l'on est cette fois amenés à envisager, pour que $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N = 0$, le système

$$\begin{cases} 2\alpha_2 - \gamma < 0 \\ 2\alpha_1 - 2 + \gamma < 0 \\ \alpha_1 - 1 < 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 1 < 0. \end{cases} \quad (5.68)$$

Ce système, intersecté avec les conditions (5.65) et (5.67), fournit alors l'hypothèse finale

$$\begin{cases} 0 < \alpha_2 < \frac{\gamma}{2} \\ 1 - \gamma < \alpha_1 < 1 - \gamma + \alpha_2. \end{cases}$$

Une fois munis de tels coefficients, il suffit de prendre N assez large pour que la propriété de contraction et la propriété (H) soient simultanément satisfaites sur les ensembles invariants $B_n^{\tilde{h}_n}$.

Etape 3 : Recollement des solutions. La construction de la solution $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma([0, T])$ annoncée est à présent réduite à une procédure de recollement, que nous nous proposons de détailler.

On définit tout d'abord la suite $(\tilde{y}^{(n)}, \tilde{y}^{(n),x})_{n \geq 0}$ suivant la procédure itérative : $(\tilde{y}^{(0)}, \tilde{y}^{(0),x}) \in \tilde{\mathcal{Q}}^\kappa(I_0^N)$ est le point fixe de Γ dans B_0^0 et pour tout $n \geq 1$, $(\tilde{y}^{(n)}, \tilde{y}^{(n),x}) \in \tilde{\mathcal{Q}}^\kappa(I_n^N)$ est le point fixe de Γ dans $B_n^{\tilde{y}_{I_n^N}^{(n-1)}}$. Cette construction est bien entendu rendu possible grâce aux deux premières étapes. On pose ensuite, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\tilde{y}_t = \sum_{n=0}^{N_T} \tilde{y}_t^{(n)} \mathbf{1}_{I_n^N}(t) \quad , \quad \tilde{y}_t^x = \sum_{n=0}^{N_T} \tilde{y}_t^{(n),x} \mathbf{1}_{I_n^N}(t),$$

où N_T désigne le plus petit entier tel que $\sum_{n=0}^{N_T} |I_n^N| \geq T$.

Si $l_{k-1}^N < s \leq l_k^N < \dots < l_{k'}^N \leq t < l_{k'+1}^N$, on utilise la décomposition

$$(\tilde{\delta y})_{ts} = S_{t-l_k^N} \cdot (\tilde{\delta y})_{l_k^N s} + (\tilde{\delta y})_{tl_{k'}^N} + \sum_{i=k}^{k'-1} S_{t-l_{i+1}^N} \cdot (\tilde{\delta y})_{l_{i+1}^N l_i^N}, \quad (5.69)$$

ainsi que la relation $\tilde{\delta}\tilde{X}^x = 0$, pour déduire $(\tilde{\delta}\tilde{y}^i)_{ts} = \tilde{X}_{ts}^{x,j} \tilde{y}_s^{x,ij} + \tilde{y}_{ts}^{\sharp,i}$, avec $\tilde{y}_{ts}^{\sharp,i} = \tilde{y}_{ts}^{\sharp,1,i} + \tilde{y}_{ts}^{\sharp,2,i}$,

$$\tilde{y}_{ts}^{\sharp,1,i} := \tilde{X}_{tl_k^N}^{x,j} \left[\tilde{y}_{l_k^N}^{(k),x,ij} - \tilde{y}_s^{(k-1),x,ij} \right] + \sum_{p=k+1}^{k'} \tilde{X}_{tl_p^N}^{x,j} \left[\tilde{y}_{l_p^N}^{(p),x,ij} - \tilde{y}_{l_{p-1}^N}^{(p-1),x,ij} \right],$$

$$\tilde{y}_{ts}^{\sharp,2} := S_{t-l_k^N} \cdot \tilde{y}_{l_k^N}^{(k-1),\sharp,i} + \tilde{y}_{tl_{k'}^N}^{(k'),\sharp,i} + \sum_{p=k}^{k'-1} S_{t-l_{p+1}^N} \cdot \tilde{y}_{l_{p+1}^N}^{(p),\sharp,i}.$$

A partir de ces expressions, et en raison de la régularité de chaque $\tilde{y}^{(k),x}$, il est facile de voir que (\tilde{y}, \tilde{y}^x) appartient effectivement à $\tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma([0, T])$.

Revenons finalement  a la décomposition (5.69) pour déduire

$$(\tilde{\delta}\tilde{y}^j)_{ts} = S_{t-l_k^N} \cdot \mathcal{J}_{l_k^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)) + \mathcal{J}_{tl_{k'}^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)) + \sum_{p=k}^{k'-1} S_{t-l_{p+1}^N} \cdot \mathcal{J}_{l_{p+1}^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)).$$

En invoquant  a présent la relation $\tilde{\delta} \left(\mathcal{J}(\tilde{d}x^j z^{ij}) \right) = 0$, on obtient :

$$\mathcal{J}_{tl_{k'-1}^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)) = \mathcal{J}_{tl_{k'}^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)) + S_{t-l_{k'}^N} \cdot \mathcal{J}_{l_{k'}^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)),$$

d'où

$$(\tilde{\delta}\tilde{y}^i)_{ts} = S_{t-l_k^N} \cdot \mathcal{J}_{l_k^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)) + \mathcal{J}_{tl_{k'-1}^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)) + \sum_{p=k}^{k'-2} S_{t-l_{p+1}^N} \cdot \mathcal{J}_{l_{p+1}^N}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y)).$$

En itérant ce procédé, on aboutit à la relation $(\tilde{\delta}\tilde{y}^i)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\tilde{d}x^j \psi^{ij}(y))$ pour tous $s, t \in [0, T]$, et \tilde{y} constitue bien une solution globale de (5.23).

L'unicité de cette solution est ensuite facile à établir en reprenant les estimations de l'étape 2, comme dans la preuve du théorème 2.3.1. \square

Corollaire 5.4.11. *Sous les hypothèses 5, 7 et 8, et en supposant que $\psi \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, le système*

$$y_t^i = a^i + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \int_0^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u), \quad (5.70)$$

interpr et e grâce aux propositions 5.4.5 et 5.4.8, admet une unique solution dans $\mathcal{Q}_x^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Comme dans le cas Young, il suffit de poser, pour tout $t \in [0, T]$,

$$y_t := a + \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{y}_t(\xi),$$

où \tilde{y} est le processus donn e par le théorème 5.4.1. \square

Remarque 5.4.12. Il est possible de vérifier, en utilisant les arguments de la sous-section 2.3.2, que la propriété de continuité de l'application d'Itô est satisfaite pour le système (5.70). Nous reviendrons de toute façon sur ce type d'arguments à travers la preuve de la proposition 7.4.6.

5.5 Application aux trajectoires rugueuses

L'objectif consiste à présent à montrer que les hypothèses égrenées au cours des deux sections précédentes sont effectivement vérifiées par une large classe de processus x . Si l'on recoupe ces différentes hypothèses (hypothèses 4, 5, 7 et 8), il s'agit globalement de prouver l'existence d'un triplet de processus $(\tilde{X}^x, \tilde{X}^{ax}, \tilde{X}^{xx})$ qui viendrait étendre les trois définitions (valables lorsque x est régulier)

$$\tilde{X}_{ts}^x(\xi) = \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u \quad , \quad \tilde{X}_{ts}^{ax}(\xi) = \int_s^t a_{t-u}(\xi) dx_u, \quad (5.71)$$

$$\tilde{X}_{ts}^{xx}(\xi) = \int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u \otimes \mathbf{x}_{us}^1, \quad (5.72)$$

à un processus x γ -höldérien, où $\gamma > 1/3$.

Les trois extensions seront établies via un argument d'intégration par parties élémentaire, suivant l'exemple général

$$\int_s^t S_{t-u}(\xi) dx_u = \int_s^t S_{t-u}(\xi) d(x_u - x_t) = S_{t-s}(\xi) \mathbf{x}_{ts}^1 + \int_s^t \frac{d}{du}(S_{t-u}(\xi)) \mathbf{x}_{tu}^1 du. \quad (5.73)$$

Pour plus de précision dans la mise en œuvre du procédé, nous envisagerons de façon séparée les deux situations qui nous préoccupent : le cas de la transformée de Laplace et celui de la transformée de Fourier.

5.5.1 Cas de la transformée de Laplace

Ici, $\mathcal{A} = \mathbb{R}^+$, $S_t(\xi) = e^{-\xi t}$. Commençons par évoquer le cas Young ($\gamma > 1/2$), pour lequel seule la définition de \tilde{X}^x est requise :

Proposition 5.5.1. *Soit $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$, avec $\gamma > 1/2$. Si $\int_0^\infty d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + \xi^\gamma) < \infty$, alors toute suite de processus différentiables x^ε telle que*

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

satisfait l'hypothèse 4.

Démonstration. Pour tout processus \tilde{x} différentiable, on a, grâce à (5.73),

$$\begin{aligned} |\tilde{X}_{ts}^{\tilde{x}}(\xi)| &\leq |e^{-\xi(t-s)} \tilde{\mathbf{x}}_{ts}^1| + \int_s^t \xi e^{-\xi(t-u)} |\tilde{\mathbf{x}}_{tu}^1| du \\ &\leq c \mathcal{N}[\tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma] \left\{ |t-s|^\gamma + \int_s^t |t-u|^{\gamma-1} du \right\} \leq c |t-s|^\gamma \mathcal{N}[\tilde{x}; \mathcal{C}_1^\gamma], \end{aligned} \quad (5.74)$$

où l'on a utilisé la majoration élémentaire $|\xi e^{-\lambda \xi}| \leq (\lambda e)^{-1}$, valable pour tout $\xi \geq 0$ et tout $\lambda > 0$. Puisque $\int_0^\infty d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + \xi^\gamma) < \infty$, (5.74) permet d'étendre $\tilde{X}^{x^\varepsilon}$ à x , et l'on déduit la formule ponctuelle : pour tout $x \in \mathcal{C}_1^\gamma$,

$$\tilde{X}_{ts}^x(\xi) = e^{-\xi(t-s)} \mathbf{x}_{ts}^1 + \xi \int_s^t e^{-\xi(t-u)} \mathbf{x}_{tu}^1 du. \quad (5.75)$$

□

Remarque 5.5.2. Il ne semble pas évident que l'on puisse convertir la condition d'intégrabilité $\int_0^\infty d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + \xi^\gamma) < \infty$ en termes de régularité pour la fonction $\phi(t) := \int_0^\infty d\xi e^{-\xi t} \tilde{\phi}(\xi)$ d'origine. Il est simplement possible d'affirmer que cette condition implique $\phi \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R})$, la réciproque n'étant (a priori) pas systématique. Dans ce contexte, il paraît délicat de chercher à comparer les hypothèses du théorème 4.3.1 ($\sigma \in \mathcal{C}^{3, \mathbf{b}, \kappa}([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d, m})$) à celles du théorème 5.4.1 et de la proposition 5.5.1 ($\int_0^\infty d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + \xi^\gamma) < \infty$ et $\psi \in \mathcal{C}^{3, \mathbf{b}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d, m})$).

L'extension des deux processus \tilde{X}^{ax} et \tilde{X}^{xx} , nécessaire à l'application des résultats de la section 5.4, c'est-à-dire lorsque $\gamma \in (1/3, 1/2]$, va résulter du même type d'argument. Il suffit de remarquer que, si x est un processus régulier,

$$\tilde{X}_{ts}^{ax}(\xi) = \int_s^t \frac{d}{du} (S_{t-u}(\xi)) \mathbf{x}_{us}^1 du, \quad (5.76)$$

tandis que, si \mathbf{x}^2 désigne en outre l'aire de Lévy *standard* de x ($\mathbf{x}^2 := \int_s^t dx_v \otimes \mathbf{x}_{vs}^1$),

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{ts}^{xx}(\xi) &= \int_s^t S_{t-u}(\xi) \frac{d}{du} (\mathbf{x}_{us}^2 - \mathbf{x}_{ts}^2) du \\ &= S_{t-s}(\xi) \mathbf{x}_{ts}^2 - \int_s^t \frac{d}{du} (S_{t-u}(\xi)) (\mathbf{x}_{us}^2 - \mathbf{x}_{ts}^2) du \\ &= S_{t-s}(\xi) \mathbf{x}_{ts}^2 + \int_s^t \frac{d}{du} (S_{t-u}(\xi)) \{ \mathbf{x}_{tu}^2 + \mathbf{x}_{tu}^1 \otimes \mathbf{x}_{us}^1 \}, \end{aligned}$$

où, pour obtenir la dernière égalité, nous avons utilisé la relation de Chen $\delta \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 \otimes \mathbf{x}^1$. D'où le résultat :

Proposition 5.5.3. *Soit x un processus permettant la construction d'un 2-rough path $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m, m})$, pour un certain coefficient $\gamma > 1/3$. Si $\int_0^\infty d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + \xi) < \infty$, alors toute suite x^ε de processus différentiables telle que*

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^{\varepsilon, 2} - \mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m, m})] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

satisfait simultanément les hypothèses 5, 7 et 8.

Démonstration. C'est le même argument de prolongement que dans la proposition 5.5.1. Il donne naissance aux trois expressions :

$$\tilde{X}_{ts}^x(\xi) = e^{-\xi(t-s)} \mathbf{x}_{ts}^1 + \xi \int_s^t e^{-\xi(t-u)} \mathbf{x}_{tu}^1 du, \quad \tilde{X}_{ts}^{ax}(\xi) = \xi \int_s^t e^{-\xi(t-u)} \mathbf{x}_{us}^1 du, \quad (5.77)$$

$$\tilde{X}_{ts}^{xx}(\xi) = e^{-\xi(t-s)} \mathbf{x}_{ts}^2 + \xi \int_s^t e^{-\xi(t-u)} \{ \mathbf{x}_{tu}^2 + \mathbf{x}_{tu}^1 \otimes \mathbf{x}_{us}^2 \} du. \quad (5.78)$$

Observons en particulier l'estimation

$$|X^{ax}| = \left| \int_0^\infty d\xi \tilde{\phi}(\xi) \tilde{X}_{ts}^{ax}(\xi) \right| \leq \mathcal{N}[\tilde{\phi}; \mathcal{L}_1] \int_s^t |\mathbf{x}_{us}^1| du \leq \mathcal{N}[\tilde{\phi}, \mathcal{L}_1] \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] |t - s|^{1+\gamma},$$

tandis que

$$\begin{aligned} |\tilde{X}_{ts}^{xx}(\xi)| &\leq c \left\{ |\mathbf{x}_{ts}^2| + \int_s^t |t - u|^{-1} [|\mathbf{x}_{tu}^2| + |\mathbf{x}_{tu}^1| |\mathbf{x}_{us}^1|] du \right\} \\ &\leq c \left\{ 1 + \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma]^2 + \mathcal{N}[\mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}] \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ |t - s|^{2\gamma} + \int_s^t |t - u|^{-1+2\gamma} du + \int_s^t |t - u|^{-1+\gamma} |u - s|^\gamma du \right\}, \end{aligned}$$

où l'on a à nouveau utilisé l'estimation $|\xi e^{-\lambda\xi}| \leq (\lambda e)^{-1}$. \square

Nous sommes ainsi en mesure de formuler une version plus explicite du corollaire 5.4.11 :

Théorème 5.5.1. *Soit $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ un processus γ -höldérien ($\gamma > 1/3$) permettant la construction d'un 2-rough path géométrique $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m})$, et supposons la condition d'intégrabilité $\int_0^\infty d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + |\xi|) < \infty$ vérifiée. Alors, si $\psi \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d,m})$, l'équation*

$$y_t^i = \int_{\mathcal{A}} d\xi \tilde{\phi}(\xi) \int_0^t S_{t-u}(\xi) dx_u^j \psi^{ij}(y_u), \quad (5.79)$$

interprétée grâce aux propositions 2.2.7, 5.4.5, 5.4.4 et 5.5.3, admet une unique solution dans l'espace $\tilde{\mathcal{Q}}_x^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^d)$ des processus contrôlés.

5.5.2 Cas de la transformée de Fourier

Ici, $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, $S_t(\xi) = e^{-2i\pi\xi t}$. Il est là encore possible de recourir à un argument d'intégration par parties, basé (pour \tilde{X}^x) sur la décomposition (5.73). La seule différence notable, par rapport au raisonnement de la sous-section précédente, est l'absence de l'estimation $|\xi e^{-\xi t}| \leq ct^{-1}$. Nous ne pouvons alors faire apparaître que des estimations du type

$$\begin{aligned} |\tilde{X}_{ts}^x(\xi)| &= \left| e^{-2i\pi\xi(t-s)} \mathbf{x}_{ts}^1 + 2i\pi\xi \int_s^t e^{-2i\pi\xi(t-u)} \mathbf{x}_{tu}^1 du \right| \\ &\leq \mathcal{N}[x; \mathcal{C}_1^\gamma] \left\{ |t-s|^\gamma + |\xi| |t-s|^{1+\gamma} \right\} \leq c_x |t-s|^\gamma \{1 + |\xi|\}, \end{aligned}$$

qui conduisent tout naturellement aux analogues des propositions 5.5.1 et 5.5.3 :

Proposition 5.5.4. *Soit $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$, avec $\gamma > 1/2$. Si $\int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + |\xi|^{1+\gamma}) < \infty$, alors toute suite de processus différentiables x^ε telle que*

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

satisfait l'hypothèse 4.

Proposition 5.5.5. *Soit x un processus permettant la construction d'un 2-rough path $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m})$, pour un certain coefficient $\gamma > 1/3$. Si $\int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + |\xi|^2) < \infty$, alors toute suite x^ε de processus différentiables telle que*

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^{\varepsilon,2} - \mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m})] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

satisfait simultanément les hypothèses 5, 7 et 8.

Remarque 5.5.6. Il est intéressant de noter que la condition (d'existence et) d'intégrabilité sur $\tilde{\phi}$ est par exemple induite par l'hypothèse $\phi \in \mathcal{C}^4((-\varepsilon, T + \varepsilon); \mathbb{R})$ dans (5.2), pour un petit $\varepsilon > 0$. En effet, il suffit alors de prolonger ϕ en un élément ϕ_T de $\mathcal{C}^4(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ à support compact, puis d'écrire, si F désigne la transformation de Fourier,

$$\phi_T = F\tilde{\phi}_T, \quad \text{avec } \tilde{\phi}_T(\xi) := (F^{-1}\phi_T)(\xi) = c \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi t\xi} \phi_T(t) dt.$$

Puisque $\tilde{\phi}_T \in L^2(\mathbb{R})$, on déduit alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}_T(\xi)|(1 + |\xi|^2) &\leq 2 \int_{|\xi| \leq 1} d\xi |\tilde{\phi}_T(\xi)| + c \int_{|\xi| \geq 1} \frac{(1 + |\xi|^2)}{|\xi|^4} \int_{\mathbb{R}} dt |\phi_T^{(4)}(t)| \\ &\leq c \left\{ \|\tilde{\phi}_T\|_{L^2} + \|\phi_T^{(4)}\|_{\infty} \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Une autre façon de définir \tilde{X}^x lorsque $x = B^H$ est un mBf, consiste à envisager une interprétation au sens de Wiener de l'intégrale $\int_s^t S_{t-u}(\xi) dB_u^H$. C'est ce que nous souhaitons développer dans le reste de cette section, pour un indice de Hurst $H > 1/2$ donné. Au-delà de l'amélioration (minime) apportée à la condition d'intégrabilité dans le cas Young (la condition $\int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + |\xi|^\gamma) < \infty$ viendra remplacer $\int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + |\xi|^{1+\gamma}) < \infty$), ces considérations illustreront surtout la flexibilité du formalisme convolutionnel, qui permet une adaptation des critères de régularité standards. Il est ainsi possible d'obtenir une version "convolutionnelle" du lemme classique de Garsia-Rodemich-Rumsey :

Proposition 5.5.7. *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et fixons $\xi \in \mathbb{R}$. A tout $\tilde{R} : \mathcal{S}_2 \times \mathbb{R} \rightarrow V$ tel que $\tilde{R}_\cdot(\xi) \in \mathcal{C}_2(V)$, on associe la quantité*

$$\tilde{U}(\xi) := \iint_{0 < v < w < T} \psi \left(\frac{\|\tilde{R}_{vw}(\xi)\|}{\phi(|w-v|)} \right) dv dw,$$

où $\psi, \phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions strictement croissantes et $\phi(0) = 0$. Supposons qu'il existe $\tilde{C}(\xi) \geq 0$ tel que, pour tous $s < t \in [0, T]$,

$$\sup_{s \leq u \leq t} \|(\tilde{\delta}\tilde{R})_{tus}(\xi)\| \leq \psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{C}(\xi)}{|t-s|^2} \right) \phi(t-s). \quad (5.80)$$

Alors pour tous $s < t \in [0, T]$,

$$\|\tilde{R}_{ts}(\xi)\| \leq 4 \int_0^{|t-s|} \left[\psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{U}(\xi)}{r^2} \right) + \psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{C}(\xi)}{r^2} \right) \right] d\phi(r).$$

Démonstration. Voir Appendix. □

Remarque 5.5.8. A partir de ce résultat, le lemme 3.1.12 est obtenu en prenant simplement $\xi = 0$.

Rappelons à présent quelques éléments relatifs à la construction de l'intégrale de Wiener d'un mBf B d'indice de Hurst $H > 1/2$ (voir [81] ou [8] pour davantage de détails). On supposera que l'espace de probabilité sous-jacent (Ω, \mathcal{F}, P) sur lequel B est défini, est tel que Ω corresponde à l'espace de Banach $C_0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ des fonctions continues qui s'annulent en 0, muni de la norme du supremum sur les ensembles compacts. P est alors la seule mesure de probabilité telle que le processus canonique $\{B_t; t \in \mathbb{R}\}$ soit un mBf m -dimensionnel d'indice H et la σ -algèbre \mathcal{F} est la complétion de la σ -algèbre borélienne de Ω par rapport à P .

On considère l'espace \mathcal{H} obtenu comme la complétion de l'ensemble \mathcal{E} des fonctions élémentaires de \mathbb{R}^m vis-à-vis du produit scalaire

$$\langle (\mathbf{1}_{[0,t_1]}, \dots, \mathbf{1}_{[0,t_m]}), (\mathbf{1}_{[0,s_1]}, \dots, \mathbf{1}_{[0,s_m]}) \rangle = \sum_{i=1}^m R_H(s_i, t_i), \quad s_i, t_i \in \mathbb{R},$$

R_H désignant la fonction de covariance du mBf unidimensionnel. L'isométrie

$$\begin{aligned} B : \quad \mathcal{E} &\longrightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^m) \\ (\mathbf{1}_{[0,t_1]}, \dots, \mathbf{1}_{[0,t_m]}) &\longmapsto (B_{t_1}^1, \dots, B_{t_m}^m) \end{aligned}$$

est ensuite étendue à \mathcal{H} et l'on définit l'intégrale de Wiener d'un élément $h \in \mathcal{H}$ par

$$\int_0^T h_u dB_u := B(h).$$

Il est en fait établi (voir les références ci-dessus) que le produit scalaire de deux fonctions $f, g \in \mathcal{H}$ est donné par la formule

$$E[\langle B(h), B(g) \rangle] = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = c_H \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_u^{(i)} g_v^{(i)} |u - v|^{2H-2} dudv, \quad \text{avec } c_H = H(2H - 1). \quad (5.81)$$

Munis de ces éléments, il est naturel de définir \tilde{X}^x de la façon suivante : pour tous $\xi \in \mathbb{R}$, $s, t \in \mathbb{R}_+$ et $i \leq n$,

$$\tilde{X}_{ts}^{x,(i)}(\xi) = \int_s^t e^{-2i\pi\xi(t-v)} dB_v^{(i)} := B(h^1(t, s; \xi)) - i B(h^2(t, s; \xi)), \quad (5.82)$$

avec

$$h_v^1(t, s; \xi) := \cos(2\pi\xi(t-s)) \mathbf{1}_{[s,t]}(v) e_i, \quad h_v^2(t, s; \xi) := \sin(2\pi\xi(t-s)) \mathbf{1}_{[s,t]}(v) e_i,$$

e_i désignant le i -ème élément de la base canonique de \mathbb{R}^n . Nous allons montrer que ce processus satisfait l'hypothèse 4, et ce sous la même condition d'intégrabilité (sur $\tilde{\phi}$) que dans la proposition 5.5.1.

Remarquons tout d'abord que la relation algébrique $\tilde{\delta}\tilde{X}^x = 0$ est immédiate. Pour montrer que $\tilde{X}^x \in \mathcal{C}_{2,\gamma}^\gamma$ presque sûrement, nous appliquerons la proposition 5.5.7. Une étape préliminaire consiste alors à établir qu'à ξ fixé, le processus $\tilde{X}^x(\xi)$ est un élément de $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^m)$. On dispose plus exactement du résultat :

Lemme 5.5.9. *Le processus \tilde{X}^x défini par la formule (5.82) admet une modification $\tilde{X}^{x,*}$ telle que, presque sûrement, $\tilde{X}^{x,*}(\xi) \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}^m)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Nous nous appuyerons sur le critère de continuité de Kolmogorov, dans la version suivante : si $\{\tilde{Z}_{ts}(\xi), s, t \in [0, T], \xi \in \mathbb{R}\}$ est un processus évoluant dans l'un des chaos de Wiener associés à B , et si l'on dispose, pour tous $N \in \mathbb{N}$, $(s_1, t_1, \xi_1), (s_2, t_2, \xi_2) \in [0, T]^2 \times [-N, N]$, d'une estimation du type

$$E \left[\left| \tilde{Z}_{t_1 s_1}(\xi_1) - \tilde{Z}_{t_2 s_2}(\xi_2) \right|^2 \right] \leq c_N \{ |s_1 - s_2|^{\alpha_1} + |t_1 - t_2|^{\alpha_2} + |\xi_1 - \xi_2|^{\alpha_3} \}, \quad (5.83)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$, alors \tilde{Z} admet une modification \tilde{Z}^* telle que, p.s., $\tilde{Z}^*(\xi)$ est continu pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que \tilde{X}^x satisfait effectivement (5.83), supposons par exemple $s_2 < s_1 < t_2 < t_1$. Alors

$$\begin{aligned} & \tilde{X}_{t_1 s_1}^x(\xi_1) - \tilde{X}_{t_2 s_2}^x(\xi_2) \\ &= \int_{s_1}^{t_1} [e^{-2i\pi\xi_1(t_1-u)} - e^{-2i\pi\xi_2(t_2-u)}] dB_u + \int_{t_2}^{t_1} e^{-2i\pi\xi_1(t_1-u)} dB_u - \int_{s_2}^{s_1} e^{-2i\pi\xi_2(t_2-u)} dB_u. \end{aligned}$$

Or, d'après (5.81),

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_{t_2}^{t_1} e^{-2i\pi\xi_1(t_1-u)} dB_u \right|^2 \right] &= \langle h^1, h^1 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle h^2, h^2 \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq c \int_{t_2}^{t_1} du \int_{t_2}^{t_1} dv |u-v|^{2H-2} \leq c |t_1 - t_2|^{2H} \end{aligned}$$

et de même

$$E \left[\left| \int_{s_2}^{s_1} e^{-2i\pi\xi_2(t_2-u)} dB_u \right|^2 \right] \leq c |s_1 - s_2|^{2H}.$$

Par ailleurs, toujours grâce à (5.81), on a

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_{s_1}^{t_2} [e^{-2i\pi\xi_1(t_1-u)} - e^{-\xi_2(t_2-u)}] dB_u \right|^2 \right] \\ \leq c \int_{s_1}^{t_1} du \int_{s_1}^{t_1} dv |\cos(2\pi\xi_1(t_1-u)) - \cos(2\pi\xi_2(t_2-u))| |u-v|^{2H-2} \\ |\cos(2\pi\xi_1(t_1-v)) - \cos(2\pi\xi_2(t_2-v))| \\ + c \int_{s_1}^{t_1} du \int_{s_1}^{t_1} dv |\sin(2\pi\xi_1(t_1-u)) - \sin(2\pi\xi_2(t_2-u))| |u-v|^{2H-2} \\ |\sin(2\pi\xi_1(t_1-v)) - \sin(2\pi\xi_2(t_2-v))|, \end{aligned}$$

ce qui, associé à l'estimation élémentaire

$$\begin{aligned} &|\cos(2\pi\xi_1(t_1-u)) - \cos(2\pi\xi_2(t_2-u))| \\ &\leq |\cos(2\pi\xi_1(t_1-u)) - \cos(2\pi\xi_1(t_2-u))| + |\cos(2\pi\xi_1(t_2-u)) - \cos(2\pi\xi_2(t_2-u))| \\ &\leq c \{|\xi_1| |t_1 - t_2| + |t_2 - u| |\xi_1 - \xi_2|\} \\ &\leq c \{N |t_1 - t_2| + T |\xi_1 - \xi_2|\}, \end{aligned}$$

conduit à

$$E \left[\left| \int_{s_1}^{t_2} [e^{-2i\pi\xi_1(t_1-u)} - e^{-2i\pi\xi_2(t_2-u)}] dB_u \right|^2 \right] \leq c_N \{|t_1 - t_2| + |\xi_1 - \xi_2|\}^2.$$

□

Nous sommes alors en mesure de prouver le résultat escompté :

Proposition 5.5.10. *Pour tout indice de Hurst $H > 1/2$ et tout coefficient $\gamma \in (1/2, H)$ tel que $\int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)| (1 + |\xi|^\gamma) < \infty$, le processus \tilde{X}^x défini par (5.82) satisfait presque sûrement les critères de l'hypothèse 4.*

Démonstration. Comme nous l'avons déjà mentionné, il suffit de vérifier la condition de régularité $\tilde{X}^x \in \mathcal{C}_{2,\gamma}^\gamma(\mathbb{R}^m)$. Grâce au lemme 5.5.9, nous sommes en droit d'utiliser la proposition 5.5.7, avec $\psi(x) = x^{2p}$ et $\phi(x) = x^{\gamma+1/p}$, pour affirmer que $|\tilde{X}_{ts}^x(\xi)| \leq c |t-s|^\gamma (\tilde{U}_{\gamma,2p}(\xi))^{1/2p}$, où p est un nombre entier positif quelconque et

$$\tilde{U}_{\gamma,2p}(\xi) := \int_{T \times T} \frac{\|\tilde{X}_{wv}^x(\xi)\|^{2p}}{|w-v|^{2\gamma p+2}} dv dw. \quad (5.84)$$

Il reste à prouver que $\mathcal{N}[\tilde{U}_{\gamma,2p}^{1/2p}; \mathcal{L}_\gamma] = \int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + |\xi|^\gamma)(\tilde{U}_{\gamma,2p}(\xi))^{1/2p} < \infty$ p.s., puisqu'alors $\mathcal{N}[\tilde{X}^x; \tilde{C}_{2,\gamma}^\gamma] \leq c\mathcal{N}[\tilde{U}_{\gamma,2p}^{1/2p}; \mathcal{L}_\gamma] < \infty$ p.s. Montrons en fait que $E[\mathcal{N}[\tilde{U}_{\gamma,2p}^{1/2p}; \mathcal{L}_\gamma]] < \infty$.

Pour cela, on commence par appliquer l'inégalité de Jensen :

$$E[\mathcal{N}[\tilde{U}_{\gamma,2p}^{1/2p}; \mathcal{L}_\gamma]] \leq \int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + |\xi|^\gamma)E[\tilde{U}_{\gamma,2p}(\xi)]^{1/2p}.$$

Remarquons à présent que nous avons établi, au cours de la preuve du lemme 5.5.9, l'estimation

$$E[|\tilde{X}_{wv}^x(\xi)|^{2p}] \leq c|w - v|^{2Hp}, \quad (5.85)$$

ce qui conduit ici à $E[\tilde{U}_{\gamma,2p}(\xi)] \leq c \int_{T \times T} |w - v|^{2Hp - 2\gamma p + 2} dw dv$. En particulier, si l'on choisit $p > 1/(H - \gamma)$, $E[\tilde{U}_{\gamma,2p}(\xi)] \leq M$ pour une certaine constante M indépendante de ξ , et par conséquent

$$E[\mathcal{N}[\tilde{U}_{\gamma,2p}^{1/2p}; \mathcal{L}_\gamma]] \leq M^{1/2p} \int_{\mathbb{R}} d\xi |\tilde{\phi}(\xi)|(1 + |\xi|^\gamma) < \infty. \quad \square$$

5.6 Appendix

Preuve de la proposition 5.5.7. Il s'agit d'une adaptation de la preuve de Stroock de l'inégalité classique de Garsia-Rodemich-Rumsey (voir [96]).

Soit $s < t \in [0, T]$. Pour toute suite décroissante (s_k) dans $[s, t]$, on déduit de

$$(\tilde{\delta}\tilde{R})_{s_k s_{k+1} s}(\xi) = \tilde{R}_{s_k s}(\xi) - \tilde{R}_{s_k s_{k+1}}(\xi) - S_{s_k - s_{k+1}}(\xi)\tilde{R}_{s_{k+1} s}(\xi) \quad (5.86)$$

l'estimation $\|\tilde{R}_{s_k s}(\xi)\| \leq \|\tilde{R}_{s_{k+1} s}(\xi)\| + \|\tilde{R}_{s_k s_{k+1}}(\xi)\| + \|(\tilde{\delta}\tilde{R})_{s_k s_{k+1} s}(\xi)\|$. En itérant le procédé à partir de $s_0 = t$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tilde{R}_{t s}(\xi)\| \leq \|\tilde{R}_{s_{n+1} s}(\xi)\| + \sum_{k=0}^n \left[\|\tilde{R}_{s_k s_{k+1}}(\xi)\| + \|(\tilde{\delta}\tilde{R})_{s_k s_{k+1} s}(\xi)\| \right]. \quad (5.87)$$

Pour tout $v \geq s$, on pose $I(v) := \int_s^v \psi \left(\frac{\|\tilde{R}_v(\xi)\|}{\phi(v-u)} \right) du$, et l'on définit une suite particulière (s_k) de la façon suivante. Tout d'abord, $s_0 = t$. Ensuite, étant donné $s_k \in (s, t]$, on écrit $s_k = s + \lambda_k$ ($\lambda_k \in (0, t - s]$) et l'on définit $\alpha_k < \lambda_k$ par la relation $2\phi(\alpha_k) = \phi(\lambda_k)$. On pose alors $s_{k+1} = s + \lambda_{k+1}$, où $\lambda_{k+1} \in (0, \alpha_k)$ est tel que

$$I(s + \lambda_{k+1}) \leq \frac{2\tilde{U}(\xi)}{\alpha_k} \quad \text{and} \quad \psi \left(\frac{\|\tilde{R}_{s_k, s + \lambda_{k+1}}(\xi)\|}{\phi(\lambda_k - \lambda_{k+1})} \right) \leq \frac{2I(s_k)}{\alpha_k}. \quad (5.88)$$

Un tel élément existe toujours car si l'on note A_k (resp. B_k) $\subset (0, \alpha_k)$ l'ensemble sur lequel la première (resp. la seconde) inégalité n'est pas vérifiée, on a $\tilde{U}(\xi) \geq \int_{A_k} I(s+u) du > \frac{2\tilde{U}(\xi)}{\alpha_k} \mu(A_k)$, tandis que

$$I(s_k) = \int_0^{\lambda_k} \psi \left(\frac{\|\tilde{R}_{s_k, s+u}(\xi)\|}{\phi(\lambda_k - u)} \right) du \geq \int_{B_k} \psi \left(\frac{\|\tilde{R}_{s_k, s+u}(\xi)\|}{\phi(\lambda_k - u)} \right) du > \frac{2I(s_k)}{\alpha_k} \mu(B_k).$$

Ces deux inégalités conduisent à $\mu(A_k) < \alpha_k/2$ et $\mu(B_k) < \alpha_k/2$, et donc $\mu(A_k \cup B_k) < \alpha_k$. Il est ensuite facile de constater que (s_k) tend vers s .

Remarquons à présent l'inégalité

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_k - \lambda_{k+1}) &\leq \phi(\lambda_k) = 2\phi(\alpha_k) = 4 \left(\phi(\alpha_k) - \frac{\phi(\alpha_k)}{2} \right) \\ &\leq 4 \left(\phi(\alpha_k) - \frac{\phi(\lambda_{k+1})}{2} \right) = 4(\phi(\alpha_k) - \phi(\alpha_{k+1})). \end{aligned}$$

En associant cette observation à (5.88), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}_{s_k s_{k+1}}(\xi)\| &\leq \phi(\lambda_k - \lambda_{k+1})\psi^{-1} \left(\frac{2I(s_k)}{\alpha_k} \right) \leq 4(\phi(\alpha_k) - \phi(\alpha_{k+1}))\psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{U}(\xi)}{\alpha_k \alpha_{k-1}} \right) \\ &\leq 4 \int_{\alpha_{k+1}}^{\alpha_k} \psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{U}(\xi)}{r^2} \right) d\phi(r), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que ψ^{-1} est une fonction croissante. Par ailleurs, la condition (5.80) implique :

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\delta}\tilde{R})_{s_k s_{k+1} s}(\xi)\| &\leq \psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{C}(\xi)}{\lambda_k^2} \right) \phi(\lambda_k) \leq 4\psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{C}(\xi)}{\lambda_k^2} \right) (\phi(\alpha_k) - \phi(\alpha_{k+1})) \\ &\leq 4 \int_{\alpha_{k+1}}^{\alpha_k} \psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{C}(\xi)}{r^2} \right) d\phi(r). \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{R}(\xi) \in \mathcal{C}_2$, on déduit, en faisant tendre n vers l'infini dans (5.87) :

$$\|\tilde{R}_{ts}(\xi)\| \leq 4 \int_0^{|t-s|} \left[\psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{U}(\xi)}{r^2} \right) + \psi^{-1} \left(\frac{4\tilde{C}(\xi)}{r^2} \right) \right] d\phi(r),$$

ce qui constitue l'estimation escomptée. □

Troisième partie

L'équation de la chaleur rugueuse

Présentation

Nous poursuivons dans cette partie notre travail d'extension du champ d'application de la méthode rough paths, en considérant cette fois la perturbation du modèle infini-dimensionnel des équations d'évolution.

L'objectif de l'étude est double :

- Fournir une interprétation trajectorielle de l'équation

$$dy_t = Ay_t dt + dX_t(y_t), \quad t \in [0, T], \quad (5.89)$$

où T désigne (toujours) un horizon positif fixé, A est un opérateur non borné défini sur un sous-espace (dense) d'un Banach V et $X \in \mathcal{C}([0, T] \times V; V)$ est un bruit irrégulier en temps, qui évolue dans l'ensemble des champs de vecteurs agissant sur l'espace V en jeu.

- Résoudre le système avec cette interprétation, puis développer une méthode d'approximation de la solution.

Comme dans le cas des systèmes rugueux ordinaires, le but implicite de cette démarche est d'obtenir une interprétation et une analyse trajectorielles des équations d'évolution stochastiques dirigées par un mBf. Dans ce contexte, il est important d'avoir à l'esprit les très nombreux résultats obtenus lorsque le processus est un mB standard, et au sujet desquels nous nous contenterons de mentionner [23] pour la formulation infini-dimensionnelle et [24] pour l'approche multi-paramétrique. Dans le cas particulier de l'équation de la chaleur avec perturbation Brownienne, des résultats très fins d'existence et d'unicité ont été obtenus dans [89] dans un contexte hilbertien et dans [9] pour l'équation considérée dans un espace de Banach plus général. Il convient également de citer, pour un bruit fractionnaire, les récents travaux relatifs à l'interprétation et la résolution du système au sens de Young, pour des équations paraboliques [70, 50] ou de type équation des ondes [92], ainsi que l'analyse approfondie contenue dans [100] dans le cas spécifique d'un bruit additif. Mentionnons finalement une application des idées issues de la théorie des rough paths à l'étude des équations KdV (déterministes et stochastiques) en présence d'une condition initiale de faible régularité [47].

A notre connaissance, deux types d'approches ont jusqu'à présent été envisagés en vue de donner sens à (5.89) via la méthodologie rough paths :

- Une première approche consiste (essentiellement) à se ramener, par le biais de transformations astucieuses de l'équation, à un système rugueux standard, de la forme générale (2.1). Il est ensuite possible de faire appel à la multitude de résultats établis pour ce dernier système. Citons ici les travaux de Caruana et Friz [10], Caruana, Friz et Oberhauser [11], ainsi que l'approche de Teichmann dans [99]. Nous reviendrons dans un instant sur ces différents travaux.
- La seconde approche est due à Gubinelli et Tindel et contenue dans [51] : elle repose sur une adaptation du formalisme standard des k -incrément (présenté dans le chapitre 2) aux particularités de l'équation (5.89), et combine les mécanismes classiques des rough paths avec des propriétés issues de la théorie des semigroupes analytiques. Le principe de base est ainsi similaire à celui utilisé dans le chapitre 5 : pour analyser (5.89), les instruments "classiques" que sont les opérateurs δ et Λ ou l'espace \mathcal{Q}_x^γ , ne sont plus appropriés et

doivent être remplacés par des outils qui tiennent compte du comportement algébrique et analytique des solutions (potentielles) de l'équation.

C'est cette seconde approche que nous nous proposons de développer dans les deux chapitres qui suivent, en nous concentrant (pour plus de simplicité) sur le cas de l'équation de la chaleur

$$dy_t = \Delta y_t dt + dX_t(y_t), \quad y_0 = \psi, \quad t \in [0, T], \quad (5.90)$$

avec ψ un élément fixé d'un certain espace fonctionnel et Δ l'opérateur de Laplace sur un espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ (dans le chapitre 6) ou sur $L^2([0, 1])$ avec conditions au bord de Dirichlet (dans le chapitre 7). Comme il est de coutume dans le contexte des équations d'évolution, l'équation sera en fait analysée sous sa forme *mild*

$$y_t = S_t \psi + \int_0^t S_{t-u} dX_u(y_u), \quad t \in [0, T], \quad (5.91)$$

où $S : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V)$ ($V = L^p(\mathbb{R}^n)$ ou $V = L^2([0, 1])$) désigne le semigroupe de la chaleur associé à V .

Plusieurs types d'améliorations seront apportés par rapport aux résultats de [51] : (1) Nous envisagerons le cas d'un bruit X non-linéaire très général au lieu d'une perturbation polynômiale ; (2) Les résultats pourront être appliqués au cas où X est un mBf (en temps) d'indice de Hurst $H > 1/4$, et plus seulement $H \geq 1/2$; (3) Nous mettrons en évidence l'existence d'un schéma d'approximation dans plusieurs cas de figure. Le principal coût de ces améliorations réside dans le fait que nous ne considérerons dans les deux chapitres que des bruits à valeurs dans un espace de dimension finie, générés par un processus $x = (x^1, \dots, x^n)$ γ -höldérien. X sera plus exactement décrit par la formule : pour tout $\varphi \in V$, pour tout $t \in [0, T]$,

$$X_t(\varphi) := \sum_{i=1}^m x_t^i f_i(\varphi), \quad (5.92)$$

où les champs de vecteurs $(f_i)_{i=1, \dots, m}$ sont des applications fixées et régulières de V dans V .

Cette hypothèse relative à la dimension finie du bruit est également admise dans [10], [11] et [99]. Précisons par ailleurs que n'est envisagé dans [10, 11] que le cas d'une perturbation linéaire, tandis que les conditions d'application des résultats contenus dans [99] conduisent à des hypothèses de régularité relativement abstraites sur les champs de vecteurs. Dans le contexte qui nous intéresse, et avec la notation (5.92), les hypothèses en question peuvent être (globalement) traduites de la façon suivante : il existe une approximation du semigroupe S par un groupe S^ε telle que les applications $\tilde{f}_i^\varepsilon(\varphi)_t := S_{-t}^\varepsilon f_i(S_t^\varepsilon \varphi)$ puissent être prolongées en une fonction régulière du couple (t, φ) . Nous nous appuyerons pour notre part sur des conditions de régularité bien plus élémentaires, en notant toutefois qu'il est sans doute possible de rapprocher cette dernière hypothèse du modèle étudié dans les sections 6.5 et 7.4.

Pour clore cette présentation, soulignons la ressemblance de la formulation (5.91) avec l'équation de Volterra fini-dimensionnelle (5.1) et (5.2), ressemblance que viendront confirmer les nombreuses similarités avec les raisonnements utilisés dans le chapitre 5. *Nous reprendrons d'ailleurs, dans cette partie, la convention utilisée dans le chapitre 5 pour les variables temporelles, et qui consiste à faire figurer les indices dans le sens décroissant.* D'un point de vue "chronologique", il convient de rappeler que ce sont en fait les considérations du chapitre 5 qui ont été inspirées par le formalisme développé dans [51] pour les EDP rugueuses, et que nous nous apprêtons à rappeler.

Chapitre 6

Interprétation et résolution

6.1 Introduction

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'analyse de l'équation de la chaleur rugueuse sur \mathbb{R}^n , sous la forme mild :

$$y_t = S_t \psi + \int_0^t S_{t-u} dX_u(y_u), \quad t \in [0, T], \quad (6.1)$$

où T est un horizon fini fixé, $S_t : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p \geq 1$ à préciser) est le semigroupe de la chaleur sur \mathbb{R}^n , ψ une condition initiale dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et, comme nous l'annonçons dans la présentation, X est un bruit rugueux donné par l'expression

$$X_t(\varphi) := \sum_{i=1}^m x_t^i f_i(\varphi), \quad (6.2)$$

avec $x = (x^1, \dots, x^m)$ un processus γ -höldérien et $f_i : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ des éléments fixés. Spécifions encore davantage ce cadre d'étude en choisissant les éléments f_i de la forme

$$f_i(\varphi)(\xi) = \sigma_i(\xi, \varphi(\xi)), \quad (6.3)$$

pour des fonctions $\sigma_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulières. En d'autres termes, les champs de vecteurs f_i correspondent aux opérateurs de Nemytskii associés aux fonctions σ_i .

Evoquons en quelques mots les principes qui vont guider notre analyse de l'équation.

(a) Comme dans le cas des diffusions fini-dimensionnelles, l'interprétation de (6.1) passe d'abord par l'observation du comportement algébrique de la solution du système lorsque x est différentiable. En notant y cette solution, on a, pour tous $s < t \in [0, T]$,

$$(\delta y)_{ts} = y_t - y_s = S_t \psi - S_s \psi + \int_0^s [S_{t-u} - S_{s-u}] dX_u(y_u) + \int_s^t S_{t-u} dX_u(y_u).$$

Or, en utilisant la propriété d'additivité du semigroupe,

$$S_t \psi - S_s \psi + \int_0^s [S_{t-u} - S_{s-u}] dX_u(y_u) = [S_{t-s} - \text{Id}] \left\{ S_s \psi + \int_0^s S_{s-u} dX_u(y_u) \right\} = a_{ts} y_s,$$

avec la notation que l'on adoptera désormais

$$a_{ts} := S_{t-s} - \text{Id}.$$

Apparaît ici, et ce comme dans le chapitre 5, l'idée d'introduire un nouvel opérateur $\hat{\delta}$, dit incrément "modifié", défini par

$$(\hat{\delta}y)_{ts} := (\delta y)_{ts} - a_{ts}y_s. \quad (6.4)$$

Avec cette notation, (6.1) prend la forme plus familière

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \int_s^t S_{t-u} dX_u(y_u) \quad , \quad y_0 = \psi. \quad (6.5)$$

Une première section, comparable à la section 5.2, viendra résumer les propriétés de ce nouvel opérateur $\hat{\delta}$ (étendu aux k -incrément, pour tout $k \geq 1$), telles qu'elles sont établies dans [51]. Nous rappellerons en particulier qu'il est là encore possible d'envisager l'inversion de $\hat{\delta}$ par l'intermédiaire d'un opérateur $\hat{\Lambda}$, procédé qui ouvre la voie à une théorie de l'intégration basée sur $\hat{\delta}$. Dans un souci de cohérence, la notion de processus höldérien devra par ailleurs être précisée dans ce contexte : un processus $y \in \mathcal{C}_2(I; V)$ sera ainsi dit γ -höldérien au sens de $\hat{\delta}$ (sur I) si $\|\hat{\delta}y\|_V \leq c|t-s|^\gamma$ pour tous $s, t \in I$.

(b) Munis de ces différents outils, l'interprétation de l'intégrale rugueuse de l'équation résultera à nouveau d'un préalable exercice de dissection de $\int_s^t S_{t-u} dX_u(y_u)$ lorsque le processus x qui intervient dans (6.2) est différentiable (l'intégrale est alors interprétée au sens de Riemann). Comme dans les chapitres précédents, cette démarche fera apparaître différentes possibilités d'extension aux processus γ -höldériens, pour $\gamma \in (1/4, 1)$. Si $\gamma > 1/2$ (Section 6.3), nous constaterons qu'à l'instar du cas fini-dimensionnel, seul un développement à l'ordre un est requis : c'est le cas Young. Pour $\gamma \leq 1/2$ (Sections 6.4, 6.5 et 6.7), la machinerie des rough paths doit entrer en scène et il est ainsi nécessaire d'introduire à la fois des espaces de processus contrôlés, mais aussi un chemin rugueux modifié \mathbf{X} construit à partir de x , et amené à jouer un rôle analogue à celui de la trajectoire standard \mathbf{x} dans l'étude de (2.1). Dans le cas $\gamma \in (1/3, 1/2]$ par exemple, le chemin \mathbf{X} en question sera composé de trois incréments X^x , X^{xa} et X^{xx} à valeurs dans des espaces d'opérateurs, et donnés, lorsque x est différentiable, par les formules : si $\varphi, \psi \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$X_{ts}^{x,i}(\varphi) = \int_s^t S_{tu}(\varphi) dx_u^i \quad , \quad X_{ts}^{xa,i}(\varphi, \psi) = \int_s^t S_{tu} dx_u^i [a_{us}(\varphi) \cdot \psi], \quad (6.6)$$

$$X_{ts}^{xx,ij}(\varphi) = \int_s^t S_{tu}(\varphi) dx_u^i \mathbf{x}_{us}^{1,j}, \quad (6.7)$$

pour $i, j = 1, \dots, m$, où $\varphi \cdot \psi$ désigne la fonction obtenue en multipliant point par point φ et ψ . Une fois l'intégrale correctement définie, la résolution de l'équation (6.1) pourra être envisagée par le biais d'arguments de point fixe standards.

(c) Au cours du raisonnement, il se révélera indispensable de pouvoir contrôler la régularité de $u \mapsto f_i(y_u)$ en fonction de la régularité de y . Nous n'aurons pour cela d'autres choix que de nous tourner vers la formule de Taylor et les estimations du calcul différentiel ordinaire, méthodes qui ne prennent évidemment pas en considération le formalisme basé sur l'incrément $\hat{\delta}$. Il serait par exemple vain de chercher un équivalent à la règle

$$\delta(f_i(y))_{ts}(\xi) = \int_0^1 dr \sigma'_i(\xi, y_s(\xi) + r(\delta y)_{ts}(\xi))(\delta y)_{ts}(\xi), \quad (6.8)$$

exprimé en termes de $\hat{\delta}$. Cette observation évidente nous obligera à alterner l'usage des deux opérateurs δ et $\hat{\delta}$, procédé qui n'est pas sans poser quelques difficultés quant à la régularité

höldérienne des processus en jeu : un processus höldérien au sens de $\hat{\delta}$ ne l'est en effet pas nécessairement au sens classique, c'est-à-dire au sens de δ (le même type de problème avait été soulevé dans la section 5.3). Dans une telle situation, et si l'on se réfère à la définition (6.4) de $\hat{\delta}$ ($(\delta y)_{ts} = (\hat{\delta} y)_{ts} + a_{ts} y_s$), on souhaiterait alors récupérer des incréments de la forme $|t - s|^\alpha$ de l'estimation du terme $\|a_{ts} y_s\|$. C'est là qu'intervient l'un des grands principes de notre approche, à savoir l'utilisation d'espaces de Sobolev fractionnaires $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ ($\alpha \in [0, 1/2)$) basés sur $\mathcal{B}_p := L^p(\mathbb{R}^n)$ (la définition exacte de ces espaces sera précisée dans la section 6.2). On dispose effectivement de la relation (Proposition 6.2.2) : pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$,

$$\|a_{ts}\varphi\|_{\mathcal{B}_p} \leq c_\alpha |t - s|^\alpha \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}}.$$

Il faudra bien entendu être attentif au fait que ce gain de régularité en temps s'opère au détriment de la régularité en espace.

Notez que les questions soulevées par la formule (6.8) sont spécifiques au cas non linéaire que nous envisageons ici. Si les champs de vecteurs f_i sont linéaires, aucun recours à la formule de Taylor n'est nécessaire et la décomposition de l'intégrale $\int_s^t S_{t-u} dx_u^i f_i(y_u)$ peut s'effectuer en ne faisant appel qu'à $\hat{\delta}$ et $\hat{\Lambda}$. C'est ce qui a été réalisé dans [51], avec une extension de la méthode au cas polynômial à l'aide d'intégrales itérées indexées par des arbres (voir aussi [49] et [48] à ce sujet).

(d) Commentons à présent le rôle joué par le paramètre p . Pour cela, commençons par observer que le développement de Taylor des champs de vecteurs f_i fait immédiatement apparaître des produits (point par point) d'éléments de $L^p(\mathbb{R}^n)$ - comme le montre la règle élémentaire (6.8) -, autrement dit des éléments de $L^{p/k}(\mathbb{R}^n)$, pour un certain entier $k \geq 2$. Dans un souci de stabilité générale de l'équation (6.1), il importera de revenir à l'espace courant $L^p(\mathbb{R}^n)$ en utilisant l'effet "régularisant" de S_{t-u} (Corollaire 6.2.3), qui permet par exemple d'affirmer : pour tout $\varphi \in L^{p/2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|S_{t-u}(\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c |t - u|^{-n/(2p)} \|\varphi\|_{L^{p/2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Nous jouerons alors sur le paramètre p (et nous éloignerons de cette façon du cadre hilbertien de [51]) pour minimiser la singularité (en temps) issue de cette procédure de régularisation. Dans ce contexte, le fait de choisir p assez large nous permettra par ailleurs de supposer que l'espace $\mathcal{B}_{\kappa,p}$, où $\kappa > 0$ est un paramètre fixé, est une algèbre de Banach.

(e) En vue d'appliquer nos résultats à des situations concrètes, nous nous interrogerons finalement sur le sens à donner aux expressions du type (6.6) et (6.7) lorsque x devient irrégulier. Comme dans la section 5.5, un argument élémentaire d'intégration par parties, combiné à des résultats classiques de régularité pour S et a , permettra en fait de se ramener au rough path standard \mathbf{x} issu de x . Le procédé viendra en particulier garantir que notre raisonnement peut être appliqué à un mBf m -dimensionnel d'indice de Hurst $H > 1/4$.

Le chapitre est organisé de la façon suivante : La section 6.2 viendra d'abord rappeler les principes de l'intégration algébrique associée au semigroupe de la chaleur, tels qu'ils figurent (pour l'essentiel) dans [51]. La section 6.3 verra ensuite la mise en œuvre de ces différents principes dans le cas où le coefficient de régularité höldérienne γ est strictement supérieur à $1/2$. Le premier cas "rugueux" ($\gamma \in (1/3, 1/2]$) sera traité dans la section 6.4. Nous devons alors à nouveau faire face, comme dans la section 4.3, à un problème de prolongement de la solution sur l'intervalle $[0, T]$ entier, problème qui ne sera résolu, dans la section 6.5, qu'en régularisant les champs de vecteurs f_i du système par l'intermédiaire d'un opérateur supplémentaire. La

section 6.6 sera ensuite consacrée à la traduction des différentes hypothèses admises sur x en termes du 2-rough path \mathbf{x} . La section 6.7 viendra finalement conforter la validité de notre approche à travers une brève analyse du cas $\gamma \in (1/4, 1/3]$.

6.2 Intégration algébrique associée au semigroupe de la chaleur sur \mathbb{R}^n

Cette première section est destinée à introduire le cadre général de notre étude, ainsi que les différents outils évoqués en introduction. Le plus important de ces outils est l'opérateur d'incrément modifié $\hat{\delta}$, auquel on associera, suivant la démarche de [51], un inverse $\hat{\Lambda}$ tout aussi fondamental. Rappelons au préalable quelques propriétés du semigroupe de la chaleur sur \mathbb{R}^n , propriétés qui seront mises à contribution tout au long de notre étude.

6.2.1 Cadre d'étude

Nous nous concentrerons donc sur l'équation de la chaleur sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour un certain entier p qui sera précisé au cours de l'étude. Nous noterons $\Delta = \Delta_p$ l'opérateur de Laplace, défini sur l'espace de Sobolev (classique) $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, et S_t le semigroupe associé, dont l'expression est donnée par la formule de convolution

$$S_t \varphi = g_t * \varphi \quad , \quad \text{avec } g_t(\xi) := \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-|\xi|^2/2t}. \quad (6.9)$$

Comme nous avons tenté de l'expliquer dans le point (c) de l'introduction, le caractère non linéaire de la perturbation nous invite à faire intervenir des espaces de Sobolev fractionnaires, pour lesquels nous utiliserons la définition :

Notation 6.2.1. *Pour tout $\alpha > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on appellera espace de Sobolev fractionnaire d'ordre α basé sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, et l'on notera $\mathcal{B}_{\alpha,p}$, l'image $(Id - \Delta)^{-\alpha}(L^p(\mathbb{R}^n))$, munie de la norme*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}} := \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|(-\Delta)^\alpha \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

On posera par ailleurs $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_{0,p} := L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

L'espace $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ est également souvent appelé *potentiel de Bessel* d'ordre $(2\alpha, p)$. Les livres d'Adams ([2]) ou de Stein ([94]) offrent une description très complète de ces espaces. Rapportons ici deux propriétés particulières qui seront abondamment exploitées par la suite :

- *Inclusions de Sobolev* : Si $0 \leq \mu \leq 2\alpha - \frac{n}{p}$, alors $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ est continûment inclus dans l'espace $\mathcal{C}^{0,\mu}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions bornées, μ -höldériennes sur \mathbb{R}^n .
- *Algèbre* : Si $2\alpha p > n$, alors $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ est une algèbre de Banach relativement à la multiplication point par point, autrement dit, avec les notations de l'introduction, $\|\varphi \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}}$.

La théorie générale des puissances fractionnaires d'opérateurs, contenue par exemple dans [88] ou [32], fournit ensuite des estimations très fines pour le semigroupe S_t :

Proposition 6.2.2. *Pout tout temps $T > 0$ fixé, le semigroupe S donné par (6.9) satisfait les propriétés suivantes :*

- *Contraction* : Pour tout $t \geq 0$, $\alpha \geq 0$, S_t est un opérateur de contraction sur $\mathcal{B}_{\alpha,p}$.

– Régularisation : Pour tout $t \in (0, T]$, $\alpha \geq 0$, S_t envoie \mathcal{B}_p sur $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ et

$$\|S_t \varphi\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}} \leq c_{\alpha,T} t^{-\alpha} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_p}. \quad (6.10)$$

– Régularité höldérienne. Pour tout $t \in (0, T]$, $\varphi \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$,

$$\|S_t \varphi - \varphi\|_{\mathcal{B}_p} \leq c_{\alpha,T} t^\alpha \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}}. \quad (6.11)$$

$$\|\Delta S_t \varphi\|_{\mathcal{B}_p} \leq c_{\alpha,T} t^{-1+\alpha} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}}. \quad (6.12)$$

Revenons à présent au point **(d)** de l'introduction, qui mettait en avant la nécessité de "régulariser", via le semigroupe, les éléments de $\mathcal{B}_{p/k}$, $k \geq 2$. Cette propriété est en fait une conséquence immédiate du théorème de Riesz-Thorin, dont nous nous permettons de rappeler l'énoncé :

Théorème 6.2.1 (Riesz-Thorin). *Soit (p, q, s) trois entiers liés par la relation $p^{-1} + q^{-1} = 1 + s^{-1}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in L^s(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|f * g\|_{\mathcal{B}_s} \leq \|f\|_{\mathcal{B}_p} \|g\|_{\mathcal{B}_q}. \quad (6.13)$$

Corollaire 6.2.3. *Pour tous $t > 0$, $k \in \{1, \dots, p\}$, $\varphi \in \mathcal{B}_{p/k}$, on dispose des estimations :*

$$\|S_t \varphi\|_{\mathcal{B}_p} \leq c_{k,n} t^{-\frac{n(k-1)}{2p}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{p/k}}, \quad (6.14)$$

$$\|\Delta S_t \varphi\|_{\mathcal{B}_p} \leq c_{k,n} t^{-1-\frac{n(k-1)}{2p}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{p/k}}. \quad (6.15)$$

Démonstration. D'après (6.13), pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_{p/k}$,

$$\|S_t \varphi\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|g_t * \varphi\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|g_t\|_{\mathcal{B}_{p/(p-k+1)}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{p/k}} \leq c_{k,n} t^{-\frac{n(k-1)}{2p}} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{p/k}}.$$

La seconde inégalité peut être prouvée de la même façon, puisque $\Delta S_t \varphi = \left(\frac{dS_t}{dt}\right) \varphi = \partial_t g_t * \varphi$. \square

Soulignons finalement le résultat suivant, dû à Strichartz [95] (voir aussi [54] pour des résultats plus généraux), et qui permettra d'établir les estimations cruciales (6.29) et (6.30) :

Proposition 6.2.4. *Pour tout $\alpha \in (0, 1/2)$ et tout $p > 1$, on pose*

$$T_\alpha f(\xi) := \left(\int_0^1 r^{-1-4\alpha} \left[\int_{|\eta| \leq 1} |f(\xi + r\eta) - f(\xi)| d\eta \right]^2 dr \right)^{1/2}.$$

Alors $f \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$ si et seulement si $f, T_\alpha f \in \mathcal{B}_p$, et

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{\alpha,p}} \sim \|f\|_{\mathcal{B}_p} + \|T_\alpha f\|_{\mathcal{B}_p}. \quad (6.16)$$

Remarque 6.2.5. C'est cette dernière propriété d'équivalence, indispensable pour nos estimations futures (à travers la proposition 6.3.8), qui induit la contrainte systématique $\alpha \in [0, 1/2)$ pour les espaces $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ susceptibles d'apparaître dans notre étude.

6.2.2 L'incrément modifié $\hat{\delta}$

On fixe, dans toute cette sous-section, un intervalle I de $[0, T]$. On rappelle que l'on travaillera dans ce chapitre (et dans le suivant) sur les simplexes

$$\mathcal{S}_n(I) = \{(s_1, \dots, s_n) \in I^n; s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n\}.$$

Nous noterons ainsi $\mathcal{C}_n(I; V)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathcal{S}_n(I)$. Ces considérations sont ici d'autant plus justifiées que l'opérateur S_{t-u} n'est défini que pour $t \geq u$ (i.e. sur \mathcal{S}_T^2). Notez à ce propos que nous aurons parfois recours à la notation S_{ts} pour désigner S_{t-s} , et ce dans un souci de cohérence avec notre convention de notation des indices.

Dans le point (a) de l'introduction, nous avons (brièvement) expliqué en quoi l'opérateur d'incrément standard δ n'était plus tout à fait adapté pour étudier (6.5). Nous lui préférons une version modifiée, notée $\hat{\delta}$, et définie par :

Définition 6.2.6. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathcal{C}_n(I; \mathcal{B}_{\alpha,p})$, pour tous $t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$,*

$$(\hat{\delta}y)_{t_{n+1} \dots t_1} := (\delta y)_{t_{n+1} \dots t_1} - a_{t_{n+1}t_n} y_{t_n \dots t_1}, \quad \text{avec } a_{ts} := S_{t-s} - Id \text{ si } s \leq t. \quad (6.17)$$

Les propriétés de $\hat{\delta}$ ont été analysées en détail dans [51]. Le reste de cette sous-section rassemble quelques uns de ces résultats, en commençant par la propriété fondamentale liée à l'additivité du semigroupe :

Proposition 6.2.7 ([51]). *L'opérateur $\hat{\delta}$ satisfait la relation de cohomologie $\hat{\delta}\hat{\delta} = 0$. Plus exactement, $\text{Ker } \hat{\delta}|_{\mathcal{C}_{n+1}(\mathcal{B}_{\alpha,p})} = \text{Im } \hat{\delta}|_{\mathcal{C}_n(\mathcal{B}_{\alpha,p})}$.*

Evoquons à présent un résultat plus trivial (sa preuve est immédiate), dont nous ferons usage au cours de manipulations algébriques ultérieures :

Proposition 6.2.8. *Si $L \in \mathcal{C}_{n-1}(V)$ et $M \in \mathcal{C}_2(\mathcal{L}(V))$, alors*

$$\hat{\delta}(ML) = (\hat{\delta}M)L - M(\delta L). \quad (6.18)$$

La relation de Chasles usuelle admet dans ce contexte l'équivalent :

Proposition 6.2.9. *Soit x un processus différentiable. Si $y_{ts} := \int_s^t S_{tu} dx_u f_u$, alors $(\hat{\delta}y)_{tus} = 0$ pour tous $s \leq u \leq t$.*

Comme nous l'annonçons en introduction, il convient ensuite d'adapter le notion de régularité höldérienne à ce formalisme : on définira ainsi, pour tous $\alpha \in [0, 1/2)$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \in (0, 1)$, l'espace

$$\hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_{\alpha,p}) := \left\{ y \in \mathcal{C}_1(I; \mathcal{B}_{\alpha,p}) : \sup_{s < t \in I} \frac{\mathcal{N}[(\hat{\delta}y)_{ts}; \mathcal{B}_{\alpha,p}]}{|t-s|^\kappa} < \infty \right\}. \quad (6.19)$$

On reprendra par ailleurs les notations de la sous-section 2.1.2, à savoir $\mathcal{C}_i^\kappa(I; V)$, $i = 1, 2, 3$, $\kappa > 0$, $V = \mathcal{B}_{\alpha,p}$.

Enonçons enfin le résultat principal de cette sous-section, qui va permettre d'envisager l'inversion de l'incrément modifié $\hat{\delta}|_{\mathcal{C}_2(I; \mathcal{B}_{\alpha,p})}$. Il s'agit en cela de l'analogue du théorème 2.1.1 ou du théorème 5.2.9.

Théorème 6.2.2. *On fixe deux paramètres $\kappa \geq 0$ et $\mu > 1$. Pour tout $h \in \mathcal{C}_3^\mu(I; \mathcal{B}_{\kappa,p}) \cap \text{Ker } \hat{\delta}|_{\mathcal{C}_3(\mathcal{B}_{\kappa,p})}$, il existe un unique élément*

$$\hat{\Lambda}h \in \cap_{\alpha \in [0, \mu)} \mathcal{C}_2^{\mu-\alpha}(I; \mathcal{B}_{\kappa+\alpha,p})$$

tel que $\hat{\delta}(\hat{\Lambda}h) = h$. $\hat{\Lambda}h$ satisfait en outre la propriété de contraction : pour tout $\alpha \in [0, \mu)$,

$$\mathcal{N}[\hat{\Lambda}h; \mathcal{C}_2^{\mu-\alpha}(I; \mathcal{B}_{\kappa+\alpha,p})] \leq c_{\alpha,\mu,T} \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})]. \quad (6.20)$$

Remarque 6.2.10. Notez en particulier l'effet de régularisation spatiale (potentiel) de $\hat{\Lambda}$: l'opérateur permet plus exactement de convertir un surplus de régularité temporelle en un gain de régularité spatiale. Ce phénomène sera exploité dans les sections 6.3, 6.4 et 6.7.

6.3 Le cas Young

Comme dans les chapitres précédents, l'appellation "cas Young" renvoie au fait que seul des développements d'ordre un de l'intégrant seront utilisés dans cette section. Bien que ce type de considérations ait déjà été analysé de façon approfondie dans [50] sous des conditions de régularité spatiale plus générales sur le bruit (pour $n = 1$), nous avons estimé qu'il était souhaitable d'illustrer, dans ce contexte simple, la méthode de *dissection* de l'intégrale que nous souhaitons mettre en œuvre à partir des outils de la section 6.2. Nous verrons que le résultat du théorème 6.3.1 peut être appliqué à un processus x γ -höldérien, pour tout $\gamma > 1/2$, ce qui constitue d'ailleurs une amélioration par rapport à [51], où la condition $\gamma > 5/6$ devait être supposée.

On fixera, dans toute cette section, un paramètre $\gamma \in (1/2, 1)$, qui représente donc (moralemment) la régularité de x .

6.3.1 Interprétation de l'intégrale

L'objectif consiste à transposer le raisonnement de la sous-section 2.2.1 pour donner sens à l'intégrale modifiée $\int_s^t S_{tu} dx_u^i z_u^i$, où z est ici un processus à valeurs dans $(\mathcal{B}_{\alpha,p})^m$, pour un certain coefficient $\alpha \in [0, 1/2)$. On supposera ainsi, dans un premier temps, les processus x et z réguliers, et l'on cherchera un développement d'ordre un de cette dernière intégrale (interprétée au sens de Riemann) à l'aide de l'opérateur $\hat{\Lambda}$. La formule obtenue nous permettra dans un second temps d'étendre la définition de $\int_s^t S_{tu} dx_u z_u$ à des processus höldériens.

Supposons donc x et z réguliers en temps (lipschitziens ou même différentiables) et observons la décomposition

$$\int_s^t S_{tu} dx_u z_u = \left(\int_s^t S_{tu} dx_u \right) z_s + \int_s^t S_{tu} dx_u (\delta z)_{us}. \quad (6.21)$$

En posant $r_{ts} := \int_s^t S_{tv} dx_v (\delta z)_{vs}$, on a

$$(\hat{\delta}r)_{tus} = \int_s^t S_{tv} dx_v (\delta z)_{vs} - \int_u^t S_{tv} dx_v (\delta z)_{vu} - S_{tu} \int_s^u S_{uv} dx_v (\delta z)_{vs},$$

ce qui, en utilisant la relation $S_{tu}S_{uv} = S_{tv}$, se résume à

$$(\hat{\delta}r)_{tus} = \left(\int_u^t S_{tv} dx_v \right) (\delta z)_{us}. \quad (6.22)$$

Cette première étape élémentaire fait d'ores et déjà émerger l'objet qui fera office d'incrément fondamental d'ordre un associé à l'équation de la chaleur (rôle que jouait \mathbf{x}^1 pour le système standard), à savoir

$$X_{ts}^{x,i} := \int_s^t S_{tv} dx_v^i.$$

Nous sommes par ailleurs en mesure d'inverser $\hat{\delta}$ dans (6.22) grâce au théorème 6.2.2. En effet, puisque l'on a supposé x et z réguliers, il est clair que

$$X^x(\delta z) \in \mathcal{C}_3^2(\mathcal{B}_{\alpha,p}).$$

On déduit de cette façon la décomposition

$$\int_s^t S_{tu} dx_u z_u = X_{ts}^{x,i} z_s^i + \hat{\Lambda}_{ts}(X^{x,i} \delta z^i). \quad (6.23)$$

Rétrospectivement, interrogeons-nous sur les conditions à réunir pour que cette dernière décomposition conserve un sens avec des processus moins réguliers :

- *D'un point de vue analytique.* L'hypothèse de régularité du théorème 6.2.2 impose une condition du type :

$$X^{x,i} \delta z^i \in \mathcal{C}_3^\mu(\mathcal{B}_{\alpha',p}) \quad \text{avec } \alpha' \in [0, 1/2) \text{ et } \mu > 1.$$

Nous serons ainsi amenés à supposer z κ -höldérien (au sens classique) en tant que processus à valeurs dans un espace $\mathcal{B}_{\alpha',p}$ à préciser, autrement dit $z^i \in \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_{\alpha',p})$, et $X^{x,i} \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha',p}, \mathcal{B}_{\alpha',p}))$, avec $\kappa + \gamma > 1$. Notez que ce paramètre α' peut être inférieur à α (on rappelle que l'on a supposé que le processus z évoluait dans $\mathcal{B}_{\alpha,p}$) : la propriété de régularisation spatiale de $\hat{\Lambda}$ (voir la remarque 6.2.10) permettra ensuite de ramener $\hat{\Lambda}(X^{x,i} \delta z^i)$ dans l'espace initial $\mathcal{B}_{\alpha,p}$.

- *D'un point de vue algébrique.* On sait que $\hat{\Lambda}$ est défini sur les espaces $\mathcal{C}_3^\mu(\mathcal{B}_{\alpha,p}) \cap \text{Ker } \hat{\delta}$, ce qui nous contraint à supposer $\hat{\delta}(X^{x,i} \delta z^i) = 0$. En utilisant (6.18), cette relation est en particulier satisfaite si $\hat{\delta} X^{x,i} = 0$.

Rassemblons ces deux conditions sous l'hypothèse abstraite :

Hypothèse 9. Soit $x \in \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)$, $\gamma > 1/2$. On admettra qu'il existe une suite x^ε de processus différentiables vérifiant

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

telle que la suite des processus

$$X_{ts}^{x^\varepsilon, i} := \int_s^t S_{t-u} dx_u^{\varepsilon, i}$$

converge vers un élément $X^{x,i}$ relativement à la topologie de l'espace $\mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,p}, \mathcal{B}_{\alpha,p}))$, et ce pour tout $\alpha \in [0, 1/2)$ tel que $2\alpha p > n$. En particulier,

$$X^{x,i} \in \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,p}, \mathcal{B}_{\alpha,p})) \quad \text{et} \quad \hat{\delta} X^{x,i} = 0. \quad (6.24)$$

Lorsque x est différentiable, on choisit systématiquement $x^\varepsilon := x$.

Remarque 6.3.1. La condition $2\alpha p > n$ est en fait superflue dans cette dernière hypothèse. Nous ne l'avons ajoutée qu'en vue de fusionner, dans la section 6.6, l'hypothèse 9 avec l'hypothèse 10 plus générale de la section 6.4.

Nous sommes alors en mesure de prolonger la décomposition (6.23) à un intégrant z irrégulier :

Proposition 6.3.2. *On fixe un intervalle $I = [l_1, l_2]$ de $[0, T]$. Sous l'hypothèse (9), on définit, pour tout processus z tel que $z^i \in \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa,p}) \cap \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_p)$, $i = 1, \dots, m$, avec $\kappa \leq \gamma$ et $\kappa + \gamma > 1$, l'intégrale*

$$\mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i z^i) := X_{ts}^{x,i} z_s^i + \hat{\Lambda}_{ts}(X^{x,i} \delta z^i), \quad s < t \in I. \quad (6.25)$$

Alors :

- $\mathcal{J}(\hat{d}x^i z^i)$ est bien défini en tant qu'élément de $\mathcal{C}_2^\gamma(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})$, et coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{t-u} dx_u^i z_u^i$ lorsque x est différentiable.
- Pour tout $h \in \mathcal{B}_{\kappa,p}$, il existe un unique processus $\hat{z} \in \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})$ tel que $z_{l_1} = h$ et $\hat{\delta}\hat{z} = \mathcal{J}(\hat{d}x^i z^i)$.
- On dispose de l'estimation

$$\mathcal{N}[\hat{z}; \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq c_x \{ \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})] + \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_p)] \}, \quad (6.26)$$

avec

$$c_x \leq c \{ \mathcal{N}[X^x; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p))] + \mathcal{N}[X^x; \mathcal{C}_2^\gamma([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))] \} \quad (6.27)$$

Démonstration. La validité de la définition de $\mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i z^i)$ est une conséquence immédiate de l'hypothèse 9, tandis que la relation de Chasles $\hat{\delta}\mathcal{J}(\hat{d}x^i z^i) = 0$, qui vient justifier l'existence de \hat{z} , est facilement vérifiable à partir de (6.18).

En ce qui concerne le troisième point, il suffit d'abord d'observer que

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\mathcal{J}(\hat{d}x^i z^i); \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \\ & \leq \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))] \mathcal{N}[z^i; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})] + \mathcal{N}[\hat{\Lambda}(X^{x,i} \delta z^i); \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{B}_{\kappa,p})], \end{aligned}$$

puis, grâce à la propriété de contraction (6.20) de $\hat{\Lambda}$,

$$\mathcal{N}[\hat{\Lambda}(X^{x,i} \delta z^i); \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq c \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p))] \mathcal{N}[z^i; \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)],$$

ce qui achève la preuve de (6.26). □

Remarque 6.3.3. Si, dans cette dernière proposition, nous nous sommes permis une telle hypothèse de régularité sur l'intégrant z ($z \in \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa,p}) \cap \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)$), c'est aussi en anticipant sur le résultat de la proposition 6.3.9, que nous détaillerons dans un instant.

Remarque 6.3.4. On peut s'étonner de voir apparaître une décomposition de l'intégrale qui fasse intervenir l'incrément standard δ et non l'incrément modifié $\hat{\delta}$, a priori mieux adapté à la formulation générale du problème. De prime abord, il semble peut-être plus approprié de remplacer l'amorce (6.21) par

$$\int_s^t S_{tu} dx_u^i z_u^i = \left(\int_s^t S_{tu} dx_u^i S_{us} \right) z_s + \int_s^t S_{tu} dx_u (\hat{\delta}z)_{us}. \quad (6.28)$$

L'opérateur fondamental d'ordre un deviendrait alors $\tilde{X}_{ts}^{x,i} := \int_s^t S_{tu} dx_u^i S_{us} = S_{ts}(\delta x^i)_{ts}$. Toutefois :

- Il faut garder à l'esprit la forme particulière de l'intégrant du système (6.5), à savoir $z^i = f_i(y)$, pour une certaine fonction f_i non linéaire. Or, comme nous l'avons évoqué au point (c) de l'introduction, le contrôle de la régularité höldérienne au sens de $\hat{\delta}$ de $f_i(y)$ passe de toute façon par l'estimation de la régularité höldérienne au sens de δ . Dans ce contexte, les décompositions (6.21) et (6.28) donnent lieu à des considérations et des calculs similaires.
- La définition de l'opérateur \tilde{X}^x ci-dessus, certes plus explicite, est peut-être moins naturelle d'un point de vue algébrique : la relation $\hat{\delta}X^x = 0$ n'est en effet pas vérifiée par \tilde{X}^x . Nous verrons dans la section 6.6 qu'il est de toute façon très simple de définir X^x à partir d'un processus x höldérien.

6.3.2 Résolution du système différentiel

En utilisant le formalisme que nous venons d'introduire, nous allons montrer l'existence et l'unicité d'une solution globale pour l'équation (6.5). Présentons tout d'abord avec davantage de précisions la classe de champ de vecteurs sur laquelle nous nous concentrerons.

Définition 6.3.5. *Pour tout $k \geq 0$, on définit l'espace $\mathcal{X}_k = \mathcal{X}_k(p, n)$ comme l'ensemble des applications $f : \mathcal{B}_p \rightarrow \mathcal{B}_p$ de la forme $f(y)(\xi) = \sigma(\xi, y(\xi))$, où $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application telle que :*

1. σ est à support uniformément compact vis-à-vis de la première variable, c'est-à-dire $\xi \mapsto \sigma(\xi, y)$ est nulle en dehors d'une boule $B_{\mathbb{R}^n}(0, M)$, indépendamment de $y \in \mathbb{R}$.
2. σ est k -fois différentiable et

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}} \left\{ \max_{l=0, \dots, k} |\partial_y^l \sigma(\xi, y)| + \max_{l=0, \dots, k-1} |\partial_\xi \partial_y^l \sigma(\xi, y)| \right\} < \infty.$$

Remarque 6.3.6. Un champ de vecteurs f donné par $f(y)(\xi) := \sigma(\xi) \tilde{f}(y(\xi))$, où σ est une fonction différentiable de \mathbb{R}^n à support compact et $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{k, \mathbf{b}}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, correspond par exemple à un élément de \mathcal{X}_k .

Remarque 6.3.7. La condition 1 vise en fait à garantir que si $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borné, alors le champ de vecteurs f associé est uniformément borné dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Pour s'affranchir de cette condition, il pourrait être intéressant d'envisager travailler avec des espaces $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$, où μ est une mesure finie sur \mathbb{R}^n (c'est par exemple ce qui est entrepris dans [89] pour le mB standard). Il n'est pas évident cependant que les différentes propriétés recensées dans la sous-section 6.2.1 puissent trouver leurs équivalents dans ce contexte.

Dans le chapitre suivant, l'équation sera analysée sur un espace compact, et l'on pourra alors véritablement prendre en considération (dans certains cas de figure du moins) les opérateurs de Nemytskii $f(y)(\xi) := \tilde{f}(y(\xi))$.

Evidemment, si $f \in \mathcal{X}_0$, alors $\|f(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c_f$ pour toute fonction φ (mesurable) de \mathbb{R}^n . Cette propriété n'est plus valable pour les espaces $\mathcal{B}_{\alpha, p}$ dès que $\alpha > 0$. Grâce à la proposition 6.2.4, on dispose dans ce cas du résultat suivant (qui anticipe par ailleurs sur l'argument de contraction de la preuve du théorème 6.3.1) :

Proposition 6.3.8. *Soit $\alpha \in [0, 1/2)$. Si $f \in \mathcal{X}_1$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_\alpha$, $f(\varphi) \in \mathcal{B}_{\alpha, p}$ et*

$$\|f(\varphi)\|_{\mathcal{B}_{\alpha, p}} \leq c_f \{1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\alpha, p}}\}. \quad (6.29)$$

En outre, si $f \in \mathcal{X}_2$ et $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{B}_{\alpha, p} \cap \mathcal{B}_\infty$,

$$\|f(\varphi) - f(\tilde{\varphi})\|_{\mathcal{B}_{\alpha, p}} \leq c_f \{1 + \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\alpha, p}} + \|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{B}_{\alpha, p}}\} \{\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{B}_{\alpha, p}} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{B}_\infty}\}. \quad (6.30)$$

Démonstration. Dans les deux cas, on utilise la norme équivalente (6.16). Pour (6.29), il suffit ensuite d'observer que

$$\begin{aligned} & |\sigma(\xi + r\eta, \varphi(\xi + r\eta)) - \sigma(\xi, \varphi(\xi))| \\ & \leq |\sigma(\xi + r\eta, \varphi(\xi + r\eta)) - \sigma(\xi, \varphi(\xi + \eta))| + |\sigma(\xi, \varphi(\xi + r\eta)) - \sigma(\xi, \varphi(\xi))| \\ & \leq c_f \{|\xi - \eta| + |\varphi(\xi + r\eta) - \varphi(\xi)|\}. \end{aligned}$$

Quant à (6.30), on part de la décomposition $f(\varphi)(\xi + r\eta) - f(\tilde{\varphi})(\xi + r\eta) - f(\varphi)(\xi) + f(\tilde{\varphi})(\xi) = A + B + C$, avec

$$\begin{aligned} A := & \int_0^1 dr' \\ & [\partial_y \sigma(\xi + r\eta, (1 - r')\varphi(\xi + r\eta) + r'\varphi(\xi + r\eta)) - \partial_y \sigma(\xi, (1 - r')\varphi(\xi + r\eta) + r'\varphi(\xi + r\eta))] \\ & [\varphi(\xi + r\eta) - \tilde{\varphi}(\xi + r\eta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B := & \int_0^1 dr' [\partial_y \sigma(\xi, (1 - r')\varphi(\xi + r\eta) + r'\varphi(\xi + r\eta)) - \partial_y \sigma(\xi, (1 - r')\varphi(\xi) + r'\varphi(\xi))] \\ & [\varphi(\xi + r\eta) - \tilde{\varphi}(\xi + r\eta)] \end{aligned}$$

$$C := \int_0^1 dr' \partial_y \sigma(\xi, r'\varphi(\xi) + (1 - r')\tilde{\varphi}(\xi)) \cdot [\varphi(\xi + r\eta) - \tilde{\varphi}(\xi + r\eta) - \varphi(\xi) + \tilde{\varphi}(\xi)].$$

Il est alors clair que $|A| \leq c_\sigma |r\eta| \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{B}_\infty}$,

$$|B| \leq c_\sigma \{|\varphi(\xi + r\eta) - \varphi(\xi)| + |\tilde{\varphi}(\xi + r\eta) - \tilde{\varphi}(\xi)|\} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathcal{B}_\infty},$$

$$|C| \leq c_\sigma |\varphi(\xi + r\eta) - \tilde{\varphi}(\xi + r\eta) - \varphi(\xi) + \tilde{\varphi}(\xi)|,$$

ce qui conduit aisément à (6.30). \square

Justifions à présent le fait que la proposition 6.3.2, qui donne sens à l'intégrale rugueuse, peut être appliquée aux intégrands du système :

Proposition 6.3.9. *Soit I un intervalle de $[0, T]$, $\kappa \in [0, 1/2)$. Si $y \in \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})$ et $f \in \mathcal{X}_1$, alors $f(y) \in \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa,p}) \cap \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_p)$ et*

$$\mathcal{N}[f(y); \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})] + \mathcal{N}[f(y); \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_p)] \leq c_f \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})] \right\}, \quad (6.31)$$

où l'on a noté, conformément aux chapitres précédents,

$$\mathcal{N}[:, \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})] := \mathcal{N}[:, \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})] + \mathcal{N}[:, \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})].$$

Démonstration. L'estimation de $\mathcal{N}[f(y); \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa,p})]$ est une conséquence évidente de (6.29), tandis que pour majorer $\mathcal{N}[f(y); \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_p)]$, il suffit d'écrire, pour tous $s < t \in I$,

$$\|\delta(f(y))_{ts}\|_{\mathcal{B}_p} \leq c_f \|(\delta y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_p} \leq c_f \left\{ \|(\hat{\delta} y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_p} + \|a_{ts} y_s\|_{\mathcal{B}_p} \right\},$$

puis d'appliquer la propriété (6.11). \square

Avec cette proposition, le système (6.5) fait parfaitement sens et l'on est en droit d'envisager sa résolution :

Théorème 6.3.1. *On suppose l'hypothèse 9 vérifiée, et l'on considère un champ de vecteurs $f = (f_1, \dots, f_m)$ constitué d'éléments de \mathcal{X}_2 . Pour tous $\kappa < 1/2$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\gamma + \kappa > 1$ et $2\kappa p > n$, le système*

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i f_i(y)) \quad , \quad y_0 = \psi \in \mathcal{B}_{\kappa,p}, \quad (6.32)$$

interprété grâce aux propositions 6.3.2 et 6.3.9, admet une unique solution globale y dans $\hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T], \mathcal{B}_{\kappa,p})$. En outre,

$$\mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T]; \mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq F_\kappa(\|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}}, \mathcal{N}[X^x; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p))], \mathcal{N}[X^x; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))]), \quad (6.33)$$

pour une certaine fonction $F_\kappa : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante en ses trois arguments, et l'application d'Itô $(\psi, X^x) \mapsto y$ associée au système est lipschitzienne.

Remarque 6.3.10. Dans ce dernier énoncé, l'opérateur $X^{x,i}$ est considéré en tant qu'élément de $\mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)) \cap \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))$. La régularité de l'application d'Itô par rapport à X^x est donc relative à la norme

$$\mathcal{N}[:, \mathcal{C}\mathcal{L}^{\kappa,\gamma,p}] := \mathcal{N}[:, \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p))] + \mathcal{N}[:, \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))].$$

Remarque 6.3.11. Il peut être intéressant d'observer que la solution y donnée par le théorème est en fait un élément de $\mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathcal{B}_{\kappa,p})$, comme le montre l'application de (6.26) et (6.31) à y . Rien ne nous indique en revanche que cette solution évolue dans $\mathcal{B}_{\gamma,p}$, et l'on ne peut ainsi s'affranchir du paramètre supplémentaire κ (par rapport à l'énoncé du théorème 5.3.2 par exemple).

Démonstration. C'est le même argument général que dans la preuve du théorème 5.3.2. Nous n'établirons que l'existence d'une solution locale, et renvoyons le lecteur à cette dernière preuve pour les détails relatifs à la procédure de prolongement.

On considère un intervalle $I = [0, T_*]$ avec T_* un temps amené à évoluer au cours de la preuve, et l'application $\Gamma : \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I, \mathcal{B}_{\kappa,p}) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})$ définie par $\Gamma(y)_0 = \psi$ et $(\hat{\delta}\Gamma(y))_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i f_i(y))$.

Invariance d'une boule. Soit $y \in \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})$ tel que $y_0 = \psi$, et $z := \Gamma(y)$. En associant (6.26) et (6.31), on obtient

$$\mathcal{N}[z; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq c_{x,f} |I|^{\gamma-\kappa} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})] \right\}.$$

Par ailleurs, $z_s = (\hat{\delta}z)_{s0} + S_s \psi$, et donc, puisque S_s est un opérateur de contraction sur $\mathcal{B}_{\kappa,p}$,

$$\mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq |I|^\kappa \mathcal{N}[z; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})] + \|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}},$$

d'où

$$\mathcal{N}[z; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq \|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} + c_x |I|^{\gamma-\kappa} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})] \right\}.$$

On choisit alors T_1 tel que $c_x T_1^{\gamma-\kappa} \leq \frac{1}{2}$ pour s'assurer de l'invariance par Γ des boules

$$B_{T_0,\psi}^R = \{y \in \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_{\kappa,p}) : y_0 = \psi, \quad \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq R\},$$

pour tout $T_0 \leq T_1$, avec (par exemple) $R = 1 + 2\|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}}$.

Propriété de contraction. Soit $y, \tilde{y} \in \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(I, \mathcal{B}_{\kappa,p})$ tels que $y_0 = \tilde{y}_0 = \psi$, et $z := \Gamma(y)$, $\tilde{z} := \Gamma(\tilde{y})$. Par (6.26), on sait d'abord que

$$\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq c_x |I|^{\gamma-\kappa} \{ \mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})] + \mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)] \}. \quad (6.34)$$

Pour estimer $\mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)]$, on s'appuie sur la décomposition

$$\begin{aligned} & \sigma_i(\xi, y_t(\xi)) - \sigma_i(\xi, \tilde{y}_t(\xi)) - \sigma_i(\xi, y_s(\xi)) + \sigma_i(\xi, \tilde{y}_s(\xi)) \\ &= \delta(y - \tilde{y})_{ts}(\xi) \int_0^1 dr \partial_y \sigma_i(\xi, y_s(\xi) + r(\delta y)_{ts}(\xi)) \\ &+ (\delta \tilde{y})_{ts}(\xi) \int_0^1 dr \{ \partial_y \sigma_i(\xi, y_s(\xi) + r(\delta y)_{ts}(\xi)) - \partial_y \sigma_i(\xi, \tilde{y}_s(\xi) + r(\delta \tilde{y})_{ts}(\xi)) \}, \end{aligned}$$

qui conduit aisément à

$$\mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)] \leq c_f \left\{ \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_{\kappa,p})] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\infty)] \right\}.$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse $2\kappa p > n$, qui permet de faire appel à l'inclusion de Sobolev continue $\mathcal{B}_{\kappa,p} \subset \mathcal{B}_\infty$ pour affirmer $\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\infty)] \leq \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})]$ et par conséquent

$$\mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)] \leq c \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \left\{ 1 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \right\}.$$

Grâce à cette inclusion de Sobolev, on déduit également de (6.30) l'estimation

$$\mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq c \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_{\kappa,p})] + \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \right\},$$

En revenant à (6.34), ces estimations fournissent un contrôle de $\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(\mathcal{B}_{\kappa,p})]$ en termes de y et \tilde{y} . Par ailleurs, comme $z_0 = \tilde{z}_0 = \psi$,

$$\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq |I|^\kappa \mathcal{N}[z - \tilde{z}; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(\mathcal{B}_{\kappa,p})].$$

A présent, si y, \tilde{y} appartiennent tous deux à l'une des boules invariantes $B_{T_0, \psi}^R$, avec $T_0 \leq T_1$, les résultats ci-dessus aboutissent à

$$\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq c_x T_0^{\gamma-\kappa} \{1 + 2R\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_{\kappa,p})].$$

Il suffit finalement de choisir $T_0 \leq T_1$ tel que $c_x T_0^{\gamma-\kappa} \{1 + 2R\} \leq \frac{1}{2}$ afin d'obtenir la propriété de contraction escomptée pour l'application $\Gamma : B_{T_0, \psi}^R \rightarrow B_{T_0, \psi}^R$, et partant l'existence d'un point fixe. \square

6.4 Le cas rugueux

L'objectif de cette section consiste à franchir l'étape suivante dans la méthodologie rough paths : Nous souhaiterions ainsi mettre en œuvre des développements plus sophistiqués de l'intégrale pour être en mesure de traiter le bruit généré par un processus γ -höldérien avec $\gamma \in (1/3, 1/2]$.

6.4.1 Considérations heuristiques

La stratégie visant à fournir une interprétation (raisonnable) de l'intégrale $\int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u)$ est cette fois inspirée par le raisonnement de la sous-section 2.2.2. Dans un premier temps, on suppose ainsi le processus x différentiable pour enclencher la procédure usuelle, marquée par deux temps :

- Une première étape consiste à identifier la structure de l'espace \mathcal{Q} des processus contrôlés susceptible d'accueillir la solution du système.
- On décompose ensuite $\int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u)$ en tant qu'élément de \mathcal{Q} , et ce lorsque y appartient lui-même à \mathcal{Q} , jusqu'à l'obtention d'une expression qui puisse être étendue à un processus x moins régulier.

Ce raisonnement heuristique aura essentiellement pour but l'appréhension des structures algébriques en jeu ici. Les détails relatifs aux conditions analytiques ne seront quant à eux examinés qu'a posteriori.

Remarque 6.4.1. Dans un souci de concision, et contrairement à la section ou au chapitre précédent, nous ne chercherons pas à déterminer explicitement la structure de l'espace "intermédiaire" dans lequel évolue les champs $f_i(y)$. Nous passerons ainsi plus directement à la décomposition de $\int_s^t S_{t-u} dx_u^i f_i(y_u)$.

On rappelle que le bruit X est donné par la relation

$$X_t(\varphi) = \sum_{i=1}^m x_t^i f_i(\varphi), \quad \text{avec} \quad f_i(\varphi)(\xi) = \sigma_i(\xi, \varphi(\xi)).$$

On suppose dès à présent que les applications f_i sont ici des éléments de l'espace \mathcal{X}_2 (voir la définition 6.3.5).

Etape 1 : Identification des processus contrôlés. Une première décomposition élémentaire consiste à écrire

$$\int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u) = \left(\int_s^t S_{tu} dx_u^i \right) f_i(y_s) + \int_s^t S_{tu} dx_u^i \delta(f_i(y))_{us}. \quad (6.35)$$

A partir de cette décomposition, et en ayant à l'esprit les considérations de la sous-section 2.2.2, il est naturel d'imaginer que la solution (hypothétique) y de (6.5) est amenée à évoluer dans un espace structuré par la relation

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \left(\int_s^t S_{tu} dx_u^i \right) y_s^{x,i} + y_{ts}^\sharp,$$

où le terme y^\sharp admet une régularité höldérienne deux fois supérieure à celle de y . Pour la solution elle-même, on aurait $y_s^{x,i} = f_i(y_s)$, $y_{ts}^\sharp = \int_s^t S_{tu} dx_u^i \delta(f_i(y))_{us}$. D'où la structure algébrique potentielle de processus contrôlés

$$\mathcal{Q} = \{y : \hat{\delta}y = X_{ts}^{x,i} y_s^{x,i} + y_{ts}^\sharp\}, \quad \text{avec} \quad X_{ts}^{x,i} = \int_s^t S_{tu} dx_u^i. \quad (6.36)$$

Souvenons-nous que ce dernier opérateur satisfait en particulier la relation

$$\hat{\delta}X^{x,i} = 0. \quad (6.37)$$

Il se révélera par ailleurs utile, dans ce qui suit, d'écrire $X^{x,i}$ comme

$$X^{x,i} = X^{ax,i} + \delta x^i, \quad \text{avec} \quad X_{ts}^{ax,i} = \int_s^t a_{tv} dx_v^i. \quad (6.38)$$

Moralement, $X^{ax,i}$ admet une régularité höldérienne plus élevée que x si l'on met à contribution la propriété (6.11) du semigroupe. Cette observation nous permettra d'incorporer les expressions qui mettent en scène X^{xa} au sein du terme résiduel. Nous reviendrons sur l'utilité de la décomposition (triviale) (6.38) à travers la remarque 6.4.4.

Etape 2 : Décomposition de $\int_s^t S_{tu} dx_u f_i(y_u)$ lorsque $y \in \mathcal{Q}$. En revenant à l'expression (6.35), c'est désormais l'intégrale $\int_s^t S_{tu} dx_u \delta(f_i(y))_{us}$ qu'il s'agit de disséquer lorsque $y \in \mathcal{Q}$, autrement dit lorsque les incréments modifiés de y se décomposent en $(\hat{\delta}y)_{ts} = X_{ts}^{x,i} y_s^{x,i} + y_{ts}^\sharp$. A cette fin, introduisons une nouvelle notation, récurrente dans les calculs à venir :

Notation 6.4.2. *Pour tout $f \in \mathcal{X}_2$, on pose*

$$[f'(\varphi)](\xi) := \partial_y \sigma(\xi, \varphi(\xi))$$

La fonction f' est ainsi vue comme une application de \mathcal{B}_p dans \mathcal{B}_p , pour tout $p \geq 1$.

Avec cette convention, observons le développement

$$\begin{aligned} \delta(f_i(y))_{ts} &= (\delta y)_{ts} \cdot f'_i(y_s) + \int_0^1 dr [f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(y_s)] \cdot (\delta y)_{ts} \\ &= (a_{ts} y_s) \cdot f'_i(y_s) + (\hat{\delta}y)_{ts} \cdot f'_i(y_s) + f_i(y)_{ts}^{\sharp,1} \\ &= (a_{ts} y_s) \cdot f'_i(y_s) + (X_{ts}^{x,j} y_s^{x,j}) \cdot f'_i(y_s) + f_i(y)_{ts}^{\sharp,1} + f_i(y)_{ts}^{\sharp,2} \\ &= (a_{ts} y_s) \cdot f'_i(y_s) + (\delta x^j)_{ts} \cdot y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s) + f_i(y)_{ts}^{\sharp,1} + f_i(y)_{ts}^{\sharp,2} + f_i(y)_{ts}^{\sharp,3}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

où l'on a successivement introduit les notations

$$f_i(y)_{ts}^{\sharp,1} := \int_0^1 dr [f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(y_s)] \cdot (\delta y)_{ts} \quad , \quad f_i(y)_{ts}^{\sharp,2} := y_{ts}^\sharp \cdot f'_i(y_s), \quad (6.40)$$

$$f_i(y)_{ts}^{\sharp,3} := (X_{ts}^{ax,j} y_s^{x,j}) \cdot f'_i(y_s). \quad (6.41)$$

On rappelle par ailleurs que la notation $\varphi \cdot \psi$ fait référence au produit point par point de φ et ψ . Reprécisons ce type de convention :

Notation 6.4.3. *Soit φ, ψ deux éléments de \mathcal{B}_p . Alors $\varphi \cdot \psi$ correspond à l'élément de $\mathcal{B}_{p/2}$ défini ponctuellement par $[\varphi \cdot \psi](\xi) := \varphi(\xi) \psi(\xi)$. Si M, N sont deux éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{B}_p; \mathcal{B}_p)$, on définit ensuite la forme bilinéaire $M \otimes N$ par :*

$$M \otimes N : \mathcal{B}_p \times \mathcal{B}_p \rightarrow \mathcal{B}_{p/2}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto (M \otimes N)(\varphi, \psi) := M(\varphi) \cdot N(\psi).$$

On pose par ailleurs, dans un contexte plus général, $(M \times N)(\varphi, \psi) := (M\varphi, N\psi)$.

Munis de ces notations, la décomposition algébrique (6.39) de $\delta f_i(y)$ s'écrit plus distinctement :

$$\delta(f_i(y))_{ts} = (a_{ts} \otimes \text{Id})(y, f'_i(y))_s + (\delta x^j)_{ts} \cdot y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s) + f_i(y)_{ts}^\sharp. \quad (6.42)$$

Si l'on analyse la régularité des termes de cette expression, il paraît raisonnable de considérer les deux premiers termes comme des éléments d'ordre un, et $f_i(y)^\sharp$ comme un élément d'ordre deux. Nuançons toutefois cette intuition à travers les deux commentaires suivants :

- (i) Pour affirmer que $(a_{ts} \otimes \text{Id})(y, f'_i(y))_s$ admet une régularité höldérienne strictement positive, autrement dit pour récupérer des incréments $|t - s|^\alpha$ de l'opérateur a_{ts} , on doit utiliser la propriété (6.11) du semigroupe. Ceci signifie en particulier qu'un changement d'espace doit s'opérer : si $y_s \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$, alors $(a_{ts} \otimes \text{Id})(y, f'_i(y))_s$ devra être majoré en tant qu'élément de \mathcal{B}_p . Cette remarque est également valable pour $f_i(y)_{ts}^{\sharp,3} = (X_{ts}^{ax,j} y_s^{x,j}) \cdot f'_i(y_s)$.

(ii) Le terme $f_i(y)^{\sharp,1}$ est perçu comme un élément d'ordre deux dans la mesure où il peut facilement être majoré (point par point) par $c_f |(\delta y)_{ts}|^2$. Toutefois, en ce qui concerne la régularité spatiale, ceci suppose que $f_i(y)^{\sharp,1}$ soit vu comme un élément de $\mathcal{B}_{p/2}$, si $y \in \mathcal{B}_p$. Pour revenir à l'espace courant \mathcal{B}_p , nous prendrons appui sur la propriété de régularisation (6.14) du semigroupe par le biais de l'opérateur X^x (voir l'hypothèse (6.50)).

Injectons à présent la décomposition (6.42) dans (6.35) pour obtenir

$$\int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u) = X_{ts}^{x,i} f_i(y)_s + X_{ts}^{xa,i}(y, f'_i(y))_s + X_{ts}^{xx,ij}(y^{x,j} \cdot f'_i(y))_s + \int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y)_{us}^{\sharp}, \quad (6.43)$$

où l'on a introduit les opérateurs d'ordre deux (relativement à des espaces fonctionnels à préciser) :

$$X_{ts}^{xa,i} := \int_s^t S_{tu} dx_u^i (a_{us} \otimes \text{Id}) \quad \text{et} \quad X_{ts}^{xx,ij} := \int_s^t S_{tu} dx_u^i (\delta x^j)_{us}. \quad (6.44)$$

L'opérateur $X^{xa,i}$ est par exemple destiné à agir sur des couples (φ, ψ) d'un produit d'espaces de Sobolev suivant la formule

$$X_{ts}^{xa,i}(\varphi, \psi) = \int_s^t S_{tu} dx_u^i [a_{us}(\varphi) \cdot \psi]$$

Puisque nous avons supposé que $f_i(y)^{\sharp}$ admettait une régularité "double", le terme $r_{ts} := \int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u)^{\sharp}$ est ensuite légitimement considéré comme un terme d'ordre trois, dont la régularité est strictement supérieure à 1 dès que la régularité de x est supérieure à $1/3$. Nous sommes ainsi dans la même position que celle induite par (6.21), et comme dans cette dernière situation, r va être interprété grâce à $\hat{\Lambda}$.

Afin de calculer $\hat{\delta}r$, réécrivons r à partir de (6.43) :

$$r_{ts} = \int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u) - X_{ts}^{x,i} f_i(y_s) - X_{ts}^{xa,i}(y, f'_i(y))_s - X_{ts}^{xx,ij}(y^{x,j} \cdot f'_i(y))_s.$$

Par conséquent, à l'aide de la formule algébrique (6.18), on obtient

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}r)_{tus} &= X_{tu}^{x,i} \delta(f_i(y))_{us} - (\hat{\delta}X^{xa,i})_{tus}(y, f'_i(y))_s + X_{tu}^{xa,i} \delta(y, f'_i(y))_{us} \\ &\quad - (\hat{\delta}X^{xx,ij})_{tus}(y^{x,j} \cdot f'_i(y))_s + X_{tu}^{xx,ij} \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y))_{us}. \end{aligned}$$

En revenant à la définition même de $X^{xa,i}$ et $X^{xx,ij}$, il est facile de montrer que les deux relations algébriques suivantes sont vérifiées :

$$(\hat{\delta}X^{xa,i})_{tus} = X_{tu}^{xa,i}(a_{us} \times \text{Id}) + X_{tu}^{x,i}(a_{us} \otimes \text{Id}), \quad (6.45)$$

$$(\hat{\delta}X^{xx,ij})_{tus} = X_{tu}^{x,i}(\delta x^j)_{us}. \quad (6.46)$$

En associant ces deux relations à (6.42), on déduit

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}r)_{tus} &= X_{tu}^{x,i}(f_i(y)_{us}^{\sharp}) + X_{tu}^{xa,i}((\hat{\delta}y)_{us}, f'_i(y_s)) + X_{tu}^{xa,i}(y_u, \delta(f'_i(y))_{us}) \\ &\quad + X_{ts}^{xx,ij} \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y))_{us} := J_{tus}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Tous les termes de cette décomposition sont (moralement du moins) d'ordre trois. Souvenons-nous que nous souhaitons traiter dans cette section le cas $3\gamma > 1$, de telle sorte qu'il semble effectivement sage d'inverser $\hat{\delta}$ à ce stade, pour obtenir

$$\int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u) = X_{ts}^{x,i} f_i(y_s) + X_{ts}^{xa,i}(y, f'_i(y))_s + X_{ts}^{xx,ij}(y^{x,j} \cdot f'_i(y))_s + \hat{\Lambda}_{ts}(J), \quad (6.48)$$

où J_{tus} est donné par (6.47).

De façon naturelle, nous utiliserons (6.48) comme point de départ de notre procédé d'extension de l'intégrale dans le contexte que nous nous sommes prescrit. Pour clore ce raisonnement heuristique, résumons les différentes hypothèses mises en avant lors de cette dissection :

- Le processus x génère quatre opérateurs X^x , X^{ax} , X^{xa} et X^{xx} , qui satisfont les relations algébriques (6.37), (6.45) et (6.46). Quant à la régularité höldérienne de ces opérateurs, X^x admet la même régularité que x , X^{xx} une régularité double par rapport à x , tout comme X^{ax} et X^{xa} (quitte à changer d'espace, conformément à ce qui est évoqué au point **(i)**).
- Les incréments $(\hat{\delta}y)_{ts}$ peuvent être décomposés en $(\hat{\delta}y)_{ts} = X_{ts}^x y_s^x + y_{ts}^\#$, où $y^\#$ admet une régularité double par rapport à y . Par ailleurs, toujours suivant le point **(i)**, le processus y se doit d'évoluer dans un espace $\mathcal{B}_{\alpha,p}$, avec $\alpha > 0$. Ces deux observations donneront dans un instant naissance à l'espace $\mathcal{Q}_{\alpha,p}^\kappa$.
- Les fonctions σ_i sont suffisamment régulières.

Remarque 6.4.4. Il peut sembler plus naturel, de prime abord, de chercher une décomposition de l'intégrale basée sur l'intégrale (modifiée) itérée

$$\tilde{X}_{ts}^{xx,ij} := \int_s^t S_{tu} dx_u^i (X_{us}^{x,j} \otimes \text{Id}) = \int_s^t S_{tu} dx_u^i \left(\int_s^u S_{uv} dx_v^j \otimes \text{Id} \right), \quad (6.49)$$

plutôt que sur l'aire X_{ts}^{xx} que nous avons introduit dans (6.44). C'est d'ailleurs ce qui est proposé dans [51] pour le mB standard. D'une certaine façon, la définition de \tilde{X}_{ts}^{xx} est plus en accord avec le mécanisme général d'itération de la procédure rough paths. Toutefois, lorsqu'il s'agit d'appliquer ces constructions à un mBf x d'indice de Hurst $H \in (1/3, 1/2)$, il semble difficile de justifier l'existence de l'intégrale itérée (6.49) (contrairement à ce qui se produit pour l'équation de Volterra convolutionnelle, voir la remarque 5.4.6). D'après nos calculs, cette difficulté serait due au manque de régularité du terme S_{uv} dans (6.49). En effet, si l'on se réfère par exemple à [4], la définition de l'intégrale nécessiterait un contrôle de la forme

$$\mathcal{N}[S_{uv} - S_{uu}; \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,p}, \mathcal{B}_{\alpha,p})] \leq c |u - v|^\nu,$$

pour un certain $\nu > 0$. Or on sait que ce type d'inégalité ne peut être satisfait sans changer d'espace (cf la propriété (6.11)). Pour cette raison, nous nous sommes tournés vers une décomposition basée sur X_{ts}^{xx} , approche rendue possible par l'introduction de l'opérateur X_{ts}^{ax} dans la décomposition (6.39). Comme nous le verrons dans la section 6.6, la définition et l'estimation de la régularité de X^{xx} sont quant à elles très faciles à établir pour le mBf, et plus généralement pour tout 2-rough path.

6.4.2 Définition de l'intégrale

Cette sous-section ne vient que formaliser les hypothèses et constructions que nous venons d'évoquer. On fixe désormais un coefficient $\gamma > 1/3$, qui représente (moralement) la régularité höldérienne de x . Conformément aux considérations précédentes, nous définirons la "trajectoire rugueuse au-dessus de x pour l'équation de la chaleur" de la façon suivante :

Hypothèse 10. Soit $x \in C_1^\gamma(\mathbb{R}^m)$, $\gamma > 1/3$. On admettra l'existence d'une suite x^ε de processus différentiables vérifiant

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; C_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

telle que le quadruplet $(X^{x^\varepsilon, i}, X^{ax^\varepsilon, i}, X^{x^\varepsilon a, i}, X^{x^\varepsilon x^\varepsilon, ij})$ ($i, j \in \{1, \dots, m\}$) défini via (6.36), (6.38) et (6.44), converge vers un quadruplet $(X^{x, i}, X^{ax, i}, X^{xa, i}, X^{xx, ij})$ relativement à la topologie des espaces :

$$\text{Pour } X^{x, i} : C_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)) \cap C_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha, p}, \mathcal{B}_{\alpha, p})) \cap C_2^{\gamma-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/2}, \mathcal{B}_p)), \quad (6.50)$$

$$\text{Pour } X^{ax, i} : C_2^{\gamma+\alpha}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha, p}, \mathcal{B}_p)), \quad (6.51)$$

$$\text{Pour } X^{xa, i} : C_2^{\gamma+\alpha-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha, p} \times \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)) \cap C_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha, p} \times \mathcal{B}_{\alpha, p}, \mathcal{B}_{\alpha, p})), \quad (6.52)$$

$$\text{Pour } X^{xx, i} : C_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)) \cap C_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha, p}, \mathcal{B}_{\alpha, p})) \cap C_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha, p}, \mathcal{B}_p)), \quad (6.53)$$

et ce pour tout α tel que $2\alpha p > n$. Par passage à la limite, on récupère en particulier les relations algébriques (souvenons-nous des notations 6.4.3) :

$$\hat{\delta}X^{x, i} = 0 \quad (6.54)$$

$$X^{x, i} = X^{ax, i} + \delta x^i \quad (6.55)$$

$$\hat{\delta}X^{xa, i} = X^{xa, i}(a \times Id) + X^{x, i}(a \otimes Id) \quad (6.56)$$

$$\hat{\delta}X^{xx, ij} = X^{x, i}(\delta x^j). \quad (6.57)$$

Nous noterons $\mathbf{X} = (X^x, X^{ax}, X^{xa}, X^{xx})$ le chemin ainsi défini. Suivant (6.50)-(6.53), \mathbf{X} appartient à un produit d'espaces d'opérateurs, noté $\mathcal{C}\mathcal{L}^{\gamma, \alpha, p}$, muni d'une norme naturelle construite à partir de la norme de chaque espace.

Remarque 6.4.5. Comme dans l'hypothèse 9, on prend systématiquement $x^\varepsilon := x$ lorsque x est différentiable. Cette remarque vaut d'ailleurs également pour les hypothèses 11 et 12 à venir.

Dans ce contexte, la définition des processus contrôlés en jeu prend la forme suivante :

Définition 6.4.6. On fixe un intervalle I de $[0, T]$. Pour tous $\alpha \in (0, 1/2)$, $\kappa \in (0, 1)$, on définit

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}}_{\alpha, p}^\kappa(I) := \{y \in \hat{C}_1^\kappa(I, \mathcal{B}_{\alpha, p}) : (\hat{\delta}y)_{ts} = X_{ts}^{x, i} y_s^{x, i} + y_{ts}^\sharp, \\ y^{x, i} \in C_1^0(I, \mathcal{B}_{\alpha, p}) \cap C_1^\kappa(I, \mathcal{B}_p), y^\sharp \in C_2^\gamma(I, \mathcal{B}_{\alpha, p}) \cap C_2^{2\kappa}(I, \mathcal{B}_p)\}. \end{aligned}$$

On appellera $\hat{\mathcal{Q}}_{\alpha, p}^\kappa(I)$ l'espace des processus κ -contrôlés de $\mathcal{B}_{\alpha, p}$ (sur I), et l'on associe bien sûr à cet ensemble la seminorme

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\alpha, p}^\kappa(I)] := \mathcal{N}[y; \hat{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_{\alpha, p})] + \sum_{i=1}^m \{ \mathcal{N}[y^{x, i}; C_1^0(I; \mathcal{B}_{\alpha, p})] + \mathcal{N}[y^{x, i}; C_1^\kappa(I; \mathcal{B}_p)] \} \\ + \mathcal{N}[y^\sharp; C_2^\gamma(I; \mathcal{B}_{\alpha, p})] + \mathcal{N}[y^\sharp; C_2^{2\kappa}(I; \mathcal{B}_p)]. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous ne manipulerons en fait que des espaces du type $\hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa$, avec $2\kappa p > 1$.

Nous pouvons à présent montrer de quelle façon les champs de vecteurs donnés par la définition 6.3.5 agissent sur ces processus contrôlés.

Lemme 6.4.7. *On fixe un intervalle I de $[0, T]$. On suppose que $f_i \in \mathcal{X}_2$ ($i = 1, \dots, m$) et soit $\kappa \in (1/3, \gamma)$. Sous l'hypothèse 10, si $y \in \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa(I)$ admet pour décomposition $\hat{\delta}y = X^{x, i}y^{x, i} + y^\sharp$, alors l'incrément (standard) $\delta f_i(y)$ peut s'écrire*

$$\delta(f_i(y))_{ts} = (a_{ts} \otimes Id)(y, f'_i(y))_s + (\delta x^j)_{ts} \cdot (y^{x, j} \cdot f'_i(y))_s + f_i(y)^\sharp_{ts}, \quad (6.58)$$

avec $f_i(y)^\sharp := f_i(y)^{\sharp, 1} + f_i(y)^{\sharp, 2} + f_i(y)^{\sharp, 3}$, où les éléments $f_i(y)^{\sharp, k}$ sont donnés par (6.40) et (6.41). En outre,

$$\mathcal{N}[f_i(y)^{\sharp, 1}; \mathcal{C}_2^{2\kappa}(\mathcal{B}_{p/2})] \leq c_{f, \mathbf{X}} \left\{ \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\alpha, p})]^2 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa]^2 \right\} \quad (6.59)$$

$$\mathcal{N}[f_i(y)^{\sharp, 2}; \mathcal{C}_2^{2\kappa}(\mathcal{B}_p)] \leq c_{f, \mathbf{X}} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa] \quad , \quad \mathcal{N}[f_i(y)^{\sharp, 3}; \mathcal{C}_2^{2\kappa}(\mathcal{B}_p)] \leq c_{f, \mathbf{X}} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa]. \quad (6.60)$$

Démonstration. L'écriture (6.58) fait référence à la décomposition (6.39). L'estimation de $f_i(y)^{\sharp, 2}$ est évidente, tandis que l'estimation de $f_i(y)^{\sharp, 3}$ est une conséquence directe de l'hypothèse (6.51). Quant à $f_i(y)^{\sharp, 1}$, il suffit d'observer que

$$\|f_i(y)^\sharp_{ts}\|_{\mathcal{B}_{p/2}} \leq c_f \|(\delta y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_{p/2}} \leq c_f \|(\delta y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_p}^2 \leq c_f \left\{ \|(\hat{\delta}y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_p}^2 + \|a_{ts}y_s\|_{\mathcal{B}_p}^2 \right\},$$

et le résultat découle ensuite de la propriété (6.11). □

Nous sommes dès lors en mesure de justifier l'utilisation de la formule (6.48) comme définition de l'intégrale rugueuse :

Proposition 6.4.8. *On fixe un intervalle $I = [0, T_0]$ de $[0, T]$ et l'on suppose l'hypothèse 10 satisfaite. Soit $y \in \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa(I)$ admettant pour décomposition $\hat{\delta}y = X^{x, i}y^{x, i} + y^\sharp$, où κ et p sont choisis tels que $\kappa \in (1/3, \gamma)$ et $\gamma - \kappa > n/(2p)$. On suppose que le champ de vecteurs $f = (f_1, \dots, f_m)$ est composé d'éléments $f_i \in \mathcal{X}_2$. Sous ces conditions, on pose, pour tous $s < t \in I$,*

$$\mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i f_i(y)) = X_{ts}^{x, i} f_i(y_s) + X_{ts}^{xa, i}(y, f'_i(y))_s + X_{ts}^{xx, ij}(y^{x, j} \cdot f'_i(y))_s + \hat{\Lambda}_{ts}(J), \quad (6.61)$$

avec

$$\begin{aligned} J_{tus} := & X_{tu}^{x, i}(f_i(y)^\sharp_{us}) + X_{tu}^{xa, i}((\hat{\delta}y)_{us}, f'_i(y_s)) + X_{tu}^{xa, i}(y_u, \delta(f'_i(y))_{us}) \\ & + X_{ts}^{xx, ij} \delta(y^{x, j} \cdot f'_i(y))_{us}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

le terme $f(y)^\sharp$ étant défini par la décomposition (6.58). Alors :

1. $\mathcal{J}(\hat{d}x^i f_i(y))$ est bien défini en tant qu'élément de $\mathcal{C}_2^\gamma(I; \mathcal{B}_{\kappa, p})$ et coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{t-u} dx_u^i f_i(y_u)$ lorsque x est différentiable.
2. Pour tout $\psi \in \mathcal{B}_{\kappa, p}$, il existe un unique élément $z \in \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa(I)$ tel que $z_0 = \psi$ et $\hat{\delta}z = \mathcal{J}(\hat{d}x^i f_i(y))$.
3. On dispose de l'estimation

$$\mathcal{N}[z; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa(I)] \leq c_{f, \mathbf{X}} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa, p})]^2 + |I|^\alpha \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^\kappa]^2 \right\}, \quad (6.63)$$

pour un certain paramètre $\alpha > 0$.

Démonstration. Le fait que $\mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x f(y))$ coïncide avec l'intégrale de Riemann lorsque x est régulier, correspond à ce qui a été établi dans la sous-section précédente, à travers (6.48). Quant à la validité de cette expression pour des processus irréguliers et à l'estimation (6.63), ce ne sont que des conséquences directes de la définition 6.3.5 et de l'hypothèse 10, associées aux estimations du lemme 6.4.7. Vérifions par exemple la régularité de J (on travaille implicitement sur l'intervalle I) :

- pour $X^{x,i}(f_i(y)^\sharp)$, on a, par (6.50) et (6.60),

$$\mathcal{N}[X^{x,i}(f_i(y)^\sharp, 2 + f_i(y)^\sharp, 3); \mathcal{C}_3^{\gamma+2\kappa}(\mathcal{B}_p)] \leq c_{f,\mathbf{X}} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa,p}^\kappa],$$

tandis que, grâce à (6.50) et (6.59),

$$\mathcal{N}[X^{x,i} f_i(y)^\sharp, 1; \mathcal{C}_3^{\gamma+2\kappa-n/(2p)}(\mathcal{B}_p)] \leq c_{f,\mathbf{X}} \left\{ \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})]^2 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa,p}^\kappa] \right\}.$$

- pour $X^{xa,i}((\hat{\delta}y), f'_i(y))$, l'hypothèse (6.52) entraîne

$$\mathcal{N}[X^{xa,i}((\hat{\delta}y), f'_i(y)); \mathcal{C}_3^{\gamma+2\kappa-n/(2p)}(\mathcal{B}_p)] \leq c_{f,\mathbf{X}} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq c_{f,\mathbf{X}} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa,p}^\kappa].$$

- pour $X^{xa,i}(y, \delta(f'_i(y)))$, on obtient, à nouveau via (6.52),

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[X^{xa,i}(y, \delta(f'_i(y))); \mathcal{C}_3^{\gamma+2\kappa-n/(2p)}(\mathcal{B}_p)] \\ & \leq c_{f,\mathbf{X}} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)] \\ & \leq c_{f,\mathbf{X}} \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \left\{ \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})] + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa,p}^\kappa] \right\}. \end{aligned}$$

- pour $X^{xx,ij} \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y))$, on déduit de (6.53) les majorations successives

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[X^{xx,ij} \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y)); \mathcal{C}_3^{2\gamma+\kappa}(\mathcal{B}_p)] \\ & \leq c_{f,\mathbf{X}} \left\{ \mathcal{N}[y^{x,j}; \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)] + \mathcal{N}[y^{x,j}; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p)] \right\} \\ & \leq c_{f,\mathbf{X}} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})]^2 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa,p}^\kappa]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, grâce aux relations algébriques contenues dans l'hypothèse 10 et à la décomposition (6.58), il est facile de constater que

$$J = -\hat{\delta} \left(X^{x,i}(f_i(y)) + X^{xa,i}(y, f'_i(y)) + X^{xx,ij}(y^{x,j} \cdot f'_i(y)) \right).$$

Par conséquent, $J \in \text{Ker } \hat{\delta} \cap \mathcal{C}_3^\mu(\mathcal{B}_p)$, avec $\mu = \gamma + 2\kappa - n/(2p) = 3\kappa + (\gamma - \kappa - n/(2p)) > 1$, et nous sommes effectivement en droit d'appliquer $\hat{\Lambda}$. En utilisant ensuite la propriété de contraction (6.20), on obtient

$$\mathcal{N}[\hat{\Lambda}(J); \mathcal{C}_2^{\gamma+2\kappa-n/(2p)}(\mathcal{B}_p)] \leq c_{f,\mathbf{X}} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})]^2 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa,p}^\kappa]^2 \right\},$$

mais aussi

$$\mathcal{N}[\hat{\Lambda}(J); \mathcal{C}_2^{\gamma+\kappa-n/(2p)}(\mathcal{B}_{\kappa,p})] \leq c_{f,\mathbf{X}} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{\kappa,p})]^2 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa,p}^\kappa]^2 \right\}.$$

La régularité des autres termes de la décomposition (6.61) peut être établie par le biais d'arguments similaires. □

Une fois munis de la définition de l'intégrale pour les processus contrôlés, la mise en évidence d'une solution *locale* unique pour le système (6.5) ne pose aucune difficulté :

Théorème 6.4.1. *On suppose l'hypothèse 10 satisfaite, et le champ de vecteurs $f = (f_1, \dots, f_m)$ composé d'éléments $f_i \in \mathcal{X}_3$. Pour toute paire $(\kappa, p) \in (1/3, \gamma) \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $\gamma - \kappa > \frac{n}{2p}$, et toute condition initiale $\psi \in \mathcal{B}_{\kappa, p}$, il existe un temps $T_0 > 0$ tel que le système*

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i f_i(y)) \quad , \quad y_0 = \psi \in \mathcal{B}_{\kappa, p}, \quad (6.64)$$

interprété grâce à la proposition 6.4.8, admet une unique solution y dans $\hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}([0, T_0])$.

Démonstration. Comme dans les chapitres précédents, cette solution locale est obtenue via un argument de point fixe. Si $I := [0, T_0]$, la stabilité d'une boule (bien choisie) de $\hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)$ est facile à établir à partir de (6.63), en remarquant que cette dernière estimation entraîne (avec les notations de la proposition 6.4.8)

$$\mathcal{N}[z; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)] \leq c_{f, \mathbf{X}} \left\{ 1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa, p}}^2 + |I|^\alpha \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)] \right\}, \quad (6.65)$$

pour un certain coefficient $\alpha > 0$.

La propriété de contraction découle quant à elle de calculs certes longs mais élémentaires, et (pour la plupart) tout à fait similaires aux estimations de la preuve du théorème 6.3.1. On écrira par exemple, si $y, \tilde{y} \in \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)$ sont tels que $y_0 = \tilde{y}_0 = \psi$,

$$X_{ts}^{xa, i}(y, f'_i(y))_s - X_{ts}^{xa, i}(\tilde{y}, f'_i(\tilde{y}))_s = X_{ts}^{xa, i}(y - \tilde{y}, f'_i(y))_s + X_{ts}^{xa, i}(\tilde{y}, f'_i(y) - f'_i(\tilde{y}))_s,$$

et par (6.52),

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[X^{xa, i}(y - \tilde{y}, f'_i(y)); \mathcal{C}_2^{\gamma + \kappa - n/(2p)}(I; \mathcal{B}_p)] \\ & \leq c_{\mathbf{X}} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa, p})] \mathcal{N}[f'_i(y); \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_p)] \leq c_{\mathbf{X}, f} |I|^\kappa \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)], \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[X^{xa, i}(\tilde{y}, f'_i(y) - f'_i(\tilde{y})); \mathcal{C}_2^{\gamma + \kappa - n/(2p)}(I; \mathcal{B}_p)] \\ & \leq c_{\mathbf{X}, f} \mathcal{N}[\tilde{y}; \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa, p})] \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{\kappa, p})] \leq c_{\mathbf{X}, f, \psi} |I|^\kappa \left\{ 1 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)] \right\} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)]. \end{aligned}$$

En raisonnant de même avec les autres termes de la décomposition de

$$\hat{\delta}(z - \tilde{z}) = \mathcal{J} \left(\hat{d}x^i [f_i(y) - f_i(\tilde{y})] \right),$$

on déduit

$$\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)] \leq c_{\mathbf{X}, f, \psi} |I|^\lambda \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)] \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa, p}^{\kappa}(I)]^2 \right\}$$

pour un certain $\lambda > 0$, ce qui permet effectivement de faire valoir un argument de contraction sur un intervalle $I = [0, T_0]$ assez petit. \square

La question du prolongement de cette solution locale pose ensuite le même type de difficultés que dans la sous-section 4.3.3 : le contrôle de l'intégrale sur un intervalle I donné dépend trop fortement de la condition initiale. Pour comprendre ce phénomène, il suffit de comparer l'estimation (6.65) avec les estimations (2.26)-(2.19).

Par ailleurs, nous ne pouvons malheureusement transposer ici le raisonnement de la section 5.4, qui avait permis de faire face à une situation semblable. L'inégalité (6.65) se révèle en effet très vite insuffisante dans la perspective d'un contrôle simultané de l'intégrale et de la condition initiale sur des intervalles successifs.

6.5 Régularisation du champ et solution globale

Nous revenons dans cette section sur le cas $\gamma \in (1/3, 1/2)$, mais en envisageant l'éventualité d'un champ de vecteurs régularisé par l'intermédiaire d'un opérateur supplémentaire. De façon plus spécifique, nous nous intéresserons au système

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \int_s^t S_{tu} dx_u^{(i)} S_\varepsilon f_i(y_u) \quad , \quad y_0 = \psi, \quad (6.66)$$

où $f_i \in \mathcal{X}_k$, $\psi \in \mathcal{B}_{\alpha,p}$ pour des paramètres k et α à préciser, et ε est un paramètre strictement positif fixé. Nous allons constater qu'en jouant sur l'effet régularisant de S_ε , le système (6.66) est bien plus simple à appréhender que le système (6.64) : le raisonnement de la section 5.4 (et plus spécifiquement de la preuve du théorème 5.4.1) sera cette fois applicable et conduira à la mise en évidence d'une unique solution *globale*.

Remarque 6.5.1. Ce n'est que pour plus de simplicité (et aussi pour se rapprocher du cadre d'étude de [99]) que nous avons choisi ici un opérateur régularisant de la forme S_ε . Il apparaîtra cependant assez clairement, dans les calculs qui suivent, que nous aurions pu opter pour un champ plus général

$$[\tilde{f}_i(y)](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} K(\xi, \eta) f_i(y)(\eta) d\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

avec K un noyau suffisamment régulier et $f_i \in \mathcal{X}_3$.

6.5.1 Considérations heuristiques

La propriété de régularisation (6.10) du semigroupe S_ε nous permet de nous ramener à une décomposition de l'intégrale $\int_s^t S_{tu} dx_u^{(i)} S_\varepsilon f_i(y_u)$ similaire à la décomposition (2.25) de l'intégrale standard, autrement dit à une écriture qui ne fait plus intervenir l'opérateur "mixte" X^{xa} . Revenons en effet à l'expression (6.39) :

$$\begin{aligned} \delta(f_i(y))_{ts} &= (\delta x)_{ts} y_s^x \cdot f'_i(y_s) + \left[a_{ts} y_s \cdot f'_i(y_s) \right. \\ &\quad \left. + y_{ts}^\# \cdot f'_i(y_s) + (X_{ts}^{ax,i} y_s^{x,i}) \cdot f'_i(y_s) + \int_0^1 dr [f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(y_s)] \cdot (\delta y)_{ts} \right], \end{aligned} \quad (6.67)$$

mais considérons cette fois le terme entre crochets comme terme résiduel, en tant que processus évoluant dans \mathcal{B}_p (ou éventuellement $\mathcal{B}_{p/2}$), et notons ce terme $f_i(y)^\#$. Ce point de vue est par exemple légitime si le processus y évolue $\mathcal{B}_{1,p}$, puisque l'on sait que, pour tous $s, t \in I$,

$$\|a_{ts} y_s \cdot f'_i(y_s)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c |t - s| \|f'_i\|_\infty \|y_s\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \leq c |t - s|^{2\kappa} |I|^{1-2\kappa} \|f'_i\|_\infty \|y_s\|_{\mathcal{B}_{1,p}}.$$

Pour des raisons de stabilité évidentes, il importera ensuite que l'intégrale $\int_s^t S_{tu} dx_u^{(i)} S_\varepsilon f_i(y_u)$ (et en particulier le terme résiduel issu de la décomposition de cette intégrale) soit vu comme un élément de $\mathcal{B}_{1,p}$, ce qui sera bien entendu rendu possible grâce à l'action de S_ε . Par exemple, par (6.10), on a

$$\|S_\varepsilon(f(y)^\#)\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \leq c \varepsilon^{-1} \|f(y)^\#\|_{\mathcal{B}_p}.$$

6.5.2 Définition de l'intégrale

En se référant aux considérations précédentes, il advient que seuls les processus $X^{x,i}$, $X^{ax,i}$ et $X^{xx,i}$ entrent ici en jeu. Nous nous contenterons ainsi d'une version simplifiée de l'hypothèse 10 :

Hypothèse 11. Soit $x \in \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)$, $\gamma > 1/3$. On admettra l'existence d'une suite x^ε de processus différentiables vérifiant

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

telle que le triplet $(X^{x^\varepsilon,i}, X^{ax^\varepsilon,i}, X^{x^\varepsilon x^\varepsilon,ij})$ ($i, j \in \{1, \dots, m\}$) défini par

$$X_{ts}^{x^\varepsilon,i} := \int_s^t S_{t-u} dx_u^{\varepsilon,i} \quad , \quad X_{ts}^{ax^\varepsilon,i} := \int_s^t a_{tu} dx_u^{\varepsilon,i} \quad , \quad X_{ts}^{x^\varepsilon x^\varepsilon,ij} := \int_s^t S_{t-u} dx_u^{\varepsilon,i} (\delta x^{\varepsilon,j})_{us},$$

converge vers un triplet $(X^{x,i}, X^{ax,i}, X^{xx,ij})$ relativement à la topologie des espaces :

$$\text{Pour } X^{x,i} : \quad \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)) \cap \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{1,p}, \mathcal{B}_{1,p})) \cap \mathcal{C}_2^{\gamma-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/2}, \mathcal{B}_p)) \quad (6.68)$$

$$\text{Pour } X^{ax,i} : \quad \mathcal{C}_2^{1+\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{1,p}, \mathcal{B}_p)) \quad (6.69)$$

$$\text{Pour } X^{xx,ij} : \quad \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)) \cap \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{1,p}, \mathcal{B}_{1,p})). \quad (6.70)$$

Par passage à la limite, on récupère en particulier les relations algébriques (souvenons-nous des notations 6.4.3) :

$$\hat{\delta} X^{x,i} = 0 \quad (6.71)$$

$$X^{x,i} = X^{ax,i} + \delta x^i \quad (6.72)$$

$$\hat{\delta} X^{xx,ij} = X^{x,i}(\delta x^j). \quad (6.73)$$

$$\text{Les opérateurs } X^{x,i} \text{ et } X^{xx,ij} \text{ commutent avec } S_\varepsilon. \quad (6.74)$$

Remarque 6.5.2. On fera appel à la propriété de commutativité dans les preuves des propositions 6.5.4 et 6.5.5.

Les processus contrôlés de la section précédente laissent ici place à une structure plus élémentaire :

Définition 6.5.3. Soit I un intervalle de $[0, T]$. Pour tout $1/3 < \kappa < \gamma$, on définit l'espace

$$\tilde{Q}_p^\kappa(I) := \left\{ y \in \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma(I; \mathcal{B}_{1,p}) : (\hat{\delta} y)_{ts} = X_{ts}^{x,i} y_s^{x,i} + y_{ts}^\sharp, y^{x,i} \in \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_{1,p}) \cap \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{1,p}), y^\sharp \in \mathcal{C}_2^{2\kappa}(I; \mathcal{B}_{1,p}) \right\},$$

et l'on associe à cette espace la norme

$$\mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] := \mathcal{N}[y^{x,i}; \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{1,p})] + \mathcal{N}[y^{x,i}; \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_{1,p})] + \mathcal{N}[y^\sharp; \mathcal{C}_2^{2\kappa}(I; \mathcal{B}_{1,p})].$$

En particulier, $\mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma(\mathcal{B}_{1,p})] \leq c_x \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_{\kappa,p}]$. La définition de l'intégrale s'impose ensuite naturellement :

Proposition 6.5.4. *On fixe un intervalle $I = [l_1, l_2]$ de $[0, T]$. Soit $y \in \tilde{Q}_p^\kappa(I)$ admettant pour décomposition $\hat{\delta}y = X^{x,i}y^{x,i} + y^\sharp$, avec $(\kappa, p) \in (1/3, \gamma) \times \mathbb{N}^*$ tels que $\gamma - \kappa > n/(2p)$. Sous ces conditions, on pose*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y)) &:= X_{ts}^{x,i} S_\varepsilon f_i(y_s) + X_{ts}^{xx,ij} S_\varepsilon (y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s)) \\ &\quad + \hat{\Lambda}_{ts} \left(X^{x,i} S_\varepsilon f_i(y)^\sharp + X^{xx,ij} S_\varepsilon \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y)) \right), \end{aligned} \quad (6.75)$$

où $f_i(y)^\sharp$ désigne le terme entre crochets dans (6.67). Alors :

- $\mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y))$ est bien défini en tant qu'élément de $\mathcal{C}_2^\gamma(I; \mathcal{B}_{1,p})$ et coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{tu} dx_u^i S_\varepsilon f_i(y_u)$ lorsque x est différentiable.
- Pour tout $\psi \in \mathcal{B}_{1,p}$, il existe un unique élément $z \in \tilde{Q}_p^\kappa(I)$ tel que $z_1 = \psi$ et $\hat{\delta}z = \mathcal{J}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y))$.
- On dispose de l'estimation :

$$\mathcal{N}[z; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] \leq c\varepsilon^{-1} \left\{ 1 + |I|^{2(\gamma-\kappa)} \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 + |I|^{2(1-\kappa)} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}}^2 \right\}, \quad (6.76)$$

pour une certaine constante $c > 0$.

Démonstration. Il s'agit du même raisonnement que dans la section précédente. Vérifions par exemple l'estimation du terme résiduel

$$z_{ts}^\sharp := X_{ts}^{xx,ij} S_\varepsilon (y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s)) + \hat{\Lambda}_{ts} \left(X^{x,i} S_\varepsilon f_i(y)^\sharp + X^{xx,ij} S_\varepsilon \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y)) \right).$$

En utilisant tout d'abord (6.70) et (6.10), on obtient

$$\begin{aligned} \|X_{ts}^{xx,ij} S_\varepsilon (y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s))\|_{\mathcal{B}_{1,p}} &\leq c_x |t-s|^{2\gamma} \varepsilon^{-1} \|y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s)\|_{\mathcal{B}_p} \\ &\leq c |t-s|^{2\gamma} \varepsilon^{-1} \|y_s^{x,j}\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \\ &\leq c |t-s|^{2\gamma} \varepsilon^{-1} \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]. \end{aligned}$$

Ecrivons ensuite $f_i(y)^\sharp = f_i(y)^\sharp,1 + f_i(y)^\sharp,2$, avec $f_i(y)^\sharp,1 := a_{ts} y_s \cdot f'_i(y_s) + y_{ts}^\sharp \cdot f'_i(y_s) + (X_{ts}^{ax,i} y_s^{x,i}) \cdot f'_i(y_s)$, $f_i(y)^\sharp,2 := \int_0^1 dr [f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(y_s)] \cdot (\delta y)_{ts}$, puis observons les deux estimations :

$$\begin{aligned} &\|X_{tu}^{x,i} S_\varepsilon f_i(y)_{us}^\sharp,1\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \\ &\leq c |t-u|^\gamma \varepsilon^{-1} \|f_i(y)_{us}^\sharp,1\|_{\mathcal{B}_p} \\ &\leq c |t-u|^\gamma \varepsilon^{-1} \left\{ \|(a_{us} y_s) \cdot f'_i(y_s)\|_{\mathcal{B}_p} + \|(X_{us}^{ax,i} y_s^{x,i}) \cdot f'_i(y_s)\|_{\mathcal{B}_p} + \|y_{us}^\sharp \cdot f'_i(y_s)\|_{\mathcal{B}_p} \right\} \\ &\leq c |t-u|^\gamma \varepsilon^{-1} \left\{ |u-s| \|y_s\|_{\mathcal{B}_{1,p}} + |u-s|^{1+\gamma} \|y_s^{x,i}\|_{\mathcal{B}_{1,p}} + \|y_{us}^\sharp\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \right\} \\ &\leq c |t-u|^\gamma \varepsilon^{-1} \left\{ |u-s|^{2\kappa} \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] + |u-s| \left\{ \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] + \|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \right\} \right\} \\ &\leq c |t-s|^{\gamma+2\kappa} \varepsilon^{-1} \left\{ \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] + |I|^{1-2\kappa} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \right\}, \end{aligned}$$

tandis que, grâce à (6.74),

$$\begin{aligned}
\|X_{tu}^{x,i} S_\varepsilon f_i(y)_{us}^{\sharp,2}\|_{\mathcal{B}_{1,p}} &= \|S_\varepsilon X_{tu}^{x,i} f_i(y)_{us}^{\sharp,2}\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \\
&\leq c |t - u|^{\gamma-n/(2p)} \varepsilon^{-1} \|f_i(y)_{us}^{\sharp,2}\|_{\mathcal{B}_{p/2}} \\
&\leq c |t - u|^{\gamma-n/(2p)} \varepsilon^{-1} \|(\delta y)_{us}\|_{\mathcal{B}_p}^2 \\
&\leq c |t - u|^{\gamma-n/(2p)} \varepsilon^{-1} \left\{ \|(\hat{\delta} y)_{us}\|_{\mathcal{B}_p}^2 + \|a_{us} y_s\|_{\mathcal{B}_p}^2 \right\} \\
&\leq c |t - u|^{\gamma-n/(2p)} \varepsilon^{-1} \left\{ |u - s|^{2\gamma} \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 + |u - s|^2 \left\{ \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 + \|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}}^2 \right\} \right\} \\
&\leq c |t - s|^{3\gamma-n/(2p)} \varepsilon^{-1} \left\{ \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 + |I|^{2(1-\gamma)} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Une série d'estimations plus élémentaires encore, basées sur (6.70), donne par ailleurs

$$\begin{aligned}
\|X_{tu}^{xx,ij} S_\varepsilon \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y))_{us}\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \\
\leq c |t - s|^{2\gamma+\kappa} \varepsilon^{-1} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 + |I|^{1-\kappa} \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] \cdot \|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de contraction (6.20), on déduit à présent facilement

$$\mathcal{N}[z^\sharp; \mathcal{C}_2^{2\kappa}(I)] \leq c \varepsilon^{-1} \left\{ 1 + |I|^{2(\gamma-\kappa)} \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 + |I|^{2(1-\kappa)} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}}^2 \right\}.$$

L'estimation de $\mathcal{N}[z^{x,i}; \mathcal{C}_1^{0,\kappa}(I; \mathcal{B}_{1,p})]$ peut être établie avec le même type d'arguments. \square

Evoquons à présent la propriété de contraction qui va nous permettre de transposer sans effort le principe de la preuve du théorème 5.4.1.

Proposition 6.5.5. *On fixe un intervalle $I = [l_1, l_2]$ de $[0, T]$. Sous les hypothèses de la proposition 6.5.4, soit $y, \tilde{y} \in \tilde{Q}_p^\kappa(I)$ tels que $y_{l_1} = \tilde{y}_{l_1} = \psi$, et notons z, \tilde{z} les deux éléments de $\tilde{Q}_p^\kappa(I)$ définis par*

$$z_{l_1} = \tilde{z}_{l_1} = \psi \quad \text{et} \quad \hat{\delta} z = \mathcal{J}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y)) \quad , \quad \hat{\delta} \tilde{z} = \mathcal{J}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(\tilde{y})).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}[z - \tilde{z}; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] &\leq c_x \varepsilon^{-1} |I|^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] \\
&\quad \left\{ 1 + |I|^{2(\gamma-\kappa)} \left\{ \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 \right\} + |I|^{2(1-\kappa)} \|h\|_{\mathcal{B}_{1,p}}^2 \right\}. \quad (6.77)
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour tous $s, t \in I$, on a par définition

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(z - \tilde{z})_{ts} &= X_{ts}^{x,i} S_\varepsilon (f_i(y_s) - f_i(\tilde{y}_s)) + X_{ts}^{xx,ij} S_\varepsilon (y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s) - \tilde{y}_s^{x,j} \cdot f'_i(\tilde{y}_s)) \\
&\quad + \hat{\Lambda}_{ts} \left(X_{ts}^{x,i} S_\varepsilon (f_i(y)^\sharp - f_i(\tilde{y})^\sharp) + X_{ts}^{xx,ij} \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y) - \tilde{y}^{x,j} \cdot f'_i(\tilde{y})) \right).
\end{aligned}$$

Concentrons-nous uniquement sur le terme le plus difficile à appréhender, ie $X_{ts}^{x,i} S_\varepsilon (f_i(y)^\sharp - f_i(\tilde{y})^\sharp)$, où, suivant les notations de la preuve de la proposition 6.5.4,

$$f_i(y)_{ts}^{\sharp,2} := \int_0^1 dr \left[f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(y_s) \right] \cdot (\delta y)_{ts}.$$

On commence pour cela par écrire

$$\begin{aligned} f_i(y)_{ts}^{\sharp,2} - f_i(\tilde{y})_{ts}^{\sharp,2} &= \int_0^1 dr [f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(y_s)] \cdot \delta(y - \tilde{y})_{ts} \\ &\quad + (\delta \tilde{y})_{ts} \cdot \delta(y - \tilde{y})_{ts} \cdot \int_0^1 dr r \int_0^1 dr' f''_i(y_s + rr'(\delta y)_{ts}) \\ &\quad + (\delta \tilde{y})_{ts}^2 \cdot \int_0^1 dr r \int_0^1 dr' [f''_i(y_s + rr'(\delta y)_{ts}) - f''_i(\tilde{y}_s + rr'(\delta \tilde{y})_{ts})], \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \|f_i(y)_{ts}^{\sharp,2} - f_i(\tilde{y})_{ts}^{\sharp,2}\|_{\mathcal{B}_{p/2}} &\leq c^1 \|\delta(y - \tilde{y})_{ts}\|_{\mathcal{B}_p} \{ \|(\delta y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_p} + \|(\delta \tilde{y})_{ts}\|_{\mathcal{B}_p} \} \\ &\quad + c^2 \|(\delta \tilde{y})_{ts}\|_{\mathcal{B}_p}^2 \{ \|y_s - \tilde{y}_s\|_{\mathcal{B}_\infty} + \|y_t - \tilde{y}_t\|_{\mathcal{B}_\infty} \}. \end{aligned}$$

Observons ensuite que

$$\begin{aligned} \|\delta(y - \tilde{y})_{ts}\|_{\mathcal{B}_p} &\leq \|\hat{\delta}(y - \tilde{y})_{ts}\|_{\mathcal{B}_{1,p}} + |t - s| \|(y_s - \tilde{y}_s) - S_{sa}(y_a - \tilde{y}_a)\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \\ &\leq c |t - s|^\gamma \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \tilde{Q}_p^\kappa(I)], \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|(\delta y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_p} &\leq \|(\hat{\delta} y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_{1,p}} + \|a_{ts}(\hat{\delta} y)_{sa}\|_{\mathcal{B}_p} + \|a_{ts} S_{sa} h\|_{\mathcal{B}_p} \\ &\leq c |t - s|^\kappa \left\{ |I|^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] + |I|^{1-\kappa} \|h\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \right\} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \|y_s - \tilde{y}_s\|_{\mathcal{B}_\infty} &\leq c \|y_s - \tilde{y}_s\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \leq c \|y_s - \tilde{y}_s - S_{sa}(y_a - \tilde{y}_a)\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \\ &\leq c |I|^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]. \end{aligned}$$

Ces différentes estimations conduisent aisément à

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[f_i(y)_{ts}^{\sharp,2} - f_i(\tilde{y})_{ts}^{\sharp,2}; \mathcal{C}_2^{2\kappa}(\mathcal{B}_{p/2})] &\leq c |I|^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \tilde{Q}_p^\kappa(I)] \\ &\quad \left\{ 1 + |I|^{2(\gamma-\kappa)} \left\{ \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \tilde{Q}_p^\kappa(I)]^2 \right\} + |I|^{2(1-\kappa)} \|h\|_{\mathcal{B}_{1,p}}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Le reste de la preuve découle ensuite de calculs standards, essentiellement basés sur l'hypothèse 11. □

Nous sommes finalement en mesure de prouver le résultat d'existence globale que nous annonçons :

Théorème 6.5.1. *On suppose l'hypothèse 11 satisfaite. Soit $f = (f_1, \dots, f_m)$ un champ de vecteurs composé d'éléments de \mathcal{X}_3 , et $(\kappa, p) \in (1/3, \gamma) \times \mathbb{N}^*$ tels que $\gamma - \kappa > n/(2p)$. Alors, pour tout $\psi \in \mathcal{B}_{1,p}$, le système*

$$(\hat{\delta} y)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^{(i)} S_\varepsilon f_i(y)) \quad , \quad y_0 = \psi,$$

interprété via la proposition 6.5.4, admet une unique solution globale y dans $\tilde{Q}_p^\kappa([0, T])$. En outre,

$$\mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa([0, T])] \leq K(\|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}}, \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{C}\mathcal{L}^{\gamma, \kappa, p}}), \quad (6.78)$$

où $K = K_\varepsilon : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante de ses deux arguments.

Démonstration. Il suffit de copier la preuve du théorème 5.4.1 en s'appuyant sur (6.76) et (6.77). Par exemple, avec les notations de la preuve en question, on écrira, grâce à (6.76),

$$\mathcal{N}[z; \tilde{Q}_p^\kappa(I_n^N)] \leq c_{x,f,\varepsilon} \left\{ 1 + \varepsilon_n^{2(\gamma-\kappa)} \mathcal{N}[y; \tilde{Q}_p^\kappa(I_n^N)]^2 + \varepsilon_n^{2(1-\kappa)} \|\psi_n\|_{\mathcal{B}_{1,p}}^2 \right\}, \quad (6.79)$$

puis, grâce à (6.77),

$$\mathcal{N}[z^{(1)} - z^{(2)}; \tilde{Q}_p^\kappa(I_n^N)] \leq c_{x,f,\varepsilon} J_{N+n} \mathcal{N}[y^{(1)} - y^{(2)}; \tilde{Q}_p^\kappa(I_n^N)], \quad (6.80)$$

où

$$J_n := n^{-(\gamma-\kappa)} + n^{-3(\gamma-\kappa)+2\alpha_2} + n^{-(\gamma-\kappa+2(1-\kappa))+2\alpha_1}.$$

Les propriétés de stabilité d'un sous-ensemble et de contraction sont ensuite traduites sous la forme de deux systèmes dont il est facile d'exhiber un couple solution (α_1, α_2) . Pour montrer la propriété (H) (qui permet le recollement des solutions), il suffit d'adapter (5.66) à l'opérateur $\hat{\delta}$. L'estimation (6.78) est une conséquence directe du choix de N , en tenant en particulier compte de la condition d'initialisation de la procédure : $\|\psi\|_{\mathcal{B}_{1,p}} \leq N^{\alpha_1}$.

Nous aurons de toute façon l'occasion de revenir sur cette démarche dans le chapitre suivant, dans le cadre d'une approche discrète du système (Proposition 7.4.10). \square

6.6 Construction du chemin rugueux associé à l'équation de la chaleur

Comme nous l'annonçons en introduction, l'objectif consiste à présent à appliquer les résultats abstraits des sections 6.3, 6.4 et 6.5 au bruit généré (via la formule (5.92)) par un processus x γ -höldérien, avec $\gamma > 1/3$. Il s'agit donc de donner sens, dans ce contexte, au chemin $\mathbf{X} = (X^x, X^{ax}, X^{xa}, X^{xx})$ qui apparaît dans l'hypothèse 10 (cette hypothèse couvrant clairement l'hypothèse 9). A cette fin, nous aurons recours à la même idée générale que dans la section 5.5, autrement dit à des arguments élémentaires d'intégration par parties.

On rappelle que lorsque x est un processus différentiable, les opérateurs X^x, X^{ax}, X^{xa} et X^{xx} sont définis par les formules

$$X_{ts}^{x,i}(\varphi)(\xi) := \int_s^t S_{tu}(\varphi)(\xi) dx_u^i, \quad X_{ts}^{ax,i}(\varphi)(\xi) := \int_s^t a_{tu}(\varphi)(\xi) dx_u^i, \quad (6.81)$$

$$X_{ts}^{xa,i}(\varphi, \psi)(\xi) := \int_s^t S_{tu}((a_{us}\varphi) \cdot \psi)(\xi) dx_u^i \quad (6.82)$$

$$X_{ts}^{xx,ij}(\varphi)(\xi) := \int_s^t S_{tu}(\varphi)(\xi) dx_u^i (\delta x^j)_{us}. \quad (6.83)$$

En introduisant l'aire de Lévy $\mathbf{x}_{ts}^{2,ij} := \int_s^t dx_u^i (\delta x^j)_{us}$, il n'est pas difficile de constater que ces expressions sont équivalentes à

$$X_{ts}^{x,i} = \mathbf{x}_{ts}^{1,i} + \int_s^t \Delta S_{tu} \mathbf{x}_{us}^{1,i} du \quad (6.84)$$

$$X_{ts}^{ax,i} = \int_s^t \Delta S_{tu} \mathbf{x}_{us}^{1,i} du \quad (6.85)$$

$$X_{ts}^{xa,i} = \int_s^t X_{tu}^{x,i} (\Delta S_{us} \otimes \text{Id}) du \quad (6.86)$$

$$X_{ts}^{xx,ij} = \mathbf{x}_{ts}^{2,ij} + \int_s^t \Delta S_{tu} \mathbf{x}_{us}^{2,ij} du. \quad (6.87)$$

C'est ce type de formulation qui laisse entrevoir les possibilités d'extension des opérateurs à un processus höldérien. Il faudra bien entendu prendre garde au fait que l'estimation de l'opérateur ΔS_{tu} est susceptible d'entraîner l'apparition d'une singularité (en $|t-u|^{-1-\alpha}$, $\alpha \geq 0$) sous l'intégrale.

Précisons brièvement comment obtenir (6.86). Il suffit en fait de remarquer que

$$\int_s^t S_{tu} ((a_{us}\varphi) \cdot \psi) dx_u^i = - \int_s^t du \partial_u (X_{tu}^{x,i}) ((a_{us}\varphi) \cdot \psi),$$

où, dans cette dernière intégrale, la dérivée partielle ∂_u ne s'applique qu'à l'opérateur $X_{tu}^{x,i}$. Ensuite,

$$\begin{aligned} - \int_s^t du \partial_u (X_{tu}^{x,i}) ((a_{us}\varphi) \cdot \psi) &= \left[-X_{tu}^{x,i} ((a_{us}\varphi) \cdot \psi) \right]_s^t + \int_s^t du X_{tu}^{x,i} (\partial_u (a_{us}\varphi) \cdot \psi) \\ &= \int_s^t du X_{tu}^{x,i} ((\Delta S_{us}\varphi) \cdot \psi). \end{aligned}$$

Remarque 6.6.1. A ce stade, il n'est pas tout à fait évident que les intégrales $\int_s^t \Delta S_{tu} (\delta x^i)_{us} du, \dots$ donnent effectivement naissance à des opérateurs agissant sur $\mathcal{B}_{\alpha,p}$. Nous ne considérons pour le moment ces expressions qu'en tant qu'opérateurs agissant sur l'espace \mathcal{C}_c^∞ des fonctions lisses à support compact. Le prolongement aux espaces $\mathcal{B}_{\alpha,p}$ résultera d'un argument de continuité (voir la preuve de la proposition 6.6.2).

Proposition 6.6.2. *Soit x un processus permettant la construction d'un 2-rough path $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m})$, pour un certain coefficient $\gamma > 1/3$. Alors toute suite x^ε de processus différentiables telle que*

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^{\varepsilon,2} - \mathbf{x}^2; \mathcal{C}_2^{2\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^{m,m})] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

satisfait l'hypothèse 10.

Démonstration. Nous nous contenterons d'estimer la norme des opérateurs définis par (6.84)-(6.87) relativement aux topologies en jeu dans l'hypothèse 10, pour un processus différentiable noté également x (pour plus de clarté). Le résultat de convergence recherchée découlera ensuite immédiatement de ces estimations.

Cas de $X^{x,i}$. Les normes concernées ici sont les suivantes

$$\mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p))] \quad (6.88)$$

$$\mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))] \quad (6.89)$$

$$\mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^{\gamma-n/2p}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/2}, \mathcal{B}_p))]. \quad (6.90)$$

Réécrivons (6.84) sous la forme :

$$X_{ts}^{x,i} = S_{ts} \mathbf{x}_{ts}^{1,i} - \int_s^t \Delta S_{tu} \mathbf{x}_{tu}^{1,i} du. \quad (6.91)$$

A partir de cette expression, on déduit aisément

$$\begin{aligned} \|X_{ts}^{x,i}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} &\leq \|S_{ts}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} |\mathbf{x}_{ts}^{1,i}| + \int_s^t \|\Delta S_{tu}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} |\mathbf{x}_{tu}^{1,i}| du \\ &\leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|x^i\|_\gamma \left(|t-s|^\gamma + \int_s^t |t-u|^{-1+\gamma} du \right) \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|x^i\|_\gamma |t-s|^\gamma, \end{aligned}$$

inégalité d'ailleurs valable pour tout $\kappa \geq 0$, ce qui prouve à la fois (6.88) et (6.89). Pour (6.90), on repart de (6.91) en ayant à l'esprit les deux propriétés $\|S_{ts}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{p/2}} |t-s|^{-n/2p}$ et $\|\Delta S_{ts}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{p/2}} |t-s|^{-1-n/2p}$, ce qui donne

$$\|X_{ts}^{x,i}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{p/2}} \|x^i\|_\gamma |t-s|^{\gamma-n/2p}$$

pour tout p tel que $\gamma - n/2p > 0$. Cette estimation correspond à la norme (6.90).

Cas de $X^{ax,i}$. La norme est dictée par (6.51). Là encore, commençons par observer que $X^{ax,i}$ s'écrit aussi

$$X_{ts}^{ax,i} = a_{ts} \mathbf{x}_{ts}^{1,i} - \int_s^t \Delta S_{tu} \mathbf{x}_{tu}^{1,i} du.$$

Dès lors,

$$\|X_{ts}^{ax,i}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq \|a_{ts}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} |\mathbf{x}_{ts}^{1,i}| + \int_s^t \|\Delta S_{tu}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} |\mathbf{x}_{tu}^{1,i}| du,$$

estimation qui, associée aux deux propriétés

$$\|a_{ts}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} |t-s|^\kappa \quad \|\Delta S_{tu}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} |t-u|^{-1+\kappa}$$

permet effectivement d'affirmer

$$\mathcal{N}[X_{ts}^{ax,i}; \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_p)] \leq c_x |t-s|^{\gamma+\kappa}. \quad (6.92)$$

Cas de $X^{xa,i}$. Si l'on se réfère à (6.52), l'objectif consiste à contrôler les normes suivantes :

$$\mathcal{N}[X^{xa,i}; \mathcal{C}_2^{\gamma+\kappa-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p} \times \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p))] \quad \text{et} \quad \mathcal{N}[X^{xa,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p} \times \mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))]. \quad (6.93)$$

A cette fin, exprimons $X_{ts}^{xa,i}$ sous la forme

$$X_{ts}^{xa,i} = X_{ts}^{x,i}(a_{ts} \otimes \text{Id}) - \int_s^t S_{tu} X_{us}^{x,i} (\Delta S_{us} \otimes \text{Id}) du. \quad (6.94)$$

On déduit alors

$$\|X_{ts}^{xa,i}(\varphi, \psi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c^1 |t-s|^{\gamma-n/(2p)} \left\{ \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^{\gamma-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/2}, \mathcal{B}_p))] \| (a_{ts} \varphi) \cdot \psi \|_{\mathcal{B}_{p/2}} \right.$$

$$+c^2 \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^{\gamma-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/2}, \mathcal{B}_p))] \int_s^t |u-s|^\gamma \|(\Delta S_{us}\varphi) \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_{p/2}} du \}.$$

Or

$$\|(a_{ts}\varphi) \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_{p/2}} \leq \|a_{ts}\varphi\|_{\mathcal{B}_p} \|\psi\|_{\mathcal{B}_p} \leq c |t-s|^\kappa \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_p}$$

et

$$\|(\Delta S_{us}\varphi) \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_{p/2}} \leq c \|\Delta S_{us}\varphi\|_{\mathcal{B}_p} \|\psi\|_{\mathcal{B}_p} \leq c |u-s|^{-1+\kappa} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_p},$$

ce qui permet de conclure

$$\|X_{ts}^{xa,i}(\varphi, \psi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^{\gamma-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/2}, \mathcal{B}_p))] \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_p} |t-s|^{\gamma+\kappa-n/(2p)},$$

et la première estimation relative à (6.93) est ainsi vérifiée. En ce qui concerne la seconde, on a, toujours à partir de (6.94),

$$\begin{aligned} \|X_{ts}^{xa,i}(\varphi, \psi)\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} &\leq c^1 \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))] \|(a_{ts}\varphi) \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \\ &\quad + c^2 \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))] \int_s^t |u-s|^\gamma \|(\Delta S_{us}\varphi) \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} du. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\mathcal{B}_{\kappa,p}$ est une algèbre de Banach, on déduit ensuite

$$\|(a_{ts}\varphi) \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}},$$

mais aussi

$$\|(\Delta S_{us}\varphi) \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \leq \|\Delta S_{us}\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \leq c |u-s|^{-1} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}},$$

d'où

$$\|X_{ts}^{xa,i}(\varphi, \psi)\|_{\mathcal{B}_p} \leq c \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\kappa,p}, \mathcal{B}_{\kappa,p}))] \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} \|\psi\|_{\mathcal{B}_{\kappa,p}} (|t-s|^\gamma + \int_s^t |u-s|^{\gamma-1} du),$$

ce qui conduit à l'estimation recherchée.

Cas de $X^{xx,ij}$. Il s'agit de contrôler les normes

$$\mathcal{N}[X^{xx,ij}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p))], \quad (6.95)$$

$\mathcal{N}[X^{xx,ij}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,p}, \mathcal{B}_{\alpha,p}))]$ et $\mathcal{N}[X^{xx,ij}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{\alpha,p}, \mathcal{B}_p))]$. Nous nous concentrerons uniquement sur (6.95), les autres estimées pouvant être obtenues de façon similaire.

Ecrivons d'abord $X_{ts}^{xx,ij}$ sous la forme

$$X_{ts}^{xx,ij} = S_{ts} \mathbf{x}_{ts}^{2,ij} - \int_s^t \Delta S_{tu} [\mathbf{x}_{tu}^{2,ij} + \mathbf{x}_{tu}^{1,i} \mathbf{x}_{us}^{1,j}] du.$$

A partir de cette expression, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}[X_{ts}^{xx,ij}(\varphi); \mathcal{B}_p] \\ &\leq c_x \left\{ \|S_{ts}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} \|t-s|^{2\gamma} + \int_s^t \|\Delta S_{tu}(\varphi)\|_{\mathcal{B}_p} [|t-u|^{2\gamma} + |t-u|^\gamma |u-s|^\gamma] du \right\} \\ &\leq c_x \left\{ \|\varphi\|_{\mathcal{B}_p} \|t-s|^{2\gamma} + \|\varphi\|_{\mathcal{B}_p} \int_s^t |t-u|^{-1} [|t-u|^{2\gamma} + |t-u|^\gamma |u-s|^\gamma] du \right\} \\ &\leq c_x \|\varphi\|_{\mathcal{B}_p} |t-s|^{2\gamma}, \end{aligned}$$

ce qui constitue la relation escomptée. □

Grâce à cette proposition, nous sommes en mesure de retranscrire les théorèmes abstraits 6.3.1 et 6.4.1 dans le cadre plus familier des rough paths standards :

Théorème 6.6.1. *Soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m})$ ($\gamma > 1/3$) un 2-rough path géométrique, à partir duquel on définit un bruit X via la formule*

$$X_t(\varphi) := \sum_{i=1}^m x_t^i f_i(\varphi),$$

pour des éléments f_i que l'on suppose dans l'espace \mathcal{X}_3 . Dans ce contexte, l'équation de la chaleur rugueuse sur \mathbb{R}^n

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \int_s^t S_{tu} dX_u(y_u), \quad y_0 = \psi \in \mathcal{B}_{\kappa,p}, \quad (6.96)$$

interprétée grâce à la proposition 6.3.2 si $\gamma > 1/2$ et à la proposition 6.4.8 si $\gamma \in (1/3, 1/2]$, admet :

- Une unique solution globale dans $\hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T], \mathcal{B}_{\kappa,p})$ si $\gamma > 1/2$, où le couple $(\kappa, p) \in (0, 1/2) \times \mathbb{N}^*$ est tel que $\gamma + \kappa > 1$ et $2\kappa p > n$.
- Une unique solution locale dans $\tilde{\mathcal{Q}}_{\kappa,p}^\kappa([0, T^*])$ si $\gamma \in (1/3, 1/2]$, où le couple $(\kappa, p) \in (1/3, \gamma) \times \mathbb{N}^*$ est tel que $\gamma - \kappa > n/(2p)$, et où T^* est un temps strictement positif qui dépend de la condition initiale ψ et (accessoirement) des paramètres γ, κ, p, n .

En reprenant les arguments de la preuve de la proposition 6.6.2, il n'est ensuite pas difficile de se convaincre que les expressions (6.84), (6.85) et (6.87) (qui font sens dès que x permet la construction d'un 2-rough path) viennent également répondre aux critères de l'hypothèse 11, et l'on est là encore en mesure de traduire le théorème 6.5.1 :

Théorème 6.6.2. *On fixe un paramètre $\varepsilon > 0$. Soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m})$ ($\gamma > 1/3$) un 2-rough path géométrique, à partir duquel on définit un bruit X^ε via la formule*

$$X_t^\varepsilon(\varphi) := \sum_{i=1}^m x_t^i S_\varepsilon f_i(\varphi),$$

pour des éléments f_i que l'on suppose dans l'espace \mathcal{X}_3 . Alors l'équation de la chaleur rugueuse sur \mathbb{R}^n

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \int_s^t S_{tu} dX_u^\varepsilon(y_u), \quad y_0 = \psi \in \mathcal{B}_{\kappa,p}, \quad (6.97)$$

interprétée grâce à la proposition 6.5.4, admet une unique solution globale dans $\tilde{\mathcal{Q}}_p^\kappa([0, T])$, où le couple $(\kappa, p) \in (1/3, \gamma) \times \mathbb{N}^*$ est tel que $\gamma - \kappa > n/(2p)$.

6.7 Le cas rugueux d'ordre 3

Pour clore ce chapitre, nous nous proposons d'évoquer le cas où le coefficient de régularité γ de x est compris entre $1/4$ et $1/3$, situation que nous qualifions d'ordre 3 en référence à l'étude du système standard (voir la sous-section 2.2.3), pour laquelle l'intervention du volume de Lévy \mathbf{x}^3 est nécessaire.

Ces quelques considérations nous permettront de conforter la viabilité de notre approche du système (6.5). Dans un souci de concision, les constructions qui suivent ne seront pas détaillées avec autant de précision que dans les sections précédentes et nous nous restreindrons aux grandes lignes du raisonnement.

6.7.1 Construction de l'intégrale

On fixe un coefficient $\gamma \in (1/4, 1/3]$, qui représente donc implicitement la régularité de x . En se référant à la démarche impulsée dans les sections précédentes, nous savons que pour être mesure d'inverser $\hat{\delta}$ via $\hat{\Lambda}$, nous devons ici chercher à identifier un terme "d'ordre 4" lors de la dissection de l'intégrale, ou plus exactement d'ordre $\gamma + 3\kappa$, avec κ un coefficient tel que $\kappa < \gamma$ et $\gamma + 3\kappa > 1$. Dans ce contexte, le point crucial, à la base des constructions de cette section, est l'existence (évidente) d'un élément $\kappa \in (0, 1/4)$ qui satisfait ces deux dernières conditions. L'espace $\mathcal{B}_{2\kappa, p}$ conserve alors la propriété fondamentale retranscrite par la proposition 6.2.4, et l'on peut envisager l'éventualité d'une solution évoluant dans cet espace. L'opérateur $X^{xa, i}$ introduit dans la section 6.4, et qui représente moralement l'intégrale $X_{ts}^{xa, i} = \int_s^t S_{tu} dx_u^i (a_{us} \otimes \text{Id})$, devient un opérateur d'ordre 3 :

$$X^{xa, i} \in \mathcal{C}_2^{\gamma+2\kappa}(\mathcal{B}_{2\kappa, p} \times \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p).$$

En tenant compte de cette observation, mais aussi en ayant à l'esprit les considérations de la sous-section 2.2.3, il semble approprié d'introduire l'espace de processus contrôlés suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{2\kappa, p}^\kappa := \{y \in \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(\mathcal{B}_{2\kappa, p}) : (\hat{\delta}y)_{ts} &= X_{ts}^{x, i} y_s^{x, i} + X_{ts}^{xx, ij} y_s^{xx, ij} + y_{ts}^\sharp, \\ (\delta y^{x, i})_{ts} &= (\delta x^j)_{ts} \cdot y_s^{xx, ji} + y_{ts}^{x, \sharp, i}, \\ y^{x, i} \in \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{2\kappa, p}) \cap \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p), \quad y^{xx, ij} \in \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_{2\kappa, p}) \cap \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B}_p), \quad y^\sharp \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{B}_{2\kappa, p}) \cap \mathcal{C}_2^{3\kappa}(\mathcal{B}_p), \\ & y^{x, \sharp, i} \in \mathcal{C}_2^{2\kappa}(\mathcal{B}_p)\}, \end{aligned} \quad (6.98)$$

avec la norme naturelle qui lui est associée.

Suivant la procédure usuelle, on suppose dans un premier temps le processus x différentiable et l'on définit les opérateurs $X^{x, i}$ et $X^{xx, ij}$ par les formules

$$X_{ts}^{x, i} := \int_s^t S_{tu} dx_u^i, \quad X_{ts}^{xx, ij} := \int_s^t S_{tu} dx_u^j (\delta x^i)_{us}. \quad (6.99)$$

Par ailleurs, comme dans la section 6.4, l'entier p est choisi tel que $4\kappa p > n$, et de cette façon, $\mathcal{B}_{2\kappa, p}$ est une algèbre de Banach. On suppose enfin que $f_i \in \mathcal{X}_3$ (voir la définition 6.3.5) et l'on pose $[f_i''(\varphi)](\xi) := \partial_y^2 \sigma_i(\xi, \varphi(\xi))$.

Avec ces notations, si $y \in \mathcal{Q}_{2\kappa, p}^\kappa$, un développement de Taylor élémentaire fournit

$$\begin{aligned} (\delta f_i(y))_{us} &= (X_{us}^{x, j} y_s^{x, j}) \cdot f'_i(y_s) + (X_{us}^{xx, jk} y_s^{xx, jk}) \cdot f'_i(y_s) + a_{us} y_s \cdot f'_i(y_s) + \frac{1}{2} (\delta y)_{us}^2 \cdot f''_i(y_s) \\ &\quad + y_{us}^\sharp \cdot f'_i(y_s) + \int_0^1 dr r \int_0^1 dr' [f''_i(y_s + rr'(\delta y)_{us}) - f''_i(y_s)] \cdot (\delta y)_{us}^2 \\ &= \mathbf{x}_{us}^{1, j} \cdot y_s^{x, j} \cdot f'_i(y_s) + \mathbf{x}_{us}^{2, jk} \cdot y_s^{xx, jk} \cdot f'_i(y_s) + a_{us} y_s \cdot f'_i(y_s) + \frac{1}{2} (\delta y)_{us}^2 \cdot f''_i(y_s) \\ &\quad + (X_{us}^{ax, j} y_s^{x, j}) \cdot f'_i(y_s) + X_{us}^{ax, jk} (y_s^{xx, jk}) \cdot f'_i(y_s) \\ &\quad + y_{us}^\sharp \cdot f'_i(y_s) + \int_0^1 dr r \int_0^1 dr' [f''_i(y_s + rr'(\delta y)_{us}) - f''_i(y_s)] \cdot (\delta y)_{us}^2 \end{aligned}$$

et donc, en isolant les termes d' "ordre 3",

$$\begin{aligned}
(\delta f_i(y))_{us} &= \mathbf{x}_{us}^{1,j} \cdot y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s) + \mathbf{x}_{us}^{2,jk} \cdot y_s^{xx,jk} \cdot f'_i(y_s) + a_{us} y_s \cdot f'_i(y_s) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\delta x^j)_{us} y_s^{x,j} \cdot (\delta x^k)_{us} y_s^{x,k} \cdot f''_i(y_s) + f_i(y)_{us}^\sharp, \\
&= \mathbf{x}_{us}^{1,j} \cdot y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s) + \mathbf{x}_{us}^{2,jk} \cdot \left\{ y_s^{xx,jk} \cdot f'_i(y_s) + y_s^{x,j} \cdot y_s^{x,k} \cdot f''_i(y_s) \right\} + a_{us} y_s \cdot f'_i(y_s) \\
&\quad + f_i(y)_{us}^\sharp, \tag{6.100}
\end{aligned}$$

où $f_i(y)_{ts}^\sharp$ est un terme résiduel relativement long (mais facile) à expliciter, et que l'on peut décomposer en $f_i(y)_{ts}^\sharp = \sum_{k=1}^3 f_i(y)_{ts}^{\sharp,k}$, avec (lorsque l'on revient à un processus x γ -höldérien)

$$\mathcal{N}[f_i(y)_{ts}^{\sharp,k}; \mathcal{B}_{p/k}] \leq c_{x,f} |t-s|^{3\kappa} (1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_{2\kappa,p}^\kappa]^3). \tag{6.101}$$

Il convient bien sûr de préciser que dans le calcul qui nous a menés à (6.100), nous avons introduit les opérateurs

$$X_{ts}^{ax,i} := \int_s^t a_{tu} dx_u^i, \quad X_{ts}^{axx,ij} := \int_s^t a_{tu} dx_u^j (\delta x^i)_{us}, \tag{6.102}$$

et utilisé la relation de symétrie

$$\mathbf{x}_{us}^{2,jk} + \mathbf{x}_{us}^{2,kj} = (\delta x^j)_{us} (\delta x^k)_{us}.$$

Quant à l'estimation (6.101), elle est (en partie) obtenue grâce aux hypothèses de régularité naturelles :

$$X^{ax,i} \in \mathcal{C}_2^{\gamma+2\kappa}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{2\kappa,p} \times \mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)), \quad \text{et} \quad X^{axx,ij} \in \mathcal{C}_2^{2\gamma+2\kappa}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{2\kappa,p}, \mathcal{B}_p)). \tag{6.103}$$

A présent, en vue d'interpréter $\mathcal{I}_{ts}(\hat{d}x^i f_i(y))$ en présence de processus irréguliers, il suffit d'injecter l'expression (6.100) dans la décomposition

$$\int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u) = X_{ts}^{x,i} f_i(y_s) + \int_s^t S_{tu} dx_u^i \delta f_i(y)_{us},$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u) &= X_{ts}^{x,i} f_i(y_s) + X_{ts}^{xx,ij} (y_s^{x,i} \cdot f'_j(y_s)) + X_{ts}^{xa,i} (y_s, f'_i(y_s)) \\
&\quad + X_{ts}^{xxx,ijk} (y_s^{xx,ij} \cdot f'_k(y_s) + y_s^{x,i} \cdot y_s^{x,j} \cdot f''_k(y_s)) + r_{ts}, \tag{6.104}
\end{aligned}$$

avec $r_{ts} := \int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y)_{us}^\sharp$. L'opérateur $X^{xxx,ijk}$ est ici défini par

$$X_{ts}^{xxx,ijk} := \int_s^t S_{tu} dx_u^k \mathbf{x}_{us}^{2,ij}, \tag{6.105}$$

et l'on associe à cet opérateur l'hypothèse de régularité légitime

$$X^{xxx,ijk} \in \mathcal{C}_2^{3\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{2\kappa,p}, \mathcal{B}_{2\kappa,p})) \cap \mathcal{C}_2^{3\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)). \tag{6.106}$$

Conformément aux considérations de la section 6.4.1, il reste uniquement à établir le fait que $\hat{\delta}r$ est un terme d'ordre 4, en tant que processus à valeurs dans \mathcal{B}_p . Nous allons plus précisément

montrer que $\hat{\delta}r \in \mathcal{C}_3^{\gamma+3\kappa-n/p}(\mathcal{B}_p)$. Il suffira ensuite de choisir p assez grand pour que $\gamma + 3\kappa - n/p > 1$.

Pour calculer $\hat{\delta}r$, nous supposons l'ensemble des conditions algébriques de l'hypothèse 10 satisfaites, et nous ajouterons à ces relations le comportement algébrique de X^{xxx} :

$$(\hat{\delta}X^{xxx,ijk})_{tus} = X_{tu}^{x,k} \mathbf{x}_{us}^{2,ij} + X_{tu}^{xx,jk} \mathbf{x}_{us}^{1,i}. \quad (6.107)$$

En ce qui concerne les conditions analytiques, nous avons déjà mentionné l'hypothèse (6.106), à laquelle nous ajoutons une version légèrement modifiée des conditions de l'hypothèse 10 :

$$X^{x,i} \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)) \cap \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{2\kappa,p}, \mathcal{B}_{2\kappa,p})) \quad (6.108)$$

$$X^{x,i} \in \mathcal{C}_2^{\gamma-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/2}, \mathcal{B}_p)) \cap \mathcal{C}_2^{\gamma-n/p}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/3}, \mathcal{B}_p)) \quad (6.109)$$

$$X^{xx,ij} \in \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_p)) \cap \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{2\kappa,p}, \mathcal{B}_{2\kappa,p})) \cap \mathcal{C}_2^{2\gamma-n/(2p)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_{p/2}, \mathcal{B}_p)). \quad (6.110)$$

Par ailleurs, en vue de clarifier la présentation du développement, nous aurons recours à la notation \approx pour signifier "congru à un terme d'ordre au moins $\gamma + 3\kappa - n/p$ ", ou en d'autres termes : pour tous $h, l \in \mathcal{C}_3(\mathcal{B}_p)$, $h \approx l \Leftrightarrow h - l \in \mathcal{C}_3^{\gamma+3\kappa-n/p}(\mathcal{B}_p)$. Avec cette convention, notre objectif est donc d'établir la relation $\hat{\delta}r \approx 0$.

En revenant à (6.104), on a, par (6.18),

$$\begin{aligned} & -(\hat{\delta}r)_{tus} \\ &= -X_{tu}^{x,i} \delta(f_i(y))_{us} + (\hat{\delta}X^{xx,ij})_{tus}(y_s^{x,i} \cdot f'_j(y_s)) - X_{tu}^{xx,ij} \delta(y_s^{x,i} \cdot f'_j(y))_{us} \\ & \quad + (\hat{\delta}X^{xxx,ijk})_{tus}(y_s^{xx,ij} \cdot f'_k(y_s) + y_s^{x,i} \cdot y_s^{x,j} \cdot f''_k(y_s)) \\ & \quad - X_{tu}^{xxx,ijk} \delta(y_s^{xx,ij} \cdot f'_k(y) + y_s^{x,i} \cdot y_s^{x,j} \cdot f''_k(y))_{us} \\ & \quad + (\hat{\delta}X^{xa,i})_{tus}(y_s, f'_i(y_s)) - X_{tu}^{xa,i}((\delta y)_{us}, f'_i(y_s)) - X_{tu}^{xa,i}(y_u, \delta(f'_i(y))_{us}). \end{aligned}$$

On peut d'ores et déjà observer que les cinquième et huitième termes de cette dernière somme admettent la régularité escomptée. En utilisant les relations algébriques satisfaites par les opérateurs, ainsi que la décomposition (6.100), on déduit ensuite

$$\begin{aligned} & -(\hat{\delta}r)_{tus} \\ & \approx -X_{tu}^{xx,ij}((\delta y^{x,i})_{us} \cdot f'_j(y_s)) - X_{tu}^{xx,ij}(y_u^{x,i} \cdot \delta(f'_i(y))_{us}) \\ & \quad + X_{tu}^{xx,jk}(\mathbf{x}_{us}^{1,i} \cdot \{y_s^{xx,ij} \cdot f'_k(y_s) + y_s^{x,i} \cdot y_s^{x,j} \cdot f''_k(y_s)\}) \\ & \quad + X_{tu}^{xa,i}(a_{us}y_s, f'_i(y_s)) - X_{tu}^{xa,i}((\delta y)_{us}, f'_i(y_s)) \\ & \approx -X_{tu}^{xx,ij}(y_{us}^{x,\sharp,i} \cdot f'_j(y_s)) - X_{tu}^{xa,i}((\hat{\delta}y)_{us}, f'_i(y_s)) \\ & \quad - X_{tu}^{xx,ij}(y_u^{x,i} \cdot \delta(f'_j(y))_{us} - \mathbf{x}_{us}^{1,k} \cdot y_s^{x,k} \cdot y_s^{x,i} \cdot f''_j(y_s)) \\ & \approx -X_{tu}^{xx,ij}(y_u^{x,i} \cdot \{\delta(f'_j(y))_{us} - \mathbf{x}_{us}^{1,k} \cdot y_s^{x,k} \cdot f''_j(y_s)\}). \end{aligned}$$

Finalement, il est facile de voir que $(\delta f'_i(y))_{us} = \mathbf{x}_{us}^{1,k} \cdot y_s^{x,k} \cdot f''_i(y_s) + f'_i(y)_{us}^\sharp$, où $f'_i(y)_{us}^\sharp$ est tel que

$$\mathcal{N}[f'_i(y)_{ts}^\sharp; \mathcal{B}_{p/2}] \leq c_{x,f} |t - s|^{2\kappa} \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_{2\kappa,p}^\kappa]^2,$$

En se référant à l'hypothèse (6.110), cette inégalité permet de conclure $\hat{\delta}r \approx 0$, ce qui achève le raisonnement.

Formalisons à présent ces résultats, en fixant tout d'abord les conditions relatives à x :

Hypothèse 12. Soit $x \in \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)$, $\gamma \in (1/4, 1/3]$. On admet qu'il existe une suite x^ε de processus différentiables vérifiant

$$\mathcal{N}[x^\varepsilon - x; \mathcal{C}_1^\gamma([0, T]; \mathbb{R}^m)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

telle que les opérateurs

$$X^{x^\varepsilon, i}, X^{ax^\varepsilon, i}, X^{x^\varepsilon x^\varepsilon, ij}, X^{x^\varepsilon a, i}, X^{ax^\varepsilon x^\varepsilon, ij}, X^{x^\varepsilon x^\varepsilon x^\varepsilon, ijk}$$

définis par (6.99), (6.102) et (6.105), convergent relativement aux normes associées aux conditions (6.108)-(6.110), (6.103) et (6.106), et ce pour un triplet (γ, κ, p) tel que

$$\gamma \in (1/4, 1/3], \quad \kappa \in (0, 1/4), \quad p \in \mathbb{N}^*, \quad \kappa > n/p, \quad \gamma - \kappa > n/p, \quad \gamma + 3\kappa - n/p > 1.$$

Les processus limites, notés

$$X^{x, i}, X^{ax, i}, X^{xx, ij}, X^{xa, i}, X^{axx, ij}, X^{xxx, ijk},$$

vérifient alors les relations algébriques qui apparaissent dans l'hypothèse 10, ainsi que la relation (6.107).

Nous venons alors de prouver :

Proposition 6.7.1. On fixe un intervalle $I = [l_1, l_2]$ de $[0, T]$. Sous l'hypothèse 12 et en supposant que $f = (f_1, \dots, f_m)$ avec $f_i \in \mathcal{X}_3$, on pose, pour tout $y \in \mathcal{Q}_{2\kappa, p}^\kappa(I)$, $\mathcal{J}(\hat{dx}^i f_i(y)) := (Id - \hat{\Lambda}\hat{\delta})(J)$, où, pour tous $s < t$,

$$\begin{aligned} J_{ts} := & X_{ts}^{x, i} f_i(y_s) + X_{ts}^{xx, ij} (y_s^{x, i} \cdot f_j'(y_s)) + X_{ts}^{xa, i} (y_s, f_i'(y_s)) \\ & + X_{ts}^{xxx, ijk} (y_s^{xx, ij} \cdot f_k'(y_s) + y_s^{x, i} \cdot y_s^{x, j} \cdot f_k''(y_s)). \end{aligned} \quad (6.111)$$

Alors :

1. $\mathcal{J}(\hat{dx}^i f_i(y))$ est bien défini en tant qu'élément de $\mathcal{C}_2^\gamma(I; \mathcal{B}_{2\kappa, p})$ et coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{tu} dx_u^i f_i(y_u)$ lorsque x est un processus différentiable.
2. Pour tout $\psi \in \mathcal{B}_{2\kappa, p}$, il existe un unique processus $z \in \mathcal{Q}_{2\kappa, p}^\kappa(I)$ tel que $z_{l_1} = \psi$ et $(\hat{\delta}z)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{dx}^i f_i(y))$ si $s < t \in I$.
3. On dispose de l'estimation

$$\mathcal{N}[z; \mathcal{Q}_{2\kappa, p}^\kappa(I)] \leq c_{f, X} \{1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_{2\kappa, p})]^3 + T^\alpha \mathcal{N}[y; \mathcal{Q}_{2\kappa, p}^\kappa(I)]^3\}, \quad (6.112)$$

pour un certain coefficient $\alpha > 0$.

6.7.2 Résolution du système différentiel

Une fois munis de l'estimation (6.112), la résolution *locale* du système découle des arguments de point fixe standards, et aboutit à l'énoncé :

Théorème 6.7.1. On suppose l'hypothèse 12 satisfaite et le champ $f = (f_1, \dots, f_m)$ composé d'éléments de \mathcal{X}_4 . Pour tout $\psi \in \mathcal{B}_{2\kappa, p}$, il existe un temps $T_0 > 0$ tel que le système

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{dx}^i f_i(y)) \quad , \quad y_0 = \psi, \quad (6.113)$$

interprété grâce à la proposition 6.7.1, admet une unique solution y dans $\mathcal{Q}_{2\kappa, p}^\kappa([0, T_0])$.

L'application de ce théorème abstrait passe ensuite par le prolongement du chemin

$$\mathbf{X}^\varepsilon := (X^{x^\varepsilon, i}, X^{ax^\varepsilon, i}, X^{x^\varepsilon x^\varepsilon, ij}, X^{x^\varepsilon a, i}, X^{ax^\varepsilon x^\varepsilon, ij}, X^{x^\varepsilon x^\varepsilon x^\varepsilon, ijk})$$

à tout 3-rough path géométrique $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3) \in \mathcal{C}_2^\gamma(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m}) \times \mathcal{C}_2^{3\gamma}(\mathbb{R}^{m,m,m})$ (voir l'hypothèse 2). On suit pour cela la même stratégie que dans la section 6.6, en reprenant les formules (6.84)-(6.87), auxquelles s'ajoutent les deux expressions

$$X_{ts}^{axx, ij} := \int_s^t \Delta S_{tu} \mathbf{x}_{us}^{2, ij} du,$$

$$X_{ts}^{xxx, ijk} := \mathbf{x}_{ts}^{3, ijk} + \int_s^t \Delta S_{tu} \mathbf{x}_{us}^{3, ijk} du.$$

Chapitre 7

Schémas d'approximation

7.1 Introduction

On poursuit dans ce chapitre l'analyse de l'équation de la chaleur rugueuse (5.91), en adoptant cette fois un point de vue plus "discret", à travers la mise en place de schémas numériques facilement implémentables visant à approcher la solution y . L'efficacité de ces schémas va résulter du rapprochement de deux types d'idées : D'une part, les considérations relatives à la discrétisation du système rugueux standard, telles qu'elles apparaissent dans le chapitre 3 ou dans [25] ; d'autre part, des méthodes classiques d'approximation de solutions d'EDPS dirigées par un bruit de Wiener, et en particulier la méthode de Galerkin. Il serait vain de tenter de fournir une liste exhaustive des très nombreux travaux afférents à ce dernier sujet, et nous nous contenterons de citer les références que constituent [52] ou [53].

Comme nous le verrons dans les sections 7.3 et 7.4, la structure des schémas sera en fait directement dictée par les constructions de l'intégrale rugueuse $\int_s^t S_{t-u} dx_u^i f_i(y_u)$ établies dans le chapitre précédent. Si l'on se réfère par exemple à (6.25) ou à (6.75), il apparaît dans les deux cas que l'intégrale se décompose sous la forme

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \int_s^t S_{t-u} dx_u^i f_i(y_u) = M_{ts} + R_{ts}, \quad (7.1)$$

avec M un terme "principal" et $R = \hat{\Lambda}(J)$ un terme "résiduel" (à ne pas confondre cependant avec le résidu associé à la structure de processus contrôlé pour (6.75)) caractérisé par une grande régularité vis-à-vis du couple (s, t) . De façon tout à fait naturelle, les schémas que nous nous apprêtons à étudier ne retiendront que le terme principal entre deux temps de discrétisation, pour s'écrire :

$$y_{t_{i+1}^n}^n = S_{t_{i+1}^n t_i^n} y_{t_i^n}^n + M_{t_{i+1}^n t_i^n}, \quad y_0^n = \psi,$$

où $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$ est une partition de $[0, T]$ dont le pas tend vers 0. Le raisonnement est en cela proche des récents travaux de Jentzen et Kloeden [55, 56, 57, 58] pour le traitement d'un bruit de Wiener : pour obtenir des schémas numériques particulièrement efficaces, les deux auteurs prennent en effet appui sur un développement de Taylor de la solution du système, ce qui correspond exactement à une décomposition de la forme (7.1).

A la différence du chapitre précédent, l'équation sera ici considérée sur $L^2([0, 1])$, avec des conditions au bord de type Dirichlet, et ce pour profiter de la diagonalisabilité du semigroupe associé. Il n'est pas difficile de constater (ce que nous ferons dans la section 7.2) qu'une grande

partie des propriétés et du formalisme présentés dans la section 6.2 trouve son équivalent dans ce contexte, ce qui permettra en particulier de transposer sans justification supplémentaire les résultats des sections 6.3 et 6.5. On ne pourra en revanche retranscrire les résultats des sections 6.4 et 6.7, pour lesquels il importait que le paramètre p (dans $L^p(\mathbb{R}^n)$) soit très grand. L'étude de schémas d'approximation n'est de toute façon véritablement permise que lorsque l'on dispose au préalable d'un résultat d'existence *globale* d'une solution, que ne fournissent pas les théorèmes 6.4.1 et 6.7.1. Nous serons ainsi contraints de nous limiter aux deux situations suivantes :

(i) *Cas Young* : le système se présente sous la forme

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \int_s^t S_{t-u} dx_u^i f_i(y_u), \quad y_0 = \psi, \quad (7.2)$$

avec ψ une condition initiale dans un espace de Sobolev à préciser, x un processus γ -höldérien pour un certain coefficient $\gamma > 1/2$, et f_i les opérateurs de Nemytskii associés à des fonctions $\tilde{f}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ régulières, c'est-à-dire

$$f_i(y)(\xi) := \tilde{f}_i(y(\xi)) \quad \text{pour tout } y \in L^2([0, 1]).$$

(ii) *Cas rugueux en présence d'un champ régularisé* : Le système s'écrit

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \int_s^t S_{t-u} dx_u^i S_\varepsilon f_i(y_u), \quad y_0 = \psi, \quad (7.3)$$

où les notations ont la même signification que ci-dessus, mais où $\gamma \in (1/3, 1/2]$ et ε est un paramètre supplémentaire strictement positif fixé.

La stratégie que nous allons adopter dans les deux cas sera divisée en trois étapes, chacune d'entre elles correspondant à un type de discrétisation différent :

(a) D'abord, une discrétisation du processus directeur x , rendue possible grâce aux propriétés de continuité de l'application d'Itô associée au système. Nous reviendrons d'ailleurs en détail sur ce dernier point, quelque peu négligé dans le chapitre précédent.

(b) Ensuite, une discrétisation en temps suivant la décomposition (7.1), comme nous l'avons évoqué ci-dessus. Les systèmes (7.2) et (7.3) recevront à cette étape des traitements bien distincts : pour (7.2), la simplicité de la construction (6.25) de l'intégrale pousse à l'étude d'un prolongement continu du schéma, tandis que pour (7.3), nous aurons plutôt recours à un raisonnement discret, plus proche des preuves de [25].

(c) Enfin, une discrétisation en espace, qui consiste globalement à projeter le système sur un espace de dimension finie, conformément à la méthode de Galerkin. L'efficacité de la procédure sera ici assurée par la régularité (en espace) de la solution.

A notre connaissance, il s'agit là de la première tentative de mise en place de schémas d'approximation pour des EDP impliquant un bruit fractionnaire. Grâce aux estimations du chapitre 3, nous serons en outre en mesure d'exhiber un taux de convergence explicite pour chacun de ces schémas lorsque x désigne un mBf. Dans l'énoncé de ces résultats, la distance entre la solution exacte y et son approximation $y^{M,N}$ sera comme dans les chapitres précédents exprimée à l'aide d'une norme höldérienne, topologie inhérente à la méthodologie rough paths. Ceci rend malheureusement délicate la comparaison avec les taux obtenus par Jentzen et Kloeden

ou Hausenblas dans le cas d'un bruit de Wiener (voir les références ci-dessus), leurs résultats faisant appel à la norme du supremum sur $[0, T]$. Nous devons pour notre part nous contenter de conjectures basées sur l'observation de l'erreur empirique pour quelques simulations (voir les sous-sections 7.3.6 et 7.4.6).

Le chapitre est organisé de la façon suivante : La section 7.2 viendra très brièvement préciser le cadre dans lequel s'inscrit notre analyse ; elle soulignera surtout les analogies avec le modèle étudié dans le chapitre précédent. La section 7.3 est dédiée à l'étude d'un schéma numérique pour le système dans la configuration **(i)** ; seule une discrétisation basée sur un développement d'ordre 1 sera ici requise, de telle sorte que l'algorithme pourra être perçu comme une simple adaptation du schéma d'Euler classique. Nous traiterons ensuite, dans la section 7.4, la configuration **(ii)** ; le schéma associé mettra logiquement en scène un développement d'ordre 2, et ressemblera ainsi davantage, comme dans le chapitre 3, au schéma de Milstein standard. Enfin, l'appendix contient la preuve détaillée du résultat fondamental de la section 7.4.

7.2 Cadre d'étude

On considérera l'opérateur laplacien Δ sur l'espace hilbertien l'espace hilbertien $\mathcal{B} := L^2([0, 1])$ avec conditions au bord de Dirichlet. Cet opérateur est diagonalisable, et l'on fixe d'ailleurs dès à présent une base orthonormée de \mathcal{B} constituée de vecteurs propres :

$$e_n(\xi) := \sqrt{2} \sin(\pi n \xi) \quad (n \in \mathbb{N}^*), \quad \text{et les valeurs propres relatives } \lambda_n := \pi^2 n^2.$$

On notera (dans cette section du moins) $(y^n)_n$ les coefficients d'une fonction y dans cette base. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, P_N désignera l'opérateur de projection sur le sous-espace $V_N := \text{Vect}\{e_n, 1 \leq n \leq N\}$.

Munis de ces notations, les espaces de Sobolev fractionnaires construits sur \mathcal{B} deviennent très faciles à caractériser :

Définition 7.2.1. *Pour tout $\kappa \geq 0$, on notera \mathcal{B}_κ l'espace de Sobolev associé à l'opérateur fractionnaire $(-\Delta)^\kappa$, espace que l'on peut caractériser par*

$$\mathcal{B}_\kappa = \{y \in L^2([0, 1]) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\kappa} (y^n)^2 < \infty\}, \quad (7.4)$$

et l'on munit cet espace de sa norme naturelle

$$\|y\|_{\mathcal{B}_\kappa}^2 = \|(-\Delta)^\kappa y\|_{\mathcal{B}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\kappa} (y^n)^2. \quad (7.5)$$

En outre, pour tout $\kappa < 0$, on pose $\mathcal{B}_\kappa := (\mathcal{B}_{-\kappa})'$, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 = L^2([0, 1])$.

Les propriétés élémentaires de ces espaces sont tout à fait analogues à celles du chapitre précédent :

Proposition 7.2.2. *Avec les notations ci-dessus, on dispose des propriétés :*

- *Inclusions de Sobolev : Si $\kappa > 1/4$ et $0 < \mu < 2\kappa - 1/2$, alors \mathcal{B}_κ est inclus de façon continue dans l'espace $\mathcal{C}^\mu([0, 1])$ des fonctions μ -höldériennes sur $[0, 1]$.*
- *Algèbre de Banach : Si $\kappa > 1/4$, alors \mathcal{B}_κ est une algèbre de Banach, c'est-à-dire $\|\varphi \cdot \psi\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\kappa} \|\psi\|_{\mathcal{B}_\kappa}$ pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{B}_\kappa$.*

– *Projection* : Pour tous $0 \leq \kappa < \gamma$ et tout $\varphi \in \mathcal{B}_\gamma$,

$$\|\varphi - P_N \varphi\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \lambda_N^{-(\gamma-\kappa)} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}. \quad (7.6)$$

Démonstration. Les deux premières propriétés sont des résultats classiques, que l'on peut trouver dans [2]. La dernière propriété est quant à elle immédiate : si $\varphi = \sum_n \varphi^n e_n \in \mathcal{B}_\gamma$,

$$\|\varphi - P_N \varphi\|_{\mathcal{B}_\kappa}^2 = \sum_{n \geq N+1} \lambda_n^{2\kappa} (\varphi^n)^2 = \sum_{n \geq N+1} \lambda_n^{2(\kappa-\gamma)} \lambda_n^{2\gamma} (\varphi^n)^2 \leq \lambda_N^{2(\kappa-\gamma)} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\gamma}^2.$$

□

Dans ce contexte, on sait que l'action du semigroupe de la chaleur prend la tournure élémentaire : si $\varphi = \sum_n \varphi^n e_n \in \mathcal{B}$, alors pour tout $t \geq 0$, $S_t \varphi = \sum_n e^{-t\lambda_n} \varphi^n e_n$. Il n'est alors pas difficile d'établir, par un calcul direct, les propriétés qui font le succès du formalisme $\hat{\delta}$:

Proposition 7.2.3. *On dispose des propriétés :*

- *Contraction* : Pour tout $\kappa \geq 0$, pour tout $t \geq 0$, S_t est un opérateur de contraction sur \mathcal{B}_κ .
- *Régularisation* : Pour tout $t > 0$ et tous $-\infty < \kappa < \alpha < \infty$, S_t envoie \mathcal{B}_κ sur \mathcal{B}_α et

$$\|S_t \varphi\|_{\mathcal{B}_\alpha} \leq c_{\alpha, \kappa} t^{-(\alpha-\kappa)} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\kappa}. \quad (7.7)$$

- *Régularité höldérienne* : Pour tous $t > 0, \alpha > 0$ et tout $\varphi \in \mathcal{B}_\alpha$,

$$\|S_t \varphi - \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq c_\alpha t^\alpha \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\alpha}, \quad (7.8)$$

$$\|\Delta S_t \varphi\|_{\mathcal{B}} \leq c_\alpha t^{-1+\alpha} \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\alpha}. \quad (7.9)$$

Démonstration. Par exemple, pour (7.9), on sait que si $\varphi = \sum_n \varphi^n e_n$, alors

$$\Delta S_t \varphi = \sum_n (\lambda_n e^{-t\lambda_n} \varphi^n) e_n,$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\Delta S_t \varphi\|_{L^2}^2 &= \sum_n (\lambda_n e^{-t\lambda_n} \varphi^n)^2 \\ &= \sum_n (\lambda_n^{1-\alpha} e^{-t\lambda_n})^2 (\lambda_n^\alpha \varphi^n)^2 \\ &\leq c_\alpha (t^{-1+\alpha})^2 \sum_n (\lambda_n^\alpha \varphi^n)^2 = c_\alpha (t^{-1+\alpha})^2 \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\alpha}^2, \end{aligned}$$

où nous avons fait usage de l'inégalité élémentaire $\lambda^\kappa e^{-t\lambda} \leq c_\kappa t^{-\kappa}$, valable pour tous $\lambda, \kappa, t > 0$. Les autres propriétés peuvent être établies avec des arguments similaires. □

On rappelle que ce sont ces propriétés qui ont permis la mise en place du formalisme basé sur l'opérateur d'incrément modifié $\hat{\delta}$ et surtout la construction de l'opérateur inverse (potentiel) $\hat{\Lambda}$ (voir [51]). La proposition 7.2.3 autorise ainsi une transposition immédiate de ces résultats, et en particulier du théorème 6.2.2 :

Théorème 7.2.1. *On fixe un intervalle I de $[0, T]$ et deux paramètres $\kappa \geq 0$ et $\mu > 1$. Pour tout $h \in \mathcal{C}_3^\mu(I; \mathcal{B}_\kappa) \cap \text{Ker } \hat{\delta}|_{\mathcal{C}_3(\mathcal{B}_\kappa)}$, il existe un unique élément*

$$\hat{\Lambda}h \in \cap_{\alpha \in [0, \mu]} \mathcal{C}_2^{\mu-\alpha}(I; \mathcal{B}_{\kappa+\alpha})$$

tel que $\hat{\delta}(\hat{\Lambda}h) = h$. $\hat{\Lambda}h$ satisfait en outre la propriété de contraction : pour tout $\alpha \in [0, \mu]$,

$$\mathcal{N}[\hat{\Lambda}h; \mathcal{C}_2^{\mu-\alpha}(I; \mathcal{B}_{\kappa+\alpha})] \leq c_{\alpha, \mu, T} \mathcal{N}[h; \mathcal{C}_3^\mu(I; \mathcal{B}_\kappa)]. \quad (7.10)$$

Il peut être intéressant de remarquer que les principaux arguments techniques qui interviennent dans la construction de $\hat{\Lambda}$ (voir [51]) feront leur apparition au travers des preuves des propositions 7.3.12 et 7.4.10. Notez par ailleurs que nous serons plusieurs fois amenés à mettre à contribution la relation télescopique : pour tous $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$,

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \sum_{i=0}^{n-1} S_{tt_{i+1}} (\hat{\delta}y)_{t_{i+1}t_i}. \quad (7.11)$$

Souvenons-nous à présent que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit l'opérateur de Nemytskii N_f associé à f par la formule : pour tout $y \in \mathcal{B}$, pour tout $\xi \in [0, 1]$, $N_f(y)(\xi) := f(y(\xi))$. Si f est assez régulier, il est ici possible de contrôler la norme $\|N_f(y)\|_{\mathcal{B}_\kappa}$ sans transiter par une quelconque classe \mathcal{X}_k :

Proposition 7.2.4. *Si $0 \leq \kappa < 1/2$ et $f \in \mathcal{C}^{1,b}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathcal{B}_\kappa$,*

$$\|N_f(y)\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c_f \{1 + \|y\|_{\mathcal{B}_\kappa}\}. \quad (7.12)$$

Démonstration. Comme dans le chapitre précédent, l'inégalité est obtenue en utilisant une norme équivalente, en l'occurrence (voir [2])

$$\|y\|_{\mathcal{W}_\kappa}^2 := \|y\|_{\mathcal{B}}^2 + \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \frac{|y(\xi) - y(\eta)|^2}{|\xi - \eta|^{1+4\kappa}}.$$

□

Remarque 7.2.5. Désormais, nous noterons plus simplement f pour N_f .

La propriété (6.14), qui prenait appui sur un argument de convolution lié à la nature du semigroupe, n'a pas d'équivalent direct dans le cadre qui nous intéresse. Nous lui substituerons, au cours du raisonnement de la section 7.4, une relation basée sur l'inclusion suivante :

Proposition 7.2.6. *Pour tout $\kappa > 1/4$, on dispose de l'inclusion continue*

$$L^1(0, 1) \subset \mathcal{B}_{-\kappa}. \quad (7.13)$$

Démonstration. C'est une retombée directe des inclusions de Sobolev rappelées ci-dessus. En effet, si $u \in L^1(0, 1)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_\kappa$,

$$\left| \int_0^1 u(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right| \leq \|\varphi\|_\infty \|u\|_{L^1(0,1)} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}_\kappa} \|u\|_{L^1(0,1)}.$$

□

7.3 Le cas Young

L'objectif de cette section consiste à introduire et analyser un schéma numérique d'approximation dans la configuration (i) décrite en introduction. Nous nous permettons au préalable de rassembler les différents outils et résultats théoriques tirés des sections 6.3 et 6.6. Pour davantage de simplicité, nous travaillerons dans toute section sur l'intervalle de temps $[0, T] = [0, 1]$.

7.3.1 Résultats précédents

On fixe donc dès à présent un processus x γ -höldérien, pour un certain coefficient $\gamma > 1/2$. On supposera que ce processus peut être approché par son interpolation linéaire, hypothèse que nous étiquetons en vue de références ultérieures :

Hypothèse 13. Soit x^M le processus obtenu par interpolation linéaire de x de pas $1/M$, autrement dit : si $\frac{k}{M} \leq t < \frac{k+1}{M}$,

$$x_t^{M,i} := x_{\frac{k}{M}}^i + M \left(t - \frac{k}{M} \right) (\delta x)_{\frac{k+1}{M}, \frac{k}{M}}. \quad (7.14)$$

On admettra alors le résultat de convergence

$$u_M := \mathcal{N}[x - x^M; \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)] \rightarrow 0 \quad (7.15)$$

lorsque M tend vers l'infini.

Comme expliqué dans la section 6.3, la compréhension du système (7.2) passe alors par l'identification d'un processus X^x particulier :

Lemme 7.3.1. Sous l'hypothèse 13, la suite $X^{x,i,M}$ des processus à valeurs opérationnelles définis par

$$X_{ts}^{\tilde{x},i,M} := \int_s^t S_{tu} d\tilde{x}_u^{M,i}, \quad (7.16)$$

converge vers un élément X^x relativement à la topologie de l'espace

$$\mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_\kappa, \mathcal{B}_\kappa)) \cap \mathcal{C}_2^{\gamma-\kappa}(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\kappa)),$$

et ce pour tout $0 \leq \kappa < \gamma$. L'opérateur X^x satisfait en outre les deux propriétés :

$$\hat{\delta} X^{x,i} = 0 \quad , \quad P_N X^x = X^x P_N \quad (N \in \mathbb{N}^*),$$

où l'opérateur de projection P_N a été défini dans la section 7.2.

Démonstration. On reprend l'argument d'intégration par parties de la section 6.6, qui aboutissait à la formule explicite :

$$X_{ts}^{x,i} := S_{ts}(\delta x^i)_{ts} - \int_s^t \Delta S_{tu}(\delta x^i)_{tu} du. \quad (7.17)$$

Notez que la convergence relative à la norme $\mathcal{N}[\cdot; \mathcal{C}_2^{\gamma-\kappa}(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\kappa))]$, qui sera mise à contribution au cours de la procédure de discrétisation en espace, n'apparaissait pas dans l'hypothèse 9. Elle est cependant facile à vérifier à partir de (7.17). \square

Notation 7.3.2. Pour tout coefficient $\kappa \in (0, 1)$ fixé, on définira dans ce qui suit la norme associée à X^x par la formule :

$$\|X^x\|_{\gamma, \kappa} := \sum_{i=1}^m \left\{ \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_\kappa, \mathcal{B}_\kappa))] + \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}))] + \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^{\gamma-\kappa}(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\kappa))] \right\}. \quad (7.18)$$

Réécrivons la proposition 6.3.2 dans ce contexte :

Proposition 7.3.3. Pour tout processus $z = (z^1, \dots, z^m)$ tel que $z^i \in \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\kappa) \cap \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B})$ avec $0 < \kappa < 1/2$ et $\gamma + \kappa > 1$, on définit l'intégrale

$$\mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i z^i) := X_{ts}^{x,i} z_s^i + \hat{\Lambda}_{ts}(X^{x,i} \delta z^i). \quad (7.19)$$

Alors :

- $\mathcal{J}(\hat{d}x z)$ est bien définie via le théorème 7.2.1, et coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{tu} dx_u^i z_u^i$ lorsque x est un processus différentiable.
- On dispose de l'estimation :

$$\mathcal{N}[\mathcal{J}(\hat{d}x z); \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{B}_\kappa)] \leq c \|X^x\|_{\gamma, \kappa} \left\{ \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\kappa)] + \mathcal{N}[z; \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B})] \right\}. \quad (7.20)$$

Le résultat principal de la section 6.3 admet à présent l'équivalent suivant :

Théorème 7.3.1. Si $f_i \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, le système

$$(\hat{\delta}y)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i f_i(y)) \quad , \quad y_0 = h \in \mathcal{B}_\kappa, \quad (7.21)$$

interprété grâce à la proposition précédente, admet une unique solution globale dans $\hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(\mathcal{B}_\kappa)$, et ce pour tout κ tel que

$$1/4 < \kappa < 1/2 \quad , \quad \gamma + \kappa > 1. \quad (7.22)$$

On dispose en outre du contrôle :

$$\mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)] \leq C(\|h\|_{\mathcal{B}_\kappa}, \|X^x\|_{\gamma, \kappa}), \quad (7.23)$$

pour une certaine fonction C croissante en ses deux arguments. On rappelle que la notation $\mathcal{N}[\cdot; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)]$ renvoie à

$$\mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)] := \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\kappa)] + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa(\mathcal{B}_\kappa)]. \quad (7.24)$$

Remarque 7.3.4. Il convient d'observer que (7.23) et (7.20) entraînent en particulier

$$\mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma(\mathcal{B}_\kappa)] \leq c_{h,x}.$$

En effet, puisque y est solution du système, on a

$$\begin{aligned} \|(\hat{\delta}y)_{ts}\|_{\mathcal{B}_\kappa} &\leq \|\mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x f(y))\|_{\mathcal{B}_\kappa} \\ &\leq c_x |t-s|^\gamma \left\{ \mathcal{N}[f(y); \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\kappa)] + \mathcal{N}[f(y); \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B})] \right\}. \end{aligned}$$

Ensuite, grâce à (7.12) et (7.8), on déduit

$$\mathcal{N}[f(y); \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\kappa)] \leq c \left\{ 1 + \mathcal{N}[y; \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\kappa)] \right\},$$

puis $\mathcal{N}[f(y); \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B})] \leq c \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)]$.

7.3.2 Schéma et résultat principal

La procédure en trois temps évoquée en introduction, et qui sera analysée en détail dans les sous-sections qui suivent, conduit de façon naturelle au schéma d'approximation suivant : si $t_k = t_k^M := \frac{k}{M}$,

$$y_0^{M,N} = P_N h, \quad y_{t_{k+1}^M}^{M,N} = S_{t_{k+1}^M t_k^M} y_{t_k^M}^{M,N} + X_{t_{k+1}^M t_k^M}^{x,i,M} P_N f_i(y_{t_k^M}^{M,N}), \quad (7.25)$$

où, conformément à (7.16), $X_{t_{k+1}^M t_k^M}^{x,i,M} := \int_{t_k^M}^{t_{k+1}^M} S_{t_{k+1}^M u} dx_u^{M,i}$.

Munis de l'hypothèse 13, nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat de convergence associé au schéma (7.25) :

Théorème 7.3.2. *On fixe un paramètre $\kappa \in (1/4, 1/2)$ tel que $\gamma + \kappa > 1$ et $2\kappa > \gamma$, et l'on suppose que $f_i \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Sous l'hypothèse 13, il existe une constante $c_{h,x} = c_{h,x,\gamma,\kappa} > 0$ telle que, si y désigne la solution de (7.21) donnée par le théorème 7.3.1 et $y^{M,M}$ le processus défini par le schéma discret (7.25) en prenant $N = M$,*

$$\sup_{0 \leq p < q \leq M} \frac{\|\hat{\delta}(y - y^{M,M})_{t_q t_p}\|_{\mathcal{B}_\kappa}}{|t_q - t_p|^\kappa} \leq c_{h,x} \left\{ \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + u_M + \frac{1}{M^{\gamma+\kappa-1}} \right\}. \quad (7.26)$$

Les trois sous-sections suivantes sont dédiées à la preuve de ce résultat ; chacune d'entre elles correspond à l'analyse d'un type de discrétisation.

Remarque 7.3.5. L'hypothèse $2\kappa > \gamma$ ne sera utilisée que pour simplifier certaines estimations au cours de la preuve. On peut néanmoins facilement s'en affranchir, au prix d'un terme supplémentaire $\frac{c}{M^{\gamma-\kappa}}$ dans (7.26).

Remarque 7.3.6. Le choix particulier $N = M$ n'a été fait qu'en vue de rendre la forme de l'estimation plus agréable. Il n'est pas difficile d'obtenir un résultat plus général avec deux entiers N et M éventuellement distincts, en reprenant un à un les arguments de la preuve qui suit.

7.3.3 Discrétisation du processus directeur

On peut de prime abord s'interroger sur la pertinence théorique de cette première étape, qui va en quelque sorte consister à remplacer $X^{x,i}$ par $X^{x,i,M}$ dans la décomposition (7.19) de l'intégrale. L'intérêt de la procédure va en fait se révéler lors de l'implémentation concrète de l'algorithme, dans la mesure où $X_{t_{k+1}^M t_k^M}^{x,i,M}$ se résume à

$$X_{t_{k+1}^M t_k^M}^{x,i,M} = \int_{t_k^M}^{t_{k+1}^M} S_{t_{k+1}^M u} dx_u^{i,M} = M \cdot (\delta x^i)_{t_{k+1}^M t_k^M} \cdot \int_{t_k^M}^{t_{k+1}^M} S_{t_{k+1}^M u} du,$$

et ainsi, seule la simulation de l'incrément $(\delta x^i)_{t_{k+1}^M t_k^M}$ sera requise. Notez dès à présent que ce commentaire sur à l'aspect pratique d'une discrétisation de X^x viendra également justifier l'importance de la sous-section 7.4.3 dans l'étude de (7.61).

Notation 7.3.7. *Pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, on notera \bar{y}^M l'approximation de Wong-Zakai associée à x^M (de même condition initiale h), autrement dit la solution du système (7.21) lorsque x est remplacé par son interpolation x^M .*

La transition entre y et \bar{y}^M est rendue possible par le résultat de continuité suivant :

Proposition 7.3.8. *L'application d'Itô associée au système (7.21) est localement lipschitzienne vis-à-vis de h et X^x . En d'autres termes, si y (resp. \tilde{y}) représente la solution dirigée par X^x (resp. $X^{\tilde{x}}$), de condition initiale h (resp. \tilde{h}), alors*

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)] \leq C \left(\|h\|_{\mathcal{B}_\kappa}, \|\tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa}, \|X^x\|_{\gamma,\kappa}, \|X^{\tilde{x}}\|_{\gamma,\kappa} \right) \left\{ \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|X^x - X^{\tilde{x}}\|_{\gamma,\kappa} \right\}, \quad (7.27)$$

pour une certaine fonction C croissante par rapport à chacun de ses arguments.

Démonstration. C'est le même type d'argument que dans la preuve de la proposition 4.1.8. De façon usuelle, l'inégalité est d'abord établie localement, sur un petit intervalle $[0, T_0]$, puis étendue sur $[0, 1]$ en utilisant la version discrète du lemme de Gronwall.

Raisonnement local : Considérons un petit intervalle $[0, T_0]$. En écrivant, pour tous $s < t \in [0, T_0]$,

$$\hat{\delta}(y - \tilde{y})_{ts} = \mathcal{J}_{ts} \left(\hat{d}x [f(y) - f(\tilde{y})] \right) + \mathcal{J}_{ts} \left(\hat{d}[x - \tilde{x}] f(\tilde{y}) \right),$$

l'inégalité (7.20) entraîne immédiatement

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] &\leq c_1 T_0^{\gamma-\kappa} \|X^x\|_{\gamma,\kappa} \left\{ \mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^0([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0], \mathcal{B})] \right\} \\ &\quad + c_2 \|X^x - X^{\tilde{x}}\|_{\gamma,\kappa} \left\{ \mathcal{N}[f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\kappa)] + \mathcal{N}[f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B})] \right\}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

D'après (7.23),

$$\mathcal{N}[f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^0(\mathcal{B}_\kappa)] + \mathcal{N}[f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^\kappa(\mathcal{B})] \leq c \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)] \leq c_{\tilde{x}, \tilde{h}}.$$

Par ailleurs, à partir de l'expression

$$\begin{aligned} [f_i(y_t) - f_i(\tilde{y}_t)] - [f_i(y_s) - f_i(\tilde{y}_s)] &= \int_0^1 dr f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) \cdot \delta(y - \tilde{y})_{ts} \\ &\quad + \int_0^1 dr [f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(\tilde{y}_s + r(\delta \tilde{y})_{ts})] \cdot (\delta \tilde{y})_{ts}, \end{aligned}$$

on déduit facilement, en utilisant en outre (7.23) et l'inclusion continue $\mathcal{B}_\kappa \subset L^\infty(0, 1)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^\kappa([0, T_0], \mathcal{B})] &\leq c_1 \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \\ &\quad + c_2 \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)] \{ \|y_t - \tilde{y}_t\|_\infty + \|y_s - \tilde{y}_s\|_\infty \} \\ &\leq c_{\tilde{h}, x, \tilde{x}} \left\{ \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \right\}. \end{aligned}$$

Enfin, puisque \mathcal{B}_κ est une algèbre de Banach, on a, pour tout $t \in [0, T_0]$,

$$\begin{aligned} \|f_i(y_t) - f_i(\tilde{y}_t)\|_{\mathcal{B}_\kappa} &= \left\| \int_0^1 dr f'_i(\tilde{y}_t + r(y_t - \tilde{y}_t)) \cdot (y_t - \tilde{y}_t) \right\|_{\mathcal{B}_\kappa} \\ &\leq c \|y_t - \tilde{y}_t\|_{\mathcal{B}_\kappa} \{ \|y_t\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|\tilde{y}_t\|_{\mathcal{B}_\kappa} \}, \end{aligned}$$

et donc, à nouveau grâce à (7.23),

$$\mathcal{N}[f_i(y) - f_i(\tilde{y}); \mathcal{C}_1^0([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \leq c_{x, \tilde{x}, h, \tilde{h}} \left\{ \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \right\}.$$

En revenant à (7.28), on peut à présent affirmer que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \\ \leq c_{h, \tilde{h}, x, \tilde{x}} \left\{ T_0^{\gamma - \kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] + \|X^x - X^{\tilde{x}}\|_{\gamma, \kappa} + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \right\}, \end{aligned}$$

puis, comme $y_t - \tilde{y}_t = \hat{\delta}(y - \tilde{y})_{t_0} + S_{t_0}(h - \tilde{h})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \\ \leq c_{h, \tilde{h}, x, \tilde{x}}^1 \left\{ T_0^{\gamma - \kappa} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] + \|X^x - X^{\tilde{x}}\|_{\gamma, \kappa} + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en choisissant $T_0 \in (0, 1]$ tel que $c_{h, \tilde{h}, x, \tilde{x}}^1 T_0^{\gamma - \kappa} = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \leq 2 c_{h, \tilde{h}, x, \tilde{x}}^1 \left\{ \|X^x - X^{\tilde{x}}\|_{\gamma, \kappa} + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \right\}.$$

Prolongement du résultat. Avec les mêmes arguments que dans la première étape, on déduit facilement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([kT_0, (k+1)T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \leq 2 c_{h, \tilde{h}, x, \tilde{x}}^1 \left\{ \|X^x - X^{\tilde{x}}\|_{\gamma, \kappa} + \|y_{kT_0} - \tilde{y}_{kT_0}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \right\},$$

et donc, puisqu'en raison de (7.11),

$$y_{kT_0} - \tilde{y}_{kT_0} = S_{kT_0, 0}[h - \tilde{h}] + \sum_{l=0}^{k-1} S_{kT_0, (l+1)T_0} \hat{\delta}(y - \tilde{y})_{(l+1)T_0, lT_0},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([kT_0, (k+1)T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \\ \leq 2 c_{h, \tilde{h}, x, \tilde{x}}^1 \left\{ \|X^x - X^{\tilde{x}}\|_{\gamma, \kappa} + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa} + T_0^\kappa \sum_{l=0}^{k-1} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([lT_0, (l+1)T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \right\}. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet alors d'affirmer

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([kT_0, (k+1)T_0], \mathcal{B}_\kappa)] \leq c_{h, \tilde{h}, x, \tilde{x}}^2 e^{c_{h, \tilde{h}, x, \tilde{x}}^3 k} \left\{ \|X^x - X^{\tilde{x}}\|_{\gamma, \kappa} + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \right\}.$$

L'inégalité (7.27) découle finalement de la relation (consécutive là encore de (7.11))

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([0, 1], \mathcal{B}_\kappa)] \leq \sum_{k=0}^{J_{T_0}} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0, \kappa}([kT_0, (k+1)T_0], \mathcal{B}_\kappa)],$$

où J_{T_0} désigne le plus petit entier tel que $J_{T_0} \cdot T_0 \geq 1$. □

Il suffit maintenant d'utiliser l'hypothèse 13 via le résultat élémentaire :

Lemme 7.3.9. *Il existe une constante $c_{\gamma, \kappa}$ telle que*

$$\|X^x - X^{x, M}\|_{\gamma, \kappa} \leq c_{\gamma, \kappa} \mathcal{N}[x - x^M; \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)] \leq c_{\gamma, \kappa} u_M.$$

Démonstration. A partir de (7.17), on a, pour toute fonction-test φ ,

$$\begin{aligned} & \| (X_{ts}^{x,i} - X_{ts}^{x,i,M}) \varphi \|_{\mathcal{B}_\kappa} \\ & \leq \| S_{ts} \varphi \|_{\mathcal{B}_\kappa} |\delta(x^i - x^{M,i})_{ts}| + \int_s^t \| \Delta S_{tu} \varphi \|_{\mathcal{B}_\kappa} |\delta(x^i - x^{M,i})_{tu}| du \\ & \leq \mathcal{N}[x - x^M; \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)] \| \varphi \|_{\mathcal{B}_\kappa} \left\{ |t - s|^\gamma + \int_s^t |t - u|^{-1+\gamma} du \right\} \\ & \leq 2\mathcal{N}[x - x^M; \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)] \| \varphi \|_{\mathcal{B}_\kappa} |t - s|^\gamma, \end{aligned}$$

ce qui permet d'étendre l'estimation à tout élément de \mathcal{B}_κ et ainsi d'affirmer

$$\mathcal{N}[X^{x,i} - X^{x,i,M}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_\kappa, \mathcal{B}_\kappa))] \leq 2\mathcal{N}[x - x^M; \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)].$$

On utilise ensuite le même type d'argument pour majorer les normes

$$\mathcal{N}[X^{x,i} - X^{x,i,M}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}))] \quad \text{et} \quad \mathcal{N}[X^{x,i} - X^{x,i,M}; \mathcal{C}_2^{\gamma-\kappa}(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\kappa))].$$

□

Corollaire 7.3.10. *Avec les notations précédentes, il existe une constante $c_{h,x}$ telle que, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{N}[y - \bar{y}^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)] \leq c_{h,x} u_M. \quad (7.29)$$

7.3.4 Discrétisation en temps

Nous souhaitons étudier, dans cette sous-section, le schéma infini-dimensionnel intermédiaire :

$$y_{t_{k+1}}^M = S_{t_{k+1}t_k} y_{t_k}^M + X_{t_{k+1}t_k}^{x,i,M} f_i(y_{t_k}^M) \quad , \quad y_0^M = h. \quad (7.30)$$

Commençons par prolonger continûment y^M sur $[0, 1]$, suivant la formule : si $t \in [t_k, t_{k+1})$,

$$y_t^M := S_{tt_k} y_{t_k}^M + X_{tt_k}^{x,i,M} f_i(y_{t_k}^M). \quad (7.31)$$

Observons à présent qu'en posant $r_{ts}^M := \hat{\Lambda}_{ts}(X^{x,i,M} \delta f_i(y^M))$, on peut écrire, pour tout $k \in \{0, \dots, M-1\}$,

$$y_{t_{k+1}}^M = S_{t_{k+1}t_k} y_{t_k}^M + \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_{t_{k+1}u} dx_u^{i,M} f_i(y_u^M) - r_{t_{k+1}t_k}^M. \quad (7.32)$$

Le prolongement de cette expression à tous temps $s < t \in [0, 1]$ conduit aux deux formules :

Lemme 7.3.11. *Si $t_p \leq s < t_{p+1} < \dots < t_q \leq t < t_{q+1}$, alors*

$$(\hat{\delta} y^M)_{ts} = \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} f_i(y_u^M) - y_{ts}^{M,\sharp}, \quad (7.33)$$

avec

$$y_{ts}^{M,\sharp} := r_{tt_q}^M - S_{ts} r_{st_p}^M + \sum_{k=p}^{q-1} S_{tt_{k+1}} r_{t_{k+1}t_k}^M, \quad (7.34)$$

tandis que si $t_p \leq s < t < t_{p+1}$,

$$(\hat{\delta} y^M)_{ts} = X_{ts}^{x,i} f_i(y_{t_p}^M). \quad (7.35)$$

Démonstration. La formule (7.35) est une conséquence directe de la relation $\hat{\delta}X^{x,i,M} = 0$. Quant à la relation (7.33), elle découle de l'association de (7.32) et de la relation algébrique (7.11), qui donne ici

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}y^M)_{ts} &= \sum_{k=p+1}^{q-1} S_{tt_{k+1}}(\hat{\delta}y^M)_{t_{k+1}t_k} + (\hat{\delta}y^M)_{tt_q} + S_{tt_{p+1}}(\hat{\delta}y^M)_{t_{p+1}s} \\ &= \left[\int_{t_{p+1}}^{t_q} S_{tu} dx_u^{i,M} f_i(y_u^M) - \sum_{k=p+1}^{q-1} S_{tt_{k+1}} r_{t_{k+1}t_k}^M \right] \\ &\quad + \left[\int_{t_q}^t S_{tu} dx_u^{i,M} f_i(y_u^M) - r_{tt_q}^M \right] + S_{tt_{p+1}}(\hat{\delta}y^M)_{t_{p+1}s} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Or

$$\begin{aligned} &(\hat{\delta}y^M)_{t_{p+1}s} \\ &= (\hat{\delta}y^M)_{t_{p+1}t_p} - S_{t_{p+1}s}(\hat{\delta}y^M)_{st_p} \\ &= \left[\int_{t_p}^{t_{p+1}} S_{t_{p+1}u} dx_u^{i,M} f_i(y_u^M) + r_{t_{p+1}t_p}^M \right] - S_{t_{p+1}s} \left[\int_{t_p}^s S_{su} dx_u^{i,M} f_i(y_u^M) - r_{st_p}^M \right], \end{aligned} \quad (7.37)$$

et il suffit d'injecter (7.37) dans (7.36) pour obtenir (7.33). \square

Nous allons nous appuyer sur les deux expressions (7.33) et (7.35) pour obtenir un contrôle uniforme (vis-à-vis de M) de $\mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, 1], \mathcal{B}_\kappa)]$, ce qui constitue le résultat principal de cette sous-section :

Proposition 7.3.12. *Il existe une constante $c_{h,x}$ telle que pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, 1], \mathcal{B}_\kappa)] \leq c_{h,x}. \quad (7.38)$$

Démonstration. En utilisant un procédé de récurrence sur l , nous allons plus précisément montrer l'assertion : Il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(x)$ et un réel $N_l = N_l(h, x)$ tel que

$$\mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, l\varepsilon])] \leq N_l.$$

Pour $l = 0$, on prend bien sûr $N_0 = \|h\|_{\mathcal{B}_\kappa}$. Supposons à présent la propriété vérifiée pour un entier l donné, et soit $s, t \in [0, (l+1)\varepsilon]$.

1^{er} cas : $s, t \in [l\varepsilon, (l+1)\varepsilon]$.

1^{er} sous-cas : $t_p \leq s < t_{p+1} < \dots < t_q \leq t < t_{q+1}$, avec $|t - s| \geq \frac{1}{M}$. Alors, d'après (7.33),

$$(\hat{\delta}y^M)_{ts} = \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} f_i(y_u^M) - y_{ts}^{M,\#}.$$

En utilisant l'estimation (7.20) (appliquée avec $X^{x,M}$), associée au fait que $\|X^x - X^{x,M}\|_{\gamma,\kappa}$ tend vers 0, on déduit d'abord aisément

$$\left\| \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} f_i(y_u^M) \right\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c_x |t - s|^\kappa \varepsilon^{\gamma-\kappa} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon]) \right\}.$$

Par ailleurs, grâce à la propriété de contraction (7.10) de $\hat{\Lambda}$, on obtient, pour tout $v < w \in [0, (l+1)\varepsilon]$

$$\|r_{wv}^M\|_{\mathcal{B}} \leq c_x |w - v|^{\gamma+\kappa} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\},$$

mais aussi

$$\|r_{wv}^M\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c_x |w - v|^\gamma \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|y_{ts}^{M,\#}\|_{\mathcal{B}_\kappa} &\leq \|r_{tt_q}^M\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|r_{st_p}^M\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|r_{t_q t_{q-1}}^M\|_{\mathcal{B}_\kappa} + c_\kappa \sum_{k=p}^{q-2} |t - t_{k+1}|^{-\kappa} \|r_{t_{k+1} t_k}^M\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq c_x \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\} \cdot \\ &\quad \left\{ |t - s|^\gamma + \frac{1}{M^{\gamma+\kappa-1}} \left(\frac{1}{M} \sum_{k=p}^{q-2} |t - t_{k+1}|^{-\kappa} \right) \right\} \\ &\leq c_x \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\} \left\{ |t - s|^\gamma + \frac{|t - s|^{1-\kappa}}{M^{\gamma+\kappa-1}} \right\} \\ &\leq c_x |t - s|^\gamma \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\}. \end{aligned}$$

2^{ème} sous-cas : $t_p \leq s < t < t_{p+1}$. Alors $(\hat{\delta}y^M)_{ts} = X_{ts}^{x,i,M} f_i(y_{t_p}^M)$, et donc

$$\|(\hat{\delta}y^M)_{ts}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c_x |t - s|^\gamma \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\}.$$

3^{ème} sous-cas : $t_p \leq s < t_{p+1} \leq t < t_{p+2}$ avec $|t - s| \leq 1/M$. Il suffit d'observer que $\|(\hat{\delta}y^M)_{ts}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \|(\hat{\delta}y^M)_{tt_{p+1}}\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|(\hat{\delta}y^M)_{t_{p+1}s}\|_{\mathcal{B}_\kappa}$, puis de se ramener au second sous-cas.

Conclusion du 1^{er} cas :

$$\mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([l\varepsilon, (l+1)\varepsilon])] \leq c_x \varepsilon^{\gamma-\kappa} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\}.$$

2^{ème} cas : $s < l\varepsilon \leq t \leq (l+1)\varepsilon$. On a $\|(\hat{\delta}y^M)_{ts}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \|(\hat{\delta}y^M)_{t,l\varepsilon}\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|(\hat{\delta}y^M)_{l\varepsilon,s}\|_{\mathcal{B}_\kappa}$, et donc, grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$\|(\hat{\delta}y^M)_{ts}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq |t - s|^\kappa \left\{ \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([l\varepsilon, (l+1)\varepsilon])] + N_l \right\}.$$

L'association des deux cas de figure conduit à

$$\mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([0, (l+1)\varepsilon])] \leq c_x \varepsilon^{\gamma-\kappa} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\} + N_l.$$

Puisque, pour tout $t \in [0, (l+1)\varepsilon]$, $\|y_t^M\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \|h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([0, (l+1)\varepsilon])]$, on déduit ensuite

$$\mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \leq \|h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + 2N_l + 2c_x \varepsilon^{\gamma-\kappa} \left\{ 1 + \mathcal{N}[y^M; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, (l+1)\varepsilon])] \right\}.$$

A partir de cette estimation, il apparaît clairement qu'il suffit de choisir ε tel que $2c_x \varepsilon^{\gamma-\kappa} = 1/2$ et de poser

$$N_{l+1} := 2\|h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + 4N_l + 1.$$

□

Remarque 7.3.13. Cette majoration uniforme permettrait sans aucun doute de montrer, via un argument de compacité, la convergence de y^M vers la solution y de (7.21), comme dans [25]. Nous établirons pour notre part directement la convergence de l'approximation $y^{M,M}$ définie par (7.25).

7.3.5 Discrétisation en espace

Il s'agit de la dernière étape. On revient ainsi à l'étude du processus $y^{M,N}$ issu du schéma général (7.25), processus que l'on prolonge continûment sur $[0, 1]$ comme dans la sous-section précédente, en adaptant légèrement (7.31). Grâce au corollaire 7.3.10, on sait qu'il suffit de contrôler la norme $\mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \mathcal{C}_1^\gamma([0, 1], \mathcal{B}_\kappa)]$, où l'on rappelle que la notation \bar{y}^M désigne l'approximation de Wong-Zakai, telle qu'elle a été définie dans la sous-section 7.3.3.

Commençons par observer que (7.25) est un cas particulier de (7.30), obtenu en remplaçant le champ $(y \mapsto f_i(y))$ par le champ $(y \mapsto P_N f_i(y))$. Ceci signifie en particulier que les deux décompositions (7.33) et (7.35) restent valables pour $y^{M,N}$, en substituant bien entendu à r^M et $y^{M,\#}$ les processus

$$r_{ts}^{M,N} := \hat{\Lambda}_{ts} (X^{x,i,M} P_N(\delta f_i(y^{M,N}))),$$

$$y_{ts}^{M,N,\#} := r_{tt_q}^{M,N} - S_{ts} r_{st_p}^{M,N} + \sum_{k=p}^{q-1} S_{tt_{k+1}} r_{t_{k+1}t_k}^{M,N},$$

pour $t_p \leq s < t_{p+1} < \dots < t_q \leq t < t_{q+1}$. Par ailleurs, dans la mesure où l'opérateur P_N est une contraction sur chaque \mathcal{B}_α , il est clair que les arguments mis en œuvre dans la preuve de la proposition 7.3.12 restent vrais dans ce contexte, ce qui permet directement d'affirmer :

Proposition 7.3.14. *Il existe une constante $c_{x,h}$ telle que pour tous $M, N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{N}[y^{M,N}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, 1])] \leq c_{x,h}.$$

Supposons à présent les hypothèses du théorème 7.3.2 satisfaites, avec en particulier $2\kappa > \gamma$ et $M = N$. La comparaison entre $y^{M,M}$ et \bar{y}^M va faire appel aux deux résultats préliminaires suivants :

Lemme 7.3.15. *Il existe une constante $c_{h,x}$ telle que si $t_p \leq s < t_{p+1} < \dots < t_q \leq t < t_{q+1}$, avec $|t - s| \geq 1/M$, alors*

$$\|y_{ts}^{M,M,\#}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \frac{c_{h,x}}{M^{\gamma+\kappa-1}} |t - s|^\kappa.$$

Démonstration. On utilise les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 7.3.12, auxquels on associe le résultat uniforme de la proposition 7.3.14, ce qui donne

$$\begin{aligned} \|y_{ts}^{M,N,\#}\|_{\mathcal{B}_\kappa} &\leq \|r_{tt_q}^{M,N}\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|r_{st_p}^{M,N}\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|r_{t_q t_{q-1}}^{M,N}\|_{\mathcal{B}_\kappa} + c_\kappa \sum_{k=p}^{q-2} |t - t_{k+1}|^{-\kappa} \|r_{t_{k+1}t_k}^{M,N}\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq c_{h,x} \left\{ \frac{1}{M^\gamma} + \frac{1}{M^{\gamma+\kappa-1}} \left(\frac{1}{M} \sum_{k=p}^{q-1} |t - t_{k+1}|^{-\kappa} \right) \right\} \\ &\leq c_{h,x} \left\{ \frac{|t - s|^\kappa}{M^{\gamma-\kappa}} + \frac{|t - s|^{1-\kappa}}{M^{\gamma+\kappa-1}} \right\} \leq c_{x,h} \frac{|t - s|^\kappa}{M^{\gamma+\kappa-1}} \end{aligned}$$

où, pour la dernière inégalité, on s'est appuyé sur le fait que $1/4 < \kappa < 1/2 < \gamma < 1$. \square

Lemme 7.3.16. *Il existe une constante $c_{h,x}$ telle que si $t_p \leq s < t_{p+1} < \dots < t_q \leq t < t_{q+1}$, avec $|t - s| \geq 1/M$, alors*

$$\left\| \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} (P_M - \text{Id}) f_i(y_u^{M,M}) \right\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \frac{c_{h,x}}{M^{2(\gamma-\kappa)}} |t - s|^\kappa.$$

Démonstration. Puisque P_M commute avec le semigroupe, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} (P_M - \text{Id}) f_i(y_u^{M,M}) \\ = X_{ts}^{x,i,M} (P_M - \text{Id}) f_i(y_s^{M,M}) + (P_M - \text{Id}) \hat{\Lambda}_{ts}(X^{x,i,M} \delta f_i(y^{M,M})). \end{aligned}$$

En utilisant à présent le lemme 7.3.9, ainsi que le contrôle uniforme donné par la proposition 7.3.14, on obtient facilement

$$\begin{aligned} \|X_{ts}^{x,i,M} (P_M - \text{Id}) f_i(y_s^{M,M})\|_{\mathcal{B}_\kappa} &\leq c_x |t - s|^{\gamma-\kappa} \|(P_M - \text{Id}) f_i(y_s^{M,M})\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq c_x \frac{|t - s|^{\gamma-\kappa}}{M^{2\kappa}} \|f_i(y_s^{M,M})\|_{\mathcal{B}_\kappa} \\ &\leq c_{h,x} \frac{|t - s|^\kappa}{M^\gamma}, \end{aligned}$$

puis

$$\|(P_M - \text{Id}) \hat{\Lambda}_{ts}(X^{x,i,M} \delta f_i(y^{M,M}))\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \frac{1}{M^{2(\gamma-\kappa)}} \|\hat{\Lambda}_{ts}(X^{x,i,M} \delta f_i(y^{M,M}))\|_{\mathcal{B}_\gamma} \leq c_{h,x} \frac{|t - s|^\kappa}{M^{2(\gamma-\kappa)}}.$$

□

Nous sommes désormais en mesure d'établir le résultat principal de cette sous-section, résultat qui, associé au corollaire 7.3.10, achève la preuve du théorème 7.3.2.

Proposition 7.3.17. *Il existe une constante $c_{h,x}$ telle que pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}(\mathcal{B}_\kappa)] \leq c_{h,x} \left\{ \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \frac{1}{M^{\gamma+\kappa-1}} \right\}. \quad (7.39)$$

Démonstration. Résultat local. On considère d'abord un intervalle $I_0 = [0, T_0]$, avec T_0 un temps que nous préciserons à la fin de cette première étape. Soit $s, t \in [0, T_0]$.

1^{er} cas : si $t_p \leq s < t < t_{p+1}$, alors

$$\hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{ts} = (\hat{\delta}\bar{y}^M)_{ts} - X_{ts}^{x,i,M} P_M f_i(y_{t_p}^{M,M}),$$

d'où

$$\|\hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{ts}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c_{h,x} |t - s|^\gamma \leq c_{h,x} \frac{|t - s|^\kappa}{M^{\gamma-\kappa}}.$$

2^{ème} cas : si $t_p \leq s < t_{p+1} \leq t < t_{p+2}$, on revient au cas précédent après avoir remarqué que

$$\|\hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{ts}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq \|\hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{tt_{p+1}}\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \|\hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{t_{p+1}s}\|_{\mathcal{B}_\kappa}.$$

3^{ème} cas : $t_p \leq s < t_{p+1} < \dots < t_q \leq t < t_{q+1}$ avec $|t - s| \geq 1/M$. Alors

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{ts} &= \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} [f_i(\bar{y}_u^M) - P_M f_i(y_u^{M,M})] + y_{ts}^{M,M,\#} \\ &= \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} [f_i(\bar{y}_u^M) - f_i(y_u^{M,M})] \\ &\quad + \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} (\text{Id} - P_M) f_i(y_u^{M,M}) + y_{ts}^{M,M,\#}. \end{aligned}$$

En se référant aux deux lemmes précédents, on peut d'abord affirmer que

$$\left\| \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} (\text{Id} - P_M) f_i(y_u^{M,M}) + y_{ts}^{M,M,\#} \right\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c_{h,x} \frac{|t - s|^\kappa}{M^{\gamma+\kappa-1}}.$$

Il n'est par ailleurs pas difficile de constater que

$$\left\| \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M} [f_i(\bar{y}_u^M) - f_i(y_u^{M,M})] \right\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c_{h,x}^1 |t - s|^\kappa T_0^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)],$$

pour une certaine constante $c_{h,x}^1$ que l'on fixe pour le reste de la preuve.

L'association des trois cas de figure mène à

$$\mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([0, T_0]; \mathcal{B}_\kappa)] \leq \frac{c_{h,x}^2}{M^{\gamma+\kappa-1}} + c_{h,x}^1 T_0^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)].$$

Pour majorer $\mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^0([0, T_0], \mathcal{B}_\kappa)]$, il suffit ensuite d'observer que $\bar{y}_s^M - y_s^{M,M} = \hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{s0} + S_{s0}(h - P_M h)$, et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0]; \mathcal{B}_\kappa)] \\ \leq \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \frac{2c_{h,x}^2}{M^{\gamma+\kappa-1}} + 2c_{h,x}^1 T_0^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0]; \mathcal{B}_\kappa)]. \end{aligned}$$

On choisit par conséquent T_0 tel que $2c_{h,x}^1 T_0^{\gamma-\kappa} = 1/2$ pour obtenir

$$\mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0]; \mathcal{B}_\kappa)] \leq 2\|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \frac{4c_{h,x}^2}{M^{\gamma+\kappa-1}}. \quad (7.40)$$

Prolongement du résultat : En suivant les mêmes étapes que dans le raisonnement local, on obtient, pour tout $\eta > 0$,

$$\mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([T_0, T_0 + \eta]; \mathcal{B}_\kappa)] \leq \frac{c_{h,x}^2}{M^{\gamma+\kappa-1}} + c_{h,x}^1 \eta^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0 + \eta], \mathcal{B}_\kappa)],$$

ce qui, associé à (7.40), entraîne

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^\kappa([0, T_0 + \eta]; \mathcal{B}_\kappa)] \\ \leq 2\|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \frac{5c_{h,x}^2}{M^{\gamma+\kappa-1}} + c_{h,x}^1 \eta^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0 + \eta], \mathcal{B}_\kappa)], \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0 + \eta]; \mathcal{B}_\kappa)] \\ & \leq 5 \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \frac{10 c_{h,x}^2}{M^{\gamma+\kappa-1}} + 2 c_{h,x}^1 \eta^{\gamma-\kappa} \mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, T_0 + \eta], \mathcal{B}_\kappa)]. \end{aligned}$$

En prenant $\eta = T_0$, on déduit alors

$$\mathcal{N}[\bar{y}^M - y^{M,M}; \hat{\mathcal{C}}_1^{0,\kappa}([0, 2T_0]; \mathcal{B}_\kappa)] \leq 10 \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \frac{20 c_{h,x}^2}{M^{\gamma+\kappa-1}}.$$

Il suffit ensuite de répéter la procédure jusqu'à ce que l'intervalle $[0, 1]$ soit recouvert. \square

7.3.6 Résultats numériques pour le mBf

Pour être en mesure d'appliquer le théorème 7.3.2 à un processus x γ -höldérien ($\gamma > 1/2$), la seule condition à vérifier est la convergence (7.15) de l'interpolation linéaire de ce processus. Grâce aux résultats du chapitre 3, nous savons que cette hypothèse est en particulier (p.s) satisfaite lorsque $x = X$ est un mBf m -dimensionnel d'indice de Hurst $H > 1/2$. En injectant le résultat du corollaire 3.1.9, l'estimation (7.26) prend la forme plus précise :

Théorème 7.3.3. *Soit X un mBf d'indice de Hurst $H > 1/2$. On fixe deux paramètres $\kappa \in (1/4, 1/2)$ et $\gamma \in (1/2, H)$ tels que $\gamma + \kappa > 1$ et $2\kappa > \gamma$, et l'on suppose que $f_i \in \mathcal{C}^{2,\mathbf{b}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$. Soit Y la solution du système*

$$(\hat{\delta}Y)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}X f(Y)) \quad , \quad Y_0 = h \in \mathcal{B}_\kappa,$$

interprété de façon trajectorielle grâce à la proposition 7.3.3, et $Y^{M,M}$ le processus issu du schéma numérique (7.25). Alors il existe une variable aléatoire $c_{\gamma,\kappa,h,X}$ finie p.s telle que, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{0 \leq p < q \leq M} \frac{\|\hat{\delta}(Y - Y^{M,M})\|_{\mathcal{B}_\kappa}}{|t_q - t_p|^\kappa} \leq c_{\gamma,\kappa,h,X} \left\{ \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_\kappa} + \frac{\sqrt{\log(M)}}{M^{H-\gamma}} + \frac{1}{M^{\gamma+\kappa-1}} \right\}. \quad (7.41)$$

En pratique, le fait que le semigroupe soit diagonalisable dans la base e_n considérée (voir les notations de la section 7.2) rend l'implémentation du schéma (7.25) très simple. En effet, en posant $Y_{t_k}^{M,M,l} := \langle Y_{t_k}^{M,M}, e_l \rangle$, on a, pour tout $l \in \{1, \dots, M\}$,

$$Y_{t_{k+1}}^{M,M,l} = e^{-\lambda_l/M} Y_{t_k}^{M,M,l} + \frac{M^2}{\lambda_l} \left\{ 1 - e^{-\lambda_l/M} \right\} \sum_{i=1}^m (\delta X^i)_{t_{k+1}t_k} \langle f_i(Y_{t_k}^{M,M}), e_l \rangle. \quad (7.42)$$

Le code Matlab qui suit rend compte d'une possible implémentation de l'algorithme, pour laquelle on a pris $m = 1$, et comme dans [58],

$$h(\xi) = \frac{1}{2} \sin(\pi\xi) + \frac{3}{5} \sin(3\pi\xi) \quad (\xi \in [0, 1]), \quad f_k(x) = \frac{k \cdot (1-x)}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (7.43)$$

Le paramètre k est ici destiné à observer l'influence de la perturbation (voir la figure 7.3.6).

La procédure simule plus précisément l'évolution en temps du processus à valeurs fonctionnelles $Y^{M,M}$. A chaque pas, les coefficients de Fourier $\langle f_i(Y_{t_k}^{M,M}), e_l \rangle$ sont approchés via la fonction

de transformation en sinus discrète **dst** (et son inverse **idst**). Quant aux incréments du mBf, ils sont calculés à l'aide (d'une version convenablement translatée) de la fonction **wfbm**, qui repose sur la décomposition du processus sur une base d'ondelettes, suivant la méthode proposée par Abry et Sellan dans [1]. Soulignons enfin le fait qu'il est possible de nuancer l'action du semigroupe en remplaçant le semigroupe de la chaleur S^Δ par $S_t := S_{\kappa t}^\Delta$, pour un certain paramètre κ . Les résultats théoriques de cette section restent bien entendu valables pour le système modifié.

```

function [l]=eigval(N)
l=[]; for i=1:N, l(i)=(pi*i)^2;end

function [S]=semigr(M,N,l,kappa)
S=[]; for i=1:N, v(i)=exp(-l(i)^2/(kappa*M));end

function=simulyoung(H,M,N,k,kappa)
l=eigval(N);S=semigr(M,N,l,kappa);
X=(1/M)^H*wfbm(H,M+1);
A=[1/2,0,3/5,zeros(1,N-3)];
u=zeros(1,N);fy=zeros(1,N);
for i=1:M
    u=dst(A(i,:));fy=0.5*idst(k*(1-u)./(1+u.^2));
    A(i+1,:)=S.*A(i,:)+((kappa./l).*(1-S))*M*(X(i+1)-X(i)).*fy;
end
E=[]; for j=1:M+1, E(j,:)=dst(A(j,:));end
plot(linspace(0,1,N+2),[0,dst([1/2,0,3/5,zeros(1,N-3)])],0);
F(1)=getframe; for p=1:M
    plot(linspace(0,1,N+2),[0,E(p+1,:),0]);
    hold off;
    F(p+1)=getframe;end
movie(F,1,2)

```

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction, il semble difficile de comparer le taux de convergence (7.41) aux résultats de Jentzen et Kloeden [55, 56, 57, 58] ou Hausenblas [53] (pour un processus de Wiener), tous exprimés à l'aide de la norme du supremum (en temps). Etant données les contraintes sur les deux paramètres κ et γ , (7.41) permet simplement d'affirmer : si $h \in V_M$,

$$\sup_{p \in \{0, \dots, M\}} \|Y_{t_p} - Y_{t_p}^{M,M}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c \frac{\log(M)}{M^{\frac{1}{2}(H-1/2)}}, \quad (7.44)$$

estimation dont la non-optimalité ne fait aucun doute.

En vue d'observer le taux de convergence effectif de l'algorithme, nous avons représenté, sur la figure 7.3.6, une simulation (moyennée sur 20 réalisations du mBf) de la fonction

$$n \mapsto \log_2 \|Y_1^{M_0, M_0} - Y_1^{2^n, 2^n}\|_{\mathcal{B}}.$$

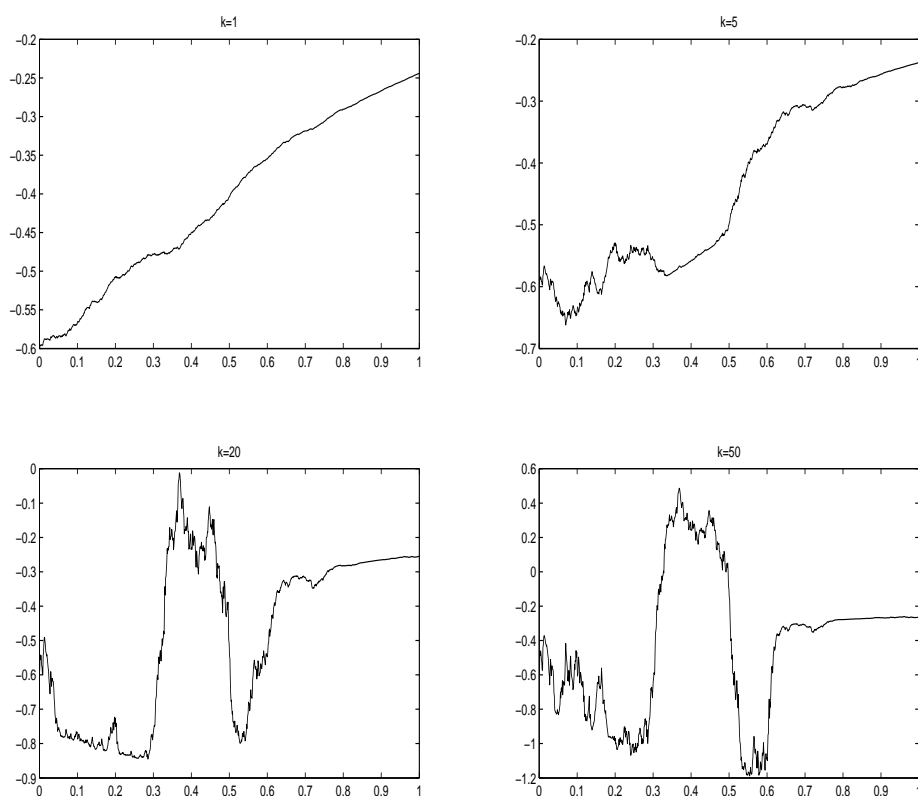


FIGURE 7.1 – Influence de la perturbation à travers l'observation du processus $t \mapsto Y_t^{M,N}(\frac{1}{2})$, pour différentes valeurs du paramètre k dans (7.43) ($k = 1, 5, 20, 50$). Ici, $M = N = 1000$, $H = 0.6$, $\kappa = 100$.

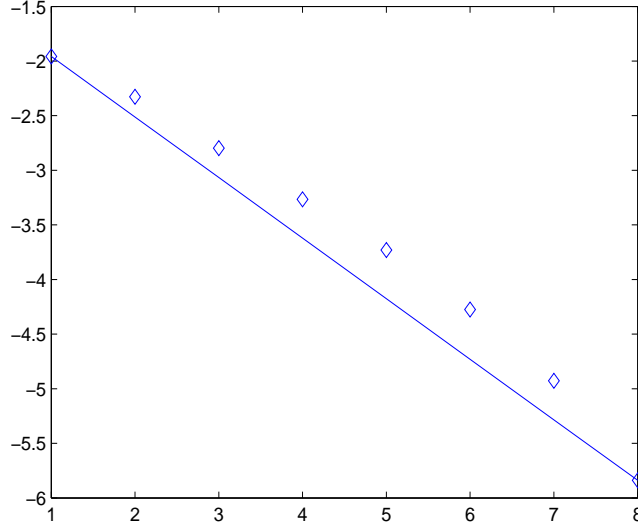


FIGURE 7.2 – Résultat de simulation pour $n \mapsto \log_2 \|Y_1^{M_0, M_0} - Y_1^{2^n, 2^n}\|_{\mathcal{B}}$. Ici, $M_0 = 2^{11}$, $H = 0.8$, $\kappa = 100$. La droite correspond à un taux de convergence théorique en n^{-H} .

Dans cette expression, M_0 désigne un entier très grand fixé, de telle sorte que Y^{M_0, M_0} puisse être légitimement considéré comme la solution "exacte" du problème. Ces résultats conduisent à la conjecture suivante :

Conjecture : Soit X un mBf m -dimensionnel d'indice de Hurst $H > 1/2$, h une condition initiale. Il existe une variable aléatoire $c_{h, X}$, finie p.s, telle que si Y désigne la solution de (7.21),

$$\sup_{p \in \{0, \dots, M\}} \|Y_{t_p} - Y_{t_p}^{M, M}\|_{\mathcal{B}_\kappa} \leq c_{h, X} \frac{\log(M)}{M^H}. \quad (7.45)$$

Nous n'avons toutefois, à ce jour, aucune idée quant à la façon de prouver une telle estimation.

7.4 Cas rugueux en présence d'un intégrant régularisé

Nous souhaitons à présent mettre en place un schéma numérique pour la configuration (ii) décrite en introduction. Nous suivrons à cette fin la même stratégie générale, et donc la même présentation, que dans la section précédente.

7.4.1 Rappel des résultats théoriques

Conformément aux considérations des sections 6.5 et 6.6, on suppose que le processus x permet la construction d'un 2-rough path $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m, m})$, pour un certain coefficient $\gamma \in (1/3, 1/2)$ fixé. L'hypothèse 13 fait ensuite logiquement place à la condition suivante :

Hypothèse 14. Soit x^M l'approximation de x définie par (7.14), et $\mathbf{x}^{2,M}$ l'aire de Lévy obtenue à partir de x^M (ie $\mathbf{x}^{2,M} := \int dx^M \otimes \delta x^M$). On admettra le résultat de convergence

$$v_M := \mathcal{N}[x - x^M; \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^{2,M}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m})] \rightarrow 0$$

lorsque M tend vers l'infini.

Particularisons à présent le résultat de la section 6.6 à ce contexte :

Lemme 7.4.1. Sous l'hypothèse 14, les trois suites de processus

$$X_{ts}^{x,i,M} := \int_s^t S_{tu} dx_u^{i,M}, \quad X_{ts}^{ax,i,M} := \int_s^t a_{tu} dx_u^{M,i}, \quad X_{ts}^{xx,ij,M} := \int_s^t S_{tu} dx_u^{M,j} (\delta x^{i,M})_{us},$$

convergent vers trois processus, notés respectivement $X^{x,i}$, $X^{ax,i}$ et $X^{xx,ij}$, relativement à la topologie des espaces suivants :

$$\text{Pour } X^{x,i,M} : \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})) \cap \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)), \quad (7.46)$$

$$\text{Pour } X^{ax,i,M} : \mathcal{C}_2^{1+\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B})), \quad (7.47)$$

$$\text{Pour } X^{xx,ij,M} : \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})) \cap \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)). \quad (7.48)$$

Les trois processus limites vérifient en outre les propriétés suivantes :

$$\hat{\delta}X^{x,i} = 0, \quad X^{x,i} = X^{ax,i} + \delta x^i, \quad \hat{\delta}X^{xx,ij} = X^{x,i}(\delta x^j). \quad (7.49)$$

$$X^{x,i}, X^{ax,i} \text{ et } X^{xx,ij} \text{ commutent avec le semigroupe et l'opérateur de projection } P_N. \quad (7.50)$$

Démonstration. Comme pour le lemme 7.3.1, il s'agit du raisonnement de la section 6.6, qui aboutit d'ailleurs aux trois expressions :

$$X_{ts}^{x,i} := S_{ts}(\delta x^i)_{ts} - \int_s^t \Delta S_{tu}(\delta x^i)_{tu} du, \quad (7.51)$$

$$X_{ts}^{ax,i} := a_{ts}(\delta x^i)_{ts} - \int_s^t \Delta S_{tu}(\delta x^i)_{tu} du, \quad (7.52)$$

$$X_{ts}^{xx,ij} := S_{ts} \mathbf{x}_{ts}^{2,ij} - \int_s^t \Delta S_{tu} \left[\mathbf{x}_{tu}^{2,ij} + (\delta x^i)_{tu} (\delta x^j)_{us} \right] du. \quad (7.53)$$

□

Notation 7.4.2. En vue de simplifier certaines estimations à venir, on pose

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}^x\|_\gamma &= \|(X^x, X^{ax}, X^{xx})\|_\gamma \\ &:= \sum_{i,j=1}^m \{ \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}))] + \mathcal{N}[X^{x,i}; \mathcal{C}_2^\gamma(\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1))] + \mathcal{N}[X^{ax,i}; \mathcal{C}_2^{1+\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}))] \\ &\quad + \mathcal{N}[X^{xx,ij}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}))] + \mathcal{N}[X^{xx,ij}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1))] \}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Proposition 7.4.3. *On fixe un intervalle $I = [l_1, l_2]$ de $[0, T]$. Pour tout $\kappa \in (1/3, \gamma)$, on introduit la classe de processus κ -contrôlés*

$$\hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa(I) := \left\{ y \in \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma(I; \mathcal{B}_1) : (\hat{\delta}y)_{ts} = X_{ts}^{x,i} y_s^{x,i} + y_{ts}^\sharp, y^{x,i} \in \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_1), y^\sharp \in \mathcal{C}_2^{2\kappa}(I; \mathcal{B}_1) \right\},$$

à laquelle on associe la seminorme

$$\mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa(I)] := \mathcal{N}[y^{x,i}; \mathcal{C}_1^0(I; \mathcal{B}_1)] + \mathcal{N}[y^{x,i}; \mathcal{C}_1^\kappa(I; \mathcal{B}_1)] + \mathcal{N}[y^\sharp; \mathcal{C}_2^{2\kappa}(I; \mathcal{B}_1)].$$

Si $y \in \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa(I)$ avec décomposition $\hat{\delta}y = X^{x,i} y^{x,i} + y^\sharp$, et si $f_i \in \mathcal{C}^{2,b}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on définit l'intégrale

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y)) &:= X_{ts}^{x,i} S_\varepsilon f_i(y_s) + X_{ts}^{xx,ij} S_\varepsilon(y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s)) \\ &\quad + \hat{\Lambda}_{ts} \left(X^{x,i} S_\varepsilon f_i(y)^\sharp + X^{xx,ij} S_\varepsilon \delta(y^{x,j} \cdot f'_i(y)) \right), \end{aligned} \quad (7.55)$$

où $f_i(y)^\sharp$ est donné par

$$\begin{aligned} f_i(y)_{ts}^\sharp &:= a_{ts} y_s \cdot f'_i(y_s) + y_{ts}^\sharp \cdot f'_i(y_s) + (X_{ts}^{ax,j} y_s^{x,j}) \cdot f'_i(y_s) \\ &\quad + \int_0^1 dr [f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(y_s)] \cdot (\delta y)_{ts}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Alors :

- $\mathcal{J}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y))$ est bien définie via le théorème 7.2.1, et pour tout $\psi \in \mathcal{B}_1$, il existe un unique élément $z \in \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa(I)$ tel que $z_0 = \psi$, $(\hat{\delta}z)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y))$.
- Si x est un processus différentiable, $\mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y))$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_s^t S_{tu} dx_u^i S_\varepsilon f_i(y_u)$.
- On dispose de l'estimation :

$$\mathcal{N}[z; \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa(I)] \leq c \|\mathbf{X}^x\|_\gamma^2 \left\{ 1 + |I|^{2(\gamma-\kappa)} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa(I)]^2 + |I|^{2(1-\kappa)} \|y_{t_1}\|_{\mathcal{B}_1}^2 \right\}, \quad (7.57)$$

où $c = c(\varepsilon)$ est une constante strictement positive.

Démonstration. Revenons sur quelques points de détails de cette preuve, les hypothèses en présence différant très légèrement de celles de l'hypothèse 11 : on ne dispose plus ici de l'effet "régularisant" de X^x qui apparaissait dans (6.68). Concentrons-nous ainsi sur le terme $X^{x,i} S_\varepsilon f_i(y)^\sharp$. Les trois premiers termes issus de la décomposition de $f_i(y)^\sharp$ ne soulèvent aucune difficulté et peuvent être directement traités, comme dans la proposition 6.5.4, à partir des conditions analytiques contenues dans (7.46) : si $s < u < t$,

$$\begin{aligned} \|X_{tu}^{x,i} S_\varepsilon(a_{us} y_s \cdot f'_i(y_s))\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \|\mathbf{X}^x\|_\gamma |t - u|^\gamma \varepsilon^{-1} \|a_{us} y_s \cdot f'_i(y_s)\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq c \|\mathbf{X}^x\|_\gamma |t - u|^\gamma |u - s| \varepsilon^{-1} \|y_s\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

$$\|X_{tu}^{x,i} S_\varepsilon(y_{us}^\sharp \cdot f'_i(y_s))\|_{\mathcal{B}_1} \leq c \|\mathbf{X}^x\|_\gamma |t - u|^\gamma |u - s|^{2\kappa} \varepsilon^{-1} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa],$$

$$\|X_{tu}^{x,i} S_\varepsilon((X_{us}^{ax,j} y_s^{x,j}) \cdot f'_i(y_s))\|_{\mathcal{B}_1} \leq c \|\mathbf{X}^x\|_\gamma^2 |t - u|^\gamma |u - s|^{1+\gamma} \varepsilon^{-1} \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa].$$

Le quatrième terme de (7.56) requiert davantage d'attention, car il met en scène un produit de deux fonctions à partir desquelles nous souhaiterions récupérer des incréments. Nous utiliserons

à cette fin l'inclusion continue $L^1(0,1) \subset \mathcal{B}_{-\kappa}$ donnée par la proposition 7.2.6, et qui, associée à la propriété (7.7), permet d'affirmer

$$\begin{aligned} & \|X_{tu}^{x,i} S_\varepsilon \left(\int_0^1 dr [f'_i(y_s + r(\delta y)_{ts}) - f'_i(y_s)] \cdot (\delta y)_{ts} \right) \|_{\mathcal{B}_1} \\ & \leq c \| \mathbf{X}^x \|_\gamma |t-u|^\gamma \varepsilon^{-1-\kappa} \| (\delta y)_{us} \cdot (\delta y)_{us} \|_{L^1(0,1)} \\ & \leq c \| \mathbf{X}^x \|_\gamma |t-u|^\gamma \varepsilon^{-1-\kappa} \| (\delta y)_{us} \|_{\mathcal{B}}^2. \end{aligned} \quad (7.58)$$

L'estimation des autres termes découlent ensuite directement des propriétés mises en évidence dans le lemme 7.4.1. \square

Remarque 7.4.4. Il peut être intéressant de remarquer que l'argument utilisé pour établir (7.58), et qui vient compenser l'absence (d'un équivalent) de l'hypothèse

$$X^{x,i} \in \mathcal{C}_2^{\gamma-n/(2p)}(\mathcal{L}(L^{p/2}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))),$$

conduit à l'apparition d'une singularité plus forte en ε ($\varepsilon^{-(1+\kappa)}$ au lieu de ε^{-1}). Ceci laisse supposer que si nous avons choisi, dans cette section et dans la section 6.5, un opérateur régularisant T plus "nuancé" que S_ε , nous aurions du ici veiller à ce que $\|T\varphi\|_{\mathcal{B}_1} \leq c_T \|\varphi\|_{\mathcal{B}_{-\kappa}}$ et plus seulement $\|T\varphi\|_{\mathcal{B}_1} \leq c_T \|\varphi\|_{\mathcal{B}}$.

On dispose alors du résultat d'existence globale et d'unicité suivant :

Théorème 7.4.1. *On fixe un paramètre $\kappa \in (1/3, \gamma)$. Si $f_i \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, alors le système*

$$y_0 = h \in \mathcal{B}_1 \quad , \quad (\hat{\delta}y)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y)), \quad (7.59)$$

interprété grâce à la proposition précédente, admet une unique solution globale y dans $\hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa([0, T])$. On dispose en outre du contrôle suivant sur y :

$$\mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa([0, T])] \leq C(\| \mathbf{X}^x \|_\gamma, \|h\|_{\mathcal{B}_1}), \quad (7.60)$$

pour une certaine fonction $C = C_\varepsilon$ croissante en ses arguments.

7.4.2 Schéma et résultat principal

A partir des considérations de la sous-section 7.4.1, la conception d'un schéma numérique d'approximation pour le système (7.59) est essentiellement basée sur l'observation suivante : Si la définition (7.55) de l'intégrale rugueuse $\mathcal{J}(\hat{d}x^i S_\varepsilon f_i(y))$ nécessite l'"enrichissement" du processus y via un processus supplémentaire y^x , la notion de solution du système peut quant à elle être exprimée indépendamment de la structure de processus contrôlés. En effet, si y est solution du système, il est clair que nous aurons nécessairement $y^x = S_\varepsilon f(y)^1$. Eu égard à cette observation, le schéma recherché s'impose naturellement : pour tous $M, N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} y_0^{M,N} = P_N h \\ y_{t_{k+1}}^{M,N} = S_{t_{k+1}t_k} y_{t_k}^{M,N} + X_{t_{k+1}t_k}^{x,i,M} P_N S_\varepsilon f_i(y_{t_k}^{M,N}) + X_{t_{k+1}t_k}^{xx,ij,M} P_N S_\varepsilon \left((S_\varepsilon P_N f_j(y_{t_k}^{M,N})) \cdot f'_i(y_{t_k}^{M,N}) \right), \end{cases} \quad (7.61)$$

1. Rappelons-nous toutefois que la résolution du système fait intervenir les espaces $\hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa$, tout comme la preuve de la proposition 7.4.6.

où $t_k = t_k^M = \frac{k}{M}$ et, comme dans la section 7.3 :

$$\begin{cases} X_{t_{k+1}t_k}^{x,i,M} := \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_{t_{k+1}u} dx_u^{M,i}, \\ X_{t_{k+1}t_k}^{xx,ij,M} := \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_{t_{k+1}u} dx_u^{M,i} (\delta x^{M,j})_{ut_k}, \end{cases}$$

x^M désignant l'interpolation linéaire de x de pas $1/M$ (définie par la formule (7.14)).

Remarque 7.4.5. Le (court) raisonnement heuristique que nous venons d'utiliser pour mettre en place (7.61) est bien entendu le même que celui qui nous avait conduit à l'introduction du schéma (3.5) pour le système standard.

Munis de l'hypothèse 14, nous sommes en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 7.4.2. *On suppose que $f_i \in C^{3,b}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Sous l'hypothèse 14, il existe une constante $c_{h,x}$ telle que, si y désigne la solution de (7.59) et $y^{M,M}$ le processus issu du schéma (7.61) en prenant $M = N$, alors, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sup_{0 \leq p < q \leq M} \frac{\|\hat{\delta}(y - y^{M,M})_{t_q t_p}\|_{\mathcal{B}_1}}{|t_q - t_p|^\gamma} \leq c_{h,x} \left\{ \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_1} + v_M + \frac{1}{M^{3\gamma-1}} \right\}. \quad (7.62)$$

Ici encore, la preuve de ce résultat sera divisée en trois sous-sections.

7.4.3 Discrétisation du processus directeur

Comme dans la sous-section 7.3.3, nous aurons recours à la continuité de l'application d'Itô pour réduire le problème à l'analyse de l'approximation de Wong-Zakai \bar{y}^M (nous utiliserons à ce propos la même notation que dans la sous-section 7.3.3) :

Proposition 7.4.6. *Soit x, \tilde{x} deux processus donnant naissance à des 2-rough paths de régularité γ , avec $\gamma \in (1/3, 1/2)$, et $h, \tilde{h} \in \mathcal{B}_1$. Si y (resp. \tilde{y}) désigne la solution du système (7.59) dirigé \mathbf{X}^x (resp. $\mathbf{X}^{\tilde{x}}$), de condition initiale h (resp. \tilde{h}), alors*

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma([0, 1]; \mathcal{B}_1)] \leq C(\|h\|_{\mathcal{B}_1}, \|\tilde{h}\|_{\mathcal{B}_1}, \|\mathbf{X}^x\|_\gamma, \|\mathbf{X}^{\tilde{x}}\|_\gamma) \left\{ \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_1} + \|\mathbf{X}^x - \mathbf{X}^{\tilde{x}}\|_\gamma \right\}, \quad (7.63)$$

pour une certaine fonction $C = C_\varepsilon$ croissante en ses arguments.

Démonstration. La preuve repose globalement sur les mêmes arguments que ceux de la preuve du théorème 2.3.1. On commence par définir, si $y \in \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa(I)$ et $\tilde{y} \in \hat{\mathcal{Q}}_{\tilde{x}}^\kappa(I)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{x,\tilde{x}}^\kappa(I)] &= \mathcal{N}[(y, y^x) - (\tilde{y}, \tilde{y}^x); \hat{\mathcal{Q}}_{x,\tilde{x}}^\kappa(I)] \\ &:= \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma(I, \mathcal{B}_1)] + \mathcal{N}[y^x - \tilde{y}^x; \mathcal{C}_1^{0,\kappa}(I, \mathcal{B}_1)] + \mathcal{N}[y^\# - \tilde{y}^\#; \mathcal{C}_2^{2,\kappa}(I, \mathcal{B}_1)]. \end{aligned}$$

On considère d'abord un temps $T_0 > 0$. A partir de la décomposition

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(y - \tilde{y})_{ts} &= \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x f(y)) - \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}\tilde{x} f(\tilde{y})) \\ &= X_{ts}^{x,i} S_\varepsilon [f_i(y_s) - f_i(\tilde{y}_s)] + [X_{ts}^{x,i} - X_{ts}^{\tilde{x},i}] S_\varepsilon f_i(\tilde{y}_s) \\ &\quad + X_{ts}^{xx,ij} S_\varepsilon [y_s^{x,j} \cdot f'_i(y_s) - \tilde{y}_s^{x,j} \cdot f'_i(\tilde{y}_s)] \\ &\quad + [X_{ts}^{xx,ij} - X_{ts}^{\tilde{x}\tilde{x},ij}] S_\varepsilon (\tilde{y}_s^{x,j} \cdot f'_i(\tilde{y}_s)) \\ &\quad + \hat{\Lambda}_{ts} \left(X_{ts}^{x,i} S_\varepsilon [f_i(y)^\# - f_i(\tilde{y})^\#] + [X_{ts}^{x,i} - X_{ts}^{\tilde{x},i}] S_\varepsilon f_i(y)^\# \right. \\ &\quad \left. + X_{ts}^{xx,ij} S_\varepsilon \delta [y_s^{x,j} \cdot f'_i(y) - \tilde{y}_s^{x,j} \cdot f'_i(\tilde{y})] \right. \\ &\quad \left. + [X_{ts}^{xx,ij} - X_{ts}^{\tilde{x}\tilde{x},ij}] S_\varepsilon \delta (\tilde{y}_s^{x,j} \cdot f'_i(\tilde{y})) \right), \end{aligned}$$

une série d'estimations élémentaires montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{x,\tilde{x}}^\kappa([kT_0, (k+1)T_0])] \\ & \leq c_{x,\tilde{x},y,\tilde{y},y_{kT_0},\tilde{y}_{kT_0}} \left\{ T_0^\kappa \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{x,\tilde{x}}^\kappa([0, T_0]) + \|\mathbf{X}^x - \mathbf{X}^{\tilde{x}}\|_\gamma + \|y_{kT_0} - \tilde{y}_{kT_0}\|_{\mathcal{B}_1} \right\}, \end{aligned} \quad (7.64)$$

avec

$$c_{x,\tilde{x},y,\tilde{y},y_{kT_0},\tilde{y}_{kT_0}} := c \left\{ 1 + \|\mathbf{X}^x\|_\gamma + \|\mathbf{X}^{\tilde{x}}\|_\gamma + \|y_{kT_0}\|_{\mathcal{B}_1}^2 + \|\tilde{y}_{kT_0}\|_{\mathcal{B}_1}^2 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa]^2 + \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{\tilde{x}}^\kappa]^2 \right\},$$

pour une certaine constante $c = c_\varepsilon > 0$. On s'appuie ensuite sur l'estimation (7.60), ainsi que sur l'inégalité

$$\|y_{kT_0}\|_{\mathcal{B}_1}^2 \leq c \left\{ \|h\|_{\mathcal{B}_1}^2 + \mathcal{N}[y; \hat{\mathcal{Q}}_x^\kappa]^2 \right\},$$

pour affirmer

$$c_{x,\tilde{x},y,\tilde{y},y_{kT_0},\tilde{y}_{kT_0}} \leq c_{x,\tilde{x},h,\tilde{h}}^1 := C(\|\mathbf{X}^x\|_\gamma, \|\mathbf{X}^{\tilde{x}}\|_\gamma, \|h\|_{\mathcal{B}_1}, \|\tilde{h}\|_{\mathcal{B}_1}),$$

où $C = C_\varepsilon$ est une certaine fonction croissante. On choisit finalement T_0 tel que $c_{x,\tilde{x},h,\tilde{h}}^1 T_0^\kappa = \frac{1}{2}$, pour pouvoir déduire de (7.64) :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{x,\tilde{x}}^\kappa([kT_0, (k+1)T_0])] & \leq 2c_{x,\tilde{x},h,\tilde{h}}^1 \left\{ \|\mathbf{X}^x - \mathbf{X}^{\tilde{x}}\|_\gamma + \|y_{kT_0} - \tilde{y}_{kT_0}\|_{\mathcal{B}_1} \right\} \\ & \leq 2c_{x,\tilde{x},h,\tilde{h}}^1 \left\{ \|\mathbf{X}^x - \mathbf{X}^{\tilde{x}}\|_\gamma + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_1} \right. \\ & \quad \left. + T_0^\kappa \sum_{l=0}^{k-1} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{x,\tilde{x}}^\kappa(lT_0, (l+1)T_0)] \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall comme dans la preuve de (7.27), on obtient, pour tout k ,

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{x,\tilde{x}}^\kappa([kT_0, (k+1)T_0])] \leq c_{x,\tilde{x},h,\tilde{h}} \left\{ \|\mathbf{X}^x - \mathbf{X}^{\tilde{x}}\|_\gamma + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{B}_1} \right\}.$$

L'inégalité (7.63) est ensuite une conséquence directe de l'estimation (obtenue à partir de (7.11))

$$\mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma([0, 1], \mathcal{B}_1)] \leq \sum_{k=0}^{N_{T_0}-1} \mathcal{N}[y - \tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_{x,\tilde{x}}^\kappa([kT_0, (k+1)T_0]),$$

où N_{T_0} représente le plus petit entier pour lequel $N_{T_0} T_0 \geq 1$, si bien que $N_{T_0} \leq 1 + \frac{1}{T_0} \leq 1 + (2c_{x,\tilde{x},h,\tilde{h}}^1)^\kappa$. □

Corollaire 7.4.7. *Il existe une constante $c_{h,x}$ telle que, si y désigne la solution de (7.59) et \bar{y}^M l'approximation de Wong-Zakai (relativement à x^M) de ce même système, alors, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathcal{N}[y - \bar{y}^M; \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma(\mathcal{B}_1)] \leq c_{h,x} v_M. \quad (7.65)$$

Démonstration. Il s'agit bien entendu d'une conséquence de l'association de (7.63) et de l'estimation

$$\|\mathbf{X}^x - \mathbf{X}^{x^M}\|_\gamma \leq c_{h,x} \left\{ \mathcal{N}[x - x^M; \mathcal{C}_1^\gamma(\mathbb{R}^m)] + \mathcal{N}[\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^{2,M}; \mathcal{C}_2^{2\gamma}(\mathbb{R}^{m,m})] \right\}.$$

Cette dernière inégalité est facile à vérifier à partir des trois expressions décrites par (7.51) et (7.53), en suivant les arguments de la preuve du lemme 7.3.9. □

Remarque 7.4.8. Comme dans le cas du système rugueux standard, ce dernier résultat donne lieu à une définition équivalente de la notion de solution du système (7.3) : Un processus $y \in \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma([0, 1], \mathcal{B}_1)$ est solution de (7.3) si pour toute suite de processus différentiables x^M qui converge vers x au sens de l'hypothèse 14, la suite y^M des solutions associées converge vers y dans $\hat{\mathcal{C}}_1^\gamma([0, 1], \mathcal{B}_1)$. Ce point de vue masque toutefois les structures sous-jacentes à la construction d'un tel y , et en particulier le rôle joué par le chemin \mathbf{X}^x .

7.4.4 Discrétisation en temps

Le schéma intermédiaire que nous souhaitons étudier dans cette sous-section est donné par :

$$\begin{cases} y_0^M = h \\ y_{t_{k+1}}^M = S_{t_{k+1}t_k} y_{t_k}^M + X_{t_{k+1}t_k}^{x,i,M} S_\varepsilon f_i(y_{t_k}^M) + X_{t_{k+1}t_k}^{xx,ij,M} S_\varepsilon (S_\varepsilon f_j(y_{t_k}^M) \cdot f'_i(y_{t_k}^M)). \end{cases} \quad (7.66)$$

En vue d'établir la convergence de ce schéma vers la solution y du problème, il serait tentant de faire appel aux mêmes arguments que dans le cas fini-dimensionnel, et plus précisément à la stratégie adoptée dans la section 3.2, basée sur les propriétés du flot du système. Nous ne pouvons malheureusement pas transposer directement cette stratégie dans ce contexte : il faut en effet tenir compte ici de la dépendance de la constante de Lipschitz qui apparaît dans (7.63) vis-à-vis des conditions initiales h, \tilde{h} , dépendance dont nous pouvons nous affranchir dans le cas des systèmes standards (comparez (7.60) à (2.29) et (7.63) à (2.30)). Pour cette raison, il devient au préalable nécessaire d'obtenir une estimation uniforme sur y^M :

Proposition 7.4.9. *Il existe une constante $c_{h,x}$ telle que, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sup_{0 \leq p < q \leq M} \frac{\|(\hat{\delta}y^M)_{t_q t_p}\|_{\mathcal{B}_1}}{|t_q - t_p|^\gamma} \leq c_{h,x}. \quad (7.67)$$

La preuve de ce résultat, dont la majeure partie est rapportée en appendix dans un souci de clarté, consiste globalement à associer au raisonnement de Davie [25] les principes de la preuve du théorème 6.5.1 (et donc indirectement de la preuve du théorème 5.4.1). Pour mettre en œuvre ces principes, commençons par introduire quelques notations.

On supposera le paramètre κ fixé dans l'intervalle $(1/3, \gamma)$. On pose ensuite

$$\eta_l^L := \frac{1}{L+l} \quad , \quad \tau_0^L := 0 \quad , \quad \tau_{l+1}^L := \tau_l^L + \eta_l^L \quad , \quad I_l^L := [\tau_l^L, \tau_{l+1}^L],$$

de telle sorte que l'intervalle $[0, 1]$ peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles I_l^L , et ce quel que soit $L \in \mathbb{N}^*$ fixé. On notera également $k_l = k_l^L$ l'indice défini par $t_{k_0} = 0$ et $t_{k_{l-1}} < \tau_l^L, t_{k_l} \geq \tau_l^L$ pour $l \geq 1$. On définit finalement, pour tous points $t_p < t_q$ d'une partition uniforme fixée,

$$J_{t_q t_p}^M := (\hat{\delta}y^M)_{t_q t_p} - X_{t_q t_p}^{x,i,M} S_\varepsilon f_i(y_{t_p}^M) - X_{t_q t_p}^{xx,ij,M} S_\varepsilon (S_\varepsilon f_j(y_{t_p}^M) \cdot f'_i(y_{t_p}^M)), \quad (7.68)$$

$$K_{t_q t_p}^M := (\hat{\delta}y^M)_{t_q t_p} - X_{t_q t_p}^{x,i,M} S_\varepsilon f_i(y_{t_p}^M). \quad (7.69)$$

Avec ces notations, nous montrerons en appendix les deux estimations :

Proposition 7.4.10. *Il existe deux paramètres α_1, α_2 positifs (qui dépendent seulement de γ, κ) et deux entiers $L = L(x, h, \alpha_1, \alpha_2)$, $M_0 = M_0(L)$, tels que, pour tout $M \geq M_0$ et tout $l \in \mathbb{N}$,*

$$\|y_{t_k}^M\|_{\mathcal{B}_1} \leq (L+l)^{\alpha_2} \quad , \quad \|J_{t_q t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} \leq (L+l)^{\alpha_1} |t_q - t_p|^{3\kappa} \quad , \quad \text{si } t_p, t_q \in I_l^L. \quad (7.70)$$

A partir de (7.70), (7.67) est une conséquence quasi-immédiate de la définition de J^M , associée aux propriétés de régularité relatives à $X^{x,M}$ et $X^{xx,M}$, telles qu'elles apparaissent dans le lemme 7.4.1. En effet, si $t_p, t_q \in I_l^L$, on déduit

$$\begin{aligned} & \|(\hat{\delta}y^M)_{t_q t_p}\|_{\mathcal{B}_1} \\ & \leq \|J_{t_q t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} + \|X_{t_q t_p}^{x,i,M} S_\varepsilon f_i(y_{t_p}^M)\|_{\mathcal{B}_1} + \|X_{t_q t_p}^{xx,ij,M} S_\varepsilon (S_\varepsilon f_j(y_{t_p}^M) \cdot f'_i(y_{t_p}^M))\|_{\mathcal{B}_1} \\ & \leq (L+l)^{\alpha_1} |t_q - t_p|^{3\kappa} + c_\varepsilon^1 \|\mathbf{X}^x\|_\gamma |t_q - t_p|^\gamma + c_\varepsilon^2 \|\mathbf{X}^x\|_\gamma |t_q - t_p|^{2\gamma} \\ & \leq c_{\varepsilon,h,x} |t_q - t_p|^\gamma. \end{aligned}$$

Le prolongement de ce résultat à tous points t_p, t_q de la partition est ensuite facile à déduire de la relation télescopique (7.11), en tenant par ailleurs compte du fait que l'intervalle $[0, 1]$ peut être recouvert par un nombre fini $A_L = A_{h,x}$ d'intervalles I_l^L successifs.

7.4.5 Discrétisation en espace

Revenons ici au schéma principal (7.61). L'opérateur de projection P_N étant contractant sur chaque \mathcal{B}_α , les arguments utilisés dans la section précédente restent valables pour $y^{M,N}$, comme le montrerait un rapide survol de la preuve de la proposition 7.4.10. Nous sommes ainsi en droit d'appliquer le résultat de cette dernière proposition à $y^{M,N}$ sans justification supplémentaire :

Proposition 7.4.11. *Il existe une constante $c_{h,x}$ telle que, pour tous $M, N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sup_{0 \leq p < q \leq M} \frac{\|(\hat{\delta}y^{M,N})_{t_q t_p}\|_{\mathcal{B}_1}}{|t_q - t_p|^\gamma} \leq c_{h,x}. \quad (7.71)$$

Avec ce résultat, il devient possible, afin de comparer $y^{M,N}$ à l'approximation de Wong-Zakai \bar{y}^M , de suivre le raisonnement de la section 3.2, à l'aide des deux notations supplémentaires suivantes :

Notation 7.4.12. *Pour tout processus x permettant la construction d'un 2-rough path de régularité γ , on notera ψ_x le flot associé au système (7.59), autrement dit : $z := \psi_x(h_1; t_0, t_1)$ si et seulement si $z = \tilde{y}_{t_1}$, où $\tilde{y} \in \hat{\mathcal{C}}_1^\gamma$ désigne l'unique solution du système*

$$\tilde{y}_{t_0} = h_1 \quad , \quad (\hat{\delta}\tilde{y})_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}x S_\varepsilon f(\tilde{y})), \quad \text{pour tous } t > s \geq t_0.$$

On notera par ailleurs ψ^M le flot numérique associé à la dynamique du schéma (7.61), c'est-à-dire : $z := \psi^M(h_1; t_p, t_q)$ si et seulement si $z = \tilde{y}_{t_q}^M$, où \tilde{y}^M est caractérisé par $\tilde{y}_{t_p}^M = h_1$ et

$$(\hat{\delta}\tilde{y}^M)_{t_{k+1}t_k} = X_{t_{k+1}t_k}^{x,i,M} S_\varepsilon f_i(\tilde{y}_{t_k}^M) + X_{t_{k+1}t_k}^{xx,ij,M} S_\varepsilon (S_\varepsilon f_j(\tilde{y}_{t_k}^M) \cdot f'_i(\tilde{y}_{t_k}^M)) \quad \text{pour tout } k \geq p.$$

Lemme 7.4.13. *Pour tout $h_1 \in \mathcal{B}_1$ et tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\|\psi_{x^M}(h_1; t_k, t_{k+1}) - \psi^M(h_1; t_k, t_{k+1})\|_{\mathcal{B}_1} \leq \frac{C(\|h_1\|_{\mathcal{B}_1}, \|\mathbf{X}^x\|_\gamma)}{M^{3\gamma}}, \quad (7.72)$$

pour une certaine fonction $C = C_\varepsilon$ croissante en ses deux arguments.

Démonstration. Observons tout d'abord que si $\tilde{y} := \psi_{x^M}(h_1; t_k, \cdot)$, on a, grâce à la décomposition (7.55),

$$\psi_{x^M}(h_1; t_k, t_{k+1}) - \psi^M(h_1; t_k, t_{k+1}) = \hat{\Lambda}_{t_{k+1}t_k}(J),$$

pour un certain élément $J \in \mathcal{C}_3^{3\gamma}(\mathcal{B}_1)$ qui vérifie

$$\mathcal{N}[J; \mathcal{C}_3^{3\gamma}(\mathcal{B}_1)] \leq C_\varepsilon (\|\mathbf{X}^x\|_\gamma) \left\{ \mathcal{N}[\tilde{y}; \hat{\mathcal{Q}}_x^k]^2 + \|h_1\|_{\mathcal{B}_1}^2 \right\}.$$

(7.72) est ensuite déduite de la propriété de contraction (7.10) et de l'estimation uniforme (7.60). \square

Lemme 7.4.14. *Pour tout $\alpha \geq 0$, il existe une constante c_α telle que*

$$\|\psi^M(y_{t_k}^{M,N}; t_k, t_{k+1}) - y_{t_{k+1}}^{M,N}\|_{\mathcal{B}_1} \leq c_\alpha \frac{\varepsilon^{-1-\alpha}}{M^\gamma N^{2\alpha}}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} & \psi^M(y_{t_k}^{M,N}; t_k, t_{k+1}) - y_{t_{k+1}}^{M,N} \\ &= X_{t_{k+1}t_k}^{x,i,M} \left((\text{Id} - P_N) S_\varepsilon f_i(y_{t_k}^{M,N}) \right) + X_{t_{k+1}t_k}^{xx,ij,M} \left((\text{Id} - P_N) S_\varepsilon \left(S_\varepsilon f_j(y_{t_k}^{M,N}) \cdot f'_i(y_{t_k}^{M,N}) \right) \right) \\ & \quad + X_{t_{k+1}t_k}^{xx,ij,M} \left(P_N S_\varepsilon \left((\text{Id} - P_N) S_\varepsilon f_j(y_{t_k}^{M,N}) \cdot f'_i(y_{t_k}^{M,N}) \right) \right) \end{aligned}$$

puis d'appliquer la propriété (7.6). \square

Nous sommes à présent en mesure d'établir le résultat principal de cette sous-section. Associé au corollaire 7.4.7, ce résultat achève la preuve du théorème 7.4.2.

Proposition 7.4.15. *Avec les notations introduites jusqu'à présent, il existe une constante $c_{h,x}$ telle que, pour tout $M \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{0 \leq p < q \leq M} \frac{\|\hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{t_q t_p}\|_{\mathcal{B}_1}}{|t_q - t_p|^\gamma} \leq c_{h,x} \left\{ \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_1} + \frac{1}{M^{3\gamma-1}} \right\} \quad (7.73)$$

Démonstration. On part de la décomposition

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(\bar{y}^M - y^{M,M})_{t_q t_p} &= \left[\psi_{x^M}(\bar{y}_{t_p}^M; t_p, t_q) - \psi_{x^M}(y_{t_p}^{M,M}; t_p, t_q) - S_{t_q t_p}(\bar{y}_{t_p}^M - y_{t_p}^{M,M}) \right] \\ & \quad + \left[\psi_{x^M}(y_{t_p}^{M,M}; t_p, t_q) - y_{t_q}^{M,M} \right] \\ &= A_{t_q t_p}^M + B_{t_q t_p}^M. \end{aligned}$$

On sait, d'après les propositions 7.4.6 et 7.4.11, que

$$\begin{aligned} \|A_{t_q t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} &\leq C(\|\mathbf{X}^x\|_\gamma, \|\bar{y}_{t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1}, \|y_{t_p}^{M,M}\|_{\mathcal{B}_1}) |t_q - t_p|^\gamma \|\bar{y}_{t_p}^M - y_{t_p}^{M,M}\|_{\mathcal{B}_1} \\ &\leq c_{x,h} |t_q - t_p|^\gamma \|\bar{y}_{t_p}^M - y_{t_p}^{M,M}\|_{\mathcal{B}_1}, \end{aligned}$$

et ce dernier incrément peut être écrit comme

$$\begin{aligned} \bar{y}_{t_p}^M - y_{t_p}^{M,M} &= [\psi_{x^M}(h; 0, t_p) - \psi_{x^M}(P_N h; 0, t_p)] \\ & \quad + [\psi_{x^M}(y_0^{M,M}; 0, t_p) - \psi_{x^M}(y_{t_p}^{M,M}; t_p, t_p)] \\ &= [\psi_{x^M}(h; 0, t_p) - \psi_{x^M}(P_N h; 0, t_p)] \\ & \quad + \sum_{k=0}^{p-1} [\psi_{x^M}(y_{t_k}^{M,M}; t_k, t_p) - \psi_{x^M}(y_{t_{k+1}}^{M,M}; t_{k+1}, t_p)] \\ &= [\psi_{x^M}(h; 0, t_p) - \psi_{x^M}(P_N h; 0, t_p)] \\ & \quad + \sum_{k=0}^{p-1} [\psi_{x^M}(\psi_{x^M}(y_{t_k}^{M,M}; t_k, t_{k+1}); t_{k+1}, t_p) - \psi_{x^M}(y_{t_{k+1}}^{M,M}; t_{k+1}, t_p)]. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau les propositions 7.4.6 et 7.4.11, on déduit

$$\|\bar{y}_{t_p}^M - y_{t_p}^{M,N}\|_{\mathcal{B}_1} \leq c_{h,x} \left\{ \|h - P_N h\|_{\mathcal{B}_1} + \sum_{k=0}^{p-1} \|\psi_{x^M}(y_{t_k}^{M,N}; t_k, t_{k+1}) - y_{t_{k+1}}^{M,N}\|_{\mathcal{B}_1} \right\}.$$

Les lemmes 7.4.13 et 7.4.14 fournissent ensuite

$$\|\psi_{x^M}(y_{t_k}^{M,N}; t_k, t_{k+1}) - y_{t_{k+1}}^{M,N}\|_{\mathcal{B}_1} \leq \frac{c_{h,x,\varepsilon}}{M^{3\gamma}},$$

ce qui permet de conclure quant à l'estimation de $\|A_{t_q t_p}^M\|$. Il suffit ensuite d'utiliser les mêmes arguments pour $\|B_{t_q t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1}$, en partant cette fois de la décomposition

$$\psi_{x^M}(y_{t_p}^{M,M}; t_p, t_q) - y_{t_q}^{M,M} = \sum_{k=p}^{q-1} \left[\psi_{x^M}(y_{t_k}^{M,M}; t_k, t_q) - \psi_{x^M}(y_{t_{k+1}}^{M,M}; t_{k+1}, t_q) \right].$$

□

7.4.6 Résultats numériques pour le mBf

L'association du théorème 7.4.2 et de l'estimation (3.15) conduit au résultat explicite suivant :

Théorème 7.4.3. *Soit $X = (X^1, \dots, X^m)$ un mBf m -dimensionnel d'indice de Hurst $H \in (1/3, 1/2]$. On fixe un coefficient $\gamma \in (1/3, H)$ et l'on suppose que $f_i \in \mathcal{C}^{3,b}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Sous ces conditions, soit Y la solution du système*

$$(\hat{\delta}Y)_{ts} = \mathcal{J}_{ts}(\hat{d}X^i S_\varepsilon f_i(Y)) \quad , \quad Y_0 = h \in \mathcal{B}_1, \quad (7.74)$$

interprété de façon trajectorielle via la proposition 7.4.3, et $Y^{M,M}$ le processus issu du schéma numérique (7.61). Alors il existe une variable aléatoire $c_{\varepsilon,\gamma,h,X}$ finie p.s, telle que, pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{0 \leq p < q \leq M} \frac{\|\hat{\delta}(Y - Y^{M,M})\|_{\mathcal{B}_1}}{|t_q - t_p|^\gamma} \leq c_{\varepsilon,\gamma,h,X} \left\{ \|h - P_M h\|_{\mathcal{B}_1} + \frac{\sqrt{\log(M)}}{M^{H-\gamma}} + \frac{1}{M^{3\gamma-1}} \right\}. \quad (7.75)$$

Passons à présent à l'implémentation concrète de ce schéma. En projetant $Y^{M,N}$ sur la $l^{\text{ème}}$ composante de la base choisie, on récupère la procédure itérative :

$$\begin{aligned} Y_{t_{k+1}}^{M,N,l} &= e^{-\lambda_l/M} y_{t_k}^{M,N,l} + M \sum_{i=1}^m (\delta X^i)_{t_{k+1}t_k} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\lambda_l(t_{k+1}-u+\varepsilon)} du \right) \langle f_i(Y_{t_k}^{M,N}), e_l \rangle \\ &\quad + M^2 \sum_{i,j=1}^m (\delta X^i)_{t_{k+1}t_k} (\delta X^j)_{t_{k+1}t_k} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\lambda_l(t_{k+1}-u+\varepsilon)} du (u - t_k) \right) \\ &\quad \langle (S_\varepsilon P_N f_j(Y_{t_k}^{M,N})) \cdot f'_i(Y_{t_k}^{M,N}), e_l \rangle. \end{aligned}$$

Le calcul des coefficients de Fourier $\langle f_i(Y_{t_k}^{M,N}), e_l \rangle$ peut s'effectuer par l'intermédiaire de la transformée en sinus discrète, comme nous l'avons fait dans le cas Young, en s'appuyant sur la formule d'approximation :

$$\langle f_i(y_{t_k}^{M,N}), e_l \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_i \left(y_{t_k}^{M,N} \left(\frac{n}{N} \right) \right) e_l \left(\frac{n}{N} \right).$$

On utilisera cette même idée pour le calcul de $\langle (S_\varepsilon P_N f_j(Y_{t_k}^{M,N})) \cdot f'_i(Y_{t_k}^{M,N}), e_l \rangle$, à partir de la formule :

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(S_\varepsilon P_N f_j(y_{t_k}^{M,N}) \right) \cdot f'_i(y_{t_k}^{M,N}), e_l \right\rangle \\ & \approx \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^N \sum_{m=0}^N e_l \binom{n}{N} e_p \binom{n}{N} e_p \binom{m}{N} e^{-\lambda_p \varepsilon} f'_i \left(y_{t_k}^{M,N} \binom{n}{N} \right) f_j \left(y_{t_k}^{M,N} \binom{m}{N} \right). \end{aligned}$$

En tenant compte de ces observations, le code Matlab suivant montre une possible implémentation de l'algorithme lorsque :

$$m = 2 \quad , \quad h(\xi) = \frac{1}{2} \sin(\pi\xi) + \frac{3}{5} \sin(3\pi\xi)$$

$$f_1(x) = \frac{1-x}{1+x^2} \quad , \quad f_2(x) = \cos(x).$$

Pour être plus précis, la fonction est conçue en vue de simuler $t \mapsto Y_t^{M,N} \left(\frac{1}{2} \right)$.

```

function [l]=eigval(N)
l=[]; for i=1:N, l(i)=(pi*i)^2;end

function [S]=semigr(M,N,l,kappa)
S=[]; for i=1:N, v(i)=exp(-l(i)^2/(kappa*M));end

function []=simulrough(H,M,N,kappa,ep)
l=eigval(N); C=semigr(M,N,l,kappa);
X1=(1/M)^H*wfbm(H,M+1); X2=(1/M)^H*wfbm(H,M+1);
De=(kappa./l).*(exp(-(ep*(1/kappa)))
    -exp(-((1/m)+ep)*(1/kappa)));
Dde=(kappa./(M*l)).*exp(-ep*(1/kappa))-(kappa^2)./(1.^2)
    .*(exp(-(ep*(1/kappa)))-exp(-((1/M)+ep)*(1/kappa)));
Se=exp(-ep*l);A=[1/2,0,3/5,zeros(1,N-3)];
for i=1:M
    u=dst(A(i,:)); fy1=0.5*idst((1-u)./(1+u.^2));
    fpu1=(u.^2-2*u-1)./((1+u.^2).^2);
    fy2=0.5*idst(cos(u)); fpu2=sin(u);
    w1=Se.*fy1; u1=dst(w1);
    w2=Se.*fy2; u2=dst(w2);
    v11=fpu1.*u1; x11=0.5*idst(v11);
    v12=fpu1.*u2; x12=0.5*idst(v12);
    v21=fpu2.*u1; x21=0.5*idst(v21);
    v22=fpu2.*u2; x22=0.5*idst(v22);
A(i+1,:)=C.*A(i,:)+(m*(X1(i+1)-X1(i))*De).*fy1
    +(m*(X2(i+1)-X2(i))*De).*fy2
    +(m^2*((X1(i+1)-X1(i))^2)*Dde).*x11
    +(m^2*((X2(i+1)-X2(i))^2)*Dde).*x22
    +(m^2*((X1(i+1)-X1(i))*
        (X2(i+1)-X2(i)))*Dde).*x12

```

```

+(m^2*((X1(i+1)-X1(i))*
        (X2(i+1)-X2(i)))*Dde).*x21;
end
y=zeros(1,M+1);
for j=1:(M+1)
for l=1:((N-1)/2)
    y(j)=y(j)+A(j,2*l+1)*(-1)^l;
end
end
plot(linspace(0,1,M+1),y)

```

Comme dans le cas Young, permettons-nous finalement une conjecture quant au taux de convergence effectif de l'algorithme relativement à la norme du supremum (en temps), à partir de l'observation de l'erreur empirique moyenne obtenue pour 10 réalisations du mBf (voir la figure 7.4.6).

Conjecture : Avec les notations du théorème 7.4.3, il existe une variable aléatoire $c_{h,X}$ finie p.s telle que

$$\sup_{p \in \{0, \dots, M\}} \|Y_{t_p} - Y_{t_p}^{M,M}\|_{\mathcal{B}_1} \leq c \frac{\log(M)}{M^{2H-1/2}}. \quad (7.76)$$

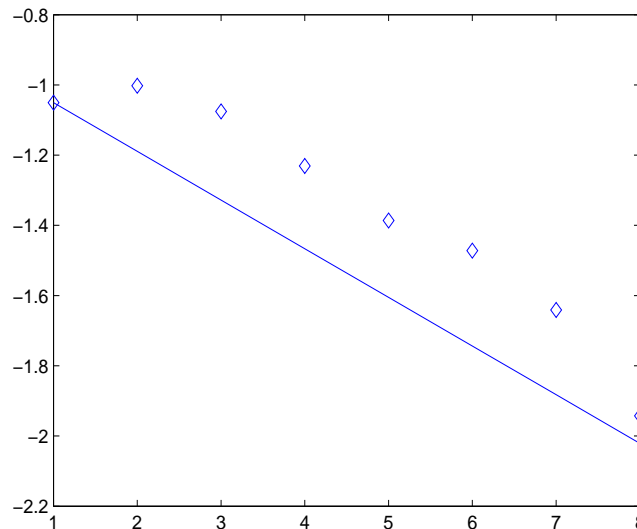


FIGURE 7.3 – Résultat de simulation pour $n \mapsto \log_2 \|Y_1^{M_0, M_0} - Y_1^{2^n, 2^n}\|_{\mathcal{B}}$. Ici, $M_0 = 2^{11}$, $H = 0.35$, $\kappa = 100$. La droite correspond à un taux de convergence théorique en $n^{-(2H-1/2)}$.

7.5 Appendix

Il reste à établir la preuve de la proposition 7.4.10, qui avait été laissée en suspens. Le développement de $\hat{\delta}J^M$ qui suit se révélera indispensable au cours du raisonnement :

Lemme 7.5.1. *Avec les notations de la sous-section 7.4.4, on a, pour tous $0 \leq k < l < m \leq M$,*

$$\begin{aligned}
(\hat{\delta}J^M)_{t_m t_l t_k} &= X_{t_m t_l}^{x,i,M} S_\varepsilon \left\{ \int_0^1 dr f'_i(y_{t_k}^M + r(\delta y^M)_{t_l t_k}) \cdot K_{t_l t_k}^M \right\} \\
&+ X_{t_m t_l}^{x,i,M} S_\varepsilon \left\{ (\delta x^j)_{t_l t_k} \int_0^1 dr [f'_i(y_{t_k}^M + r(\delta y^M)_{t_l t_k}) - f'_i(y_{t_k}^M)] \cdot S_\varepsilon f_j(y_{t_k}^M) \right\} \\
&\quad + X_{t_m t_l}^{xx,ij,M} S_\varepsilon \delta (S_\varepsilon f_j(y^M) \cdot f'_i(y^M))_{t_l t_k} \\
&+ X_{t_m t_l}^{x,i,M} S_\varepsilon \left\{ \int_0^1 dr f'_i(y_{t_k}^M + r(\delta y^M)_{t_l t_k}) \cdot a_{t_l t_k} y_{t_k}^M \right\} \\
&\quad + X_{t_m t_l}^{x,i,M} S_\varepsilon \left\{ \int_0^1 dr f'_i(y_{t_k}^M + r(\delta y^M)_{t_l t_k}) \cdot X_{t_l t_k}^{ax,i,M} S_\varepsilon f_i(y_{t_k}^M) \right\}. \quad (7.77)
\end{aligned}$$

Démonstration. Il ne s'agit que de développements algébriques et analytiques standards, amorcés par la relation (6.18). \square

Preuve de la proposition 7.4.10. On procède par récurrence sur l . Les trois paramètres α_1, α_2, L seront déterminés au cours du raisonnement. Par ailleurs, pour tout $L \geq 1$, on sait que l'intervalle $[0, 1]$ peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles $I_0^L, I_1^L, \dots, I_{A_L}^L$. La récurrence s'achèvera à l'étape $l = A_L$ et, pour des raisons qui deviendront claires durant l'étape d'hérédité, on prend $M_0(L) := L + A_L$.

Initialisation : $l = 0$. Une première condition s'impose d'emblée sur L : $\|h\|_{\mathcal{B}_1} \leq L^{\alpha_2}$. Ensuite, sur $I_0^L = [0, \tau_1^L]$, montrons par récurrence sur q : pour tout $t_q \leq \tau_1^L$ et tout $t_p < t_q$, $\|J_{t_q t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} \leq L^{\alpha_1} |t_q - t_p|^{3\kappa}$. Pour $q = 1$, on utilise le fait que, par définition de y^M , $J_{t_1 t_0}^M = 0$. Supposons l'inégalité vérifiée pour tout $\tilde{q} \leq q$ et $t_{q+1} \leq \tau_1^L$. Let $t_p < t_{q+1}$. On considère l'indice $m = m(p, q + 1)$ tel que $|t_m - t_p| \leq \frac{1}{2} |t_{q+1} - t_p|$, $|t_{q+1} - t_{m+1}| \leq \frac{1}{2} |t_{q+1} - t_p|$. De cette façon,

$$\begin{aligned}
\|J_{t_{q+1} t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \|J_{t_q t_m}^M\|_{\mathcal{B}_1} + \|J_{t_m t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} + \|(\hat{\delta}J^M)_{t_{q+1} t_m t_p}\|_{\mathcal{B}_1} + \|(\hat{\delta}J^M)_{t_{q+1} t_q t_m}\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq 2^{1-3\kappa} L^{\alpha_1} |t_{q+1} - t_p|^{3\kappa} + \|(\hat{\delta}J^M)_{t_{q+1} t_m t_p}\|_{\mathcal{B}_1} + \|(\hat{\delta}J^M)_{t_{q+1} t_q t_m}\|_{\mathcal{B}_1}.
\end{aligned}$$

En utilisant à présent la décomposition (7.77), il est facile de vérifier que si $s < u < t$ sont trois points de la partition uniforme de $[0, 1]$ de pas $\frac{1}{M}$, alors

$$\begin{aligned}
\|(\hat{\delta}J^M)_{tus}\|_{\mathcal{B}_1} &\leq c_x^1 |t - u|^\gamma \|K_{us}^M\|_{\mathcal{B}_1} + c_x^2 |t - u|^\gamma |u - s|^\gamma \|(\hat{\delta}y^M)_{us}\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\quad + c_x^3 |t - u|^\gamma |u - s|^\gamma |u - s| \|y_s^M\|_{\mathcal{B}_1} + c_x^4 |t - u|^{2\gamma} \|(\hat{\delta}y^M)_{us}\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\quad + c_x^5 |t - u|^{2\gamma} |u - s| \|y_s^M\|_{\mathcal{B}_1} + c_x^6 |t - u|^\gamma |u - s| \|y_s^M\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\quad + c_x^7 |t - u|^\gamma |u - s|^{1+\gamma}.
\end{aligned}$$

Notez que dans un souci de clarté, nous n'avons pas explicité la dépendance vis-à-vis du paramètre ε dans cette dernière estimation. Ce sera également le cas dans le reste de la preuve.

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\|K_{t_m t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \|X_{t_m t_p}^{xx,ij} S_\varepsilon (S_\varepsilon f_j(y_{t_p}^M) \cdot f'_i(y_{t_p}^M))\|_{\mathcal{B}_1} + \|J_{t_m t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq c_x^8 |t_m - t_p|^{2\gamma} + |t_m - t_p|^{2\gamma} L^{\alpha_1} (\eta_0^L)^{3\kappa-2\gamma}
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
\|(\hat{\delta}y^M)_{t_m t_p}\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \|X_{t_m t_p}^{x,i} S_\varepsilon f_i(y_{t_p}^M)\|_{\mathcal{B}_1} + \|X_{t_m t_p}^{xx,ij} S_\varepsilon (S_\varepsilon f_j(y_{t_p}^M) \cdot f'_i(y_{t_p}^M))\|_{\mathcal{B}_1} + \|J_{t_m t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} \\
&\leq c_x^9 |t_m - t_p|^\gamma + |t_m - t_p|^\gamma L^{\alpha_1} (\eta_0^L)^{3\kappa-\gamma}.
\end{aligned}$$

En outre,

$$\|y_{t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} \leq \|h\|_{\mathcal{B}_1} + \|(\hat{\delta}y^M)_{t_p 0}\|_{\mathcal{B}_1} \leq \|h\|_{\mathcal{B}_1} + c_x^{10}(\eta_0^L)^\gamma + L^{\alpha_1}(\eta_0^L)^{3\kappa},$$

et nous déduisons par conséquent

$$\|(\hat{\delta}J^M)_{t_{q+1}t_m t_p}\|_{\mathcal{B}_1} \leq |t_{q+1} - t_p|^{3\kappa} \{c_x^{11} + c_x^{12}L^{\alpha_1}(\eta_0^L)^\gamma + c_x^{13}(\eta_0^L)^{1+\gamma-3\kappa}\|h\|_{\mathcal{B}_1}\}.$$

Avec les mêmes arguments, une estimation similaire peut être obtenue pour $\|(\hat{\delta}J^M)_{t_{q+1}t_q t_m}\|_{\mathcal{B}_1}$, de telle sorte que

$$\|J_{t_{q+1}t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} \leq |t_{q+1} - t_p|^{3\kappa} \{L^{\alpha_1}2^{1-3\kappa} + c_x^{14} + c_x^{15}L^{\alpha_1}(\eta_0^L)^\gamma + c_x^{16}(\eta_0^L)^{1+\gamma-3\kappa}L^{\alpha_2}\}.$$

Cette inégalité conduit aux deux hypothèses :

$$L^{\alpha_1}(\eta_0^L)^\gamma \leq 1 \quad , \quad L^{\alpha_1}(1 - 2^{1-3\kappa}) \geq c_x^{14} + c_x^{15} + c_x^{16}(\eta_0^L)^{1+\gamma-3\kappa}L^{\alpha_2}.$$

La première hypothèse est satisfaite si $\alpha_1 < \gamma$. Quant à la seconde, elle est équivalente à

$$c_x^{17}L^{-\alpha_1} + c_x^{18}L^{-(\alpha_1-\alpha_2+1+\gamma-3\kappa)} \leq 1,$$

relation qui peut être vérifiée pour L assez grand, pourvu que $\alpha_1 - \alpha_2 + 1 + \gamma - 3\kappa > 0$, c'est-à-dire $\alpha_2 < 1 + \alpha_1 + \gamma - 3\kappa$.

Sous ces conditions, on récupère finalement $\|J_{t_{q+1}t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} \leq L^{\alpha_1}|t_{q+1} - t_p|^{3\kappa}$, ce qui achève la récurrence sur q et donc la phase d'initialisation de la récurrence sur l .

Hérédité. On suppose la propriété vérifiée pour un certain $l \geq 0$ fixé. On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \|y_{t_{k_l+1}}^M\|_{\mathcal{B}_1} &\leq \|y_{t_{k_l}}^M\|_{\mathcal{B}_1} + \|(\hat{\delta}y^M)_{t_{k_l+1}t_{k_l+1-1}}\|_{\mathcal{B}_1} + \|(\hat{\delta}y^M)_{t_{k_l+1-1}t_{k_l}}\|_{\mathcal{B}_1} \\ &\leq (L+l)^{\alpha_2} + \|(\hat{\delta}y^M)_{t_{k_l+1}t_{k_l+1-1}}\|_{\mathcal{B}_1} + \|(\hat{\delta}y^M)_{t_{k_l+1-1}t_{k_l}}\|_{\mathcal{B}_1} \\ &\leq (L+l)^{\alpha_2} + c_x^{19}M^{-\gamma} + c_x^{20}(\eta_l^L)^\gamma + (\eta_l^L)^{3\kappa}(L+l)^{\alpha_1} \\ &\leq (L+l)^{\alpha_2} + c_x^{21}(\eta_l^L)^\gamma + (\eta_l^L)^{3\kappa}(L+l)^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Notez que pour majorer $\|(\hat{\delta}y^M)_{t_{k_l+1}t_{k_l+1-1}}\|_{\mathcal{B}_1}$ dans la troisième inégalité, nous avons simplement utilisé le fait que

$$(\hat{\delta}y^M)_{t_{k_l+1}t_{k_l+1-1}} = X_{t_{k_l+1}t_{k_l+1-1}}^{x,i} S_\varepsilon f_i(y_{t_{k_l+1-1}}^M) + X_{t_{k_l+1}t_{k_l+1-1}}^{xx,ij} S_\varepsilon((S_\varepsilon f_j(y_{t_{k_l+1-1}}^M)) \cdot f'_i(y_{t_{k_l+1-1}}^M)).$$

Observons maintenant l'équivalence

$$\frac{(L+l+1)^{\alpha_2} - (L+l)^{\alpha_2}}{c_x^{21}(L+l)^{-\gamma} + (L+l)^{\alpha_1-3\kappa}} \sim_{L \rightarrow \infty} \frac{\alpha_2(L+l)^{\alpha_2-1}}{c_x^{21}(L+l)^{-\gamma} + (L+l)^{\alpha_1-3\kappa}}.$$

Cette propriété implique en particulier que si L est assez grand, $\|y_{t_{k_l+1}}^M\|_{\mathcal{B}_1} \leq (L+l+1)^{\alpha_2}$, pourvu que $\alpha_2 - 1 + \gamma > 0$ et $\alpha_2 - 1 - \alpha_1 + 3\kappa > 0$, ce qui se résume en fait à $\alpha_2 > 1 - \gamma$ puisque nous avons déjà supposé $\alpha_1 < \gamma$.

La vérification de $\|J_{t_q t_p}^M\|_{\mathcal{B}_1} \leq (L+l+1)^{\alpha_1}|t_q - t_p|^{3\kappa}$ s'effectue ensuite exactement comme dans la phase d'initialisation, en remplaçant h par $y_{t_{k_l+1}}^M$.

En résumé, les conditions à imposer aux deux paramètres α_1 et α_2 sont retranscrites par trois inégalités :

$$0 < \alpha_1 < \gamma \quad , \quad 1 - \gamma < \alpha_2 < 1 + \alpha_1 + \gamma - 3\kappa.$$

Il n'est pas difficile de se convaincre que ces conditions peuvent effectivement être satisfaites si l'on choisit d'abord $\alpha_1 \in (\kappa, \gamma)$, puisque dans ce cas

$$(1 + \alpha_1 + \gamma - 3\kappa) - (1 - \gamma) = \alpha_1 + 2\gamma - 3\kappa > 2(\gamma - \kappa) > 0.$$

□

Bibliographie

- [1] P. Abry and F. Sellan. The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer : remarks and fast implementation. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 3(4) :377–383, 1996.
- [2] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [3] E. Alòs and D. Nualart. Anticipating stochastic Volterra equations. *Stochastic Process. Appl.*, 72(1) :73–95, 1997.
- [4] X. Bardina and M. Jolis. Multiple fractional integral with Hurst parameter less than $\frac{1}{2}$. *Stochastic Process. Appl.*, 116(3) :463–479, 2006.
- [5] M. A. Berger and V. J. Mizel. Volterra equations with Itô integrals. I. *J. Integral Equations*, 2(3) :187–245, 1980.
- [6] M. A. Berger and V. J. Mizel. Volterra equations with Itô integrals. II. *J. Integral Equations*, 2(4) :319–337, 1980.
- [7] M. Besalú and C. Rovira. Stochastic Volterra equations driven by fractional Brownian motion with Hurst parameter $H > 1/2$. *ArXiv e-prints*, 2010.
- [8] F. Biagini, Y. Hu, B. Øksendal, and T. Zhang. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag London Ltd., London, 2008.
- [9] Z. Brzeźniak and K. D. Elworthy. Stochastic differential equations on Banach manifolds. *Methods Funct. Anal. Topology*, 6(1) :43–84, 2000.
- [10] M. Caruana and P. Friz. Partial differential equations driven by rough paths. *J. Differential Equations*, 247(1) :140–173, 2009.
- [11] M. Caruana, P. Friz, and H. Oberhauser. A (rough) pathwise approach to a class of non-linear stochastic partial differential equations. *A paraître dans Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*
- [12] K. Chen. Iterated integrals and exponential homomorphisms. *Proc. London Math. Soc.* (3), 4 :502–512, 1954.
- [13] K. Chen. Algebraization of iterated integration along paths. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :975–978, 1967.
- [14] K. Chen. Iterated path integrals and generalized paths. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :935–938, 1967.
- [15] J. M. C. Clark and R. J. Cameron. The maximum rate of convergence of discrete approximations for stochastic differential equations. In *Stochastic differential systems (Proc. IFIP-WG 7/1 Working Conf., Vilnius, 1978)*, volume 25 of *Lecture Notes in Control and Information Sci.*, pages 162–171. Springer, Berlin, 1980.

- [16] W. G. Cochran, J. Lee, and J. Potthoff. Stochastic Volterra equations with singular kernels. *Stochastic Process. Appl.*, 56(2) :337–349, 1995.
- [17] L. Coutin and L. Decreusefond. Stochastic Volterra equations with singular kernels. In *Stochastic analysis and mathematical physics*, volume 50 of *Progr. Probab.*, pages 39–50. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [18] L. Coutin, P. Friz, and N. Victoir. Good rough path sequences and applications to anticipating stochastic calculus. *Ann. Probab.*, 35(3) :1172–1193, 2007.
- [19] L. Coutin and A. Lejay. Semi-martingales and rough paths theory. *Electron. J. Probab.*, 10 :no. 23, 761–785 (electronic), 2005.
- [20] L. Coutin and Z. Qian. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probab. Theory Related Fields*, 122(1) :108–140, 2002.
- [21] L. Coutin and N. Victoir. Enhanced Gaussian processes and applications. *ESAIM Probab. Stat.*, 13 :247–260, 2009.
- [22] A. B. Cruzeiro, P. Malliavin, and A. Thalmaier. Geometrization of Monte-Carlo numerical analysis of an elliptic operator : strong approximation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(6) :481–486, 2004.
- [23] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [24] R. C. Dalang. Extending the martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous s.p.d.e.’s. *Electron. J. Probab.*, 4 :no. 6, 29 pp. (electronic), 1999.
- [25] A. M. Davie. Differential equations driven by rough paths : an approach via discrete approximation. *Appl. Math. Res. Express. AMRX*, (2) :Art. ID abm009, 40, 2007.
- [26] A. Deya. Numerical schemes for the rough heat equation. *ArXiv e-prints*, 2010.
- [27] A. Deya, M. Gubinelli, and S. Tindel. Non-linear rough heat equations. *A paraître dans Probab. Theory Related Fields*.
- [28] A. Deya, A. Neuenkirch, and S. Tindel. A Milstein-type scheme without Levy area terms for SDEs driven by fractional Brownian motion. *A paraître dans Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*
- [29] A. Deya and S. Tindel. Rough Volterra equations 2 : Convolutional generalized integrals. *ArXiv e-prints*, 2008.
- [30] A. Deya and S. Tindel. Rough Volterra equations 1 : The algebraic integration setting. *Stoch. Dyn.*, 9(3) :437–477, 2009.
- [31] H. Doss. Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 13(2) :99–125, 1977.
- [32] K. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.
- [33] D. Feyel and A. de La Pradelle. Curvilinear integrals along enriched paths. *Electron. J. Probab.*, 11 :no. 34, 860–892 (electronic), 2006.
- [34] D. Feyel, A. de La Pradelle, and G. Mokobodzki. A non-commutative sewing lemma. *Electron. Commun. Probab.*, 13 :24–34, 2008.

- [35] P. Friz and N. Victoir. Approximations of the Brownian rough path with applications to stochastic analysis. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(4) :703–724, 2005.
- [36] P. Friz and N. Victoir. A note on the notion of geometric rough paths. *Probab. Theory Related Fields*, 136(3) :395–416, 2006.
- [37] P. Friz and N. Victoir. A variation embedding theorem and applications. *J. Funct. Anal.*, 239(2) :631–637, 2006.
- [38] P. Friz and N. Victoir. The Burkholder-Davis-Gundy inequality for enhanced martingales. In *Séminaire de probabilités XLI*, volume 1934 of *Lecture Notes in Math.*, pages 421–438. Springer, Berlin, 2008.
- [39] P. Friz and N. Victoir. Euler estimates for rough differential equations. *J. Differential Equations*, 244(2) :388–412, 2008.
- [40] P. Friz and N. Victoir. On uniformly subelliptic operators and stochastic area. *Probab. Theory Related Fields*, 142(3-4) :475–523, 2008.
- [41] P. Friz and N. Victoir. *Multidimensional dimensional processes seen as rough paths*. Cambridge University Press, 2010.
- [42] Peter Friz and Nicolas Victoir. Differential equations driven by Gaussian signals. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(2) :369–413, 2010.
- [43] M. Gradinaru and I. Nourdin. Approximation at first and second order of m -order integrals of the fractional Brownian motion and of certain semimartingales. *Electron. J. Probab.*, 8 :no. 18, 26 pp. (electronic), 2003.
- [44] M. Gradinaru and I. Nourdin. Milstein’s type schemes for fractional SDEs. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(4) :1085–1098, 2009.
- [45] M. Gradinaru, I. Nourdin, F. Russo, and P. Vallois. m -order integrals and generalized Itô’s formula : the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(4) :781–806, 2005.
- [46] M. Gubinelli. Controlling rough paths. *J. Funct. Anal.*, 216(1) :86–140, 2004.
- [47] M. Gubinelli. Rough solutions for the periodic Korteweg-de Vries equation. *ArXiv e-prints*, 2006.
- [48] M. Gubinelli. Abstract integration, Combinatorics of Trees and Differential Equations. *ArXiv e-prints*, 2008.
- [49] M. Gubinelli. Ramification of rough paths. *Journal of Differential Equations*, 248(4) :693 – 721, 2010.
- [50] M. Gubinelli, A. Lejay, and S. Tindel. Young integrals and SPDEs. *Potential Anal.*, 25(4) :307–326, 2006.
- [51] M. Gubinelli and S. Tindel. Rough evolution equations. *Ann. Probab.*, 38(1) :1–75, 2010.
- [52] I. Gyöngy. Lattice approximations for stochastic quasi-linear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise. II. *Potential Anal.*, 11(1) :1–37, 1999.
- [53] E. Hausenblas. Approximation for semilinear stochastic evolution equations. *Potential Anal.*, 18(2) :141–186, 2003.
- [54] F. Hirsch. Lipschitz functions and fractional Sobolev spaces. *Potential Anal.*, 11(4) :415–429, 1999.
- [55] A. Jentzen and P. E. Kloeden. The numerical approximation of stochastic partial differential equations. *Milan J. Math.*, 77 :205–244, 2009.

- [56] A. Jentzen and P. E. Kloeden. Overcoming the order barrier in the numerical approximation of stochastic partial differential equations with additive space-time noise. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 465(2102) :649–667, 2009.
- [57] A. Jentzen and P. E. Kloeden. Taylor expansions of solutions of stochastic partial differential equations with additive noise. *Ann. Probab.*, 38(2) :532–569, 2010.
- [58] A. Jentzen, P. E. Kloeden, and G. Winkel. Efficient simulation of non-linear parabolic spdes with additive noise. *A paraître dans The Annals of Applied Probability*.
- [59] P. E. Kloeden and E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [60] S. C. Kou. Stochastic modeling in nanoscale biophysics : subdiffusion within proteins. *Ann. Appl. Stat.*, 2(2) :501–535, 2008.
- [61] S. C. Kou and X. Sunney-Xie. Generalized langevin equation with fractional gaussian noise : subdiffusion within a single protein molecule. *Phys. Rev. Lett.*, 93(18), 2004.
- [62] A. Lejay. An introduction to rough paths. In *Séminaire de Probabilités XXXVII*, volume 1832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–59. Springer, Berlin, 2003.
- [63] A. Lejay. On rough differential equations. *Electron. J. Probab.*, 14 :no. 12, 341–364, 2009.
- [64] A. Lejay and N. Victoir. On (p, q) -rough paths. *J. Differential Equations*, 225(1) :103–133, 2006.
- [65] M. Lewin. On a stochastic Volterra equation. *Bul. Inst. Politehn. Iași (N.S.)*, 23(27)(3-4) :43–47, 1977.
- [66] T. Lyons. Differential equations driven by rough signals. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14(2) :215–310, 1998.
- [67] T. Lyons, M. Caruana, and T. Lévy. *Differential equations driven by rough paths*, volume 1908 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007. Lectures from the 34th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–24, 2004, With an introduction concerning the Summer School by Jean Picard.
- [68] T. Lyons and Z. Qian. *System control and rough paths*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2002. Oxford Science Publications.
- [69] B. Mandelbrot and J. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10 :422–437, 1968.
- [70] B. Maslowski and D. Nualart. Evolution equations driven by a fractional Brownian motion. *J. Funct. Anal.*, 202(1) :277–305, 2003.
- [71] A. Millet and M. Sanz-Solé. Approximation of rough paths of fractional Brownian motion. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V*, volume 59 of *Progr. Probab.*, pages 275–303. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [72] G. N. Milstein and M. V. Tretyakov. *Stochastic numerics for mathematical physics*. Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [73] Y. Mishura and G. Shevchenko. The rate of convergence for Euler approximations of solutions of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion. *Stochastics*, 80(5) :489–511, 2008.
- [74] A. Neuenkirch and I. Nourdin. Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion. *J. Theoret. Probab.*, 20(4) :871–899, 2007.

- [75] A. Neuenkirch, I. Nourdin, and S. Tindel. Delay equations driven by rough paths. *Electron. J. Probab.*, 13 :no. 67, 2031–2068, 2008.
- [76] A. Neuenkirch, S. Tindel, and J. Unterberger. Discretizing the fractional Lévy area. *Stochastic Process. Appl.*, 120(2) :223–254, 2010.
- [77] I. Nourdin. Schémas d’approximation associés à une équation différentielle dirigée par une fonction höldérienne ; cas du mouvement brownien fractionnaire. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(8) :611–614, 2005.
- [78] I. Nourdin. A simple theory for the study of SDEs driven by a fractional Brownian motion, in dimension one. In *Séminaire de probabilités XLI*, volume 1934 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–197. Springer, Berlin, 2008.
- [79] I. Nourdin and T. Simon. Correcting Newton-Côtes integrals by Lévy areas. *Bernoulli*, 13(3) :695–711, 2007.
- [80] D. Nualart. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. In *Stochastic models (Mexico City, 2002)*, volume 336 of *Contemp. Math.*, pages 3–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [81] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
- [82] D. Nualart and A. Răşcanu. Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collect. Math.*, 53(1) :55–81, 2002.
- [83] D. Nualart and C. Rovira. Large deviations for stochastic Volterra equations. *Bernoulli*, 6(2) :339–355, 2000.
- [84] D. Nualart and S. Tindel. A construction of the rough path above fractional Brownian motion using Volterra’s representation. *A paraître dans Annals of Probability*.
- [85] D. Odde, E. Tanaka, S. Hawkins, and H. Buettner. Stochastic dynamics of the nerve growth cone and its microtubules during neurite outgrowth. *Biotechnol. and Bioeng.*, 50(4) :452–461, 1996.
- [86] B. Øksendal and T. S. Zhang. The stochastic Volterra equation. In *Barcelona Seminar on Stochastic Analysis (St. Feliu de Guíxols, 1991)*, volume 32 of *Progr. Probab.*, pages 168–202. Birkhäuser, Basel, 1993.
- [87] E. Pardoux and P. Protter. Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients. *Ann. Probab.*, 18(4) :1635–1655, 1990.
- [88] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [89] S. Peszat and J. Zabczyk. Nonlinear stochastic wave and heat equations. *Probab. Theory Related Fields*, 116(3) :421–443, 2000.
- [90] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov. *Handbook of integral equations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, second edition, 2008.
- [91] P. Protter. Volterra equations driven by semimartingales. *Ann. Probab.*, 13(2) :519–530, 1985.
- [92] L. Quer-Sardanyons and S. Tindel. The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet. *Stochastic Process. Appl.*, 117(10) :1448–1472, 2007.
- [93] F. Russo and P. Vallois. Forward, backward and symmetric stochastic integration. *Probab. Theory Related Fields*, 97(3) :403–421, 1993.

- [94] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [95] R. S. Strichartz. Multipliers on fractional Sobolev spaces. *J. Math. Mech.*, 16 :1031–1060, 1967.
- [96] D. W. Stroock. *Probability theory, an analytic view*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [97] H. Sussmann. An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on the sample point. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(2) :296–298, 1977.
- [98] M.S. Taqqu, V. Teverovsky, and W. Willinger. Stock market prices and long-range dependence. *Finance Stoch.*, 3(1) :1–13, 1999.
- [99] J. Teichmann. Another approach to some rough and stochastic partial differential equations. *ArXiv e-prints*, 2009.
- [100] S. Tindel, C. A. Tudor, and F. Viens. Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion. *Probab. Theory Related Fields*, 127(2) :186–204, 2003.
- [101] J. Unterberger. A rough path over multidimensional fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index by Fourier normal ordering. *ArXiv e-prints*, 2009.
- [102] J. Unterberger. Stochastic calculus for fractional Brownian motion with Hurst exponent $H > \frac{1}{4}$: a rough path method by analytic extension. *Ann. Probab.*, 37(2) :565–614, 2009.
- [103] Jérémie Unterberger. Hölder-continuous rough paths by Fourier normal ordering. *Comm. Math. Phys.*, 298(1) :1–36, 2010.
- [104] W. Wang. On a functional limit result for increments of a fractional Brownian motion. *Acta Math. Hungar.*, 93(1-2) :153–170, 2001.
- [105] W. Willinger, V. Paxson, R. H. Riedi, and M. S. Taqqu. Long-range dependence and data network traffic. In *Theory and applications of long-range dependence*, pages 373–407. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.
- [106] L. C. Young. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Math.*, 67(1) :251–282, 1936.