Résonances et temps de vie des états métastables en électrodynamique quantique non relativiste

Jérémy Faupin

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux 1

Collaboration avec
W.K. Abou Salem, J. Fröhlich, I.M. Sigal

Introduction

Système physique

- N particules quantiques (électrons) de paramètres $x_j, p_j, q_j = q, m_j = m$
- En interaction avec le champ électromagnétique quantifié

Hypothèses

- Particules non relativistes, spins négligés, $\hbar = c = 1$
- Constante de structure fine supposée suffisamment petite

Opérateur de Schrödinger

$$H_p = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} + V \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N})$$

Objectif

Etudier le comportement des valeurs propres et vecteurs propres excités de H_p sous l'effet du couplage avec le champ de photons

Introduction

Système physique

- N particules quantiques (électrons) de paramètres $x_j, p_j, q_j = q, m_j = m$
- En interaction avec le champ électromagnétique quantifié

Hypothèses

- Particules non relativistes, spins négligés, $\hbar = c = 1$
- Constante de structure fine supposée suffisamment petite

Opérateur de Schrödinger

$$H_p = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} + V \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N})$$

Objectif

Etudier le comportement des valeurs propres et vecteurs propres excités de H_p sous l'effet du couplage avec le champ de photons

Introduction

Système physique

- N particules quantiques (électrons) de paramètres $x_j, p_j, q_j = q, m_j = m$
- En interaction avec le champ électromagnétique quantifié

Hypothèses

- Particules non relativistes, spins négligés, $\hbar = c = 1$
- Constante de structure fine supposée suffisamment petite

Opérateur de Schrödinger

$$H_p = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} + V \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N})$$

Objectif

Etudier le comportement des valeurs propres et vecteurs propres excités de H_p sous l'effet du couplage avec le champ de photons

Introduction

Système physique

- N particules quantiques (électrons) de paramètres $x_j, p_j, q_j = q, m_j = m$
- En interaction avec le champ électromagnétique quantifié

Hypothèses

- Particules non relativistes, spins négligés, $\hbar = c = 1$
- Constante de structure fine supposée suffisamment petite

Opérateur de Schrödinger

$$H_p = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} + V \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N})$$

Objectif

Etudier le comportement des valeurs propres et vecteurs propres excités de H_p sous l'effet du couplage avec le champ de photons

Plan de la présentation

1. Résonances en qed non relativiste
   - Définition du modèle
   - Existence de résonances
2. Temps de vie des états métastables
   - Résultats
   - Esquisse de preuve

Partie I

Résonances en électrodynamique quantique non relativiste

Espace de Fock

- Espace de Hilbert pour un photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{F}_s = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} S_n \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})^n) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_s^n$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation

- Opérateurs de création et d'annihilation $a^*_\lambda(k)$ et $a_\lambda(k)$:

$$a^*_\lambda(k) : \mathcal{F}_s^n \to \mathcal{F}_s^{n+1}$$
$$a_\lambda(k) : \mathcal{F}_s^n \to \mathcal{F}_s^{n-1}$$

- Relations canoniques de commutation :

$$[a^*_\lambda(k), a^*_{\lambda'}(k')] = [a_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = 0$$
$$[a^*_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k')$$

Espace de Fock

- Espace de Hilbert pour un photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{F}_s = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} S_n \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})^n) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_s^n$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation

- Opérateurs de création et d'annihilation $a_\lambda^*(k)$ et $a_\lambda(k)$:

$$a_\lambda^*(k) : \mathcal{F}_s^n \to \mathcal{F}_s^{n+1}$$
$$a_\lambda(k) : \mathcal{F}_s^n \to \mathcal{F}_s^{n-1}$$

- Relations canoniques de commutation :

$$[a_\lambda^*(k), a_{\lambda'}^*(k')] = [a_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = 0$$
$$[a_\lambda^*(k), a_{\lambda'}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(k-k')$$

Espace de Fock

- Espace de Hilbert pour un photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{F}_s = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} S_n \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})^n) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_s^n$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation

- Opérateurs de création et d'annihilation $a^*_\lambda(k)$ et $a_\lambda(k)$:

$$a^*_\lambda(k) : \mathcal{F}_s^n \to \mathcal{F}_s^{n+1}$$
$$a_\lambda(k) : \mathcal{F}_s^n \to \mathcal{F}_s^{n-1}$$

- Relations canoniques de commutation :

$$[a^*_\lambda(k), a^*_{\lambda'}(k')] = [a_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = 0$$
$$[a^*_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(k - k')$$

Espace de Fock

- Espace de Hilbert pour un photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{F}_s = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} S_n \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})^n) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_s^n$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation

- Opérateurs de création et d'annihilation $a_\lambda^*(k)$ et $a_\lambda(k)$:

$$a_\lambda^*(k) : \mathcal{F}_s^n \to \mathcal{F}_s^{n+1}$$
$$a_\lambda(k) : \mathcal{F}_s^n \to \mathcal{F}_s^{n-1}$$

- Relations canoniques de commutation :

$$[a_\lambda^*(k), a_{\lambda'}^*(k')] = [a_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = 0$$
$$[a_\lambda^*(k), a_{\lambda'}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(k-k')$$

Modèle standard en qed non relativiste

- Espace de Hilbert pour les électrons non relativistes et le champ de photons :

$$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}_s \simeq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}; \mathcal{F}_s) \simeq \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \mathcal{F}_s(X) dX$$

- Hamiltonien de Pauli-Fierz agissant dans $\mathcal{H}$:

$$H^{SM} := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m}(p_j - qA_j)^2 + V + H_f$$

où $A_j = \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} A(x_j) dX$ et

$$A(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{|k|}} \varepsilon_\lambda(k) \left(a_\lambda^*(k) e^{-ik\cdot x} + a_\lambda(k) e^{ik\cdot x} \right) dk$$

$$H_f = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k| a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) dk$$

Modèle standard en qed non relativiste

- Espace de Hilbert pour les électrons non relativistes et le champ de photons :

$$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}_s \simeq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}; \mathcal{F}_s) \simeq \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \mathcal{F}_s(X) dX$$

- Hamiltonien de Pauli-Fierz agissant dans $\mathcal{H}$:

$$H^{SM} := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m}(p_j - qA_j)^2 + V + H_f$$

où $A_j = \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} A(x_j) dX$ et

$$A(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{|k|}} \varepsilon_\lambda(k) \left(a_\lambda^*(k) e^{-ik\cdot x} + a_\lambda(k) e^{ik\cdot x} \right) dk$$

$$H_f = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k| a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) dk$$

Modèle standard en qed non relativiste

- Espace de Hilbert pour les électrons non relativistes et le champ de photons :

$$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}_s \simeq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}; \mathcal{F}_s) \simeq \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \mathcal{F}_s(X) dX$$

- Hamiltonien de Pauli-Fierz agissant dans $\mathcal{H}$:

$$H^{SM} := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m} (p_j - qA_j)^2 + V + H_f$$

où $A_j = \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} A(x_j) dX$ et

$$A(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{\sqrt{|k|}} \varepsilon_\lambda(k) \left(a_\lambda^*(k) e^{-ik\cdot x} + a_\lambda(k) e^{ik\cdot x} \right) dk$$

$$H_f = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k| a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) dk$$

Existence de résonances (1)

Point de vue : traitement perturbatif de l'interaction électrons-photons

$\longrightarrow$ Changement d'échelle : $H_g^{SM} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m}(p_j - gA_j)^2 + V + H_f$

$\longrightarrow$ Constante de couplage g supposée suffisamment petite

Difficulté : Comportement infrarouge de $A(x)$

$\longrightarrow$ Transformation de Pauli-Fierz $\mathcal{U} = \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} e^{-ig \sum_{j=1}^{N} x_j \cdot A(0)} \, \mathrm{dX}$

$$H_g^{PF} = \mathcal{U} H_g^{SM} \mathcal{U}^{-1} = \sum_j \frac{1}{2m}(p_j - g\widetilde{A}_j)^2 + \mathrm{I}_g + H_f + V + K$$

$$\widetilde{A}(x_j) = A(x_j) - A(0) \qquad (\rightarrow |e^{\pm ik\cdot x_j} - 1| \leq |k||x_j|)$$

$$\mathrm{I}_g(X) = \frac{ig}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k|^{1/2} \chi_\Lambda(k) \varepsilon_\lambda(k) \cdot (\sum_j x_j)[a_\lambda^*(k) - a_\lambda(k)] dk$$

$$K(X) = \mathrm{C} g^2 (\sum_j x_j)^2 + [\text{fonction bornée}]$$

$\longrightarrow$ Troncature spatiale $\chi(x_j)$ insérée dans l'interaction

Existence de résonances (1)

Point de vue : traitement perturbatif de l'interaction électrons-photons

→ Changement d'échelle : $H_g^{SM} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m}(p_j - gA_j)^2 + V + H_f$

→ Constante de couplage g supposée suffisamment petite

Difficulté : Comportement infrarouge de $A(x)$

→ Transformation de Pauli-Fierz $\mathcal{U} = \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} e^{-ig\sum_{j=1}^N x_j \cdot A(0)}\, \mathrm{d}X$

$$H_g^{PF} = \mathcal{U} H_g^{SM} \mathcal{U}^{-1} = \sum_j \frac{1}{2m}(p_j - g\widetilde{A}_j)^2 + \mathrm{I}_g + H_f + V + K$$

$$\widetilde{A}(x_j) = A(x_j) - A(0) \qquad (\rightarrow |e^{\pm ik\cdot x_j} - 1| \leq |k||x_j|)$$

$$\mathrm{I}_g(X) = \frac{ig}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k|^{1/2} \chi_\Lambda(k) \varepsilon_\lambda(k) \cdot (\sum_j x_j)[a_\lambda^*(k) - a_\lambda(k)] dk$$

$$K(X) = \mathrm{C}g^2(\sum_j x_j)^2 + [\text{fonction bornée}]$$

→ Troncature spatiale $\chi(x_j)$ insérée dans l'interaction

Existence de résonances (1)

Point de vue : traitement perturbatif de l'interaction électrons-photons

$\rightarrow$ Changement d'échelle : $H_g^{SM} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m}(p_j - gA_j)^2 + V + H_f$

$\rightarrow$ Constante de couplage g supposée suffisamment petite

Difficulté : Comportement infrarouge de $A(x)$

$\rightarrow$ Transformation de Pauli-Fierz $\mathcal{U} = \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} e^{-ig\sum_{j=1}^{N} x_j \cdot A(0)}\, \mathrm{d}X$

$$H_g^{PF} = \mathcal{U} H_g^{SM} \mathcal{U}^{-1} = \sum_j \frac{1}{2m}(p_j - g\widetilde{A}_j)^2 + \mathrm{I}_g + H_f + V + K$$

$$\widetilde{A}(x_j) = A(x_j) - A(0) \qquad (\rightarrow |e^{\pm ik\cdot x_j} - 1| \leq |k||x_j|)$$

$$\mathrm{I}_g(X) = \frac{ig}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k|^{1/2} \chi_\Lambda(k) \varepsilon_\lambda(k) \cdot (\sum_j x_j)[a_\lambda^*(k) - a_\lambda(k)]dk$$

$$K(X) = \mathrm{C}g^2(\sum_j x_j)^2 + [\text{fonction bornée}]$$

$\rightarrow$ Troncature spatiale $\chi(x_j)$ insérée dans l'interaction

Existence de résonances (2)

- Décomposition : $H_g^{PF} = H_0 + W_g = [H_p \otimes I + I \otimes H_f] + W_g$
- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta : k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^{PF} = \mathcal{U}_\theta H_g^{PF} \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal '98]

Soit $\lambda_j < \Sigma$ une valeur propre non dégénérée de H_p. Il existe $g_0 > 0$ tel que pour tout $0 < g \leq g_0$, il existe une valeur propre non dégénérée $\lambda_{j,g}$ de $H_{g,\theta}^{PF}$ telle que $\lambda_{j,g}$ ne dépend pas de θ (pour θ convenablement choisi) et

$$\lambda_{j,g} \underset{g \to 0}{\longrightarrow} \lambda_j$$

Théorèmes

- [JF '08] Existence de résonances pour un atome d'hydrogène confiné par son centre de masse (Effet Lamb-Dicke), en utilisant les dilatations complexes $k \mapsto e^{-\theta} k$, $x_j \mapsto e^{\theta} x_j$
- [I.M. Sigal '09] Existence de résonances pour H_g^{SM}

Existence de résonances (2)

- Décomposition : $H_g^{PF} = H_0 + W_g = [H_p \otimes I + I \otimes H_f] + W_g$
- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta : k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^{PF} = \mathcal{U}_\theta H_g^{PF} \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal '98]

Soit $\lambda_j < \Sigma$ une valeur propre non dégénérée de H_p. Il existe $g_0 > 0$ tel que pour tout $0 < g \leq g_0$, il existe une valeur propre non dégénérée $\lambda_{j,g}$ de $H_{g,\theta}^{PF}$ telle que $\lambda_{j,g}$ ne dépend pas de θ (pour θ convenablement choisi) et

$$\lambda_{j,g} \underset{g \to 0}{\longrightarrow} \lambda_j$$

Théorèmes

- [JF '08] Existence de résonances pour un atome d'hydrogène confiné par son centre de masse (Effet Lamb-Dicke), en utilisant les dilatations complexes $k \mapsto e^{-\theta} k$, $x_j \mapsto e^{\theta} x_j$
- [I.M. Sigal '09] Existence de résonances pour H_g^{SM}

Existence de résonances (2)

- Décomposition : $H_g^{PF} = H_0 + W_g = [H_p \otimes I + I \otimes H_f] + W_g$
- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta$: $k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^{PF} = \mathcal{U}_\theta H_g^{PF} \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal '98]

Soit $\lambda_j < \Sigma$ une valeur propre non dégénérée de H_p. Il existe $g_0 > 0$ tel que pour tout $0 < g \leq g_0$, il existe une valeur propre non dégénérée $\lambda_{j,g}$ de $H_{g,\theta}^{PF}$ telle que $\lambda_{j,g}$ ne dépend pas de θ (pour θ convenablement choisi) et

$$\lambda_{j,g} \underset{g \to 0}{\longrightarrow} \lambda_j$$

Théorèmes

- [JF '08] Existence de résonances pour un atome d'hydrogène confiné par son centre de masse (Effet Lamb-Dicke), en utilisant les dilatations complexes $k \mapsto e^{-\theta} k$, $x_j \mapsto e^{\theta} x_j$
- [I.M. Sigal '09] Existence de résonances pour H_g^{SM}

Existence de résonances (2)

- Décomposition : $H_g^{PF} = H_0 + W_g = [H_p \otimes I + I \otimes H_f] + W_g$
- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta$: $k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^{PF} = \mathcal{U}_\theta H_g^{PF} \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal '98]

Soit $\lambda_j < \Sigma$ une valeur propre non dégénérée de H_p. Il existe $g_0 > 0$ tel que pour tout $0 < g \leq g_0$, il existe une valeur propre non dégénérée $\lambda_{j,g}$ de $H_{g,\theta}^{PF}$ telle que $\lambda_{j,g}$ ne dépend pas de θ (pour θ convenablement choisi) et

$$\lambda_{j,g} \underset{g \to 0}{\longrightarrow} \lambda_j$$

Théorèmes

- [JF '08] Existence de résonances pour un atome d'hydrogène confiné par son centre de masse (Effet Lamb-Dicke), en utilisant les dilatations complexes $k \mapsto e^{-\theta} k$, $x_j \mapsto e^{\theta} x_j$
- [I.M. Sigal '09] Existence de résonances pour H_g^{SM}

Existence de résonances (2)

- Décomposition : $H_g^{PF} = H_0 + W_g = [H_p \otimes I + I \otimes H_f] + W_g$
- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta$: $k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^{PF} = \mathcal{U}_\theta H_g^{PF} \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [V. Bach, J. Fröhlich, I.M. Sigal '98]

Soit $\lambda_j < \Sigma$ une valeur propre non dégénérée de H_p. Il existe $g_0 > 0$ tel que pour tout $0 < g \leq g_0$, il existe une valeur propre non dégénérée $\lambda_{j,g}$ de $H_{g,\theta}^{PF}$ telle que $\lambda_{j,g}$ ne dépend pas de θ (pour θ convenablement choisi) et

$$\lambda_{j,g} \underset{g \to 0}{\longrightarrow} \lambda_j$$

Théorèmes

- [JF '08] Existence de résonances pour un atome d'hydrogène confiné par son centre de masse (Effet Lamb-Dicke), en utilisant les dilatations complexes $k \mapsto e^{-\theta} k$, $x_j \mapsto e^{\theta} x_j$
- [I.M. Sigal '09] Existence de résonances pour H_g^{SM}

Partie II

Temps de vie des états métastables

Temps de vie

- $\lambda_{j,g}$ résonance associée à λ_j :

$$\lambda_{j,g} = \lambda_j + g^2 \mathrm{c} + O(g^{5/2})$$

- Vecteur propre non perturbé ϕ_j associé à la valeur propre λ_j de H_p
- Ω vide de photons $\rightarrow \Psi_j = \phi_j \otimes \Omega$ vecteur propre associé à la valeur propre λ_j de H_0

Théorème [D. Hasler, I. Herbst, M. Huber '08]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall 0 < \varepsilon < 1/3, \exists \mathrm{C}_\varepsilon, \forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^{SM}} \phi_j \otimes \Omega\right) = e^{-it(\lambda_j + g^2 \mathrm{c})} + b(t,\varepsilon), \quad |b(t,\varepsilon)| \leq \mathrm{C}_\varepsilon g^\varepsilon$$

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal '09]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^{SM}} \phi_j \otimes \Omega\right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^{2/3})$$

Temps de vie

- $\lambda_{j,g}$ résonance associée à λ_j :
$$\lambda_{j,g} = \lambda_j + g^2 \mathrm{c} + O(g^{5/2})$$
- Vecteur propre non perturbé ϕ_j associé à la valeur propre λ_j de H_p
- Ω vide de photons $\rightarrow \Psi_j = \phi_j \otimes \Omega$ vecteur propre associé à la valeur propre λ_j de H_0

Théorème [D. Hasler, I. Herbst, M. Huber '08]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall 0 < \varepsilon < 1/3, \exists \mathrm{C}_\varepsilon, \forall t \geq 0$,
$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^{SM}} \phi_j \otimes \Omega \right) = e^{-it(\lambda_j + g^2 \mathrm{c})} + b(t,\varepsilon), \quad |b(t,\varepsilon)| \leq \mathrm{C}_\varepsilon g^\varepsilon$$

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal '09]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall t \geq 0$,
$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^{SM}} \phi_j \otimes \Omega \right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^{2/3})$$

Temps de vie

- $\lambda_{j,g}$ résonance associée à λ_j :
$$\lambda_{j,g} = \lambda_j + g^2 \mathrm{c} + O(g^{5/2})$$
- Vecteur propre non perturbé ϕ_j associé à la valeur propre λ_j de H_p
- Ω vide de photons $\rightarrow \Psi_j = \phi_j \otimes \Omega$ vecteur propre associé à la valeur propre λ_j de H_0

Théorème [D. Hasler, I. Herbst, M. Huber '08]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall 0 < \varepsilon < 1/3, \exists \mathrm{C}_\varepsilon, \forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^{SM}} \phi_j \otimes \Omega \right) = e^{-it(\lambda_j + g^2 \mathrm{c})} + b(t,\varepsilon), \quad |b(t,\varepsilon)| \leq \mathrm{C}_\varepsilon g^\varepsilon$$

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal '09]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^{SM}} \phi_j \otimes \Omega \right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^{2/3})$$

Temps de vie

- $\lambda_{j,g}$ résonance associée à λ_j :
$$\lambda_{j,g} = \lambda_j + g^2\mathrm{c} + O(g^{5/2})$$
- Vecteur propre non perturbé ϕ_j associé à la valeur propre λ_j de H_p
- Ω vide de photons $\rightarrow \Psi_j = \phi_j \otimes \Omega$ vecteur propre associé à la valeur propre λ_j de H_0

Théorème [D. Hasler, I. Herbst, M. Huber '08]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall 0 < \varepsilon < 1/3, \exists \mathrm{C}_\varepsilon, \forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^{SM}} \phi_j \otimes \Omega\right) = e^{-it(\lambda_j + g^2\mathrm{c})} + b(t,\varepsilon), \quad |b(t,\varepsilon)| \leq \mathrm{C}_\varepsilon g^\varepsilon$$

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal '09]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^{SM}} \phi_j \otimes \Omega\right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^{2/3})$$

Modèle de Nelson

- Hamiltonien non perturbé dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3))$:

$$H_0 = H_p \otimes I + I \otimes H_f$$

- Hamiltonien de Nelson :

$$H_g^N = H_0 + W_g,$$

$$W_g = g \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{|k|^{1/2-\mu}} \left[e^{-ik\cdot x_j} a^*(k) + e^{ik\cdot x_j} a(k) \right] dk$$

- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta$: $x_j \mapsto e^\theta x_j$, $k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^N = \mathcal{U}_\theta H_g^N \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^N} \phi_j \otimes \Omega \right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^{\frac{2+4\mu}{5+2\mu}})$$

Modèle de Nelson

- Hamiltonien non perturbé dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3))$:

$$H_0 = H_p \otimes I + I \otimes H_f$$

- Hamiltonien de Nelson :

$$H_g^N = H_0 + W_g,$$

$$W_g = g \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{|k|^{1/2-\mu}} \left[e^{-ik\cdot x_j} a^*(k) + e^{ik\cdot x_j} a(k) \right] dk$$

- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta$: $x_j \mapsto e^\theta x_j$, $k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^N = \mathcal{U}_\theta H_g^N \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^N} \phi_j \otimes \Omega \right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^{\frac{2+4\mu}{5+2\mu}})$$

Modèle de Nelson

- Hamiltonien non perturbé dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3))$:

$$H_0 = H_p \otimes I + I \otimes H_f$$

- Hamiltonien de Nelson :

$$H_g^N = H_0 + W_g,$$

$$W_g = g \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{|k|^{1/2-\mu}} \left[e^{-ik\cdot x_j} a^*(k) + e^{ik\cdot x_j} a(k) \right] dk$$

- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta$: $x_j \mapsto e^\theta x_j$, $k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^N = \mathcal{U}_\theta H_g^N \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^N} \phi_j \otimes \Omega \right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^{\frac{2+4\mu}{5+2\mu}})$$

Modèle de Nelson

- Hamiltonien non perturbé dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3))$:

$$H_0 = H_p \otimes I + I \otimes H_f$$

- Hamiltonien de Nelson :

$$H_g^N = H_0 + W_g,$$

$$W_g = g \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{|k|^{1/2-\mu}} \left[e^{-ik\cdot x_j} a^*(k) + e^{ik\cdot x_j} a(k) \right] dk$$

- Dilatations complexes $\mathcal{U}_\theta : x_j \mapsto e^\theta x_j,\ k \mapsto e^{-\theta} k$

$$H_{g,\theta}^N = \mathcal{U}_\theta H_g^N \mathcal{U}_\theta^{-1} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}$$

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal]

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, on a : $\forall t \geq 0$,

$$\left(\phi_j \otimes \Omega, e^{-itH_g^N} \phi_j \otimes \Omega \right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^{\frac{2+4\mu}{5+2\mu}})$$

Troncature infrarouge

- Interaction avec les bosons d'énergie $\geq \sigma$:

$$W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} = ge^{-(1+\mu)\theta} \sum_{j=1}^{N} \int_{|k|\geq\sigma} \frac{\chi_\Lambda(e^{-\theta}k)}{|k|^{1/2-\mu}} \left[e^{-ik\cdot x_j} a^*(k) + e^{ik\cdot x_j} a(k) \right] dk$$

$$H_{g,\theta}^{\sigma} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$$

Remarque : Il existe une valeur propre complexe $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ de $H_{g,\theta}^{\sigma}$ issue de λ_j, mais $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ dépend de θ

- Isomorphisme :

$$\mathcal{V} : \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)) \to \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(|k| \geq \sigma)) \otimes \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(|k| \leq \sigma)),$$

$$\mathcal{V} H_{g,\theta}^{\sigma} \mathcal{V}^{-1} = H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} \otimes I + I \otimes H_{f,\theta}^{\leqslant\sigma},$$

où $H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} = H_{p,\theta} + H_{f,\theta}^{\geqslant\sigma} + W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$

Théorème

Il existe un "gap" d'ordre $O(\sigma)$ autour de $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ dans le spectre de $H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$

Troncature infrarouge

- Interaction avec les bosons d'énergie $\geq \sigma$:

$$W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} = g e^{-(1+\mu)\theta} \sum_{j=1}^{N} \int_{|k|\geq\sigma} \frac{\chi_\Lambda(e^{-\theta}k)}{|k|^{1/2-\mu}} \left[e^{-ik\cdot x_j} a^*(k) + e^{ik\cdot x_j} a(k) \right] dk$$

$$H_{g,\theta}^{\sigma} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$$

Remarque : Il existe une valeur propre complexe $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ de $H_{g,\theta}^{\sigma}$ issue de λ_j, mais $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ dépend de θ

- Isomorphisme :

$$\mathcal{V} : \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)) \to \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(|k| \geq \sigma)) \otimes \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(|k| \leq \sigma)),$$

$$\mathcal{V} H_{g,\theta}^{\sigma} \mathcal{V}^{-1} = H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} \otimes I + I \otimes H_{f,\theta}^{\leqslant\sigma},$$

où $H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} = H_{p,\theta} + H_{f,\theta}^{\geqslant\sigma} + W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$

Théorème

Il existe un "gap" d'ordre $O(\sigma)$ autour de $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ dans le spectre de $H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$

Troncature infrarouge

- Interaction avec les bosons d'énergie $\geq \sigma$:

$$W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} = ge^{-(1+\mu)\theta} \sum_{j=1}^{N} \int_{|k|\geq\sigma} \frac{\chi_\Lambda(e^{-\theta}k)}{|k|^{1/2-\mu}} \left[e^{-ik\cdot x_j} a^*(k) + e^{ik\cdot x_j} a(k) \right] dk$$

$$H_{g,\theta}^{\sigma} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$$

Remarque : Il existe une valeur propre complexe $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ de $H_{g,\theta}^{\sigma}$ issue de λ_j, mais $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ dépend de θ

- Isomorphisme :

$$\mathcal{V} : \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)) \to \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(|k| \geq \sigma)) \otimes \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(|k| \leq \sigma)),$$
$$\mathcal{V} H_{g,\theta}^{\sigma} \mathcal{V}^{-1} = H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} \otimes I + I \otimes H_{f,\theta}^{\leqslant\sigma},$$

où $H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} = H_{p,\theta} + H_{f,\theta}^{\geqslant\sigma} + W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$

Théorème

Il existe un "gap" d'ordre $O(\sigma)$ autour de $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ dans le spectre de $H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$

Troncature infrarouge

- Interaction avec les bosons d'énergie $\geq \sigma$:

$$W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} = g e^{-(1+\mu)\theta} \sum_{j=1}^{N} \int_{|k|\geq\sigma} \frac{\chi_\Lambda(e^{-\theta}k)}{|k|^{1/2-\mu}} \left[e^{-ik\cdot x_j} a^*(k) + e^{ik\cdot x_j} a(k) \right] dk$$

$$H_{g,\theta}^{\sigma} = H_{0,\theta} + W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$$

Remarque : Il existe une valeur propre complexe $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ de $H_{g,\theta}^{\sigma}$ issue de λ_j, mais $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ dépend de θ

- Isomorphisme :

$$\mathcal{V} : \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)) \to \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(|k| \geq \sigma)) \otimes \mathcal{F}_s(\mathrm{L}^2(|k| \leq \sigma)),$$

$$\mathcal{V} H_{g,\theta}^{\sigma} \mathcal{V}^{-1} = H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} \otimes I + I \otimes H_{f,\theta}^{\leqslant\sigma},$$

où $H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma} = H_{p,\theta} + H_{f,\theta}^{\geqslant\sigma} + W_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$

Théorème

Il existe un "gap" d'ordre $O(\sigma)$ autour de $\lambda_{j,g}^{\geqslant\sigma}$ dans le spectre de $H_{g,\theta}^{\geqslant\sigma}$

Traitement perturbatif

Soit $P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}$ la projection associée à la valeur propre $\lambda^{\geqslant\sigma}_{j,g}$ de $H^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}$. On décompose :

$$H^{N}_{g,\theta} = \widetilde{H}^{\sigma}_{g,\theta} + \widetilde{W}^{\leqslant\sigma}_{g,\theta},$$

avec

$$\widetilde{H}^{\sigma}_{g,\theta} = H^{\sigma}_{g,\theta} + \left(\lambda_{j,g} - \lambda^{\geqslant\sigma}_{j,g}\right)\mathcal{V}^{-1}(P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}\otimes I)\mathcal{V}$$

$$\widetilde{W}^{\leqslant\sigma}_{g,\theta} = W^{\leqslant\sigma}_{g,\theta} - \left(\lambda_{j,g} - \lambda^{\geqslant\sigma}_{j,g}\right)\mathcal{V}^{-1}(P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}\otimes I)\mathcal{V}$$

Proposition

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, pour tout $\sigma > 0$:

$$\left\| W^{\leqslant\sigma}_{g,\theta}[H_f + 1]^{-1} \right\| = O(g\sigma^{1/2+\mu})$$

$$\left| \lambda_{j,g} - \lambda^{\geqslant\sigma}_{j,g} \right| = O(g^2\sigma^{1+\mu})$$

$$\left\| P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta} - P^{\geqslant\sigma}_{0,\theta} \right\| = O(g\sigma^{-1/2})$$

Traitement perturbatif

Soit $P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}$ la projection associée à la valeur propre $\lambda^{\geqslant\sigma}_{j,g}$ de $H^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}$. On décompose :

$$H^N_{g,\theta} = \widetilde{H}^{\sigma}_{g,\theta} + \widetilde{W}^{\leqslant\sigma}_{g,\theta},$$

avec

$$\widetilde{H}^{\sigma}_{g,\theta} = H^{\sigma}_{g,\theta} + \left(\lambda_{j,g} - \lambda^{\geqslant\sigma}_{j,g}\right)\mathcal{V}^{-1}(P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}\otimes I)\mathcal{V}$$

$$\widetilde{W}^{\leqslant\sigma}_{g,\theta} = W^{\leqslant\sigma}_{g,\theta} - \left(\lambda_{j,g} - \lambda^{\geqslant\sigma}_{j,g}\right)\mathcal{V}^{-1}(P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}\otimes I)\mathcal{V}$$

Proposition

Il existe $g_0 > 0$ t.q. pour tout $0 < g < g_0$, pour tout $\sigma > 0$:

$$\left\| W^{\leqslant\sigma}_{g,\theta}[H_f + 1]^{-1} \right\| = O(g\sigma^{1/2+\mu})$$

$$\left| \lambda_{j,g} - \lambda^{\geqslant\sigma}_{j,g} \right| = O(g^2\sigma^{1+\mu})$$

$$\left\| P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta} - P^{\geqslant\sigma}_{0,\theta} \right\| = O(g\sigma^{-1/2})$$

Méthode de Hunziker (1)

Soit $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans un voisinage d'ordre $O(\sigma)$ de λ_j

$$\begin{aligned}
&\left(\Psi_j, e^{-itH_g^N} f(H_g^N)\Psi_j\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left(\Psi_j, \left[R_g(z - i\varepsilon) - R_g(z + i\varepsilon)\right] \Psi_j\right) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left[\left(\Psi_{j,\theta}, R_{g,\overline{\theta}}(z)\Psi_{j,\overline{\theta}}\right) - \left(\Psi_{j,\overline{\theta}}, R_{g,\theta}(z)\Psi_{j,\theta}\right)\right] dz \\
&= F(t,\overline{\theta}) - F(t,\theta) + O(g^{-2}\sigma^{3/2+\mu})
\end{aligned}$$

avec

$$F(t,\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left(\psi_{j,\overline{\theta}} \otimes \Omega^{\geqslant \sigma}, \widetilde{R}_{g,\theta}^{\geqslant \sigma}(z)\psi_{j,\theta} \otimes \Omega^{\geqslant \sigma}\right) dz$$

Décomposition en parties singulières et régulières :

$$\widetilde{R}_{g,\theta}^{\geqslant \sigma}(z) = \widehat{R}_{g,\theta}^{\geqslant \sigma}(z) + \frac{P_{g,\theta}^{\geqslant \sigma}}{\lambda_{j,g} - z}$$

Méthode de Hunziker (1)

Soit $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans un voisinage d'ordre $O(\sigma)$ de λ_j

$$
\begin{aligned}
&\left(\Psi_j, e^{-itH_g^N} f(H_g^N)\Psi_j\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left(\Psi_j, \left[R_g(z - i\varepsilon) - R_g(z + i\varepsilon)\right] \Psi_j\right) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left[\left(\Psi_{j,\theta}, R_{g,\overline{\theta}}(z)\Psi_{j,\overline{\theta}}\right) - \left(\Psi_{j,\overline{\theta}}, R_{g,\theta}(z)\Psi_{j,\theta}\right)\right] dz \\
&= F(t,\overline{\theta}) - F(t,\theta) + O(g^{-2}\sigma^{3/2+\mu})
\end{aligned}
$$

avec

$$
F(t,\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left(\psi_{j,\overline{\theta}} \otimes \Omega^{\geqslant \sigma}, \widetilde{R}_{g,\theta}^{\geqslant \sigma}(z)\psi_{j,\theta} \otimes \Omega^{\geqslant \sigma}\right) dz
$$

Décomposition en parties singulières et régulières :

$$
\widetilde{R}_{g,\theta}^{\geqslant \sigma}(z) = \widehat{R}_{g,\theta}^{\geqslant \sigma}(z) + \frac{P_{g,\theta}^{\geqslant \sigma}}{\lambda_{j,g} - z}
$$

Méthode de Hunziker (1)

Soit $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans un voisinage d'ordre $O(\sigma)$ de λ_j

$$
\begin{aligned}
&\left(\Psi_j, e^{-itH_g^N} f(H_g^N)\Psi_j\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left(\Psi_j, \left[R_g(z-i\varepsilon) - R_g(z+i\varepsilon)\right]\Psi_j\right) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left[\left(\Psi_{j,\theta}, R_{g,\overline{\theta}}(z)\Psi_{j,\overline{\theta}}\right) - \left(\Psi_{j,\overline{\theta}}, R_{g,\theta}(z)\Psi_{j,\theta}\right)\right] dz \\
&= F(t,\overline{\theta}) - F(t,\theta) + O(g^{-2}\sigma^{3/2+\mu})
\end{aligned}
$$

avec

$$
F(t,\theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left(\psi_{j,\overline{\theta}} \otimes \Omega^{\geqslant\sigma}, \widetilde{R}^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}(z)\psi_{j,\theta} \otimes \Omega^{\geqslant\sigma}\right) dz
$$

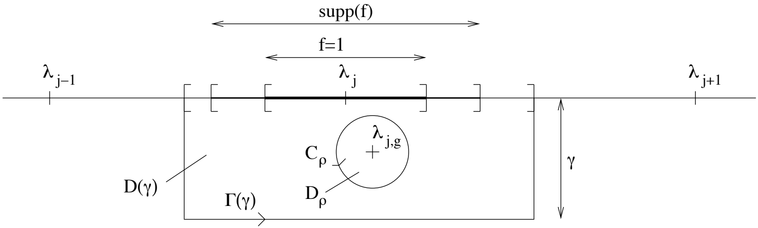
Décomposition en parties singulières et régulières :

$$
\widetilde{R}^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}(z) = \widehat{R}^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}(z) + \frac{P^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}}{\lambda_{j,g} - z}
$$

Méthode de Hunziker (2)

$$F(t,\theta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z) \left(\psi_{j,\bar{\theta}} \otimes \Omega^{\geqslant\sigma}, \widetilde{R}^{\geqslant\sigma}_{g,\theta}(z)\psi_{j,\theta} \otimes \Omega^{\geqslant\sigma} \right) dz$$

Déformation du contour d'intégration : $g^2 \ll \gamma \leq C\sigma$



$$\int_{\mathbb{R}} e^{-itz} f(z)[\dots]dz = \int_{\Gamma(\gamma)} e^{-itz}\tilde{f}(z)[\dots]dz + \int_{\mathcal{C}_\rho} e^{-itz}\tilde{f}(z)[\dots]dz$$

$$+ \iint_{\mathrm{D}(\gamma)\backslash D_\rho} e^{-itz}(\partial_{\bar{z}}\tilde{f})(z)[\dots]dz d\bar{z}$$

Conclusion

- **Optimisation** :

$$\left(\Psi_j, e^{-itH_g^N} f(H_g^N)\Psi_j\right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^2\sigma^{-1}) + O(g^{-2}\sigma^{3/2+\mu})$$

  On conclut en optimisant le choix du paramètre de troncature σ

- **Remarque** : Lien avec la notion de pôle du prolongement analytique de la résolvante :

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal]

Il existe $g_0 > 0$ et $\mathcal{D}$ dense, tels que pour tout $0 < g < g_0$ et $\Psi \in \mathcal{D}$,

$$F_\Psi(z) = (\Psi, [H_g - z]^{-1}\Psi)$$

possède un prolongement analytique depuis $\mathbb{C}^+$ dans un domaine $W_{j,g}$ lié à $\lambda_{j,g}$, tel que

$$F_\Psi(z) = \frac{p(\Psi)}{\lambda_{j,g} - z} + r(z,\Psi), \quad |r(z,\Psi)| \leq \frac{C(\Psi)}{|\lambda_{j,g} - z|^\beta},$$

avec $\beta < 1$

Conclusion

- **Optimisation** :

$$\left(\Psi_j, e^{-itH_g^N} f(H_g^N)\Psi_j\right) = e^{-it\lambda_{j,g}} + O(g^2\sigma^{-1}) + O(g^{-2}\sigma^{3/2+\mu})$$

  On conclut en optimisant le choix du paramètre de troncature σ

- **Remarque** : Lien avec la notion de pôle du prolongement analytique de la résolvante :

Théorème [W.K. Abou Salem, JF, J. Fröhlich, I.M. Sigal]

Il existe $g_0 > 0$ et $\mathcal{D}$ dense, tels que pour tout $0 < g < g_0$ et $\Psi \in \mathcal{D}$,

$$F_\Psi(z) = (\Psi, [H_g - z]^{-1}\Psi)$$

possède un prolongement analytique depuis $\mathbb{C}^+$ dans un domaine $W_{j,g}$ lié à $\lambda_{j,g}$, tel que

$$F_\Psi(z) = \frac{p(\Psi)}{\lambda_{j,g} - z} + r(z,\Psi), \quad |r(z,\Psi)| \leq \frac{C(\Psi)}{|\lambda_{j,g} - z|^\beta},$$

avec $\beta < 1$

Références

- W.K. Abou Salem, J. Faupin, J. Fröhlich and I.M. Sigal, On the theory of resonances in non-relativistic qed and related models. A paraître dans Adv. in Appl. Mathematics.
- V. Bach, J. Fröhlich and I.M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles. Adv. in Math. 137, 299-395, (1998).
- V. Bach, J. Fröhlich and I.M. Sigal, Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory. Adv. in Math. 137, 205-298, (1998).
- J. Faupin, Resonances of the confined hydrogen atom and the Lamb-Dicke effect in non-relativistic qed. Ann. Henri Poincaré, 9, no 4, 743-773, (2008).
- D. Hasler, I. Herbst and M.Huber, On the lifetime of quasi-stationary states in non-relativisitc QED. Ann. Henri Poincaré 9, no. 5, 1005–1028, (2008)
- W. Hunziker, Resonances, metastable states and exponential decay laws in perturbation theory. Comm. Math. Phys. 132, 177-182, (1990).
- I.M. Sigal, Ground state and resonances in the standard model of the non-relativistic QED. Preprint (2008).