UNE CARACTÉRISATION DES SURFACES D'INOUE-HIRZEBRUCH (A CHARACTERIZATION OF INOUE-HIRZEBRUCH SURFACES)

KARL OELJEKLAUS, MATEI TOMA, DAN ZAFFRAN

Abstract. We show that among the surfaces of class VII_0 with $b_2 > 0$, the Inoue-Hirzebruch surfaces are characterized by the property of admitting two twisted vector fields. This result is a step towards the understanding of foliations on VII_0 surfaces.

Résumé. On montre que parmi les surfaces compactes complexes de classe VII_0 avec $b_2 > 0$, les surfaces d'Inoue-Hirzebruch sont caractérisées par le fait qu'elle possèdent deux champs de vecteurs tordus. Ce résultat est un pas vers la compréhension des feuilletages sur les surfaces VII_0.

1. Introduction

Considérons une surface (i.e. une variété complexe lisse de dimension deux) compacte S de la classe VII_0 de Kodaira, c'est-à-dire minimale (i.e. ne contenant pas de courbe rationnelle lisse de self-intersection -1), et de premier nombre de Betti $b_1(S) = 1$. On suppose en outre que $b_2(S) > 0$. Alors on a $kod(S) = -\infty$ (cf. [Naka 1] (12.1)). D'autre part une surface avec $b_1 = 1$, $kod = -\infty$ et admettant des fonctions méromorphes non constantes est nécessairement une surface de Hopf,

Date: October 23, 2000.

Karl Oeljeklaus et *Dan Zaffran* : Centre de Mathématiques et d'Informatique, LATP-UMR(CNRS) 6632. 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13. e-mail : Karl.Oeljeklaus@cmi.univ-mrs.fr, Dan.Zaffran@cmi.univ-mrs.fr

Matei Toma : Fachbereich Mathematik-Informatik, Universität Osnabrück, 49069 Osnabrück, Allemagne, et Institut de l'Académie Roumaine. e-mail : matei@mathematik.Uni-Osnabrueck.de

1991 MSC : 32J15, 32S25, 32L30.

2000 MSC : 32J15, 32S25, 37F75.

Mots-clés : surface complexe de classe sept (VII), Inoue-Hirzebruch, feuilletage holomorphe singulier, singularité elliptique.

d'après un résultat de Kodaira. Sous nos hypothèses, le corps des fonctions méromorphes sur S est donc réduit à $\mathbb{C}$. En particulier, S n'a qu'un nombre fini de courbes compactes.

Les seuls exemples connus de telles surfaces sont les surfaces à **c**oquille **s**phérique **g**lobale (CSG en abrégé ; pour la définition et une présentation de ces surfaces, on se réfère à [Dlouss-Oelj] et sa bibliographie). L'existence d'autres surfaces est un problème ouvert, et par conséquent la classification des surfaces compactes (non algébriques) est toujours incomplète. Par contre les nombres de Hodge, de Chern, et la signature de la forme d'intersection de $H^2(S, \mathbb{R})$ d'une telle surface sont connus depuis Kodaira (cf. [Naka 1] p.399) :

$$(1) \qquad h^{0,1} = 1, h^{1,0} = h^{2,0} = h^{0,2} = 0, -c_1^2 = c_2 = b_2, b_2^+ = 0, b_2^- = b_2$$

On appelle "feuilletage holomorphe" ou simplement "feuilletage" de S un feuilletage holomorphe réduit éventuellement singulier, i.e. la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_i$ de S et de champs de vecteurs holomorphes $\{X_i \in H^0(U_i, \Theta)\}_i$ tels que pour tout i, $\{X_i = 0\}$ est vide ou de dimension zéro (on dit alors que X_i est réduit), et pour tous i et j, X_i et X_j sont en chaque point de $U_i \cap U_j$ non nuls et colinéaires ; tout ceci modulo la relation d'équivalence qui convient. Si on se donne un champ de vecteurs X non identiquement nul sur U, on peut le "réduire" localement en le divisant par une fonction définissante de son diviseur d'annulation. Ainsi un tel X définit un unique feuilletage sur U.

On connaît bien les feuilletages holomorphes des surfaces à CSG (cf. [Dlouss-Oelj]) : toutes celles qui ne sont pas d'Inoue-Hirzebruch admettent exactement *un* feuilletage, tandis que les surfaces d'Inoue-Hirzebruch en admettent exactement *deux*. Décrivons brièvement ces dernières, et leurs feuilletages.

Une surface d'Inoue-Hirzebruch est une surface S de classe VII_0, avec $b_2(S) > 0$, dont le diviseur maximal D_{max} est constitué de b_2 courbes rationnelles linéairement indépendantes dans $H_2(S, \mathbb{Q})$, qui forment soit un cycle (la surface est alors dite impaire, ou "half Inoue"), soit deux cycles (la surface est alors dite paire, ou "hyperbolic Inoue"). D'après [Naka 1] ces propriétés caractérisent les surfaces d'Inoue-Hirzebruch : dans cet article Nakamura démontre que si une surface de classe VII_0 contient soit deux cycles de courbes rationnelles, soit un seul cycle dont les courbes engendrent le deuxième groupe d'homologie à coefficients rationnels, alors cette surface est d'Inoue-Hirzebruch.

Le revêtement universel de $S \backslash D_{max}$ est isomorphe à $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, où $\mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré. Notons (w, z) les coordonées de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$. Alors les champs de vecteurs holomorphes $\frac{\partial}{\partial w}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ induisent sur $S \backslash D_{max}$ des "champs tordus" (cf. définition à la sect. 2) qui se prolongent holomorphiquement à toute S, et qui s'annulent exactement sur $Sing(D_{max})$. Les feuilletages qui sont respectivement associés à ces champs laissent les courbes compactes de S invariantes.

En utilisant les résultats de Nakamura, on se propose de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit S une surface de classe VII_0 avec $b_2(S) > 0$. Alors S est une surface d'Inoue-Hirzebruch si et seulement si S admet deux champs de vecteurs tordus, non colinéaires en au moins un point.*

Cette implication est un affaiblissement de l'assertion suivante, que nous conjecturons :

Conjecture. *Les surfaces de la classe VII_0 avec $b_2(S) > 0$ admettent au plus un feuilletage holomorphe, exceptées les surfaces d'Inoue-Hirzebruch, qui en admettent deux.*

2. Notations et résultats préliminaires

Soit S une surface de classe VII_0 avec $b_2(S) > 0$.

On appelle "courbe" un sous-ensemble analytique fermé de S irréductible, réduit et de dimension un. On appelle "cycle de courbes rationnelles", ou simplement "cycle" une union de courbes rationnelles dont le graphe dual d'intersection est homéomorphe à un cercle. On note D_{max} l'union (finie) de toutes les courbes compactes de S (on confondra, par abus de langage, un diviseur réduit et son support).

Notons $\pi : \tilde{S} \to S$ le revêtement universel de S, et posons $\tilde{D}_{max} := \pi^{-1}(D_{max})$. Soit K le fibré canonique de S. Pour un ouvert U d'un espace complexe, $\mathcal{O}(U)$ et $\mathcal{M}(U)$ désignent respectivement les ensembles des fonctions holomorphes et méromorphes sur U. Si L est un fibré vectoriel holomorphe, on désignera aussi par L le faisceau des germes de ses sections holomorphes.

On va maintenant donner une description du groupe $Pic^{plat}(S)$ des fibrés en droites holomorphes plats sur S (cf. définition ci-dessous). Soit une représentation $\rho : \pi_1(S) \to GL_1(\mathbb{C})(= \mathbb{C}^*)$, à laquelle on associe l'action linéaire de $\pi_1(S)$ sur $\mathbb{C}$ suivante : à tout $g \in \pi_1(S)$ est associé l'homothétie de $\mathbb{C}$ de rapport $\rho(g)^{-1}$. D'autre part $\pi_1(S)$ agit sur $\tilde{S}$, on peut donc quotienter $\tilde{S} \times \mathbb{C}$ par l'action diagonale de $\pi_1(S)$. Pour $g \in \pi_1(S)$ et $(\tilde{s}, z) \in \tilde{S} \times \mathbb{C}$, cette action est donnée par $g(\tilde{s}, z) = (g(\tilde{s}), \rho(g)^{-1}z)$. Le quotient $(\tilde{S} \times \mathbb{C})/\pi_1(S)$ est alors un fibré en droites holomorphe sur S noté $L^\rho \in Pic(S)$. On obtient ainsi un homomorphisme de groupes

$$\varphi : Hom(\pi_1(S), \mathbb{C}^*) \to Pic(S)$$

et on a

$$Im\ \varphi = Pic^{plat}(S) := \{L \in Pic(S) \mid c_1(L) \in tors(H^2(S,\mathbb{Z}))\}$$

De plus on montre que φ est injective en comparant les suites exponentielles pour les faisceaux $\mathbb{C}^*$ et $\mathcal{O}^*$, et en utilisant que $H^1(S,\mathbb{C}) \to H^1(S,\mathcal{O})$ est injective.

On a une correspondance entre ce que l'on appelle les "objets tordus" sur S et les "objets invariants" sur $\tilde{S}$:

$$H^0(S, L^\rho) = \{\alpha \in \mathcal{O}(\tilde{S}) \mid \text{pour tout } g \in \pi_1(S), g^*\alpha = \rho(g)\alpha\}$$

$$H^0(S, \Theta \otimes L^\rho) = \{\alpha \in \Theta(\tilde{S}) \mid \text{pour tout } g \in \pi_1(S), g^*\alpha = \rho(g)\alpha\}$$

et de manière analogue pour les p-champs ou p-formes tordues sur S. Comme le laisse présager le signe "=" placé entre les ensembles ci-dessus, on considèrera par abus de langage qu'un élément de l'un est aussi un élément de l'autre.
Soient pour $i = 1, 2$,

$$f_i \in H^0(S, L^{\rho_i}), \theta_i \in H^0(S, \Theta \otimes L^{\rho_i}), \text{ et } \omega \in H^0(S, \Omega^1 \otimes L^\rho)$$

Alors on peut définir $f_1 f_2$, $\theta_1 \wedge \theta_2$, $\omega(\theta_i)$ et $[\theta_1, \theta_2]$ (crochet de Lie) en "remontant" sur $\tilde{S}$, et de plus on a

$$f_1 f_2 \in H^0(S, L^{\rho_1\rho_2}), \quad \theta_1 \wedge \theta_2 \in H^0(S, K^{-1} \otimes L^{\rho_1\rho_2}),$$

$$\omega(\theta_i) \in H^0(S, L^{\rho\rho_i}), \quad \text{et } [\theta_1, \theta_2] \in H^0(S, \Theta \otimes L^{\rho_1\rho_2}).$$

Supposons dorénavant (et jusqu'à la fin) que notre surface S (avec $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) > 0$) admet deux champs tordus $\theta_i \in H^0(S, \Theta \otimes L^{\rho_i})$ $\mathbb{C}$-linéairement indépendants sur $\tilde{S}$, avec $L^{\rho_i} \in Pic^{plat}(S)$, pour $i = 1, 2$. On va montrer que S est une surface d'Inoue-Hirzebruch.

Puisque θ_1 et θ_2 sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants, aucun des deux n'est identiquement nul. De plus s'il étaient colinéaires en tout point de $\tilde{S}$, leur quotient produirait une fonction méromorphe tordue sur S (i.e. une section méromorphe d'un L^ρ) non constante, ce qui est impossible d'après le lemme 2.1. Il existe donc au moins un point p où $\theta_1(p)$ et $\theta_2(p)$ sont indépendants. Par conséquent, la surface S possède deux feuilletages $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$: on obtient le feuilletage $\mathcal{F}_i$ en "réduisant" (localement, sur $\tilde{S}$) le champ θ_i. Au vu des théorèmes de classification partielle des surfaces de la classe VII_0, l'existence de ces deux feuilletages a plusieurs conséquences :

- tout diviseur non nul D sur S vérifie $D^2 < 0$: comme $b_2 = b_2^-$ on a $D^2 \leq 0$, et si $D^2 = 0$ alors d'après [Enoki] S est une surface à CSG non Inoue-Hirzebruch, donc n'a qu'un seul feuilletage d'après [Dlouss-Oelj], ce qui est exclu. On en déduit par le critère de Grauert que toute union connexe de courbes de S peut se contracter, d'une manière unique, en une singularité normale.
- si S contenait une courbe elliptique, alors d'après [Naka 1] (10.2), S serait à CSG et non Inoue-Hirzebruch, ce qui est impossible. Donc (par [Naka 1] (2.2.2)) toute courbe C de S est rationnelle (i.e. à normalisée rationnelle), et C est soit lisse, soit avec un point double ordinaire.

D'après [Brun] p.585, une surface de la classe VII qui admet un feuilletage régulier a un deuxième nombre de Betti nul. Par conséquent, les $\mathcal{F}_i$ ont nécessairement des singularités. En particulier les ensembles $\{\theta_i = 0\}$ sont non vides. Rappelons que le lieu d'annulation d'un champ de vecteur (éventuellement tordu) est en général l'union d'un diviseur et de points isolés.

On note D_{-K} le diviseur d'annulation de $\theta_1 \wedge \theta_2 \in H^0(S, K^{-1} \otimes L^{\rho_1\rho_2})$. C'est un diviseur effectif, et on a $c_1^{\mathbb{R}}(D_{-K}) = c_1^{\mathbb{R}}(K^{-1} \otimes L^{\rho_1\rho_2}) = c_1^{\mathbb{R}}(K^{-1}) + c_1^{\mathbb{R}}(L^{\rho_1\rho_2}) = c_1^{\mathbb{R}}(K^{-1}) = -c_1^{\mathbb{R}}(K)$, donc D_{-K} est un diviseur numériquement anticanonique, i.e. pour toute courbe C, on a $D_{-K}.C = -K.C = C^2 + e(C) - 2\delta(C)$, où $e(C)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de la normalisée de C, et $\delta(C)$ est la somme des "delta-invariants" de C (voir [Ném]). Par ailleurs, on a $|D_{-K}| = |D_{max}|$ car pour une courbe C de S, un champ tordu est soit tangent à C soit nul sur C : on remonte sur $\tilde{S}$, où le champ tordu devient un vrai champ, qui est alors soit tangent à C, soit nul sur C, car C se contracte. En particulier, tout champ tordu est nul aux points singuliers de D_{max}. Comme un champ de vecteurs non trivial sur une courbe rationnelle lisse a exactement deux zéros (comptés avec multiplicité), on en déduit que si une telle courbe coupe trois autres courbes de D_{max} alors les θ_i y sont identiquement nuls.

Lemme 2.1. *Si $L^\rho \not\approx \mathcal{O}$ (i.e. $\rho \not\equiv 1$), alors L^ρ n'admet pas de section méromorphe non identiquement nulle, i.e.*

$$H^0(S, \mathcal{M} \otimes L^\rho) = 0$$

Preuve : soit $s \in H^0(S, \mathcal{M} \otimes L^\rho)$. Si s et s^{-1} ne s'annulent jamais alors $L^\rho \approx \mathcal{O}$. Sinon, on a $s \equiv 0$: si $s \not\equiv 0$ alors notons $D(= D_0 - D_\infty)$

le diviseur de s. On a remarqué ci-dessus que $D^2 < 0$, mais $D^2 = c_1(D)^2 = c_1(L^\rho)^2 = 0$, ce qui est impossible. ■

Si on se donne r sections holomorphes $s_1, \dots, s_r$ d'un fibré vectoriel F de rang r qui sont génériquement indépendantes, alors on peut définir une "base duale" $s_1^*, \dots, s_r^*$ de sections méromorphes dans le fibré dual F^*, telles que $s_i^*(s_j) \equiv \delta_{ij}$. Par ce procédé, on définit sur $\tilde{S}$ deux 1-formes méromophes ω_1 et ω_2 duales des champs θ_1 et θ_2 (vus sur $\tilde{S}$), qui sont holomorphes sur $\tilde{S} \backslash \tilde{D}_{max}$, et telles que $\omega_i(\theta_j) = \delta_{ij}$. On peut vérifier qu'alors ω_i donne une section méromorphe de $\Omega^1 \otimes L^{\rho_i^{-1}}$ (i.e. $\omega_i \in H^0(S, \mathcal{M} \otimes \Omega^1 \otimes L^{\rho_i^{-1}})$), holomorphe sur $S \backslash D_{max}$.

3. Preuve du théorème

Lemme 3.1. *On a $\rho_i \not\equiv 1$ pour $i = 1, 2$.*

Preuve : on raisonne par l'absurde.

Si $\rho_1 \equiv \rho_2 \equiv 1$, alors on a deux vrais champs de vecteurs sur S, donc S est presque homogène. D'après la classification de [Pot] (et [Haus]), ceci est incompatible avec nos hypothèses.

Si $\rho_1 \not\equiv 1$ et $\rho_2 \equiv 1$ (le cas $\rho_1 \equiv 1$ et $\rho_2 \not\equiv 1$ est symétrique) alors d'après [D-O-T 1] Théorème 3.2, S est une surface spéciale (i.e. contient exactement $b_2(S)$ courbes rationnelles). Donc d'après [Naka 2], D_{max} est connexe et contient un cycle de courbes rationnelles. En particulier on a $h^1(D_{max}, \mathcal{O}) \geq 1$.

Soit $f : S \to S'$ la contraction de D_{max} en une singularité normale $s \in S'$. La suite spectrale de Leray donne la suite exacte

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^0(S', R^1 f_* \mathcal{O}_S) \to H^2(S', \mathcal{O}_{S'})$$

Notons $p_g := h^0(S', R^1 f_* \mathcal{O}_S)$, qui est le genre géométrique de la singularité de S'. On a $H^1(S, \mathcal{O}_S) \approx \mathbb{C}$ d'après (1) . Par dualité de Serre-Grothendieck, on a $H^2(S', \mathcal{O}_{S'}) \approx H^0(S', \omega_{S'})$, où $\omega_{S'}$ est le faisceau dualisant de S'. Comme $\mathcal{M}(S') = \mathbb{C}$, on a $h^0(S', \omega_{S'}) \leq 1$.

Si $h^0(S', \omega_{S'}) = 0$, on a $p_g \leq 1$ d'après la suite exacte ci-dessus. D'autre part, d'après [St-St] p.100, on a l'inégalité

$$q \leq p_g - h^1(D_{max}, \mathcal{O})$$

où q est la $\mathbb{C}$-codimension de $H^0(f^{-1}(U), \Omega^1)$ dans $H^0(U \backslash \{s\}, \Omega^1)$, avec U un petit voisinage de Stein de s dans S'.
Dans notre cas on a $p_g \leq 1$ et $h^1(D_{max}, \mathcal{O}) \geq 1$, donc q est nul et par conséquent ω_2 se prolonge holomorphiquement sur D_{max}. Mais on a $\omega_2(\theta_2) \equiv 1$, θ_2 holomorphe, et $\{\theta_2 = 0\} \neq \varnothing$, ce qui est impossible.

Si $h^0(S', \omega_{S'}) = 1$, alors il existe une section holomorphe γ' de $\omega_{S'}$ non identiquement nulle. Comme $\omega_{S'}$ est sans torsion (cf. [Eisen] Ch.

21), la section $\gamma'_{|S'\backslash\{s\}}$ est non identiquement nulle, et remonte donc sur $S\backslash D_{max}$ en une 2-forme holomorphe γ non identiquement nulle.

Il est par ailleurs connu que $H^0(f^{-1}(U),\Omega^2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$-codimension finie (égale à p_g) de $H^0(U\backslash\{s\},\Omega^2)$. D'autre part le sous-espace vectoriel $V := \{f\gamma'_{|U\backslash\{s\}} \mid f \in \mathcal{O}(U)\}$ est de dimension infinie, donc intersecte non trivialement $H^0(f^{-1}(U),\Omega^2)$. Par conséquent, γ se prolonge méromorphiquement en un élément non nul de $H^0(S,\mathcal{M}\otimes\Omega^2)$.

Par ailleurs, on a $\omega_1\wedge\omega_2 \in H^0(S,\mathcal{M}\otimes\Omega^2\otimes L^{\rho_1})$, donc le quotient de $\omega_1\wedge\omega_2$ par γ est un élément non nul de $H^0(S,\mathcal{M}\otimes L^{\rho_1})$, ce qui est impossible d'après le lemme 2.1. ■

Remarque : d'après le résultat principal de [D-O-T 2], on peut donner une preuve plus simple du lemme ci-dessus.

Considérons le crochet de Lie $\theta := [\theta_1,\theta_2] \in H^0(S,\Theta\otimes L^{\rho_1\rho_2})$.

Lemme 3.2. *On a* $\theta = [\theta_1,\theta_2] \equiv 0$.

Preuve : le 2-champ $\theta_1\wedge\theta_2$ n'est jamais nul sur $\tilde{S}\backslash\tilde{D}_{max}$, donc θ_1 et θ_2 trivialisent le fibré tangent de $\tilde{S}\backslash\tilde{D}_{max}$. On a donc sur $\tilde{S}\backslash\tilde{D}_{max}$ une décomposition *unique* $\theta = \alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2$ avec $\alpha_i \in \mathcal{O}(\tilde{S}\backslash\tilde{D}_{max})$.
Pour tout $g \in \pi_1(S)$ on a
$g^*(\theta) = \rho_1(g)\rho_2(g)\theta = \rho_1(g)\rho_2(g)\alpha_1\theta_1 + \rho_1(g)\rho_2(g)\alpha_2\theta_2$, et d'autre part

$$\begin{aligned} g^*(\theta) &= g^*(\alpha_1)g^*(\theta_1) + g^*(\alpha_2)g^*(\theta_2) \\ &= g^*(\alpha_1)\rho_1(g)\theta_1 + g^*(\alpha_2)\rho_2(g)\theta_2. \end{aligned}$$

Donc $g^*\alpha_i = \rho_{3-i}(g)\alpha_i$, i.e. $\alpha_i \in H^0(S\backslash D, L^{\rho_{3-i}})$ pour $i=1,2$. D'après [Kato 2] p.247, les α_i se prolongent en des éléments de $H^0(S,L^{\rho_{3-i}})$. Donc $\alpha_i \equiv 0$ par le lemme 2.1, d'où $\theta \equiv 0$. ■

Lemme 3.3. *Les formes* ω_i *sont fermées sur* $\tilde{S}\backslash\tilde{D}_{max}$.

Preuve : comme en tout point p de $\tilde{S}\backslash\tilde{D}_{max}$, $\{\theta_1(p),\theta_2(p)\}$ est une base de l'espace tangent, le résultat découle de la formule

$$\begin{aligned} 2d\omega_i(\theta_1,\theta_2) &= \theta_1(\omega_i(\theta_2)) - \theta_2(\omega_i(\theta_1)) - \omega_i([\theta_1,\theta_2]) \\ &= \theta_1(\delta_{i2}) - \theta_2(\delta_{i1}) - \omega_i(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.4. *Chaque composante connexe de* D_{max} *contient un cycle de courbes rationnelles.*

Preuve : soient $D_1,\ldots,D_k$ les composantes connexes de D_{max}. Si le morphisme $\pi_1(D_j)\to\pi_1(S)$ (induit par $D_j \hookrightarrow S$) a une image réduite au sous-groupe trivial, alors chaque composante connexe de $\pi^{-1}(D_j)$ est envoyée par le revêtement universel π *isomorphiquement* sur D_j.

Soit $\tilde{D}_j$ une de ces composantes, qui, d'après l'isomorphisme ci-dessus, est compacte. Soit U un petit voisinage de $\tilde{D}_j$. Comme ω_1 et ω_2 sont holomorphes et fermées (par le lemme 3.3) sur $U \backslash \tilde{D}_j$, alors d'après [St-St] elles se prolongent holomorphiquement sur tout U. Ceci est impossible car $\omega_i(\theta_j) \equiv \delta_{ij}$ alors que θ_1 et θ_2 sont colinéaires sur $\tilde{D}_j$. On obtient $\pi_1(D_j) \neq \{e\}$, ce qui dans notre cas équivaut à dire que D_j contient un cycle de courbes rationnelles. ■

Si D_{max} n'est pas connexe, alors S contient deux cycles, donc S est une surface d'Inoue-Hirzebruch paire (aussi appelée "hyperbolic Inoue") d'après [Naka 1]. On supposera donc par la suite que D_{max} est connexe. De plus D_{max} contient un cycle de courbes rationnelles, notons-le Γ.

Lemme 3.5. *La singularité normale obtenue en contractant D_{max} est une singularité "faiblement" elliptique, i.e. $\chi(Z) = 0$, où Z est le diviseur fondamental d'Artin.*

Preuve : on procède comme dans la preuve du lemme 3.1 : on note $f : S \to S'$ la contraction de D_{max}, et on a

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^0(S', R^1 f_* \mathcal{O}_S) \to H^2(S', \mathcal{O}_{S'})$$

Notons à nouveau $p_g := h^0(S', R^1 f_* \mathcal{O}_S)$. Comme on a $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 1$, $h^2(S', \mathcal{O}_{S'}) = h^0(S', \omega_{S'})$, et $h^0(S', \omega_{S'}) \leq 1$, la suite exacte ci-dessus implique que $p_g \leq 2$.

Le cas $p_g = 0$ (i.e. la singularité est rationnelle) est impossible, car D_{max} contient un cycle, alors que le graphe de résolution d'une singularité rationnelle est un arbre.

Si $p_g = 1$, alors la singularité est (fortement) elliptique.

Si $p_g = 2$, alors on a nécessairement $h^0(S', \omega_{S'}) = 1$, donc il existe une section holomorphe γ' de $\omega_{S'}$ non identiquement nulle. Comme S' n'a aucune courbe compacte, et que $\omega_{S'}$ est inversible en dehors de s, γ' ne s'annule en aucun point de $S' \backslash \{s\}$. On en conclut que la singularité de S' est Gorenstein. D'après un résultat de St. S.-T. Yau, une singularité Gorenstein de genre 2 est elliptique. ■

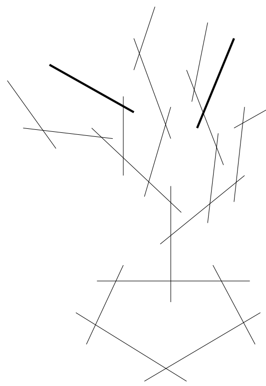
Alors la topologie de D_{max} est la suivante (cf. [Ném]) :
Γ est l'unique cycle de D_{max}, auquel sont attachés des arbres de courbes rationnelles lisses (cf. dessin ci-dessous). Si le cycle Γ est réduit à une seule courbe, cette courbe est alors une courbe rationnelle avec un point double ordinaire. On va exclure cette situation en passant à un revêtement à deux feuillets $r : S' \to S$. D'après [Dlouss] Corollaire

3.9, si S' est une surface d'Inoue-Hirzebruch alors S est aussi d'Inoue-Hirzebruch. Notons $\Gamma' := r^{-1}(\Gamma)$. Si Γ' a deux composantes connexes, on a deux cycles dans S', et on conclut comme précédemment. Sinon, Γ' est composé de deux courbes lisses C_1 et C_2, avec $C_1.C_2 = 2$. Par conséquent, on supposera dorénavant que toutes les courbes de S sont lisses.

Dans la terminologie des singularités elliptiques, Γ est appelé le "cycle minimal elliptique", où le mot "cycle" est à prendre au sens de l'homologie. Rappelons que pour nous, "cycle" est synonyme de "cycle de courbes rationnelles". On déduit de [Wag] Proposition 3.1 que D_{max} est un diviseur à croisements normaux.

Quand un champ tordu est non nul sur une courbe C, alors le feuilletage qui lui est associé laisse C invariante. Si par contre le champ s'y annule identiquement alors a priori les deux cas "C invariante" et "C non invariante" sont tous les deux possibles. Pour $i = 1, 2$, notons I_i (resp. N_i) l'union des courbes $\mathcal{F}_i$-**i**nvariantes (resp. $\mathcal{F}_i$-**n**on invariantes). Pour une courbe C de D_{max}, la valence de C est le nombre d'arêtes du graphe dual d'intersection attachées au point qui correspond à C : on a une arête pour chaque point d'intersection de C avec une autre courbe ou avec elle-même. On appellera "extrémité" une courbe C de D_{max} qui ne coupe qu'une seule autre courbe, en un seul point, i.e. le point correspondant à C dans le graphe dual d'intersection est de valence un.

Voici un dessin où les courbes de N_i sont en gras (on va montrer au lemme 3.7 qu'elles sont nécessairement des extrémités du graphe). Par souci de clarté, on ne représente qu'un seul arbre accroché au cycle :



Lemme 3.6. *Soit $i \in \{1, 2\}$. Soit C une courbe irréductible de D_{max}. Alors $C \subset N_i$ implique que C est non polaire pour ω_{3-i}, et ceci implique que $\theta_{3-i} \not\equiv 0$ sur C, et donc que $C \subset I_{3-i}$.*

Preuve : soit p un point de C où $\mathcal{F}_i$ est régulier et transverse à C. Il existe alors des coordonnées locales (z_1, z_2) sur un voisinage U de p

telles que, sur U on ait $C = \{z_2 = 0\}$ et $\theta_i = f\frac{\partial}{\partial z_2}$ avec $f \in \mathcal{O}(U)$. Notons $\omega_{3-i} = \alpha dz_1 + \beta dz_2$, avec $\alpha, \beta \in \mathcal{M}(U)$. Comme $\omega_{3-i}(\theta_i) \equiv 0$, on a $\omega_{3-i} = \alpha dz_1$ donc $d\omega_{3-i} = -\frac{\partial \alpha}{\partial z_2} dz_1 \wedge dz_2$. De plus sur $U \backslash C$ on a $d\omega_{3-i} \equiv 0$. On en déduit que sur U, $\frac{\partial \alpha}{\partial z_2} \equiv 0$, i.e. $\alpha = \alpha(z_1)$. Donc, en localisant à nouveau, on trouve un voisinage V d'un point de C sur lequel ω_{3-i} est holomorphe. Comme $\omega_{3-i}(\theta_{3-i}) \equiv 1$, ni ω_{3-i} ni θ_{3-i} ne s'annulent sur V. ■

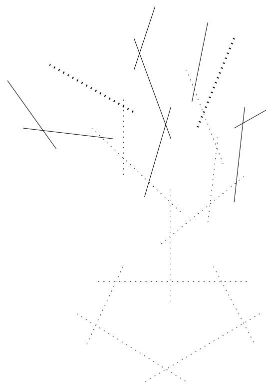
Lemme 3.7. *Si $C \subset N_1$ ou $C \subset N_2$, alors C est une extrémité du graphe d'intersection de D_{max}. En particulier, $I_1 \geq \Gamma$ et $I_2 \geq \Gamma$.*

Preuve : si C n'est pas une extrémité, alors la réunion de toutes les autres courbes a toujours une composante connexe D_1 qui est simplement connexe. On a alors $C \subset I_1$ et $C \subset I_2$ car sinon :
C est non polaire pour (disons) ω_1 (lemme 3.6). En remontant au revêtement universel, on obtient que ω_1 est une 1-forme holomorphe fermée sur un voisinage de D_1 privé de D_1. D'après [St-St] p.99, ω_1 se prolonge holomorphiquement à D_1. Comme $\omega_1(\theta_1) \equiv 1$, le champ θ_1 ne s'annule jamais sur D_1. Ceci est impossible car θ_1 est nul en tout point de $C \cap D_1$. ■

Lemme 3.8. *Soit C une courbe sur laquelle est attachée une extrémité. Alors $\theta_i \equiv 0$ sur C pour $i = 1, 2$.*

Preuve : prenons une telle courbe C. Si $C \subset \Gamma$ alors valence$(C) \geq 3$ (C coupe un sommet, et ses deux voisines dans Γ) donc θ_i s'annule en trois points distincts de C, donc $\theta_i \equiv 0$ sur C. Si $C \not\subset \Gamma$, soit $C = C_0, C_1, \ldots, C_k$ une suite de courbes adjacentes qui relie C à une courbe C_k de valence au moins 3 (une telle courbe existe d'après l'hypothèse du lemme). Si $\theta_i \not\equiv 0$ sur C alors il existe l tel que $\theta_i \not\equiv 0$ sur C_l et $\theta_i \equiv 0$ sur C_{l+1}. Comme valence$(C_l) \geq 2$ (en fait on a l'égalité), le champ θ_i restreint à C_l a un zéro d'ordre 1 en $C_l \cap C_{l+1}$. On peut localement diviser θ_i par une fonction définissante réduite de C_{l+1}, et obtenir un champ holomorphe qui définit toujours $\mathcal{F}_i$. Mais ce champ, au point $C_l \cap C_{l+1}$, est non nul et tangent à C_l. On a alors $C_{l+1} \subset N_i$, ce qui est impossible d'après le lemme 3.7 car C_{l+1} n'est pas une extrémité. ■

Notons A_i la réunion de Γ et de toutes les géodésiques joignant une courbe de N_i à Γ (on prend $N_i \subset A_i$), et posons $B_i := D - A_i$. Alors $B_i \subset I_i$ et B_i contient toutes les extrémités invariantes. Voici un dessin où A_i est en pointillés et B_i en trait plein :



Pour un diviseur A, on notera $v_A(C)$ la valence de C dans le graphe de A. Remarquons que l'on a $|B_i| \cap |N_i| = \varnothing$. Par ailleurs, si $C \subset A_i \cap I_i$ alors C n'est pas une extrémité donc $v_{A_i}(C) \geq 2$ (car A_i est connexe). On a donc $v_{D_{max}}(C) = v_{A_i}(C) + v_{B_i}(C) \geq 2 + v_{B_i}(C) \quad (\star)$.
Pour $i = 1, 2$, notons D_{θ_i} le diviseur d'annulation de θ_i, et définissons les diviseurs effectifs :

$$D'_i := D_{\theta_i} + B_i - N_i$$

On va maintenant montrer que $D_{max} = \Gamma$.

Supposons le contraire.
Alors d'après les lemmes 3.7 et 3.8, on a $D'_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$.

Dans [Brun], l'auteur définit, pour une courbe C et un feuilletage $\mathcal{F}_i$ sur une surface, les nombres suivants :
—pour $C \subset N_i$, le nombre non négatif $tang_i(C)$ qui compte avec multiplicités les tangences de $\mathcal{F}_i$ avec C.
—pour $C \subset I_i$ et C lisse, le nombre $Z_i(C) := \sum_{p \in C} Z_i(p, C)$, où $Z_i(p, C)$ est l'ordre d'annulation en p de la restriction à C d'un champ à zéros isolés définissant $\mathcal{F}_i$.

Comme l'intersection de deux courbes de I_i est nécessairement une singularité de $\mathcal{F}_i$, on a $Z_i(C) \geq v_{I_i}(C)$. Brunella définit aussi un fibré en droites sur S appelé $T_{\mathcal{F}_i}$ (le "fibré tangent" du feuilletage). Dans notre cas, on a $T_{\mathcal{F}_i} \approx \mathcal{O}(D_{\theta_i}) \otimes L^{\rho_i^{-1}}$. On a donc l'égalité $c_1^{\mathbb{R}}(T_{\mathcal{F}_i}) = c_1^{\mathbb{R}}(D_{\theta_i})$.

Pour deux diviseurs A et A' et une courbe C, l'égalité entre multiplicités "$m_C(A) = m_C(A')$" sera par la suite abrégée par "$A =_C A'$", et de même "$m_C(A) = k$" sera abrégée par "$A =_C k$".

Par ailleurs, on a l'égalité

$$D_{-K} = D_{\theta_1} + D_{\theta_2} + D_{tang} \tag{2}$$

où D_{tang} est le diviseur (effectif) des tangences entre $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. En particulier on a $D_{tang} \geq min(I_1, I_2)$.

Notons Z le diviseur fondamental d'Artin : Z est le diviseur effectif non nul minimal (au sens de l'ordre partiel "$\leq$") vérifiant la propriété que $Z.C \leq 0$ pour toute courbe C.

Lemme 3.9. *Pour $i = 1, 2$,*

$$Z \leq D'_i \leq D_{-K}$$

Preuve :

- $Z \leq D'_i$?
  Soit C une courbe de D_{max}. D'après [Brunella] on a $D_{\theta_i}.C = C^2 - tang_i(C)$ (resp. $2 - Z_i(C)$) si $C \subset N_i$ (resp. $C \subset I_i$).
  – si $C \subset N_i$, $D'_i.C = C^2 - tang_i(C) - C^2 \leq 0$.
  – si $C \subset I_i \cap B_i$, $D'_i.C = 2 - Z_i(C) + C^2 + v_{B_i}(C)$, mais $v_{B_i}(C) - Z_i(C) \leq v_{I_i}(C) - Z_i(C) \leq 0$, donc $D'_i.C \leq 0$.
  – si $C \subset I_i \cap A_i$, $$\begin{aligned} D'_i.C &= 2 - Z_i(C) + v_{B_i}(C) - v_{N_i}(C) \\ &\leq 2 + v_{B_i}(C) - v_{I_i}(C) - v_{N_i}(C) \\ &= 2 + v_{B_i}(C) - v_{D_{max}}(C) \\ &\leq 0 \text{ (cf. } (\star) \text{ ci-dessus).} \end{aligned}$$
- $D'_i \leq D_{-K}$?
  On utilise l'égalité (2). Par symétrie, il suffit de vérifier que $B_1 - N_1 \leq D_{\theta_2} + D_{tang}$. Le seul cas non trivial est le cas $B_1 =_C 1$, mais alors on a $C \subset I_1$ donc $D_{\theta_2} + D_{tang} \geq_C 1$, car on a soit $D_{\theta_2} >_C 0$, soit $D_{\theta_2} =_C 0$ et alors $C \subset I_2$, donc $D_{tang} >_C 0$.

■

D'après la description de la suite elliptique dans le cas numériquement Gorenstein qui est faite dans [Ném], on déduit (cf. p.151 ligne 7 de l'article, "$B_1 \neq B_0$") qu'il existe une extrémité C (attachée à, disons, C') telle que $Z =_C D_{-K}$. On a donc $D_{-K} =_C D'_i$ pour $i = 1, 2$, i.e.

$$D_{\theta_2} + D_{tang} =_C B_1 - N_1 \quad \text{et} \quad D_{\theta_1} + D_{tang} =_C B_2 - N_2$$

Si $N_i =_C 1$ alors $B_i =_C 0$, mais c'est impossible car $D_{\theta_i} + D_{tang} \geq 0$. Donc $B_1 =_C B_2 =_C 1$, donc $C \subset I_1$ et $C \subset I_2$, d'où $D_{tang} >_C 0$. On obtient $D_{\theta_1} =_C D_{\theta_2} =_C 0$ et $D_{tang} =_C 1$.

Or $$\begin{aligned} 2 + C^2 = D_{-K}.C &= (D_{\theta_1} + D_{\theta_2} + D_{tang}).C \\ &= m_{C'}(D_{\theta_1}) + m_{C'}(D_{\theta_2}) + C^2 + m_{C'}(D_{tang}) \end{aligned}$$

Mais par le lemme 3.7, $C' \subset I_1$ et $C' \subset I_2$, donc $m_{C'}(D_{tang}) > 0$, et par le lemme 3.8, $m_{C'}(D_{\theta_i}) > 0$ pour $i = 1, 2$.
Contradiction.

On en conclut l'égalité $D_{max} = \Gamma$.

Comme pour toute C on a $\Gamma.C = C^2 + 2$, on en déduit que $D_{-K} = \Gamma$. D'après le lemme 3.7 on a $D_{tang} \geq \Gamma$, donc par (2) on obtient

$D_{\theta_1} = D_{\theta_2} = 0$. Sur toute courbe $C \subset \Gamma$, θ_1 et θ_2 sont donc non identiquement nuls. Par ailleurs, ces champs s'annulent aux deux points de $C \cap Sing(\Gamma)$, donc leur restriction à C ne peut s'annuler qu'à l'ordre 1 en ces points.

Soit p un point d'intersection de deux courbes C_1 et C_2 de Γ. Comme C_1 et C_2 sont lisses, $\mathcal{F}_1$-invariantes, et transverses en p, on obtient une diagonalisation de la matrice jacobienne associée au feuilletage $\mathcal{F}_1$ en p (voir [Brun] pp. 574–575). Comme θ_1 restreint à C_1 ou C_2 s'annule à l'ordre 1 en p, les valeurs propres de la jacobienne sont non nulles, donc le point p est non dégénéré, et on a alors $Det(p, \mathcal{F}_1) = 1$ (ibid.). On en déduit que $Det(\mathcal{F}_1) = n$, où n est le nombre de courbes du cycle Γ (car n est alors aussi le nombre de singularités de $\mathcal{F}_1$).

Par ailleurs, comme $D_{\theta_1} = 0$, la formule de Baum-Bott pour $Det(\mathcal{F}_1)$ se réduit à $Det(\mathcal{F}_1) = c_2$. Comme $c_2 = b_2$ (cf. (1)), on en déduit que $n = b_2$. En outre, les courbes de S sont homologiquement indépendantes (sinon on aurait un diviseur non nul de carré nul), donc engendrent $H_2(S, \mathbb{Q})$. On conclut par [Naka 1] que S est une surface d'Inoue-Hirzebruch impaire (aussi appelée "half-Inoue").

Les deux premiers auteurs remercient la Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) pour son support financier.

Bibliographie

[Brun] **M. Brunella :** "Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes". Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30 (1997), no. 5, 569–594.

[Dlouss] **G. Dloussky :** "Une construction élémentaire des surfaces d'Inoue-Hirzebruch". Math. Ann. 280, 663–682 (1988).

[Dlouss-Oelj] **G. Dloussky, K. Oeljeklaus :** "Vector fields and foliations on compact surfaces of class VII_0". Ann. Inst. Fourier 43 (1999), no. 5, 1503–1545.

[D-O-T 1] **G. Dloussky, K. Oeljeklaus, M. Toma :** "Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs". Comment. Math. Helv. 75 (2000), no. 2, 255–270.

[D-O-T 2] **G. Dloussky, K. Oeljeklaus, M. Toma :** "Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs, II". PREPRINT (http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/preprints/kommalg.shtml)

[Eisen] **D. Eisenbud :** "Commutative algebra". Springer, New-York 1995.

[Enoki] **I. Enoki :** "Surfaces of class VII_0 with curves". Tohoku Math. J., II. Ser. 33 (1981), 453–492.

[Haus] **J. Hausen :** "Zur Klassifikation glatter kompakter C^*-Flächen.". Math. Ann. 301 (1995), no. 4, 763–769.

[Kato 1] **Ma. Kato :** "Compact complex manifolds containing 'global' spherical shells. I". Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), pp. 45–84, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.

[Kato 2] **Ma. Kato :** "Riemann-Roch theorem for strongly pseudoconvex manifolds of dimension 2". Math. Ann. 222 (1976), no. 3, 243–250.

[Naka 1] **I. Nakamura :** "On surfaces of class VII_0 with curves". Invent. Math. 78 (1984), no. 3, 393–443.

[Naka 2] **I. Nakamura :** "On surfaces of class VII_0 with curves. II". Tôhoku Math. J. (2) 42 (1990), no. 4, 475–516.

[Ném] **A. Némethi :** "'Weakly' elliptic Gorenstein singularities of surfaces". Invent. Math. 137 (1999), no. 1, 145–167.

[Pot] **J. Potters :** "On almost homogeneous compact complex analytic surfaces". Invent. Math. 8 1969, 244–266.

[St-St] **D. van Straten, J. Steenbrink :** "Extendability of holomorphic differential forms near isolated hypersurface singularities". Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 55 (1985), 97–110.

[Wag] **P. Wagreich :** "Elliptic singularities of surfaces". Amer. J. Math. 92 (1970), 419–454.