L'isomorphisme de Satake par des techniques immobilières

Auguste Hébert

Table des matières

0.1 Introduction

Ce mémoire a pour principal objet d'étude les immeubles. Il est composé de deux chapitres, le premier est une introduction aux immeubles et le deuxième fait le lien entre algèbres de Hecke sphériques, algèbres d'Iwahori-Hecke et immeubles, d'abord en utilisant les techniques de [Par06] puis en construisant l'isomorphisme de Satake.

Les immeubles sont des objets géométrico-combinatoires introduits dans les années 60 et axiomatisés par Jacques Tits. Ce sont des complexes simpliciaux vérifiant certaines propriétés. Le principe général des techniques immobilières est d'étudier des groupes potentiellement abstraits en utilisant de la géométrie affine. Originellement le but de leur introduction était d'étudier les groupes de Lie semi-simples, mais le champ des applications s'est grandement élargi depuis. On peut citer notamment l'étude des groupes réductifs sur des corps locaux, ou plus récemment, l'étude des groupes de Kac-Moody. Plus précisément, dans [BT72] et [BT84], François Bruhat et Jacques Tits associent à certains groupes réductifs sur des corps valués henséliens, et notamment à tout groupe réductif sur un corps de valuation discrète hensélien à corps résiduel parfait (dont les $\mathbb{Q}_p$ sont des exemples) des immeubles qui permettent de les étudier. Ces immeubles sont appelés immeubles de Bruhat-Tits. Il existe cependant des immeubles ne provenant pas de tels groupes. Plus récemment, dans [GR08], Stéphane Gaussent et Guy Rousseau ont associé une « masure » à tout groupe de Kac-Moody symétrisable sur un corps K muni d'une valuation discrète avec un corps résiduel contenant $\mathbb{C}$. Ces masures sont axiomatisées dans [Rou11]. Elles généralisent les immeubles euclidiens mais une différence majeure avec ces derniers est que deux points de la masure ne sont pas toujours dans un même appartement. Dans ce mémoire, les immeubles étudiés ne sont pas définis à partir de groupes mais les résultats obtenus s'appliquent à de tels immeubles.

Dans le deuxième chapitre on introduit les algèbres de Hecke et d'Iwahori-Hecke et on associe une algèbre de d'Iwahori-Hecke à un immeuble régulier, puis une algèbre de Hecke sphérique à un immeuble d'épaisseur finie sur lequel un groupe agit fortement transitivement. On démontre ensuite l'isomorphisme de Satake, qui est un isomorphisme entre l'algèbre de Hecke sphérique d'un immeuble et une certaine algèbre de polynômes reliée à l'immeuble. Cet isomorphisme montre notamment que l'algèbre de Hecke sphérique d'un immeuble est isomorphe au centre de l'algèbre d'Iwahori-Hecke de l'immeuble. À la fin de ce chapitre, j'expose le début de nos recherches sur la formule de Gindikin-Karpelevich. L'objectif est d'écrire une preuve de cette formule en termes immobiliers puis de la généraliser aux masures.

Les algèbres de Hecke ont été introduites par Hecke en 1937. Elles étaient à l'origine définies comme des algèbres engendrées par des opérateurs sur des formes modulaires. L'isomorphisme de Satake a été découvert dans les années 60. En revanche le lien entre algèbre de Hecke, d'Iwahori-Hecke et l'isomorphisme de Satake avec les immeubles a été découvert plus récemment (par exemple dans [Par06] et [GR14]).

Chapitre 1

Immeubles

Ce chapitre est une introduction aux immeubles. La plupart des résultats y sont énoncés sans preuve.

On définit ici les immeubles par deux manières un peu différentes, la première, plutôt géométrique reposant sur des complexes simpliciaux et la deuxième, plus combinatoire utilisant la notion de W-distance, où (W, S) est un groupe de Coxeter (notion que l'on définira). Les deux approches seront importantes dans ce mémoire.

1.1 Complexe simplicial

Cette partie provient majoritairement de [Bro89].

Définition 1.1.0.1. (complexe simplicial) Un *complexe simplicial* ayant pour ensemble de sommets $\mathcal{V}$ est une famille Δ de sous-ensembles de $\mathcal{V}$ (que l'on nommera *simplexes*) telle que :

(i) pour tout v de $\mathcal{V}$, $\{v\}$ est un simplexe

(ii) tout sous-ensemble d'un simplexe A est lui-même un simplexe (appelée *face* de A).

Pour tout simplexe A de Δ, on définit son *rang* r comme étant le cardinal de A et sa *dimension* par $r - 1$.

Un *sous-complexe* de Δ est un sous-ensemble Δ' de Δ tel que Δ' est lui-même un complexe simplicial, d'ensemble de sommets $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$.

Remarque 1.1.0.2. Pour deux simplexes A et B d'un complexe simplicial Δ, on dit que $A \leq B$ si A est une face de B. Cette définition munit Δ d'une structure d'ensemble partiellement ordonné qui vérifie de plus :

(i) Toute paire A,B d'éléments de Δ admet un plus grand minorant, que l'on notera abusivement $A \cap B$

(ii) Pour tout simplexe A de Δ, l'ensemble partiellement ordonné $\Delta_{\leq A}$ des faces de A est isomorphe à $(\mathcal{P}(\llbracket 1, r \rrbracket), \subset)$, pour un certain $r \in \mathbb{N}$.

En fait, tout ensemble partiellement ordonné Δ vérifiant (i) et (ii) peut naturellement être vu comme un complexe simplicial en prenant pour ensemble de sommets $\mathcal{V} = \{x \in \Delta | x \simeq \{1\}\}$. Pour $A \in \Delta$, on pose alors $A' = \{v \in \mathcal{V} | v \leq A\}$. L'ensemble partiellement ordonné Δ est alors isomorphe (en tant qu'ensemble partiellement ordonné) au complexe simplicial $\Delta' = (\{A' | A \in \Delta\}, \mathcal{V})$.

Exemple 1.1.0.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est un simplexe appelé simplexe standard de dimension $n - 1$.

Définition 1.1.0.4. (adjacence, galerie, complexe de chambres) Soit $(\Delta, \mathcal{V})$ un complexe simplicial. Une galerie est une suite finie $(C_0, \ldots, C_n)$ de simplexes *maximaux* (face d'aucun autre simplexe qu'eux-mêmes) telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, C_i et C_{i+1} sont *adjacents*, c'est-à-dire qu'ils ont une face de codimension 1 en commun.

Un *complexe de chambres* est un complexe simplicial Δ de dimension finie tel que tous les simplexes maximaux ont la même dimension (ils sont alors appelés *chambres*) et tel que pour tout couple de chambres C, D de Δ, il existe une galerie reliant C à D. La *dimension* de Δ est alors la dimension de n'importe laquelle de ses chambres.

Dans un complexe de chambres, les faces de codimension 1 s'appellent des *cloisons*.

Si Δ est un complexe de chambres, on note $\mathcal{C}(\Delta)$ l'ensemble de ses chambres.

Définition 1.1.0.5. (morphisme de complexe simpliciaux, morphismes de chambres) Un *morphisme de complexes simpliciaux* entre deux complexes $(\Delta, \mathcal{V})$ et $(\Delta', \mathcal{V}')$ est une application $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ qui envoie les simplexes de Δ sur les simplexes de Δ'. Lorsque pour tout simplexe A de Δ, $\Phi(A)$ et A ont la même dimension (c'est-à-dire quand Φ est injective), on dit que Φ est *non-dégénérée*. Lorsque que Δ et Δ' sont des complexes de chambres de même dimension, Φ est non-dégénérée si et seulement si elle envoie les chambres sur des chambres. Dans ce cas, on dit que Φ est un *morphisme de chambres*.

Remarque 1.1.0.6. Un morphisme de chambres envoie les chambres adjacentes sur des chambres adjacentes, et donc les galeries sur des galeries.

Réalisation géométrique d'un complexe simplicial Tout complexe simplicial $(\Delta, \mathcal{V})$ peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : on choisit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ayant pour base un ensemble de symboles $(e_v)_{v\in\mathcal{V}}$. Pour tout simplexe non vide A, on pose alors $|A| = \{\sum_{v\in A} \lambda_v e_v | (\lambda_v) \in]0,1[^A \text{et} \sum_{v\in A} \lambda_v = 1\}$. On pose alors $|\Delta| = \bigcup_{A\in\Delta} |A|$: c'est la *réalisation géométrique* de Δ. Dans le cas où Δ est fini, on munit $|\Delta|$ de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^{|\mathcal{V}|}$. Cette définition justifie le terme de dimension dans la définition 1.1.0.1, par exemple la réalisation géométrique du simplexe $\{1, 2, 3\}$ de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ est un triangle plein. Cette réalisation géométrique est illustrée sur la figure 1.1.1 Sa face de dimension 2 est la face représentée en rouge, ses faces de dimension 1 sont les arêtes a, b et c et ses sommets sont A, B et C.

Soient Δ et Δ' deux complexes simpliciaux et $f : \Delta \to \Delta'$ un morphisme. On a alors une application $|f| : |\Delta| \to |\Delta'|$ appelée réalisation géométrique de f définie par $|f|(\sum \lambda_v e_v) = \sum \lambda_v e'_{f(v)}$.

Définition 1.1.0.7. (complexe de chambres étroit, épais) Soit Δ un complexe de chambres.

On dit que Δ est *étroit* lorsque toute cloison est face d'exactement deux chambres.

Lorsque toute cloison de Δ est face d'au moins trois chambres, on dit que Δ est *épais*.

Exemple 1.1.0.8. (voir figure 1.1.2)

Soit $\{P_1, \ldots, P_{11}\}$ un ensemble à 11 éléments. Alors $\Delta_1 = \mathcal{P}(\{P_5, P_6\}) \cup \mathcal{P}(\{P_7, P_8\} \cup \mathcal{P}(\{P_8, P_9\}) \cup \mathcal{P}(\{P_8, P_{10}\}) \cup (\{P_{10}, P_{11}\})$, $\Delta_2 = \mathcal{P}\{P_1, P_2, P_3\} \cup \mathcal{P}(\{P_2, P_3, P_4\})$ et $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ sont des complexes simpliciaux. Le complexe Δ n'est pas un complexe de chambres mais Δ_1 et Δ_2 le sont, et leurs dimensions sont 1 et 2. Les chambres de Δ_2 sont $\{P_1, P_2, P_3\}$ et $\{P_2, P_3, P_4\}$ et ses cloisons sont $\{P_1, P_2\}$, $\{P_2, P_3\}$, $\{P_1, P_3\}$, $\{P_2, P_4\}$ et $\{P_3, P_4\}$.

Définition 1.1.0.9. (distance combinatoire, galerie minimale)

Soit Δ un complexe de chambres. On appelle *distance combinatoire* de Δ la distance $d_\Delta : \Delta \times \Delta \to \mathbb{N}$ qui a deux chambre C, C' associe la longueur d'une galerie de longueur minimale joignant C à C'. Une telle galerie est appelée *galerie minimale*.

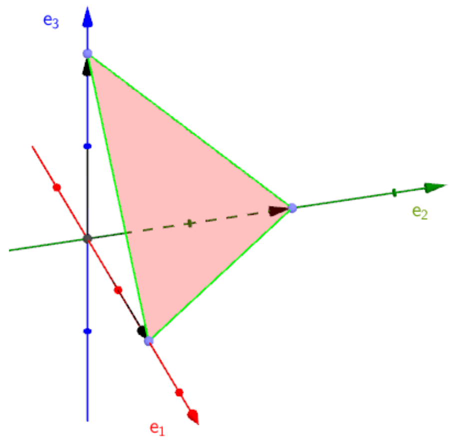

FIGURE 1.1.1 – Simplexe standard de dimension 2

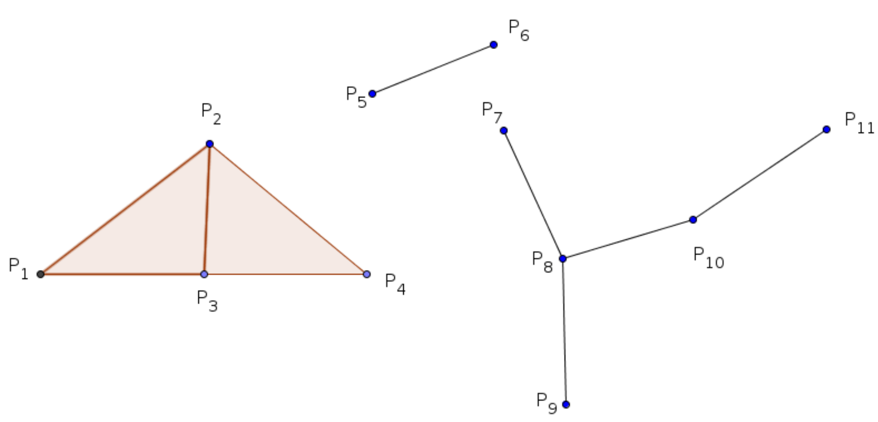

FIGURE 1.1.2 – Illustration des complexes simpliciaux de l'exemple 1.1.0.8

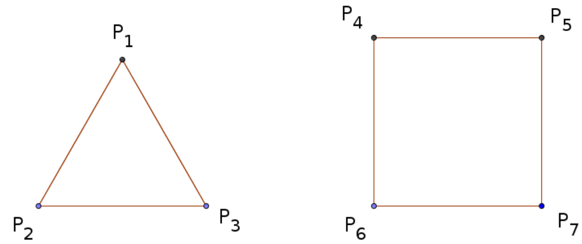

FIGURE 1.1.3 – Exemples de complexes étiquetables et non-étiquetables

Remarque 1.1.0.10. Pour vérifier qu'un automorphisme ϕ de complexe de chambres étroit est l'identité, il suffit de vérifier qu'il fixe une chambre C. En effet, si $C' \neq C$ est une chambre adjacente à C, son image par ϕ est une chambre distincte de C qui contient la face commune à C et C', c'est donc C' par définition de l'étroitesse. On en déduit par récurrence sur la distance à C que ϕ est l'identité. Cette propriété est parfois appelée argument standard d'unicité.

Définition 1.1.0.11. (étiquetage) Soit $(\Delta, \mathcal{V})$ un complexe de chambres. Un *étiquetage* de Δ par un ensemble I est une fonction $\lambda : \Delta \to \mathcal{V}$ telle que pour toute chambre $C \in \mathcal{C}(\Delta)$, $\lambda_{|C}$ est une bijection.

Lorsqu'un étiquetage existe, on dit que Δ est *étiquetable*.

Si $P \in \mathcal{V}$, on appelle *type* de P l'élément $\lambda(P)$. Plus généralement, si A est une facette de Δ, on appelle l'ensemble $\lambda(a)$ le type de Δ.

Lemme 1.1.0.12. *Soit Δ un complexe étiquetable, d'étiquetage (λ, I). Alors :*

(i) l'étiquetage de Δ est fondamentalement unique dans le sens où si I' est un ensemble et $\lambda' : \Delta \to I'$ est une application, (λ', I') est un étiquetage de Δ si et seulement s'il existe une bijection $\sigma : I \to I'$ telle que $\lambda' = \sigma \circ \lambda$.

(ii) si λ, λ' sont des étiquetages de Δ, et si C est une chambre de Δ, alors $\lambda_{|C} = \lambda'_{|C}$ si et seulement si $\lambda = \lambda'$.

(iii) pour tout ensemble I'' tel qu'il existe une bijection $\sigma : C \to I''$, il existe un unique étiquetage λ'' de Δ tel que $\lambda''_{|C} = \sigma$.

Le (i) de ce lemme se démontre en utilisant le fait que pour toutes chambres $C, C' \in \mathcal{C}(\Delta)$, il existe une galerie de C à C' et (ii) et (iii) se déduisent de (i).

Exemple 1.1.0.13. (voir figure 1.1.3)

Soit $\{P_1, \dots P_7\}$ un ensemble à 7 éléments. Soient $\Delta_1 = \mathcal{P}(\{P_1, P_2\}) \cup \mathcal{P}(\{P_2, P_3\}) \cup \mathcal{P}(\{P_1, P_3\})$ et $\Delta_2 = \mathcal{P}(\{P_4, P_5\}) \cup \mathcal{P}(\{P_5, P_6\}) \cup \mathcal{P}(\{P_6, P_7\}) \cup \mathcal{P}(\{P_7, P_1\})$. Alors Δ_1 n'est pas étiquetable et Δ_2 l'est, en prenant $\lambda : \begin{array}{c} \{P_4, \dots P_7\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ P_i \mapsto i[2] \end{array}$ par exemple. Par ailleurs, ces deux complexes sont étroits.

Définition 1.1.0.14. (type d'une galerie) Soit (Δ, λ) un complexe étiqueté. Soit $\Gamma = (C_0, \dots, C_n)$ une galerie *non-bégayante* (c'est-à-dire $C_{i-1} \neq C_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$). On définit son *type* $t(\Gamma)$ par $t(\Gamma) = (i_1, \dots, i_n)$, où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $i_k = \lambda(P)$, où P est le sommet de C_k qui n'est pas un sommet de C_{k-1} (on pourrait aussi prendre le sommet Q de C_{k-1} qui n'est pas dans C_k puisque par définition d'étiquetage, ces sommets ont le même type).

1.2 Système de Coxeter

1.2.1 Groupes de réflexions

1.2.1.1 Groupes de réflexions fini

Dans cette sous-partie on définit ce qu'est un groupe de réflexions, en adoptant un point de vue géométrique. On verra à la fin de la partie 1.2 que ces groupes sont des groupes de Coxeter et que tout groupe de Coxeter est isomorphe à un groupe de réflexions. À ces groupes, ou ce qui est équivalent, aux groupes de Coxeter, nous associerons un complexe de chambres, qui sera nécessaire à la définition géométrique des immeubles. Cette partie provient majoritairement de [Bro89]. Dans tout le mémoire, sauf mention explicite du contraire, les réflexions sont des réflexions orthogonales.

Soit V un espace euclidien. Soit W un groupe engendré par un ensemble S de réflexions vectorielles de V. Pour un hyperplan H de V, on note s_H la réflexion par rapport à H. On pose $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans de V tels que s_H soit dans W. Cet ensemble est stable par W . Lorsque $\mathcal{H}$ est fini, W est fini (cela vient du fait que W agit fidèlement sur $\mathcal{H}$, donc $W \hookrightarrow \mathrm{Bij}(\mathcal{H})$) et on dit que W est un *groupe de réflexions fini*. On appellera tout hyperplan de $\mathcal{H}$ un *mur* de W.

Soit V^W l'ensemble des points fixés par W. Posons $V_0 = V^W = \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$. Alors $V_1 := V_0^{\perp}$ est stable par W. On dit que V_1 est la part essentielle de V et que V_0 est sa part non-essentielle. On dit que (W, V) est *essentiel* lorsque $V_0 = 0$. Lorsque (W, V) n'est pas essentiel, on peut se ramener à l'étude d'un cas essentiel en considérant (W, V_1).

Définition 1.2.1.1. (irréductibilité) Lorsque (W, V) et (W', V') sont des groupes de réflexions finis, $(W \times W', V \times V')$ est un groupe de réflexions vectoriel. On dit qu'un groupe de réflexions fini (W, V) est *irréductible* lorsque il n'admet pas de telle décomposition non triviale.

1.2.1.2 Groupes de réflexions

Comme dans la sous-partie 1.2.1.1, on considère ici des groupes engendrés par des réflexions sur un espace euclidien V, mais cette fois on ne les suppose plus vectorielles. Soit W un groupe engendré par un ensemble de réflexion (affines) S de V. Pour un hyperplan H de V, on note toujours s_H la réflexion par rapport à l'hyperplan H. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans H tels que s_H soit dans W. Lorsque $\mathcal{H}$ est *localement fini*, c'est-à-dire que tout point $x \in V$, admet un voisinage U tel que $\{H \in \mathcal{H} | H \cap U \neq \emptyset\}$ est fini, on dit que W est un *groupe de réflexions*. On peut alors choisir comme ensemble S engendrant W un ensemble fini, ce que nous préciserons au théorème 1.2.2.7. Les hyperplans de $\mathcal{H}$ sont encore appelés les *murs* de W.

Pour un endomorphisme affine $f \in \mathrm{Aff}(V)$, on note f^v sa partie vectorielle (d'une manière générale dans ce mémoire, lorsque l'on manipulera des objets affines et vectoriels, les objets vectoriels seront souvent suivis de l'exposant « ^{v} »). Soient $W^v = \{w^v | w \in W\}$ et $\mathcal{H}^v$ l'ensemble des hyperplans (vectoriels) H de V tels que s_H soit dans W^v. Alors W^v est un groupe de réflexions fini d'ensemble de murs $\mathcal{H}^v$. L'ensemble $\mathcal{H}^v$ est l'ensemble des directions des murs de W. Pour $H \in \mathcal{H}$, on note H^v l'hyperplan parallèle à H passant par 0. Alors $\mathcal{H}^v = \{H^v | H \in \mathcal{H}\}$.

Définition 1.2.1.2. On dit que W est *essentiel* si W^v est essentiel, et que W est *irréductible* s'il n'admet pas de décomposition non triviale $(W, V) = (W' \times W'', V' \times V'')$. De même que dans la partie 1.2.1.1, on peut réduire notre étude au cas d'un irréductible et essentiel. On dit qu'un groupe de réflexions (W, V) est *euclidien* lorsqu'il est essentiel, irréductible et infini. Dans ce mémoire, on s'intéressera surtout aux groupes de réflexions euclidiens et aux groupes de réflexions finis.

Il existe un point $x \in V$ tel que $\mathrm{Stab}_W(x) = \{w \in W | wx = x\} \simeq W^v$. Quitte à effectuer un changement d'origine, on peut supposer que $x = 0$, ce que l'on fera par la suite. Nous verrons que le groupe W est fini si et seulement si $W = W^v$, c'est-à-dire si et seulement si W admet un point fixe.

Pour $v \in V$, on note τ_v la translation de V de vecteur v. Soit $L = \{v \in V | \tau_v \in W\}$. Alors si (W, V) est un groupe de réflexions euclidien, L est un réseau de V et on a la proposition suivante :

Proposition 1.2.1.3. *Le groupe W est égal à $L \rtimes W^v$.*

1.2.1.3 Complexe de chambres associé à un groupe de réflexions

Nous allons maintenant introduire une partition de l'espace V en facettes, qui seront certaines parties convexes, ouvertes dans l'espace affine qu'elles engendrent.

Pour chaque hyperplan H de $\mathcal{H}^v$, on choisit une forme affine f_H de $\mathrm{Aff}(V, \mathbb{R})$ dont H est l'ensemble des zéros. Soit $\mathcal{F} = \{f_H | H \in \mathcal{H}^v\}$, alors $\mathcal{H} = \{\ker f | f \in \mathcal{F}\}$.

Définition/Proposition 1.2.1.4. (facette, support, facette, cloison, face, complexe de chambres, mur)

Soit $A \subset V$. On dit que A est une *facette* s'il existe $R_H \in \{<, =, >\}^{\mathcal{H}}$ tels que :

$A = \{x \in V | \forall H \in \mathcal{H}, f_H(x) R_H 0\}$.

Le *support* $\mathrm{supp}(A)$ d'une facette A est l'espace affine qu'elle engendre. La *dimension* d'une facette est la dimension de son support.

On dit que A est une *chambre* lorsque l'une des trois conditions équivalentes est vérifiée :

(i)$R_H \neq$ « $=$ » pour tout $H \in \mathcal{H}$

(ii) $\mathring{A} \neq \emptyset$

(iii) $\mathrm{supp}(A) = V$.

Si A est une facette, l'ensemble des *murs* de A est l'ensemble des hyperplans H de $\mathcal{H}$ tels que $H \cap \overline{A} \neq \emptyset$. On peut remarquer par ailleurs que l'adhérence d'une facette non vide peut s'obtenir en remplaçant les inégalités strictes qui la définissent par des inégalités larges.

On dit que A est une cloison lorsque son support est un mur.

Si A et A' sont des facettes, on dit que A' est une *face* de A ce que l'on note $A' \leq A$, lorsque $A' \subset \overline{A}$). Si $A = \{x \in V | \forall H \in \mathcal{H}, f_H(x) R_H 0\}$ et $A' = \{x \in V | \forall H \in \mathcal{H}, f_H(x) R'_H 0\}$ sont non vides, cela revient à dire que pour tout $H \in \mathcal{H}$, si $R_H =$ « $<$ », $R'_H \in \{<, =\}$, si $R_H =$ « $=$ », $R'_H =$« $=$ » et si $R_H =$« $>$ », $R'_H \in \{<, =\}$.

Cette définition de face munit l'ensemble des facettes d'une structure d'ensemble partiellement ordonné qui en fait un complexe simplicial grâce à la remarque 1.1.0.2 et ce dernier est en fait un complexe de chambres que l'on notera $\Sigma(W, V)$. Les chambres de ce dernier vu en tant que complexe de chambres sont bien les mêmes que celles que l'on vient de définir et sont de dimension n (pour les deux sens que l'on a défini). Deux chambres sont alors adjacentes si elles ont une cloison en commun.

On a le théorème de structure des chambres suivant :

Théorème 1.2.1.5. *Soit (W, S) un groupe de réflexions irréductible et essentiel.*

On a les possibilités suivantes :

(i) W est fini, il admet alors un point fixe. Toute chambre est un cône simplicial qui a exactement n murs, où $n = \dim V$

(ii) W est infini, il n'a alors pas de point fixe. Toute chambre a exactement $n+1$ murs, de vecteurs orthogonaux $e_1, \ldots, e_{n+1}$. Toute sous-famille à n éléments de $(e_i)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ est libre.

Remarque 1.2.1.6. On verra au théorème 1.2.2.7 que l'on peut choisir comme ensemble de générateurs S l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de n'importe quelle chambre.

Exemple 1.2.1.7. Les sous-groupes de réflexions de $\mathbb{R}$ sont à isomorphisme près :

(i) $\{\pm \mathrm{Id}\}$, les chambres sont alors $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

(ii) Le groupe D_∞ engendré par les réflexions par rapport aux entiers. Il est composé des réflexions par rapports aux entiers et des translations d'un entier pair. Les chambres sont les intervalles de la forme $]k, k+1[$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et les murs, qui sont aussi les cloisons, sont les $\{k\}$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Si C est une chambre et si s et t sont les réflexions par rapports aux murs de cette chambre, D_∞ est engendré par s et t, et pour tous $k, k' \in \mathbb{Z}$, $(st)^k = (st)^{k'}$ implique $k = k'$. On reverra cet exemple lorsque l'on parlera des groupes diédraux (exemple 1.2.2.3).

Théorème 1.2.1.8. *Soit (W, V) un groupe de réflexions. Alors W agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de $\Sigma(W, V)$, et si C, D sont deux chambres, avec $D = wC$, avec $w = s_{H_1} \ldots s_{H_k}$, $(D, s_{H_k}D, s_{H_{k-1}}s_{H_k}D, \ldots, w^{-1}C)$ est une galerie de D à C.*

L'action de W sur $\Sigma(W, V)$ permet d'étudier W.

Ceci amène à se demander quelles conditions sur le groupe W permettent de l'étudier par ce biais, en définissant des murs et une action de W sur ces murs, sans pour autant que W soit défini géométriquement. Dans la suite nous allons exposer des conditions à vérifier sur W pour pouvoir le faire. Ceci nous mènera à la définition de groupe de réflexions abstrait, puis à celle de groupe de Coxeter.

1.2.2 Système de Coxeter

1.2.2.1 Groupes de réflexions abstraits

Soit W un groupe engendré par un ensemble S d'involutions. On dira que $s \in W$ est une réflexion si elle est conjuguée à un élément de S par W. Soit $\mathcal{H}$ un ensemble en bijection avec l'ensemble des réflexions, par une certaine bijection $H \mapsto s_H$. Dans [Bro89] chapitre II, on constate que pour pouvoir associer un complexe de chambres à W qui puisse interpréter $\mathcal{H}$ comme l'ensemble d'hyperplans de la sous-partie 1.2.1.1, il faut que (W, S) vérifie la condition suivante :

(A) : Il existe une action de W sur $\mathcal{H} \times \{\pm 1\}$ tel que pour tout $s \in S$, $\forall (H, \epsilon) \in \mathcal{H} \times \{\pm 1\}$,

$$s.(H, \epsilon) = \begin{cases} (H, -\epsilon) \text{ si } s = s_H \\ (sH, \epsilon) \text{ sinon} \end{cases}.$$

1.2.2.2 Conditions de réécriture

Nous allons maintenant exposer des théorèmes d'équivalence entre la condition (A) et des conditions de réécriture (cette sous-partie provient de [Bro89] chapitre II).

Soit (W, S) un groupe engendré par un ensemble S d'involutions. Tout élément w de W s'écrit $w = s_1 \ldots s_k$ avec $(s_i) \in S^k$. On définit la *longueur* $l(w)$ d'un élément comme étant l'entier k minimum permettant cette écriture. On a donc $l(w) = 0$ si et seulement si $w = 1$ et $l(w) = 1$ si et seulement si $w \in S$. On dit qu'une écriture $w = s_1 \dots s_k$ avec $(s_i) \in S^k$ d'un élément $w \in W$ est *réduite* lorsque $k = l(w)$.

Exposons maintenant trois conditions d'écriture des éléments de W :

(D) Pour tout $w \in W$, si $w = s_1 \dots s_d$ avec $d > l(w)$, $(s_i) \in S^d$, alors il existe $i, j \in [\![1, d]\!]$ tels que $i \neq j$ et $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_d$, où les accents circonflexes signifient que l'on retire l'élément en dessous l'accent de la décomposition.

(E) Soient $w \in W$, $s \in S$ et une écriture réduite $w = s_1 \dots s_d$ de w. Alors, soit $l(sw) = l(w) + 1$, soit il existe $i \in [\![1, d]\!]$ tel que $w = ss_1 \dots \hat{s}_i \dots s_d$.

(F) Soient $w \in W$, et $s, t \in S$ tels que $l(sw) = l(w)+1 = l(wt)$. Alors soit $l(swt) = l(w)+2$, soit $swt = w$.

1.2.2.3 Générateurs et relations

Soit (W, S) un couple tel que W est un groupe et $S \subset W$ est une partie finie de W l'engendrant.

On dit qu'il vérifie (C) si W admet la présentation suivante :

$(st)^{m_{s,t}} = 1, \forall s, t \in S$, où les $m_{s,t} = m_{t,s}$ sont des entiers strictement positifs tels que $m_{s,s} = 1$ pour tout $s \in S$ et tel que $m_{s,t} \geq 2$ pour tous $s, t \in S$ distincts.

Définition/Proposition 1.2.2.1. En conservant les mêmes notations, pour tous $s, t \in S$, st est d'ordre $m_{s,t}$. On peut alors associer à (W, S) la matrice $(m_{s,t})_{s,t\in S}$ qui est appelée *matrice de Coxeter* associée à (W, S).

1.2.2.4 Systèmes de Coxeter

Définition/Théorème 1.2.2.2. Soit (W, S) un couple tel que W est un groupe engendré par S, et tel que les éléments de S sont des involutions. Alors les conditions (A), (C), (D), (E) et (F) sont équivalentes.

Un tel couple sera appelé *système de Coxeter* ou simplement *groupe de Coxeter*.

Exemple 1.2.2.3. (groupe diédral) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Soit $P_n = \{e^{2ik\pi/n} | k \in [\![0, n-1]\!]\} \subset \mathbb{R}^2$. Soient D_n le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ stabilisant P_n, s la réflexion par rapport à la droite passant par 0 et 1, et t la réflexion par rapport à la droite passant par 0 et $e^{2i\pi/n}$. Alors $(D_n, \{s, t\})$ est un système de Coxeter, appelé n-ième groupe diédral. Pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(D_n, \{s, t\})$ peut être vu comme le groupe de réflexions de $\mathbb{R}^2$ engendré par les réflexions par rapports aux murs $\mathbb{R}e^{2ik\pi/n}$ pour k parcourant $[\![0, n-1]\!]$.

Pour $n = \infty$, on note D_∞ le groupe engendré par s et t vérifiant $s^2 = t^2 = 1$. Alors $(D_\infty, \{s, t\})$ est aussi un système de Coxeter, et il est infini.

Ces groupes sont fondamentaux, notamment du fait que si (W, S) est un système de Coxeter, et si $s \neq t \in S$, alors $\langle s, t\rangle$ est un groupe diédral.

Définition 1.2.2.4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z} \cup \{\infty\})$. On dit que M est une *matrice de Coxeter* lorsque $m_{i,i} = 1$ et $m_{i,j} = m_{j,i} \geq 2$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$.

Si M est une matrice de Coxeter, alors le théorème suivant montre qu'elle est la matrice de Coxeter d'un groupe de Coxeter :

Théorème 1.2.2.5. *Soit M une matrice de Coxeter de taille n. Alors le système (W,S), où W est défini par la présentation $W = \langle (s_i)_{i\in[\![1,n]\!]}; (s_is_j)^{m_{i,j}} = 1\rangle$ et $S = \{s_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ est un groupe de Coxeter de matrice de Coxeter M.*

Une preuve de ce théorème repose sur le fait qu'on peut associer à un système de Coxeter (W,S) une représentation linéaire de W de dimension $n = |S|$ de la manière suivante.

Soit V un espace vectoriel ayant pour base des symboles $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Soit B la forme bilinéaire définie sur V par $B(e_i,e_j) = -\cos(\pi/m_{i,j})$, pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, où on pose $\pi/\infty = 0$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\sigma_i : \begin{array}{l} V \to V \\ x \mapsto x - 2B(e_i,x)e_i \end{array}$

Chaque σ_i est alors une réflexion par rapport à l'hyperplan $e_i^\perp$. On peut alors définir une représentation $\rho : \begin{array}{c} W \to \mathrm{GL}(V) \\ s_i \mapsto \sigma_i. \end{array}$ Cette représentation est de plus fidèle, c'est-à-dire que ρ est injective.

$\square$

Remarque 1.2.2.6. On fera attention au fait que la forme bilinéaire B est non dégénérée si et seulement si W est fini, ce qui est équivalent au fait que tous les $m_{i,j}$ sont finis. Dans ce cas, on peut voir W comme un groupe de réflexions fini (de la sous-partie 1.2.1.1) en munissant l'espace vectoriel vectoriel V d'un produit scalaire W invariant. C'est possible en posant, si $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur V, $< x,y >= \sum_{w\in W}(wx|xy)$ pour tous $x,y \in V$.

Une autre subtilité est le fait que W est vu comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$, c'est-à-dire que tout élément de W fixe 0. Par exemple si (W,V') est un groupe de réflexions euclidien, donc sans point fixe, avec V de dimension n (voir le théorème 1.2.1.5), la représentation qu'on obtient est une représentation de dimension $n+1$.

Théorème 1.2.2.7. *Soient (W,S) un groupe de réflexions et C une chambre de W. Notons S' l'ensemble des réflexions orthogonales par rapports aux murs de C (qui sont en nombre fini par le théorème 1.2.1.5). Alors (W,S') est un système de Coxeter.*

La classification des groupes de réflexion et des systèmes de Coxeter est achevée, on ne fera pas de listes de ces différents groupes. On pourra par exemple consulter [Bou68] pour plus de détails.

1.2.2.5 Complexe simplicial combinatoire

On donne ici une définition combinatoire du complexe de chambres $\Sigma(W,S)$ associé à un système de Coxeter (W,S), puis on étudie ce complexe. On verra notamment que lorsque (W,V) est un groupe de réflexions fini ou euclidien, celle-ci est équivalente à celle donnée en sous-partie 1.2.1.3.

Définition de Σ On dit qu'un sous-groupe de W est *spécial* s'il est de la forme $\langle A\rangle$, où $A \subset S$, et qu'un sous-ensemble de W est *spécial* s'il est de la forme $w\langle A\rangle$, où $w \in W$ et $A \subset S$. Soit $\Sigma(W,S)$ l'ensemble des sous-ensembles spéciaux de W. Posons $\Sigma = \Sigma(W,S)$. On munit Σ d'une structure d'ensemble partiellement ordonné en déclarant que si $A,B \in \Sigma$, $A \leq B$ si et seulement si $A \supset B$ (on remarquera que cet ordre est un peu contraire à l'intuition). Cet ordre est compatible avec l'action de W, c'est-à-dire que pour $A,B \in \Sigma$ et $w \in W$, $A \leq B$ équivaut à $wA \leq wB$. Cet ensemble partiellement ordonné est alors un complexe simplicial, appelé *complexe de chambres* associé à (W,S).

Lorsque (W, S) est un groupe de réflexions fini ou euclidien, le complexe simplicial que l'on vient de définir est isomorphe au complexe $\Sigma(W, S)$ que l'on a défini dans la sous-partie 1.2.1.3.

Expliquons un peu comment obtenir cet isomorphisme. Notons $\Sigma' = \Sigma(W, S)$ le complexe de la sous-partie 1.2.1.3. Soit C' une chambre de Σ'. Si $A' \leq C'$, on pose $W_{A'} = \{w \in W | wA = A\}$. Alors $\begin{array}{c}\Sigma'_{\leq C} \to \mathrm{Sg} \\ A' \mapsto W_{A'}\end{array}$, où $Sg \subset \Sigma$ est l'ensemble partiellement ordonné des sous-groupes spéciaux de W est un isomorphisme d'ensemble partiellement ordonné. Comme les actions de W sur l'ensemble des chambres de Σ et sur l'ensemble des chambres de Σ' sont simplement transitive, il s'étend facilement en un isomorphisme de Σ' sur Σ compatible avec l'action de W.

On dit qu'un complexe simplicial Δ est un *complexe de Coxeter* si Δ est isomorphe à $\Sigma(W, S)$ pour un certain système de Coxeter (W, S). Dans toute la suite de cette partie, (W, S) sera un système de Coxeter, et Σ sera le complexe associé.

Facettes de Σ Les facettes de Σ sont les $w\langle S\backslash A\rangle$, où $A \subset S$ et $w \in W$. On peut vérifier que pour que $w\langle S\backslash A\rangle \supset w'\langle S\backslash A'\rangle$, il faut que $A \supset A'$, et si $w\langle S\backslash A\rangle = w'\langle S\backslash A'\rangle$, alors $A = A'$. Ainsi, les chambres de Σ sont de dimension $n = |S|$. Ce sont les $\{w\}$, où $w \in W$, les cloisons, de dimension $n - 1$, sont les $w\langle s\rangle = \{w, ws\}$ tels que $w \in W$ et $s \in S$ et les sommets sont les $w\langle S\backslash\{s\}\rangle$ tels que $w \in W$ et $s \in S$. Plus généralement, les facettes de dimension i sont les $w\langle S\backslash I\rangle$, où $I \subset S$, avec $|I| = n - i$.

Deux chambres $\{w\}, \{w'\}$ sont adjacentes si et seulement si elles ont une cloison en commun, donc si et seulement si $w' = w$ ou s'il existe $s \in S$ tels que $w' = ws$. Dans ce cas là, $\{w, ws\}$ est la cloison commune à $\{w\}$ et à $\{ws\}$. On en déduit en particulier que Σ est étroit.

On a un étiquetage λ de Σ par l'ensemble S, en posant pour tout sommet $P = w\langle S\backslash\{s\}\rangle$, $\lambda(P) = s$. Cet étiquetage sera appelé *étiquetage canonique* de $\Sigma(W, S)$. Autrement dit, on a la proposition suivante :

Proposition 1.2.2.8. *Le complexe Σ est un complexe étroit et étiquetable, et cet étiquetage est W-invariant (on dit aussi que W préserve le type).*

1.3 Système de racines

1.3.1 Premières définitions

Les systèmes de racines ont été introduits afin d'étudier les algèbres de Lie semi-simples. À chaque système de racines est associé un groupe de Coxeter. Les systèmes de Coxeter que nous utiliserons dans la partie 2.2 proviendront de système de racines. Il existe cependant des groupes de Coxeter qui ne proviennent pas de systèmes de racines.

Cette partie s'inspire de [Bou68].

Lemme 1.3.1.1. *Soient V un espace euclidien sur $\mathbb{R}$ et $R \subset V$ une partie génératrice de V. Alors pout tout $\alpha \in R\backslash\{0\}$, il existe au plus une réflexion (non forcément orthogonale) s_α telle que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ et $s(R) = R$.*

Pour $a \in V^*$ et $b \in V$, on définit $s_{a,b} : \begin{array}{c}V \to V \\ x \mapsto x - a(x)b\end{array}$. C'est un endomorphisme de V et lorsque $a(b) = 2$, c'est une réflexion de V.

Définition 1.3.1.2. (système de racines)

Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et R un sous-ensemble de V. On dit que R est un *système de racines* s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) R est fini, ne contient pas 0 et engendre V.

(ii) Pour tout $\alpha \in R$, il existe un élément $\alpha^\vee$ de V^* tel que $\alpha^\vee(\alpha) = 2$ et que la réflexion $s_{\alpha^\vee,\alpha}$ stabilise R.

(iii) Pour tout $\alpha \in R$, $\alpha^\vee(R) \subset \mathbb{Z}$.

Par le lemme 1.3.1.1, pour tout $\alpha \in R$, $\alpha^\vee$ est unique et la condition (iii) a bien du sens. Pour $\alpha \in R$, on note s_α la réflexion (non forcément orthogonale) $s_{\alpha,\alpha^\vee}$.

Le sous-groupe $W^v(R)$ de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par les s_α est appelé *groupe de Weyl* de R.

Proposition 1.3.1.3. *Soit (R, V) un système de racines. Alors $(R^\vee, V^*)$ est un système de racines appelé système de racines inverse. De plus, pour tout $\alpha \in R$, $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$.*

Proposition 1.3.1.4. *Soit R un système de racines. Alors on a un isomorphisme de groupes canonique* $\begin{array}{c} W(R) \to W^v(R^\vee) \\ u \mapsto {}^t u^{-1} \end{array}$.

En munissant V d'un produit scalaire W^v-invariant avec le même procédé que dans la remarque 1.2.2.6, l'ensemble $(W^v(R), V)$ est un groupe de réflexions essentiel fini. On peut en particulier associer le complexe simplicial Σ qu'on a défini partie 1.2.1 et parler de chambres, murs, etc... Les murs de ce groupe de réflexions sont les $\ker \alpha$, pour $\alpha \in R$.

Dans toute la suite de cette partie, sauf mention explicite du contraire, (R, V) est un système de racines muni d'un produit scalaire W^v invariant.

Remarque 1.3.1.5. On peut identifier V et V^* à l'aide du produit scalaire. On obtient alors $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$.

Définition 1.3.1.6. (Somme directe de racines, irréductibilité)

Soient $(R_1, V_1), \ldots, (R_k, V_k)$ des systèmes de racines. Alors $(\bigcup_{i=1}^k R_i, \bigoplus_{i=1}^k V_i)$ est un système de racines, appelé *somme directe* des R_i.

Un système de racines est dit *irréductible* s'il est non vide et s'il n'est pas somme directe de systèmes de racines non vides.

Remarque 1.3.1.7. Si R est un système de racines irréductible, le groupe de réflexions fini associé l'est aussi.

Proposition 1.3.1.8. *Soit R un système de racines. Alors si deux racines sont proportionnelles, elles ne peuvent l'être que par un des facteurs de l'ensemble* $\{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$.

Définition 1.3.1.9. (racine indivisible, système réduit)

On dit qu'une racine est *indivisible* si $\frac{1}{2}\alpha \notin R$.

Un système de racines constitué de racines indivisibles est dit *réduit*.

1.3.2 Bases d'un système de racine

Théorème 1.3.2.1. *Soient R un système de racines et C^v une chambre de Σ. Soient $L_1, \ldots, L_l$ les murs de C^v. Alors :*

(i) pour tout $i \in [\![1, l]\!]$, il existe une unique racine indivisible α_i telle que $L_i = \ker \alpha_i$ et que C^v et α_i soient du même côté de L_i

(ii) l'ensemble $B(C^v) = \{\alpha_i | i \in [\![1, l]\!]\}$ est une base de V

(iii) C^v est l'ensemble $\{x \in V | \alpha_i^\vee(x) > 0 \forall i \in [\![1, l]\!]\}$.

Définition 1.3.2.2. Un ensemble de la forme $B(C^v)$ pour une chambre C^v de R est appelé *base* de R.

Par le théorème 1.2.1.8, $W^v(R)$ agit simplement-transitivement sur les bases de R ou, ce qui est équivalent, sur les chambres de R.

Proposition 1.3.2.3. *Soient B une base de R et α une racine indivisible de R. Alors il existe $w \in W^v(R)$ et $\beta \in B$ tel que $\alpha = w\beta$. En particulier, si R est réduit, $R = \bigcup_{w\in W^v(R)} w(B)$.*

Théorème 1.3.2.4. *Soit B une base de R, $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. On pose $R^+ = R \cap \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{N}\alpha_i$ et $R^- = -R^+$. Alors $R = R^+ \sqcup R^-$.*

Théorème 1.3.2.5. *Supposons R irréductible. On suppose que $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ est une base de R. Alors il existe une racine (unique) $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$ telle que pour toute racine $\sum_{i=1}^{l} p_i\alpha_i$, on ait $n_i \geq p_i$. De plus, $\tilde{\alpha} \in \overline{C}$. On appelle $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de R (relativement à B).*

1.3.3 Groupe de Weyl affine

On suppose maintenant que R est réduit. Cette sous-partie et la suivante se généralisent dans le cas non-réduit, mais il faut alors introduire des disjonctions de cas en fonction du système de racines considéré, ce qui est fait dans [Mac03] par exemple.

Poids et poids radiciels On note $Q(R)$ le sous-groupe de V engendré par R. C'est un réseau de V, et toute base de R est une $\mathbb{Z}$-base de $Q(R)$. Alors $Q(R^\vee)$ est un réseau de V^*. On pose $P(R) = \{x \in V | \forall y^* \in Q(R^\vee), < x, y^* > \in \mathbb{Z}\}$. On a alors l'inclusion $Q(R) \subset P(R)$. Les éléments de $P(R)$ s'appellent les *poids* de R et ceux de $Q(R)$ les *poids radiciels* de R. On définit une base $(\lambda_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de V par $< \lambda_i, \alpha_j >= \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Cette base est une $\mathbb{Z}$-base de $P(R)$. On pose $P^+(R) = \bigoplus \mathbb{N}\lambda_i$. Les éléments de $P^+(R)$ sont appelés les *poids dominants* de R.

On munit V^* d'un produit scalaire invariant par $W^v(R)$.

Pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose $L_{\alpha,k} = \{x \in V^* | < \alpha, x >= k\}$ et on note $s_{\alpha,k}$ la réflexion orthogonale par rapport à $L_{\alpha,k}$.

On a pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbb{Z}$, $s_{\alpha,k} = \tau_{k\alpha^\vee} \circ s_\alpha$, où $\tau_{k\alpha^\vee}$ est la translation de vecteur $k\alpha^\vee$.

Définition 1.3.3.1. On appelle *groupe de Weyl affine* du système R et on note $W(R)$ le groupe de réflexions engendré par les $s_{\alpha,k}$, pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbb{Z}$.

D'après la proposition 1.2.1.3, $W(R) = W^v(R) \ltimes Q(R)$.

Le groupe $W(R)$, muni des réflexions orthogonales $s_{\alpha,k}$, pour $\alpha \in R$, $k \in \mathbb{Z}$, est un groupe de réflexions, on peut donc lui appliquer les résultats de la sous-partie 1.2.1. On peut en particulier lui associer un complexe simplicial $\Sigma(W(R))$ et c'est un complexe de Coxeter.

Lorsque R est irréductible, $W(R)$ est un groupe de réflexions euclidien. On supposera dans la suite de cette partie qu'on est dans ce cas là. Les chambres de $\Sigma = \Sigma(W(R))$ sont des simplexes par le théorème 1.2.1.5. Pour les distinguer des chambres de $\Sigma^v = \Sigma(W^v)$ on appellera ces chambres des alcôves, le terme chambre étant réservé au chambres de Σ^v.

Proposition 1.3.3.2. *Soit C^v une chambre de $R^\vee$. Alors :*
(i) Il existe une alcôve et une seule C contenue dans C^v et telle que $0 \in \overline{C^v}$
(ii) $\bigcup_{w\in W^v} w(\overline{C})$ est un voisinage de 0.
(iii) Tout mur de C^v est un mur de C.

Proposition 1.3.3.3. *Soit C^v une chambre de $R^\vee$ et C l'alcôve contenue dans C^v à laquelle 0 est adhérent. On écrit $B(C^v) = \{\alpha_i, i \in [\![1, l]\!]\}$. Soit $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine de R (voir le théorème 1.3.2.5 pour la définition). Alors $C = \{x \in V^* | \alpha_i(x) > 0\ \forall i \in [\![1, l]\!]$ et $\tilde{\alpha}(x) < 1\}$.*

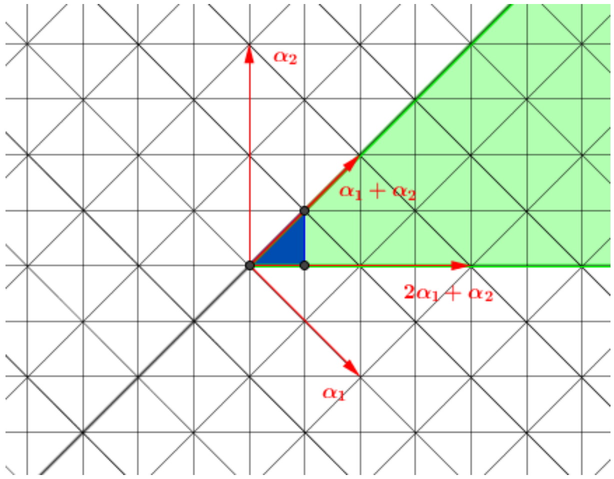

FIGURE 1.3.1 – Système de racines C_2

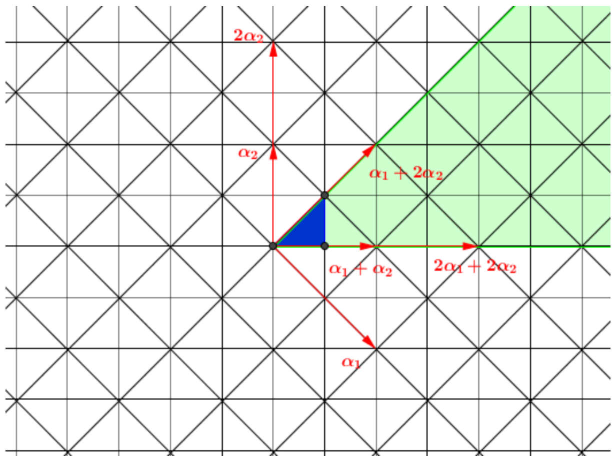

FIGURE 1.3.2 – Système de racines BC_2

1.3.4 Exemples

Exemple 1.3.4.1. Prenons $V = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et notons (e_1, e_2) sa base canonique. Posons $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = 2e_2$, $R^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\}$ et $R = R^+ \sqcup -R^+$. Alors R est un système de racines dont $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ est une base (c'est le système de racines de type C_2, pour ceux qui connaissent cette classification). Sur la figure 1.3.1, l'alcôve fondamentale est le triangle bleu et la chambre fondamentale est le cône vert.

Exemple 1.3.4.2. On pose $V = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, de base canonique (e_1, e_2). On pose $\alpha_1 = e_1 - e_2$ et $\alpha_2 = e_2$. On pose alors $R^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2\}$ et $R = R^+ \sqcup -R^+$. Alors R est un système de racines de base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ (c'est le système de racines de type BC2). Sur la figure 1.3.2, l'alcôve fondamentale est le triangle bleu et la chambre fondamentale est le cône vert.

1.3.5 Groupe de Weyl affine étendu

Dans cette sous-partie, on définit le groupe de Weyl affine étendu $\tilde{W}(R)$ associé à un système de racines réduit R. Ce groupe contiendra $W(R)$ et ne sera pas forcément un système de Coxeter. Il sera cependant muni d'une longueur l prolongeant celle de $W(R)$. Ce groupe nous servira à définir l'algèbre de Hecke affine. Cette sous-partie, ainsi que la partie 2.1.3 sont plus d'ordre culturel et ont pour objectif de mettre en avant le lien entre algèbre d'Iwahori-Hecke et algèbre de Hecke sphérique que nous définirons aux parties 2.1.1 et 2.2.3, sans pour autant rentrer dans les détails. On suit ici la description de [Par06], sans donner de démonstrations.

On pose $\tilde{W}(R) = W^v(R) \ltimes P(R)$, c'est le *groupe de Weyl affine étendu* associé à R. On a alors $\tilde{W}/W \simeq P/Q$, qui est un groupe abélien fini comme quotient de deux réseaux de même rang. Le groupe $\tilde{W}$ permute toujours les chambres de $\Sigma(R)$ mais il n'agit plus forcément simplement transitivement sur ces chambres (l'action est fortement transitive si et seulement si $P = Q$). Cette action permet de définir une longueur de la manière suivante : si $w \in \tilde{W}$, on note $l(w)$ le nombre de murs de Σ séparant C et wC (où on dit qu'un hyperplan sépare deux chambres si ces deux chambres sont d'un côté et de l'autre de l'hyperplan). La fonction l prolonge bien la longueur de W et si $w, w' \in \tilde{W}$, $l(w)+l(w') \leq l(ww')$. L'ensemble $G = \{w \in \tilde{W} | l(w) = 0\}$ est alors un sous-groupe de $\tilde{W}$. C'est le stabilisateur de C dans W. On a $\tilde{W} = W \rtimes G$ et $G \simeq P/Q$. Ainsi, si $w \in \tilde{W}$, $w = w'g$, avec $w' \in W$ et $g \in G$ et $l(w) = l(w')$.

1.4 Immeubles

1.4.1 Définition en termes d'appartements

Définition 1.4.1.1. Cette partie provient de [Bro89].

Un *immeuble* est un couple $(\Delta, \mathcal{A})$ où Δ est un complexe simplicial Δ et $\mathcal{A}$ est un ensemble de sous-complexes de Δ tel que $\Delta = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{A}} \Sigma$, vérifiant les trois axiomes suivant :

(B0) Chaque appartement est un complexe de Coxeter.

(B1) Pour tous simplexes A, B, il existe un appartement les contenant tous les deux.

(B2) Si Σ et Σ' sont des appartements contenant des simplexes A et B, il existe un isomorphisme de Σ sur Σ' fixant les faces de A et de B.

Remarque 1.4.1.2. Certains auteurs ajoutent l'hypothèse que Δ est un complexe simplicial épais.

On parlera souvent d'un immeuble comme d'un complexe simplicial Δ et non comme d'un couple $(\Delta, \mathcal{A})$.

L'axiome (B2) peut être remplacé par l'un des deux axiomes suivants :

(B2') Si Σ et Σ' sont deux appartements contenant un simplexe A et une chambre C, il existe un isomorphisme de Σ dans Σ' fixant les faces de A et de C.

(B2") Si deux appartements Σ et Σ' ont une chambre en commun, alors il existe un isomorphisme d'appartements fixant tous les simplexes de $\Sigma \cap \Sigma'$.

Proposition 1.4.1.3. *Un immeuble Δ est étiquetable. De plus, dans l'axiome (B2), on peut choisir l'isomorphisme $\Sigma \to \Sigma'$ de telle sorte qu'il préserve l'étiquetage.*

Démonstration : Soient C une chambre et Σ un appartement la contenant. Par la proposition 1.2.2.8 et le paragraphe qui la précède, on munit Σ de son étiquetage canonique λ_Σ de Σ. Soit Σ' un appartement contenant C. Il existe alors un unique étiquetage $\lambda_{\Sigma'}$ de Σ' coïncidant avec λ_Σ sur C (l'unicité vient du lemme 1.1.0.12 (ii)). On a donc $\lambda_{\Sigma'} = \lambda_\Sigma \circ \Phi$, où $\Phi : \Sigma' \to \Sigma$ est l'isomorphisme fixant les simplexes de $\Sigma \cap \Sigma'$ de l'axiome (B2"). Ainsi, $\lambda_{\Sigma' \ |\Sigma \cap \Sigma'} = \lambda_{\Sigma \ |\Sigma \cap \Sigma'}$. On peut donc prolonger λ_Σ à l'union des appartements contenant C, qui est Δ par définition d'un immeuble. □

Remarque 1.4.1.4. Chaque choix d'appartement muni de sa structure de complexe de Coxeter $\Sigma = \Sigma(W,S)$ détermine un étiquetage canonique de (Δ, Σ). En effet un tel choix détermine l'étiquetage canonique λ de Σ. Comme on sait par la proposition précédente que Δ est étiquetable, par le lemme 1.1.0.12 (iii) il existe un unique étiquetage de Δ prolongeant λ.

Remarque 1.4.1.5. En prenant dans l'axiome (B2) les deux simplexes vides, on constate que tous les appartements d'un immeuble sont isomorphes et ont donc la même matrice de Coxeter. On peut donc associer à tout immeuble une matrice de Coxeter. De plus, pour tous appartements Σ, Σ' il existe un isomorphisme $\Sigma \to \Sigma'$ préservant le type.

1.4.2 Arbres

Définition 1.4.2.1. Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe de sommets S et d'arêtes A. Une suite $s = (s_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in S^{[\![0,n]\!]}$ est appelée *chemin* lorsque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\{s_{i-1}, s_i\}$ est une arête (c'est-à-dire que $\{s_{i-1}, s_i\} \in A$). On appelle alors l'entier n la *longueur* de s.

Si s est un sommet de S, la *valence* de s est le nombre d'arêtes contenant s.

Un *circuit* est un chemin $s = (s_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ tel que $s_0 = s_n$ et tel que pour tous $i,\ j \in [\![0,\ n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $\{i,j\} \neq \{0,n\}$, $s_i \neq s_j$.

On appelle *arbre* tout graphe connexe qui ne contient pas de circuit.

On appellera *chemin infini à droite* toute suite $(s_i) \in S^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(s_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ est un chemin de Γ. On appelle *chemin infini à gauche* (respectivement *chemin infini à gauche et à droite*) toute suite $(s_i) \in S^{-\mathbb{N}}$ (respectivement $(s_i) \in S^{\mathbb{Z}}$) telle que (s_{-i}) soit un chemin infini à droite (respectivement $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(s_i)_{i \in -\mathbb{N}}$ sont des chemins infinis à droite). Si $s = (s_i)_{i \in X}$ est un chemin, on dit que a est une arête de s si a est de la forme $\{s_i, s_{i+1}\}$ pour un certain $i \in X$.

On appellera *arbre euclidien* tout arbre Γ tel que pour toute arête a de Γ, a est l'arête d'un chemin infini à gauche et à droite.

Si Γ est un arbre euclidien et $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(s'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des chemins, on dit que $s \sim s'$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ tels que $(s_{i+k})_{i \in \mathbb{N}_{>l}} = (s'_i)_{i \in \mathbb{N}_{>l}}$. On appelle *bout* de Γ toute classe d'équivalence pour cette relation.

On peut représenter tout arbre comme sur la figure 1.4.1.

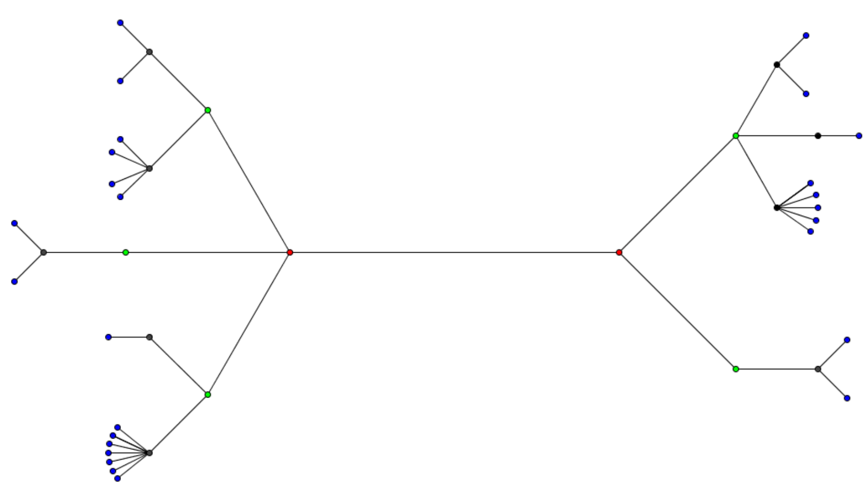

FIGURE 1.4.1 – Arbre non-homogène

On a alors un arbre euclidien en imaginant que l'on a tronqué l'arbre aux sommets bleus mais qu'il continue à l'infini après chaque sommet.

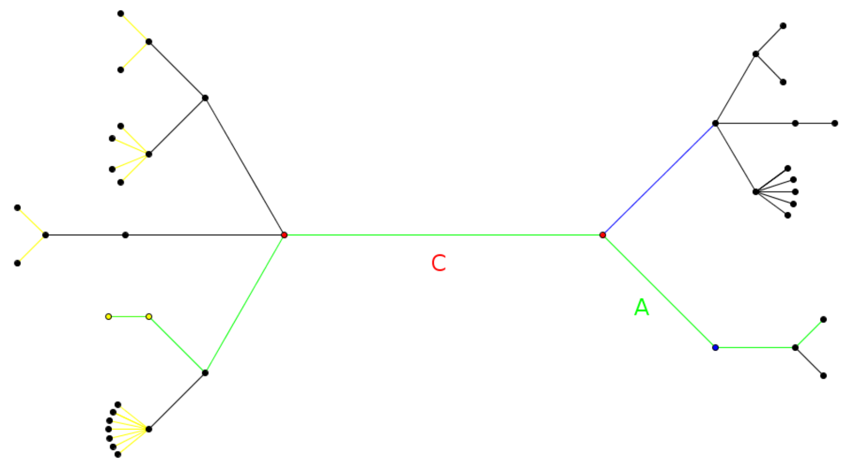

FIGURE 1.4.2 – Rétraction par sur A par rapport à C

Proposition 1.4.2.2. *Un arbre euclidien est un immeuble dont chaque appartement est isomorphe au complexe de Coxeter de D_∞. On peut choisir comme appartements les sous-graphes isomorphes à $\mathbb{Z}$.*

Les arbres euclidiens nous serviront souvent comme illustrations. La raison principale de ce choix est qu'ils sont beaucoup plus faciles à représenter graphiquement que les immeubles quelconques.

1.4.3 Rétraction sur un appartement de centre une chambre

Cette partie s'inspire de [Bro89].

Des outils fondamentaux dans l'étude des immeubles sont les rétractions. Il y en a plusieurs types. Nous en voyons un premier dans cette sous-partie.

Définition/Proposition 1.4.3.1. (rétraction par rapport à une chambre d'un appartement)

Soient Δ un immeuble. Soient Σ un appartement de Δ et C une chambre de Σ. Alors il existe un unique morphisme $\rho_{\Sigma,C} : \Delta \to \Sigma$ qui fixe tous les simplexes de Σ. Si Σ' est un appartement de Δ contenant C, $\rho_{\Sigma,C\ |\Sigma'}$ est l'unique isomorphisme $\Sigma' \to \Sigma$ qui fixe toutes les faces de C. Cette application est une rétraction, c'est-à-dire que $\rho_{\Sigma,C\ |\Sigma} = \mathrm{id}$ et que $\rho_{\Sigma,C}(\Delta) = \Sigma$, appelée *rétraction sur Σ de centre C*.

Proposition 1.4.3.2. *Soient Δ un immeuble, Σ un appartement et C une chambre de Σ. Alors $\rho = \rho_{\Sigma,C}$ a les propriétés suivantes :*

(i) Pour toute face $A \leq C$, $\rho^{-1}(A) = \{A\}$.

(ii) ρ préserve les distances à partir de C, c'est-à-dire que $d_\Delta(C, \rho(D)) = d_\Delta(C, D)$ pour toute chambre $D \in \Delta$, où d_Δ est la distance combinatoire de la définition 1.1.0.9.

(iii) ρ est l'unique morphisme de chambres $\Delta \to \Sigma$ qui fixe toutes les facettes de C et qui préserve les distances à partir de C.

Remarque 1.4.3.3. On en déduit que les appartements sont convexes, c'est-à-dire que si Σ est un appartement et si C, D sont deux chambres de Σ, toute galerie minimale dans Δ de C à D est en fait incluse dans Σ. En particulier, $d_\Delta(C, D) = d_\Sigma(C, D)$, où d_Δ et d_Σ sont les distances combinatoires de la définition 1.1.0.9.

Exemple 1.4.3.4. On reprend l'arbre de la figure 1.4.1. L'appartement A est celui colorié en vert et la chambre C est celle qui se situe entre les deux sommets rouges. La seule chambre qui se rétracte sur la chambre située entre le sommet bleu et le sommet rouge et qui n'est pas dans A est celle coloriée en bleu. Les chambres qui se rétractent sur la chambre située entre les sommets jaunes sont celles coloriées en jaune.

1.4.4 Définition en terme de W-distance

Dans cette sous-partie, on voit une définition équivalente d'immeuble en terme de W-distance, et on montre un sens de l'équivalence. Pour plus de détails, on pourra regarder dans [Ron89].

Soit Δ un immeuble, de système de Coxeter (W, S).

Définition 1.4.4.1. (mot, mot réduit)

On appelle *mot* de W toute suite finie $(s_1, \ldots, s_n) \in S^n$. À tout mot de $f = (s_1, \ldots, s_n)$ on associe un élément r_f de W en posant $r_f = s_1 \ldots s_n$. On dit que f est un *mot réduit* si $l(r_f) = n$.

Définition 1.4.4.2. (W-distance)

Soit $\delta : \mathcal{C}(\Delta) \times \mathcal{C}(\Delta) \to W$. On dit que δ est une *W-distance* sur Δ si pour toutes chambres C, D de $\mathcal{C}(\Delta)$, $\delta(C, D) = r_f$ si et seulement s'il existe une galerie minimale de C à D de type f, où f est un mot réduit de W(le type d'une galerie a été défini à la définition 1.1.0.14).

On choisit un appartement Σ de Δ et on munit (Δ, Σ) de son étiquetage canonique λ (voir remarque 1.4.1.4). Le type $f = (s_1, \ldots, s_n)$ d'une galerie $\Gamma = (C_0, \ldots, C_n)$ est un mot de W, et on pose alors $r_\Gamma = r_f \in W$. Avec les mêmes notations, on a le lemme suivant :

Lemme 1.4.4.3. *Soient C et C' des chambres de Σ. On écrit $C = \{w\}$ et $C' = \{w'\}$, avec $w, w' \in W$. Si Γ est une galerie minimale de C à C', alors $r_\Gamma = w^{-1}w'$.*

Démonstration : montrons le par récurrence sur la longueur de Γ. Supposons que Γ est de longueur 1. Alors $\{w\}$ et $\{w'\}$ sont adjacentes et comme on l'a vu au paragraphe « Facettes de Σ » de la sous-partie 1.2.2.5, $w' = ws$, où $s = r_\Gamma$.

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour toutes chambres D, D' à distance combinatoire inférieure à k, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $D = \{v\}$ et $D' = \{v'\}$, où $v, v' \in W$, des chambres distantes de $k+1$ et $\Gamma = (D_0, \ldots D_k)$ une galerie minimale de D à D'. Soit $\Gamma' = (D_0, ., D_{k-1})$. On a alors $v_{k-1} = vr_{\Gamma'}$ et $v' = v_{k-1}r_{(D_{k-1}, D_k)}$ donc $v' = vr_{\Gamma'}r_{(D_{k-1}, D_k)} = vr_{\Gamma', D_k} = vr_\Gamma$. $\square$

Proposition 1.4.4.4. *Soient C, C' des chambres de Δ et Γ une galerie minimale de C à C'. On pose $\delta(C, C') = r_\Gamma$. Alors $\delta(C, C')$ est bien définie et $\delta : \mathcal{C}(\Delta) \times \mathcal{C}(\Delta) \to W$ est une W-distance.*

Démonstration : Soit Σ' un appartement contenant C et C'. Il contient alors Γ par la remarque 1.4.3.3. Par la remarque 1.4.1.5, il existe un isomorphisme d'appartements de Σ' dans Σ préservant le type, donc on peut supposer que C et C' sont dans Σ. On en déduit que $\delta(C, C')$ ne dépend pas du choix de Γ par le lemme 1.4.4.3.

Montrons que δ est une W-distance. S'il existe une galerie minimale Γ' de C à C' de type f', alors $\delta(C, C') = r_f$ par définition de δ.

Montrons la réciproque. Supposons que $\delta(C, C') = r_f$, où f est un mot réduit. Toujours par la remarque 1.4.1.5, on peut supposer que C et C' sont dans Σ. On écrit alors $C = \{w\}$ et

$C' = \{w'\}$, avec $w' = wr_\Gamma$. On écrit $f = (s_1, \ldots, s_n)$ et alors $\{w\}$, $\{ws_1\}$, $\{ws_1s_2\}, \ldots,$ $\{wr_f\}$ est une galerie minimale de w à w' de type f et δ est bien une W-distance. $\square$

Remarque 1.4.4.5. Si g est un automorphisme de Δ préservant le type, δ est g-invariante. En effet, si c et d sont des chambres de Δ et Γ est une galerie les reliant, $g\Gamma$ est une galerie reliant gc à gd de même type que Γ.

Réciproquement, soient Δ un complexe de chambres dans lequel toute cloison est contenue dans au moins deux chambres et (W, S) un groupe de Coxeter. On suppose que Δ est étiqueté par S et que l'on a une W-distance δ, (voir la définition 1.4.4.2). Pour $x, y \in W$, on pose $\delta_W(x, y) = x^{-1}y$. Si $X \subset W$ on dit qu'une application $\alpha : X \to \Delta$ est une isométrie si elle préserve la W-distance, c'est-à-dire si $\delta(\alpha(x), \alpha(y)) = \delta_W(x, y)$. On appelle *appartement* toute image isométrique $\alpha(W)$ de W. Alors Δ muni de ce système d'appartements est un immeuble, suivant la définition du début de la partie 1.4.1. C'est comme cela que ces derniers sont définis dans [Ron89] par exemple.

1.4.5 Immeubles euclidiens

Définition 1.4.5.1. (immeuble euclidien, sphérique)

On dit qu'un immeuble est *euclidien* lorsque son système de Coxeter est isomorphe à celui d'un groupe de réflexions euclidien. Ces immeubles sont aussi appelés *immeubles affines*.

Un complexe de Coxeter est dit *sphérique* s'il est isomorphe au complexe associé à un groupe de réflexions fini. Un immeuble dont les appartements sont sphériques est dit *sphérique*.

Dans cette partie, nous allons munir la réalisation géométrique de tout immeuble euclidien d'une distance pour laquelle les appartements seront des espaces euclidiens.

Remarque 1.4.5.2. Soit (W, S, V) un groupe de réflexions euclidien. Soit $\Sigma = \Sigma(W, S, V)$ le complexe simplicial associé, vu comme une partition de V et dont les sommets sont des points de V. On a alors une bijection naturelle $\phi : V \to |\Sigma|$, où $|\Sigma|$ est la réalisation géométrique définie partie 1.1 obtenue comme suit. Si $x \in V$, on écrit x comme barycentre des sommets de la face le contenant $x = \sum \lambda_i v_i$, où les v_i sont les sommets de la face contenant x (et $\lambda_v \geq 0$, $\sum \lambda_v = 1$). On pose alors $\phi(x) = \sum \lambda_i e_{v_i}$ et on a la bijection souhaitée.

Pour munir un immeuble euclidien d'une distance de manière intrinsèque, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.4.5.3. *Soient (W, S, V) et (W', S', V') deux groupes de réflexions euclidiens de complexes simpliciaux Σ et Σ'. Alors si $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ est un isomorphisme, $|\phi| : V \to V'$ est une similitude (où on a identifié V et $|\Sigma|$ et V' et $|\Sigma'|$ par la remarque précédente), $|\phi|^{-1} \circ W' \circ |\phi| = W$ et $|\phi|^{-1} \circ S' \circ |\phi| = S$.*

Ce lemme permet d'associer de manière intrinsèque un groupe de réflexions (et donc un espace euclidien V) à un immeuble euclidien Δ. On normalise le produit scalaire sur V en imposant que le diamètre de n'importe quelle chambre soit 1. On appelle *rang* de Δ la dimension de V.

Proposition 1.4.5.4. *Un immeuble euclidien de rang 1 est un arbre euclidien.*

Soient Δ un immeuble euclidien, (W, S, V) le groupe de réflexions euclidien associé et Σ son complexe simplicial (vu comme une partition de V). Alors pour tout appartement Σ' de Δ, on a une bijection canonique $|\phi| : |\Sigma'| \to V$.

Soit $\mathcal{I} = |\Delta|$. Munissons $\mathcal{I}$ d'une distance. Soient $x, y \in X$. Alors par l'axiome (B1), il existe un appartement Σ' les contenant. Soit alors $d(x, y) = d_{|\Sigma'|}(x, y)$. Alors d ne dépend pas du choix de Σ' et est une distance. On dira qu'un sous-ensemble A de $\mathcal{I}$ est un appartement si c'est la réalisation géométrique d'un appartement de Δ. Les appartements de $\mathcal{I}$ sont donc des espaces euclidiens et les réalisations géométriques des isomorphismes d'appartement de Δ sont des isométries.

Soient A un appartement de $\mathcal{I}$, $A = |\Sigma|$, où Σ est un appartement de Δ et C une de ses chambres. Soit $\rho_{A,C}$ la réalisation géométrique de $\rho_{\Sigma,C}$ de la définition 1.4.3.1. Alors $\rho_{A,C}$ est une rétraction de $\mathcal{I}$ sur A. On a de plus les propriétés suivantes pour d et $\rho_{A,C}$:

Proposition 1.4.5.5. *(i) L'espace métrique $(\mathcal{I}, d)$ est complet.*

(ii) La rétraction ρ est faiblement contractante, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathcal{I}$, $d(\rho(x), \rho(y)) \leq d(x, y)$. De plus, si x ou y est dans $\overline{C}$, il y a égalité.

(iii) Soient $x, y \in \mathcal{I}$ et F un appartement les contenant. Soit $[x, y]$ le segment les reliant dans F. Alors $[x, y]$ est indépendant du choix de F et peut être caractérisé par $[x, y] = \{s \in \mathcal{I} | d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}$.

Définition 1.4.5.6. (convexité)

Cette proposition permet de définir la notion de convexité dans un immeuble euclidien. Un ensemble $Y \subset \mathcal{I}$ est dit *convexe* si pour tous $x, y \in Y$, $[x, y] \subset Y$.

Exemple 1.4.5.7. Un arbre euclidien est un immeuble euclidien. On peut représenter un arbre euclidien comme on la fait figure 1.4.1. Chaque appartement est alors isométrique à $(\mathbb{R}, |\ |)$ en considérant que la distance entre deux sommets adjacents est toujours 1 et que la distance entre deux points A et B d'une arête est la proportion qu'occupe les segment $[a, b]$ dans cette arête. Le fait que les distances diminuent lorsqu'on « se rapproche de l'infini » sur la figure a pour but de faciliter la représentation de l'arbre et de faire apparaître l'immeuble à l'infini que nous définirons dans la sous-partie 1.4.7. Ainsi, pour déterminer la distance entre deux points A et B de l'arbre, on choisit un appartement les contenant, on compte le nombre de sommets séparant A de B et on ajoute la distance de A à son sommet le plus proche le séparant de B et de même pour B. Par exemple, sur la figure 1.4.3, la distance entre A et B est $\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$, celle entre A et C est $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ et celle entre B et C est $4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$.

1.4.6 Système complet d'appartements

Dans cette partie on définit le système complet d'appartements associé à un immeuble quelconque, puis on donne différentes caractérisations dans le cas euclidien. Ces résultats seront importants pour définir l'immeuble à l'infini d'un immeuble euclidien.

Définition 1.4.6.1. (système d'appartements)

Soit Δ un immeuble. Un *système d'appartements* $\mathcal{A}$ de Δ est un ensemble de sous-complexes de Δ tel que $(\Delta, \mathcal{A})$ est un immeuble.

Définition/Proposition 1.4.6.2. Soit Δ un immeuble. Soit $\mathcal{A}$ la réunion de tous les systèmes d'appartements de Δ. Alors $\mathcal{A}$ est un système d'appartements de Δ appelé *système d'appartements complet*.

Soient Δ un immeuble euclidien muni de son système d'appartements complet, de dimension n et $\mathcal{I}$ sa réalisation géométrique. On a les deux théorèmes suivants :

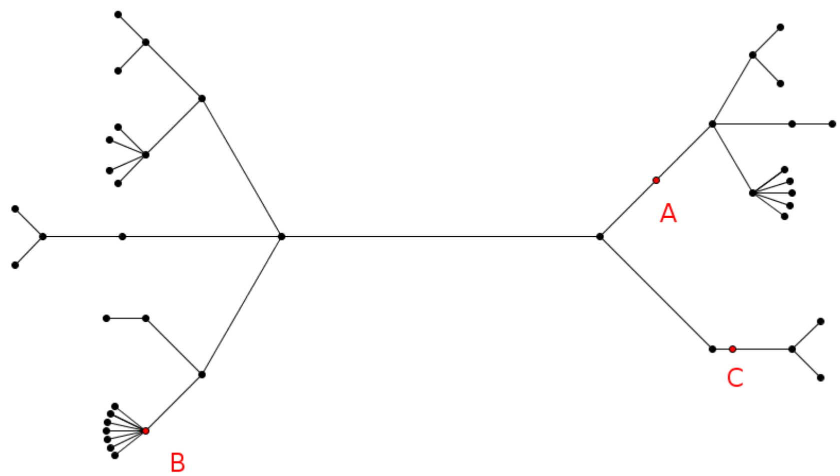

FIGURE 1.4.3 – Distance dans un arbre euclidien

Théorème 1.4.6.3. *Un sous-ensemble $A \subset \mathcal{I}$ est un appartement si et seulement si A est isométrique à $\mathbb{R}^n$*

Théorème 1.4.6.4. *Soit $Y \subset \mathcal{I}$. Supposons que Y est convexe (cf définition 1.4.5.6) ou d'intérieur non vide. Alors Y est inclus dans un appartement si et seulement si Y est isométrique à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.*

1.4.7 Immeuble à l'infini

1.4.7.1 Immeuble à l'infini lorsque le système d'appartements est complet

Dans cette partie, on va associer à tout immeuble euclidien un immeuble sphérique à l'infini. Dans toute la partie, $\mathcal{I}$ sera la réalisation géométrique d'un immeuble euclidien Δ, muni de son système d'appartements complet jusqu'à ce qu'on mentionne le contraire. Soit (W, V) le groupe de réflexions associé à Δ. On supposera comme on le fait depuis la partie 1.2.1.2 que W^v est le stabilisateur de 0 dans W. On note Σ^v la réalisation géométrique de $\Sigma(W^v, V)$. Par ailleurs, pour tout appartement A de Σ, on a une identification de A et de V. Cette partie provient en majorité de [Bro89], mais certaines généralisations proviennent de [Cha10].

Définition 1.4.7.1. (facette conique, direction, quartier, sous-quartier, sous-cône parallèle)

On appelle *facette conique* de $\mathcal{I}$ tout sous-ensemble $\mathfrak{C}$ d'un appartement A de la forme $\mathfrak{C} = x + C$ où $x \in A$ et C est une facette de Σ^v (que l'on inclut dans A via l'identification de A et de V). On dit que C est la direction de $\mathfrak{C}$.

Si $\mathfrak{C}$ est une facette conique de direction C, on appelle toute facette conique $\mathfrak{C}'$ de direction C et incluse dans $\mathfrak{C}$ un *sous-cône parallèle* de $\mathfrak{C}$. On appelle *quartier* de $\mathcal{I}$ toute facette conique dont la direction est une chambre de Σ^v. Si $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sont des quartiers, avec $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$, on dit que $\mathfrak{C}'$ est un *sous-quartier* de $\mathfrak{C}$. Ils ont alors la même direction. Un sous-quartier de $\mathfrak{C}$ est en fait un sous-cône parallèle de $\mathfrak{C}$

Théorème 1.4.7.2. *Soient $\mathfrak{C}$ un quartier et C une chambre de $\mathcal{I}$. Alors il existe un sous-quartier $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ tel que $\mathfrak{C}'$ et C soient contenus dans un appartement.*

Exemple 1.4.7.3. On considère le quartier $\mathfrak{C}$ colorié en rouge.

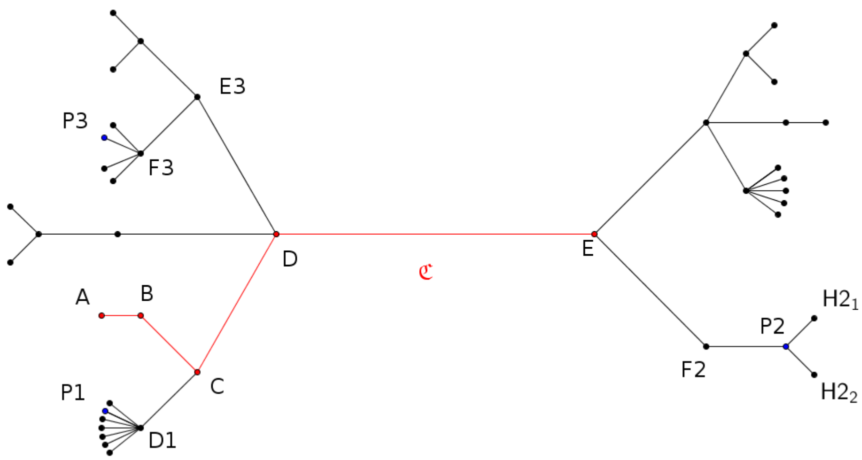

FIGURE 1.4.4 – Appartements contenant un point et un sous-quartier de $\mathfrak{C}$

Pour le point $P1$, on peut choisir l'appartement $A, B, C, D1, P1$, pour le point $P2$, on peut choisir $A, B, C, D, E, F2, P2, H2_1$ ou $A, B, C, D, E, F2, P2, H2_2$ et pour le point $P3$, on peut choisir $A, B, C, D, E3, F3, P3$. Comme le montre l'exemple du point $P2$, il y a en général une infinité d'appartements contenant un point et un sous-quartier d'un certain quartier. Ce phénomène ne se voit pas tellement sur cet exemple car on a arrêté notre arbre aux points $P1$, $H2_1$, $H2_2$ et $P3$, mais il devrait continuer à l'infini à partir de chacun de ces points.

Ce théorème permet de définir un type de rétraction de la manière suivante. Soient A un appartement et $\mathfrak{C}$ un quartier. Nous allons définir une rétraction $\rho = \rho_{A,\mathfrak{C}}$ sur A. Soit $x \in \mathcal{I}$. Par le théorème précédent, il existe un appartement A' contenant x et un sous-quartier $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$. Soit $\phi_{A'} : A' \to A$ l'isomorphisme fixant les points de $A \cap A'$. On pose alors $\rho(x) = \phi_{A'}(x)$. On peut vérifier que ρ est bien définie.

De plus, si C est une chambre de $\mathcal{I}$, il existe un sous-quartier $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ tel que $\rho_{A,\mathfrak{C}}(x) = \rho_{A,C'}(x)$ pour tout $x \in C$ et toute chambre C' de A rencontrant A. En effet, si on choisit $\mathfrak{C}'$ comme étant un sous-quartier tel que $\mathfrak{C}'$ et C sont contenus dans un appartement A', alors les deux membres de l'égalité sont égaux à $\phi_{A'}(x)$. La rétraction ainsi définie est faiblement contractante, c'est-à-dire que si $(x, y) \in \mathcal{I}^2$, $d(\rho_{A,\mathfrak{C}}(x), \rho_{A,\mathfrak{C}}(y)) \leq d(x, y)$.

Cette rétraction permet entre autres de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.4.7.4. *Soient $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ deux quartiers de $\mathcal{I}$. Alors il existe des sous-quartiers $\mathfrak{C}'_1$ et $\mathfrak{C}'_2$ de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ qui sont contenus dans un même appartement.*

En fait, d'après la proposition 4.5.8 de [Cha10], on a le théorème suivant, qui généralise les théorèmes 1.4.7.2 et 1.4.7.4 :

Théorème 1.4.7.5. *Soient $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ des facettes coniques de $\mathcal{I}$ et C une chambre de $\mathcal{I}$. Alors :*

(i) il existe un appartement contenant C et un sous-quartier de $\mathfrak{C}_1$

(ii) il existe un appartement $\mathcal{I}$ contenant des sous-cônes parallèles de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$.

Définition 1.4.7.6. (rayon, base, point idéal)

On appelle *rayon* tout sous-ensemble $\mathfrak{t}$ isomorphe à la demi-droite $[0, \infty[$. La pré-image de 0 par l'unique isométrie entre $\mathfrak{t}$ et $[0, \infty[$ est appelée base de $\mathfrak{t}$.

Deux rayons $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ sont dit parallèles si $\{d(y, \mathfrak{t}) | y \in \mathfrak{t}'\}$ et $\{d(y, \mathfrak{t}') | y \in \mathfrak{t}\}$ sont bornés. Le parallélisme est une relation d'équivalence et on appelle *point idéal* toute classe de cette

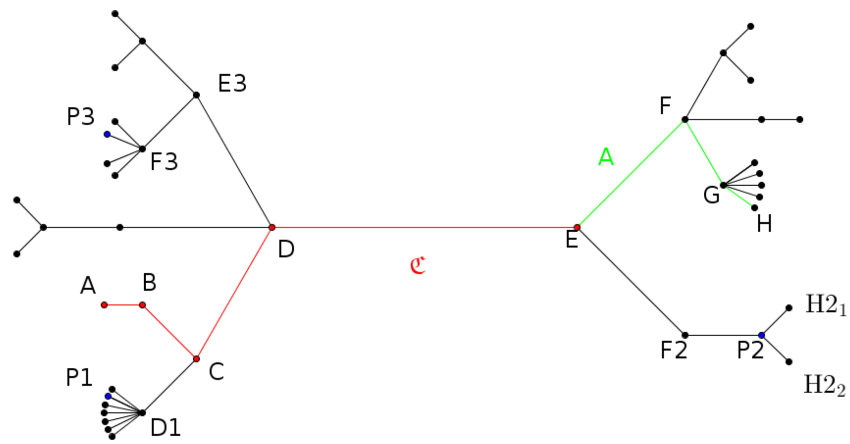

FIGURE 1.4.5 – Rétraction sur A de centre $\mathfrak{C}$

On considère la rétraction sur l'appartement A colorié en vert par rapport au quartier $\mathfrak{C}$ colorié en rouge (on poursuit ici l'exemple 1.4.7.3). L'image de $P1$ est alors A, celle de $P2$ est G et celle de $P3$ est H.

relation. Cette relation d'équivalence prolonge le parallélisme au sens usuel, c'est-à-dire que si $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$ sont deux rayons d'un même appartement A, alors ils sont parallèles si et seulement s'il existe un vecteur v de A tel que $\mathfrak{t} = \tau_v(\mathfrak{t}')$, où τ_v est la translation de vecteur v.

Si e est un point idéal de $\mathcal{I}$, $x \in \mathcal{I}$ et $\mathfrak{t}$ est un rayon de e de base x, on note parfois $[x, e[$ au lieu de $\mathfrak{t}$.

Soit $\mathcal{I}_\infty$ l'ensemble des points idéaux. Nous allons munir $\mathcal{I}_\infty$ d'une structure de complexe simplicial. Soit $\mathfrak{A}$ une facette conique de $\mathcal{I}$. La face de $\mathfrak{A}$ à l'infini, notée $\mathfrak{A}_\infty$ est l'ensemble des rayons ouverts $]x, e[= [x, e[\backslash\{x\}$, où x est la base de $\mathfrak{A}$.

On dit qu'un sous-ensemble F de $\mathcal{I}$ est un *simplexe idéal* de $\mathcal{I}$ si F est de la forme $F = \mathfrak{A}_\infty$ pour une certaine facette conique $\mathfrak{A}$

Soit Δ_∞ l'ensemble des simplexes idéaux de $\mathcal{I}$. Si $F \in \Delta_\infty$ et $x \in \mathcal{I}$, on pose $x * F =$
$$\begin{cases} \{x\} & \text{si } F = \emptyset \\ \bigcup\limits_{e \in F}]x, e[& \text{sinon} \end{cases}.$$
Nous allons maintenant énoncer quelques lemmes puis construire l'immeuble à l'infini.

Lemme 1.4.7.7. *Si F est un simplexe idéal et $x \in \mathcal{I}$, alors il existe une unique facette conique $\mathfrak{A}$ basée en x telle que $F = \mathfrak{A}_\infty$. Cette facette conique $\mathfrak{A}$ sera notée $x + F$. Il y a donc pour tout $x \in \mathcal{I}$, une correspondance bijective entre l'ensemble des simplexes idéaux de $\mathcal{I}$ et les facettes basées en x.*

Lemme 1.4.7.8. *Les simplexes idéaux partitionnent $\mathcal{I}_\infty$.*

Lemme 1.4.7.9. *Deux quartiers de $\mathcal{I}$ ont la même face à l'infini si et seulement s'ils ont un quartier en commun.*

Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont des facettes coniques basées en un point x, on dit que $\mathfrak{A}'$ est une face de $\mathfrak{A}$ s'il existe un appartement les contenant toutes les deux et si la direction de $\mathfrak{A}'$ est une face de celle de $\mathfrak{A}$. Si F et F' sont deux simplexes de Δ_∞, on dit que F' est une face de F s'il existe $x \in \mathcal{I}$ tel que $x * F'$ est une face de $x * F$, ce qui équivaut à dire que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $x * F'$ est une face de $x * F$. Soit Σ un appartement de Δ. On pose Σ_∞ l'ensemble des simplexes idéaux F tels que $F = \mathfrak{A}_\infty$ pour une facette conique de $A = |\Sigma|$. Alors $\Sigma_\infty \simeq \Sigma(W^v, V)$ et on dit que Σ_∞ est un appartement de Δ_∞. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.4.7.10. *Δ_∞ est un immeuble sphérique dont les appartements sont en bijection avec ceux de $\mathcal{I}$.*

On dit que Δ_∞ est l'*immeuble à l'infini* de Δ.

1.4.7.2 Immeuble à l'infini lorsque le système d'appartement n'est pas complet

On peut définir un immeuble à l'infini pour des immeubles munis de systèmes d'appartements incomplets. Néanmoins le système d'appartement doit vérifier certaines conditions pour que l'immeuble à l'infini soit un immeuble. Soit $\mathcal{I}$ un immeuble euclidien dont le système d'appartements $\mathcal{A}$ n'est pas complet. Soit Δ_∞ l'immeuble à l'infini de $\mathcal{I}$ muni de son système complet d'appartements. Soient $\mathcal{A}_\infty$ l'ensemble des A_∞, où $A \in \mathcal{A}$ et $\Delta_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{A_\infty \in \mathcal{A}_\infty} A_\infty$. On a la caractérisation suivante :

Proposition 1.4.7.11. *$\Delta_\infty(\mathcal{A})$ est un immeuble si et seulement si pour tous quartiers $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ de $\mathcal{I}$, il existe un appartement dans $\mathcal{A}$ contenant des sous-quartiers de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$.*

Un système d'appartements vérifiant l'une des conditions équivalentes de cette proposition est dit *double* ou *cohérent*.

D'après le théorème 4.6.8 de [Cha10], on a le théorème suivant, qui généralise le théorème 1.4.7.5 :

Théorème 1.4.7.12. *Soit $\mathcal{I}$ un immeuble muni d'un système d'appartements cohérent. Soient $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ des facettes coniques de $\mathcal{I}$ et C une chambre de $\mathcal{I}$. Alors :*

(i) il existe un appartement contenant C et un sous-cône parallèle de $\mathfrak{C}_1$

(ii) il existe un appartement $\mathcal{I}$ contenant des sous-cônes parallèles de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$.

Définition 1.4.7.13. (action fortement transitive)

Soit $\mathcal{I}$ un immeuble euclidien. On dit qu'un groupe G d'automorphismes de $\mathcal{I}$ agit *fortement transitivement* sur $\mathcal{I}$ si tous les isomorphismes d'appartements de l'axiome (B2) sont induits par un élément g de G. Les appartements de $\mathcal{I}$ sont alors les $g.\mathbb{A}$, pour $g \in G$ et $\mathbb{A}$ un appartement de $\mathcal{I}$

Proposition 1.4.7.14. *Soit $\mathcal{I}$ un immeuble euclidien sur lequel un groupe G agit fortement transitivement. Soit $\mathbb{A}$ un appartement de $\mathcal{I}$ et $\mathfrak{C}$ un quartier de $\mathbb{A}$, $\mathfrak{B}$ le sous-groupe des éléments de G stabilisant un sous-quartier de $\mathfrak{C}$ et N le stabilisateur de $\mathbb{A}$. Alors le système d'appartements de $\mathcal{I}$ est cohérent si et seulement si $G = \mathfrak{B}N\mathfrak{B}$.*

1.4.8 Relation de parallélisme sur les murs d'un immeuble euclidien

Dans cette sous-partie on définit une notion de parallélisme sur les murs d'un immeuble euclidien. Cette partie servira à associer des arbres à tout mur d'un immeuble (sous-partie 2.2.5.2). Dans cette sous-partie, $\mathcal{I}$ sera un immeuble euclidien.

Définition 1.4.8.1. (murs parallèles)

Soient M et M' deux murs de $\mathcal{I}$. On dit que M et M' sont *parallèles* lorsque pour tout rayon r de M, il existe un rayon r' de M' parallèle à r et pour tout rayon r' de M', il existe un rayon r de M parallèle à r' (voir la partie 1.4.7 pour la définition de rayon).

Le parallélisme est une relation d'équivalence sur les murs, principalement car c'est une relation d'équivalence sur les rayons. Elle prolonge de plus la relation de parallélisme au sens usuel :

Lemme 1.4.8.2. *Soient A un appartement de $\mathcal{I}$ et M et M' des murs de A. Alors M et M' sont parallèles au sens de la définition 1.4.8.1 si et seulement s'ils sont parallèles en tant que sous-espaces affines de l'espace euclidien A.*

Démonstration : Elle repose sur le fait que deux rayons d'un même appartement sont parallèles si et seulement s'il existe une translation envoyant l'un sur l'autre. Si M et M' sont parallèles en tant que sous-espaces affines de l'espace euclidien A, il existe une translation entre M et M' et cette translation induit une bijection entre les rayons de M et ceux de M' envoyant tout rayon de M sur un rayon parallèle de M'. Les murs M et M' sont donc parallèles au sens de la définition 1.4.8.1.

Réciproquement supposons que M et M' sont parallèles au sens de 1.4.8.1. Soient $x \in M$ et r un rayon de M de base x. Alors il existe un rayon r' de M' parallèle à r. Soit x' la base de r' et τ la translation envoyant x sur x'. On a alors $r' = \tau(r)$. Soit s un rayon de M de base x et s'' un rayon de M' parallèle à s. Soit s' le rayon parallèle à s'' de base x'. Alors s' est un rayon de M', parallèle à s, il est donc de la forme $t(s)$ où t est une translation de A. Comme s' et r' ont la même base x', $t = \tau$. Comme M (respectivement M') est la réunion de ses rayons de base x (respectivement de base x'), on en déduit le résultat annoncé. □

Lemme 1.4.8.3. *Soient M et M' deux murs parallèles de $\mathcal{I}$. Alors M et M' sont soit disjoints soit égaux.*

Démonstration : Supposons que M et M' ne soient pas disjoints. Soit x un de leur intersection. Soit r un rayon de M de base x. Alors il existe un rayon r' de M' parallèle à r. Quitte à le translater, on peut supposer que r' a pour base x. Par le lemme 1.4.7.7, $r = r'$. Comme M et M' sont la réunion de leurs rayons de base x, $M = M'$. □

Chapitre 2

Algèbres d'Iwahori-Hecke, algèbre de Hecke sphérique et isomorphisme de Satake

2.1 Algèbres d'Iwahori-Hecke ${}^{\mathcal{I}}\mathcal{H}$

2.1.1 Définition d'algèbre d'Iwahori-Hecke

Cette partie s'inspire de [GP00].

Dans cette partie, (W, S) sera un système de Coxeter.

Soit A un anneau commutatif et unitaire. Soit $\{a_s, b_s,\ s \in S\}$ un sous-ensemble de A tel que $a_s = a_t$ et $b_s = b_t$ dès que s et t sont conjugués dans W.

Alors l'*algèbre d'Iwahori-Hecke* de (W, S) d'anneau A et de paramètres $(a_s), (b_s)$ est l'algèbre $\mathcal{H}$ sur A admettant la présentation suivante :

générateurs T_w, $w \in W$

relations : $T_s^2 = a_s T_1 + b_s T_s$ pour tout $s \in S$ et $T_w = T_{s_1} \dots T_{s_n}$ pour toute écriture réduite $w = s_1 \dots s_n$ de W.

On a alors les relations suivantes : si $s \in S$ et $w \in W$,

alors $T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{si } l(sw) > l(w) \\ a_s T_{sw} + b_s T_w & \text{si } l(sw) < l(w) \end{cases}$

Théorème 2.1.1.1. *L'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}$ est un module libre sur A et les T_w tels que $w \in W$ forment une base de $\mathcal{H}$.*

Remarque 2.1.1.2. Lorsque a_s est inversible, T_s est inversible et $T_s^{-1} = a_s^{-1} T_s - a_{s^{-1}} b_s T_1$. Ainsi, lorsque pour tout $s \in S$, a_s est inversible, T_w est inversible pour tout $w \in W$.

2.1.2 Lien entre immeubles et algèbres d'Iwahori-Hecke

Dans cette partie, on associe à tout immeuble régulier (notion que l'on définira) une algèbre d'Iwahori-Hecke. Cette partie provient de [Par06]

Soit $\mathcal{I}$ un immeuble de type W, où (W, S) est un groupe de Coxeter, avec $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Soit $(m_{i,j})$ la matrice de Coxeter de (W, S). On munit $\mathcal{I}$ de sa W-distance δ. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{I})$ l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}$. Soient $a \in \mathcal{C}$ et $w \in W$. On pose $\mathcal{C}_w(a) = \{b \in \mathcal{C} | \delta(a, b) = w\}$. Pour tout $a \in \mathcal{C}$, $(C_w(a))_{w \in W}$ forme une partition de $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{I}$ est *régulier* lorsque pour tout $a \in \mathcal{C}$ et tout $w \in W$, $|C_w(a)|$ est fini et ne dépend pas de a. Dans ce cas, on pose

$q_w = |\mathcal{C}_w(a)|$ et $q_i = |\mathcal{C}_{s_i}(a)|$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, pour tout $w \in W$ et pour n'importe quel $a \in \mathcal{C}$. Dans toute cette partie, $\mathcal{I}$ sera un immeuble régulier et on gardera les notations de cette introduction.

Proposition 2.1.2.1. *(i) Soient $a \in \mathcal{C}$ et $w \in W$. Alors $|\mathcal{C}_w(a)| = q_{i_1} \dots q_{i_n}$ pour toute écriture réduite $s_{i_1} \dots s_{i_n}$ de w.*

(ii) $q_i = q_j$ lorsque $m_{i,j} < \infty$ est impair.

Démonstration : montrons d'abord (i). Cette assertion découle de la définition de régularité lorsque $l(w) = 1$. Soit $s = s_i \in S$. Si $l(ws) = l(w) + 1$, alors $\mathcal{C}_{ws}(a) = \bigsqcup_{b \in \mathcal{C}_w(a)} \mathcal{C}_s(b)$. En effet, soit $c \in \mathcal{C}_{ws}(a)$. Alors il existe une galerie minimale $a = c_0, \dots,\ c_k = c$ de type (f, i), où f est un mot de W tel que $r_f = w$. En particulier, $c \in \mathcal{C}_s(c_{k-1})$ et $c_{k-1} \in \mathcal{C}_w(a)$.

Réciproquement, supposons que $c \in \mathcal{C}_s(b)$ pour un certain $b \in \mathcal{C}_w(a)$. Soit alors Γ une galerie minimale de a à b de type un mot réduit f tel que $r_f = w$. Alors (Γ, c) est une galerie de a à c qui est minimale car $l(ws) = l(w) + 1$. On en déduit que $\mathcal{C}_{ws} = \bigcup_{b \in \mathcal{C}_w(a)} \mathcal{C}_s(b)$.

Montrons que l'union est disjointe. Soient $b \in \mathcal{C}_w(a)$ et $b' \in \mathcal{C}$ tels que $\mathcal{C}_s(b) \cap \mathcal{C}_s(b') \neq \emptyset$. Soit $c \in \mathcal{C}_s(b) \cap \mathcal{C}_s(b')$. Alors b et c ont une cloison d de type i en commun, si $s = s_i$ et de même pour b' et c. Ainsi, b et b' ont d en commun. Ainsi, si $b \neq b'$, (b, b') est un galerie de type s. Comme $l(ws) = l(w) + 1$, si Γ est une galerie minimale de a à b de type f, (Γ, b') est une galerie de type (f, i) qui est réduit donc (Γ, b') est minimale et $b' \in \mathcal{C}_{ws}(a)$. On en déduit que $\mathcal{C}_{ws}(a) = \bigsqcup_{b \in \mathcal{C}_w(a)} \mathcal{C}_s(b)$, d'où l'on déduit (i) par récurrence.

Démontrons (ii). Si $m_{i,j}$ est impair, $s_i s_j \dots s_i = s_j s_i \dots s_j$ (où il y a $m_{i,j}$ facteurs de chaque côté) et cette écriture est réduite, donc $q_i q_j \dots q_i = q_j q_i \dots q_j$, d'où l'égalité.

On admet qu'on peut en déduire le résultat suivant :

Proposition 2.1.2.2. *Si $s_j = w s_i w^{-1}$ pour un certain $w \in W$, alors $q_i = q_j$.*

Théorème 2.1.2.3. *Soit $\mathcal{X}$ un immeuble épais de groupe de Coxeter fini. Alors $\mathcal{X}$ est régulier.*

On dit qu'un immeuble $\mathcal{I}$ est *régulier par rapport aux chambres* si pour tous $w_1, w_2 \in W$, $|\mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2}(b)| = |\mathcal{C}_{w_1}(c) \cap \mathcal{C}_{w_2}(d)|$ pour tous a, b, c, d tels que $\delta(a, b) = \delta(c, d)$. On verra que la régularité d'un immeuble entraîne sa régularité par rapport aux chambres.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{C}$. On définit, pour tout $w \in W$ un endomorphisme de $\mathcal{G}$ en posant : pour tout $f \in \mathcal{G}$, pour tout $a \in \mathcal{C}$, $B_w(f)(a) = \frac{1}{q_w} \sum_{b \in \mathcal{C}_w(a)} f(b)$.

Lemme 2.1.2.4. *Soient $w_1, w_2 \in W$. Alors $(B_{w_1} B_{w_2} f)(a) = \frac{1}{q_{w_1} q_{w_2}} \sum_{c \in \mathcal{C}} |\mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2^{-1}}(c)| f(c)$.*

Démonstration : $(B_{w_1} B_{w_2} f)(a)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{q_{w_1}} \sum_{b \in \mathcal{C}_{w_1}(a)} (B_{w_2} f)(b) \\
&= \frac{1}{q_{w_1} q_{w_2}} \sum_{b \in \mathcal{C}_{w_1}(a)} \sum_{c \in \mathcal{C}_{w_2}(b)} f(c) \\
&= \frac{1}{q_{w_1} q_{w_2}} \sum_{b \in \mathcal{C}} \sum_{c \in \mathcal{C}} \mathbb{1}_{\mathcal{C}_{w_1}(a)}(b) \mathbb{1}_{\mathcal{C}_{w_2}(b)}(c) f(c) \\
&= \frac{1}{q_{w_1} q_{w_2}} \sum_{c \in \mathcal{C}} \Big(\sum_{b \in \mathcal{C}} \mathbb{1}_{\mathcal{C}_{w_1}(a)}(b) \mathbb{1}_{\mathcal{C}_{w_2^{-1}}(c)}(b)\Big) f(c),
\end{aligned}
$$

car $b \in \mathcal{C}_w(a)$ si et seulement si $a \in \mathcal{C}_{w^{-1}}(b)$.

Pour la même raison,
$$\frac{1}{q_{w_1}q_{w_2}}\sum_{c\in\mathcal{C}}(\sum_{b\in\mathcal{C}}\mathbb{1}_{\mathcal{C}_{w_1}(a)}(b)\mathbb{1}_{\mathcal{C}_{w_2^{-1}}(c)}(b))f(c)=\frac{1}{q_{w_1}q_{w_2}}\sum_{c\in\mathcal{C}}|\mathcal{C}_{w_1}(a)\cap\mathcal{C}_{w_2^{-1}}(c)|f(c).\qquad\square$$

Lemme 2.1.2.5. *Soient $w\in W$, $s\in S$ et $a\in\mathcal{C}$. Alors si $\mathcal{C}_w(a)\cap\mathcal{C}_s(b)$ est non vide, on a les deux possibilités suivantes :* $\begin{cases} b\in\mathcal{C}_{ws}(a) & \text{si } l(ws)=l(w)+1\\ b\in\mathcal{C}_w(a)\cup\mathcal{C}_{ws}(a) & \text{si } l(ws)=l(w)-1.\end{cases}$

Démonstration : Supposons que $s=s_i$ où $i\in[\![1,n]\!]$. Supposons que $l(ws)=l(w)+1$ et que $c\in\mathcal{C}_w(a)\cap\mathcal{C}_s(b)$. On choisit une galerie de a à c de type f telle que $w=r_f$. Alors cette galerie prolongée de b est de type (f,i) qui est réduit par hypothèse donc $b\in\mathcal{C}_{ws}(a)$.

Supposons que $l(ws)=l(w)-1$ et que $c\in\mathcal{C}_w(a)\cap\mathcal{C}_s(b)$. On peut choisir une écriture réduite f de w finissant par s, on a donc une galerie minimale $a=a_0,\dots,a_m=c$ telle que $a_{m-1}\in\mathcal{C}_s(c)$(c'est la condition de réécriture (E) de la sous-partie 1.2.2.2). Mais $b\in\mathcal{C}_s(c)$, donc soit $b=a_{m-1}$, soit $b\in\mathcal{C}_s(a_{m-1})$ (grâce au même argument que celui de la preuve de la proposition 2.1.2.1 (i)). Dans le premier cas $b\in\mathcal{C}_{ws}(a)$ et dans le second $b\in\mathcal{C}_w(a)$.

Lemme 2.1.2.6. *Soient $w\in W$, $s\in S$ et $a,b\in\mathcal{C}$. Alors :*
$$|\mathcal{C}_w(a)\cap\mathcal{C}_s(b)|=\begin{cases}1 & \text{si } l(ws)=l(w)+1 \text{ et } b\in\mathcal{C}_{ws}(a)\\ q_s & \text{si } l(ws)=l(w)-1 \text{ et } b\in\mathcal{C}_{ws}(a)\\ q_s-1 & \text{si } l(ws)=l(w)-1 \text{ et } b\in\mathcal{C}_w(a).\end{cases}$$

Démonstration : Supposons que $l(ws)=l(w)+1$ et $b\in\mathcal{C}_{ws}(a)$. Alors il existe une galerie minimale $a=a_0,\dots,a_m=b$ telle que $a_{m-1}\in\mathcal{C}_s(b)$. Il y a q_s chambres dans $\mathcal{C}_s(b)$: l'une d'elles est a_{m-1} et les q_s-1 autres sont dans $\mathcal{C}_{ws}(a)$ donc $\mathcal{C}_w(a)\cap\mathcal{C}_s(b)=\{a_{m-1}\}$ et $|\mathcal{C}_w(a)\cap\mathcal{C}_s(b)|=1$.

Supposons que $l(ws)=l(w)-1$ et que $b\in\mathcal{C}_{ws}(a)$. Écrivons $s=s_i$ et $w=r_f$ où f est un mot réduit. Comme $l(ws)=l(w)-1$, il existe un mot réduit f' tel que (f',i) est un mot réduit pour w et donc une galerie minimale de type f' de a à b. Ainsi si $c\in\mathcal{C}_s(b)$, on peut relier a et c par une galerie de type (f',i) donc $c\in\mathcal{C}_w(a)$. On en déduit que $\mathcal{C}_s(b)\subset\mathcal{C}_w(a)$ et donc $|\mathcal{C}_w(a)\cap\mathcal{C}_s(b)|=q_s$.

Supposons que $l(ws)=l(w)-1$ et $b\in\mathcal{C}_w(a)$. Alors comme dans la preuve du lemme 2.1.2.5, il existe une galerie minimale $a=a_0,\dots,a_m=b$ telle que $b\in\mathcal{C}_s(a_{m-1})$. Ainsi, pour $c\in\mathcal{C}_s(a_{m-1})$, soit $c=a_{m-1}\in\mathcal{C}_{ws}(a)$, soit $c\neq a_{m-1}$ et alors $c\in\mathcal{C}_s(a_{m-1})$ et donc $c\in\mathcal{C}_w(a)$. On a donc $\mathcal{C}_s(b)\cap\mathcal{C}_w(a)=\mathcal{C}_s(b)\backslash\{a_{m-1}\}$ et le cardinal de cet ensemble est q_s-1. $\square$

Théorème 2.1.2.7. *Soient $w\in W$ et $s\in S$. Alors*
$$B_wB_s=\begin{cases}B_{ws} & \text{si } l(ws)=l(w)+1\\ \frac{1}{q_s}B_{ws}+(1-\frac{1}{q_s})B_w & \text{si } l(ws)=l(w)-1\end{cases}$$

Ce théorème est une conséquence directe des lemmes 2.1.2.4 et 2.1.2.6.

Corollaire 2.1.2.8. *Soient $w_1,w_2\in W$. Alors il existe $(b_{w_1,w_2:w_3})\in(\mathbb{Q}^+)^{(W)}$ tel que $B_{w_1}B_{w_2}=\sum_{w_3\in W}b_{w_1,w_2:w_3}B_{w_3}$ et $\sum_{w_3\in W}b_{w_1,w_2:w_3}=1$. De plus, lorsque $l(w_1w_2)=l(w_1)+l(w_2)$, $B_{w_1w_2}=B_{w_1}B_{w_2}$.*

Notons $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{I})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(\mathcal{G})$ engendré par les B_w pour $w\in W$. C'est une algèbre engendrée par les B_s pour $s\in S$ par le corollaire 2.1.2.8.

Proposition 2.1.2.9. *La famille $(B_w)_{w\in W}$ est une base de $\mathcal{B}$.*

Démonstration : Supposons que $\sum_{k=1}^{n}\mu_k B_{w_k}=0$ et fixons $a,b\in\mathcal{C}$ tels que $\delta(a,b)=w_j$ pour $j\in[\![1,n]\!]$ (un tel couple existe, on peut par exemple prendre les chambres $\{1\}$ et $\{w_j\}$ après avoir choisi un appartement et identifié $\Sigma(W,S)$ et cet appartement).

Si $w\in W$ et $c\in\mathcal{C}$, $B_w\mathbb{1}_{\{b\}}(c)=\frac{1}{q_w}|\{b\}\cap\mathcal{C}_w(c)|$.

Alors $0=\sum_{k=1}^{n}\mu_k(B_{w_k}\mathbb{1}_{\{b\}})(a)=\frac{\mu_j}{q_{w_j}}$, d'où le résultat. □

Corollaire 2.1.2.10. *Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre d'Iwahori-Hecke sur $\mathbb{C}$ de paramètres $a_s=\frac{1}{q_s}$ et $b_s=1-\frac{1}{q_s}$. Alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$ sont isomorphes en tant qu'algèbres.*

Proposition 2.1.2.11. *Soient $w_1,w_2,w_3\in W$ et $a,b\in\mathcal{C}$ tels que $\delta(a,b)=w_3$. Alors*

$$|\mathcal{C}_{w_1}(a)\cap\mathcal{C}_{w_2^{-1}}(b)|=\frac{q_{w_1}q_{w_2}b_{w_1,w_2:w_3}}{q_{w_3}}.$$

On en déduit que tout immeuble régulier est régulier par rapport aux chambres.

Démonstration : Par le lemme 2.1.2.4, on a que $B_{w_1}B_{w_2}\mathbb{1}_{\{b\}}(a)=q_{w_1}^{-1}q_{w_2}^{-1}|\mathcal{C}_{w_1}(a)\cap\mathcal{C}_{w_2^{-1}}(b)|$. Par définition de $b_{w_1,w_2:w_3}$, comme pour $w\in W$ et $B_w\mathbb{1}_{\{b\}}(a)=\frac{1}{q_w}|\{b\}\cap\mathcal{C}_w(a)|$, $B_{w_1}B_{w_2}\mathbb{1}_{\{b\}}(a)=q_{w_3}^{-1}b_{w_1,w_2:w_3}$. On a donc le résultat souhaité .□

2.1.3 Algèbre de Hecke affine

Dans cette partie, on définit l'algèbre de Hecke affine dont la définition sera très similaire à celle d'algèbre d'Iwahori-Hecke. Cette dernière nous servira à faire le lien entre les algèbres d'Iwahori-Hecke et les algèbres de Hecke sphériques que nous introduirons à la partie 2.2.3. Dans cette partie, R sera un système de racines réduit, W sera son groupe de Weyl affine, C une chambre de $\Sigma(R)$ et S le système de générateurs associé, et $\tilde{W}$ sera le groupe de Weyl affine étendu (cf parties 1.3.3 et 1.3.5).

Soit $\underline{q}=(q_s)_{s\in S}$ une suite de réels strictement positifs telle que $q_s=q_t$ lorsque s et t sont conjugués dans $\tilde{W}$. On peut par exemple choisir pour $\underline{q}$ les paramètres d'un immeuble régulier. L'*algèbre de Hecke affine* $\tilde{\mathcal{H}}$ de $\tilde{W}$ de paramètre $\underline{q}$ sur $\mathbb{C}$ est l'algèbre sur $\mathbb{C}$ engendrée par des éléments T_w, pour tout $w\in\tilde{W}$ satisfaisant les relations :

$$\begin{cases} T_{ww'}=T_wT_{w'} & \text{si } l(ww')=l(w)+l(w') \\ T_wT_s=\dfrac{1}{q_s}T_{ws}+(1-\dfrac{1}{q_s})T_w & \text{si } l(ws)=l(w)-1 \end{cases}$$

pour $w,w'\in\tilde{W}$ et $s\in S$. Il est alors facile de voir que pour $s\in S$ et $g\in G$, T_s et T_g sont inversibles, et grâce à la décomposition $\tilde{W}=W\rtimes G$, on en déduit que les T_w sont inversibles pour tout $w\in\tilde{W}$.

Algèbre de Hecke affine d'un immeuble Soit $\mathcal{I}$ un immeuble de groupe de Coxeter (W,S) tel que (W,S) soit le groupe de Weyl affine d'un système de racines réduit R. Soit $\tilde{W}$ son groupe de Weyl étendu. On suppose que $\mathcal{I}$ est régulier de paramètres $\underline{q}=(q_s)_{s\in S}$. Alors l'algèbre de Hecke de $\tilde{W}$ sur $\mathbb{C}$ de paramètre $\underline{q}$ est appelée *Algèbre de Hecke affine de $\mathcal{I}$*.

Pour $\lambda\in P^+$ (cf 1.3.3 pour la définition), on pose $x^\lambda=\sqrt{q_{\tau_\lambda}}T_{\tau_\lambda}$, où $\tau_\lambda\in\tilde{W}$ est la translation de vecteur λ. Pour $\lambda=\mu-\nu\in P$, avec $\mu,\nu\in P^+$, on pose alors $x^\lambda=x^\mu(x^\nu)^{-1}$, ce qui ne dépend pas des choix de μ et ν. On a alors $x^\lambda x^\mu=x^{\lambda+\mu}=x^\mu x^\lambda$ pour tous $\lambda,\mu\in P$. On note $\mathbb{C}[P]$ l'algèbre (commutative) engendrée par les x_λ. On définit une action linéaire de W^v sur $\mathbb{C}[P]$ en posant $wx^\lambda=x^{w\lambda}$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.1.3.1. *Le centre $Z(\tilde{\mathcal{H}})$ de $\tilde{\mathcal{H}}$ est $\mathbb{C}[P]^{W^v}$.*

Une façon de démontrer ce théorème est d'utiliser les relations de Bernstein-Luztig qui donnent une expression de $x^\lambda T_s - T_s x^\lambda$.

Soit $\mathcal{I}$ un immeuble régulier. Dans [Par06], Parkinson définit des opérateurs sur l'ensemble des fonctions allant de certains sommets de $\mathcal{I}$ appelés « bons sommets » dans $\mathbb{C}$ de manière un peu analogue aux opérateurs B_w de la partie 2.1.2, et l'algèbre engendrée par ces opérateurs est isomorphe au centre de $Z(\tilde{\mathcal{H}})$, où $\tilde{H}$ est l'algèbre de Hecke affine de $\mathcal{I}$, ce qui montre un lien entre immeuble régulier et algèbre de Hecke affine.

2.2 Algèbre de Hecke Sphérique et isomorphisme de Satake

2.2.1 Hypothèses et notations

Cette partie est une réécriture de la partie 5 de [GR14] dans le cas particulier des immeubles affines (l'article traite le cas des masures).

On considère un système de racines irréductible réduit (R, V), où V est un espace euclidien dont une base est donnée par $\{\alpha_i, i \in [\![1,n]\!]\}$. Alors $\{\alpha_i^\vee | i \in [\![1,n]\!]\}$ est une base de $R^\vee$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $r_i : \begin{array}{l} V \to V \\ v \mapsto v - \alpha_i(v)\alpha_i^\vee \end{array}$, ce qui définit une réflexion orthogonale par rapport à $\ker \alpha_i$. On note W^v le groupe de Weyl de R, qui est engendré par $S = \{r_i | i \in [\![1,n]\!]\}$, et (W^v, S) est un groupe de Coxeter fini.

On note C^v la *chambre fondamentale*, c'est-à-dire que $C^v = \{x \in V | \alpha_i(x) > 0 \, \forall i \in [\![1,n]\!]\}$ et C_f l'*alcôve fondamentale*, c'est-à-dire que $C_f = \{x \in V | \alpha_i(x) > 0 \forall i \in [\![1,n]\!]$ et $\tilde{\alpha}(x) < 1\}$, où $\tilde{\alpha}$ est la plus grande co-racine de R. On rappelle que $\overline{C^v}$ et $\overline{C}_f$ sont des domaines fondamentaux pour les actions de W^v et W respectivement. Soient s^a la réflexion par rapport au mur $\{x \in V | \tilde{\alpha}(x) = 1\}$ et $S^a = S \cup \{s^a\}$. On note W le groupe de Weyl affine de R. On a alors $W = \langle S^a \rangle$ et (W, S^a) est un groupe de réflexions euclidien.

On pose $Q^\pm = \pm \bigoplus_{i \in [\![1,N]\!]} \mathbb{N}\alpha_i$ et $Q^\vee = \bigoplus_{i \in [\![1,n]\!]} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$.

On considère un immeuble $\mathcal{I}$ de système de Coxeter (W, S^a). On suppose que $\mathcal{I}$ est épais d'*épaisseur finie*, c'est-à-dire que le nombre de chambres contenant une cloison donnée est fini, supérieur ou égal à 3.

On suppose qu'il existe un groupe G agissant *fortement transitivement* sur $\mathcal{I}$, c'est-à-dire que G est un groupe d'isomorphismes simpliciaux qui induit tous les isomorphismes d'appartements de $\mathcal{I}$ de l'axiome (B2). On suppose de plus que le système d'appartements de $\mathcal{I}$ est cohérent (voir partie 1.4.7.2).

On choisit un appartement $\mathbb{A}$ de $\mathcal{I}$ que l'on appellera *appartement standard*. On identifie alors V et $\mathbb{A}$. Comme G est fortement transitif, l'ensemble des appartements de $\mathcal{I}$ est l'ensemble des $g.\mathbb{A}$, pour $g \in G$. On pose alors $\mathcal{I}_0 = G.0$. Les points de $\mathcal{I}_0$ sont les sommets de type 0 de $\mathcal{I}$.

On note N le stabilisateur de $\mathbb{A}$ dans G. Pour $n \in N$, on pose alors $\nu(n) : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ l'application affine induite par l'action de N sur $\mathbb{A}$. On obtient alors un groupe $\nu(N)$ d'automorphismes de $\mathbb{A}$ qui permute les murs, les quartiers, ... et contient le groupe de Weyl W. On suppose que pour tout $w \in \nu(N)$, l'application linéaire w^v associée soit dans W^v. On a alors $\nu(N) = W^v \ltimes Y$ où Y est un groupe de translations tel que $Q^\vee \subset Y \subset P^\vee = \{v \in V | \alpha(v) \in \mathbb{Z} \; \forall \alpha \in R\}$.

Pour $x \in \mathbb{A}$, on pose x^{++} l'unique élément de $\overline{C^v}$ dans l'orbite de x sous l'action de

W^v. Si $(x,y) \in \mathcal{I}^2$, on choisit un appartement $g.\mathbb{A}$ contenant x et y. On pose alors $d^v(x,y) = (g^{-1}.y - g^{-1}.x)^{++}$, ce qui ne dépend pas du choix de g. Alors d^v s'appelle la *distance vectorielle* sur $\mathcal{I}$. On a de plus, pour tout $x, y \in I$, $d(x,y) = d(d^v(x,y), 0)$.

On pose aussi $Y^{++} = Y \cap C_f^v$.

2.2.2 Épaisseur finie, régularité et paramètres de $\mathcal{I}$

Dans cette partie on étudie le lien entre régularité et épaisseur finie et on montre en particulier que $\mathcal{I}$ est régulier. On définit ensuite les paramètres de $\mathcal{I}$ qui seront importants pour définir l'isomorphisme de Satake.

Lemme 2.2.2.1. *Soit $\mathcal{I}'$ un immeuble de groupe de Coxeter (W', S'). On note $\mathcal{C}'$ l'ensemble de ses chambres et on le munit de sa W'-distance δ'. Pour $w \in W'$ et a une chambre de $\mathcal{I}'$, on pose $\mathcal{C}_w(a) = \{b \in \mathcal{C} | \delta'(a,b) = w\}$ et $q_w(a) = |\mathcal{C}_w(a)|$. Alors $q_w(a)$ est fini pour tout $a \in \mathcal{C}$ et pour tout $w \in W'$ si et seulement si $\mathcal{I}'$ est d'épaisseur finie.*

Démonstration : Montrons d'abord que $\mathcal{I}'$ est d'épaisseur finie si et seulement si pour tout $s \in S'$ et pour tout $a \in \mathcal{C}$, $q_s(a)$ est fini.

Soient c une cloison de $\mathcal{I}'$, A l'ensemble des chambres la contenant et $a \in A$. On choisit un appartement $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{I}'$ et on munit $(\mathcal{I}', \mathbb{A}')$ de son étiquetage canonique (voir remarque 1.4.1.4 . Soit s le type du sommet de a qui n'est pas un sommet de c. Alors $A = \mathcal{C}_s(a) \cup \{a\}$, d'où le résultat.

Pour conclure, on procède par récurrence sur la longueur dans W' en utilisant le fait si $w \in W'$, $s \in S'$ et $a \in \mathcal{C}$ avec $l(ws) = l(w)+1$, $\mathcal{C}_{ws}(a) = \bigsqcup_{b \in \mathcal{C}_w(a)} \mathcal{C}_s(b)$ (ceci a été montré dans la preuve du (i) de la proposition 2.1.2.1, sans utiliser le fait que l'immeuble était régulier). $\square$

On en déduit en particulier qu'un immeuble régulier est d'épaisseur finie. La réciproque est fausse en général. En effet, soit $\mathbb{T}$ un arbre de groupe de Coxeter $(D_\infty, \{s,t\})$ (s et t sont deux involutions de D_∞ telles que $\langle s,t \rangle = D_\infty$). Les cloisons de $\mathbb{T}$ sont également ses sommets. Si u est un sommet de type $\alpha \in \{s,t\}$, l'ensemble des chambres ayant a pour sommet est $\mathcal{C}_\alpha(a) \cup \{a\}$, où a est n'importe quelle chambre contenant u (voir la preuve du lemme précédent). La valence de u est alors $|C_\alpha(a) \cup \{a\}| = q_\alpha(a) + 1$. Ainsi, pour que $\mathbb{T}$ soit régulier, il faut que ses sommets aient au plus deux valences distinctes. Un arbre admettant des valences finies prenant au moins trois valeurs distinctes est donc d'épaisseur finie mais non régulier. Cependant nous allons voir que la nature de l'action de G sur $\mathcal{I}$ impose que ce dernier soit régulier.

Lemme 2.2.2.2. *Soit H le sous-groupe de G des automorphismes préservant le type. L'action de H sur les chambres de $\mathcal{I}$ est transitive. En particulier, $\mathcal{I}$ est régulier.*

Démonstration : soient a et b deux chambres de $\mathcal{I}$ et A un appartement les contenant. On écrit $A = g.\mathbb{A}$, avec $g \in H$ (par définition de « fortement transitif », il existe un tel $g \in G$ et par la proposition 1.4.1.3, on peut supposer que $g \in H$) et alors $g^{-1}.a$ et $g^{-1}.b$ sont des chambres de $\mathbb{A}$. L'action de W sur $\mathbb{A}$ étant transitive, on choisit $w \in W$ tel que $w.(g^{-1}.a) = g^{-1}.b$, et comme w est induit par un élément n de H (on a supposé que l'action du stabilisateur N de $\mathbb{A}$ préservait le type), on en déduit que $b = gng^{-1}.a$, donc l'action de H sur les chambres de $\mathcal{I}$ est bien transitive.

D'après la remarque 1.4.4.5, δ est H-invariante. On en déduit que si a est une chambre de $\mathcal{I}$ et $h \in H$, $\mathcal{C}_s(h.a) = h.\mathcal{C}_s(a)$. Par conséquent, $\mathcal{I}$ est régulier. $\square$

Lemme 2.2.2.3. *Soient M un mur de $\mathcal{I}$ et a, b deux cloisons de M. Alors il y autant de chambres contenant a que de chambres contenant b.*

Démonstration : Nous allons démontrer qu'il existe un automorphisme ϕ de $\mathcal{I}$ envoyant a sur b. Quitte à composer ϕ par un certain $g \in G$, on peut supposer que a et b sont incluses dans $\mathbb{A}$. Soient A et B des chambres contenant a et b. L'action de W sur les chambres de $\mathbb{A}$ étant simplement-transitive, il existe $w \in W$ tel que $w.B = A$. Comme l'action de W sur $\mathbb{A}$ préserve le type le sommet de A qui n'est pas dans $w.B$ a le même type s que le sommet de B qui n'est pas dans b. Comme a et b sont dans le même mur, a et b ont le même type et donc $a = w.b$. $\square$

Pour tout mur M de $\mathcal{I}$ on note $1 + q_M$ le nombre d'alcôves contenant n'importe quelle cloison de M. Les q_M s'appellent les paramètres de $\mathcal{I}$. En fait, l'ensemble des paramètres de $\mathcal{I}$ est fini. En effet, quitte à considérer l'image de M par un élément de G, on peut supposer que M est un mur de $\mathbb{A}$. On a alors $q_{wM} = q_M$ pour tout $w \in \nu(N)$ et $w.M(\alpha, k) = M(w.\alpha, k)$ pour tout $w \in W^v$. On peut donc supposer que $M = M(\alpha_i, k)$ avec $i \in [\![1, n]\!]$ et $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\alpha_i^\vee \in Q^\vee \subset Y$ et que $\alpha_i(\alpha_i^\vee) = 2$, il y a au plus deux orbites de murs de $\mathbb{A}$ parallèles à M sous l'action de Y : celle de $M = M(\alpha_i, k)$ et celle de $M(\alpha_i, k+1)$. On pose alors $q_i = q_{M(\alpha_i, 0)}$ et $q_i' = q_{M(\alpha_i, 1)}$. Alors l'ensemble des q_M tel que M est un mur de $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble $\{q_i, q_i' | i \in [\![1, n]\!]\}$ et est en particulier fini.

Les q_M où M est un mur de $\mathcal{I}$ et les q_s pour $s \in S$ de la partie précédente ne sont pas sans rapports. En effet, si M_s est le mur des invariants de $s \in S$, $q_{M_s} = q_s$. De plus, si M est un mur de $\mathcal{I}$, il existe $h \in H$ tel que $h.M$ soit un mur de $\mathbb{A}$. Soit c une chambre ayant $h.M$ pour mur. Alors il existe $w \in W$ tel que $w.c$ ait M_s pour mur, avec $s \in S$. Alors $q_M = q_s$. En particulier, $\{q_i, q_i' | i \in [\![1, n]\!]\} = \{q_s | s \in S\}$ et il y a au plus $n + 1$ paramètres.

Remarque 2.2.2.4. En outre, si pour $i \in [\![1, n]\!]$, il existe μ dans Y tel que $\alpha_i(\mu)$ est impair, tous les murs de $\mathbb{A}$ parallèles à $M(\alpha_i, 0)$ sont dans la même orbite sous l'action de Y. On en déduit que $q_i = q_i'$.

2.2.3 Algèbre de Hecke sphérique

Soit R un anneau. On pose $\hat{\mathcal{H}^{\mathcal{I}}} = \{\phi^{\mathcal{I}} : \mathcal{I}_0^2 \to R | \phi^{\mathcal{I}}(g.x, g.y) = \phi^{\mathcal{I}}(x, y) \ \forall g \in G\}$, l'ensemble des fonctions de $\mathcal{I}_0^2$ dans R qui sont G-invariantes.

On pose aussi $\hat{\mathcal{H}} = \{\phi^G : Y^{++} \to R\}$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.3.1. *Les espaces $\hat{\mathcal{H}^{\mathcal{I}}}$ et $\hat{\mathcal{H}}$ sont isomorphes. Plus précisément, cette correspondance peut être donnée par $\phi^G(g) := \phi^{\mathcal{I}}(0, g.0)$ pour tout $g \in G$ si $\phi^{\mathcal{I}} \in \hat{\mathcal{H}^{\mathcal{I}}}$ et $\phi^{\mathcal{I}}(x, y) := \phi^G(d^v(x, y))$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{I}^2$, si $\phi^G \in \hat{\mathcal{H}}$.*

On s'intéressera à l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions de $\hat{\mathcal{H}}$ à support fini et à $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$, image réciproque par l'isomorphisme du lemme précédent de $\mathcal{H}$. Alors si $\phi^{\mathcal{I}} \in \hat{\mathcal{H}^{\mathcal{I}}}$, $\phi^{\mathcal{I}} \in \mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ si et seulement si $\{g \in G | \phi^{\mathcal{I}}(0, g.0) \neq 0\}$ est fini. Une base de $\mathcal{H}$ est $(c_\lambda)_{\lambda \in Y^{++}}$, où $c_\lambda = \mathbb{1}_{\{\lambda\}}$ pour tout $\lambda \in Y^{++}$. La base correspondante de $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ est $(c_\lambda^{\mathcal{I}})$, où $c_\lambda^{\mathcal{I}}(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } d^v(x, y) = \lambda \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, pour tous $x, y \in \mathcal{I}$, $\lambda \in Y^{++}$.

On munit $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ d'un produit de convolution en posant $\phi^{\mathcal{I}} * \psi^{\mathcal{I}}(x, y) = \sum_{z \in \mathcal{I}_0} \phi^{\mathcal{I}}(x, z) \psi^{\mathcal{I}}(z, y)$, si $\phi^{\mathcal{I}}, \psi^{\mathcal{I}} \in \mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ et $x, y \in \mathcal{I}_0$. Nous allons voir que ce produit de convolution est bien défini, à valeurs dans $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ et qu'il munit $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ d'une structure d'algèbre associative.

Afin d'étudier $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$, on définit les constantes de structure de l'algèbre de $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$. Soient $\lambda,\ \mu,\ \nu \in Y^{++}$. On note $m_{\lambda,\mu}(\nu)$ le nombre de triangles $[x,z,y]$ de $\mathcal{I}$ tels que $d^v(x,z)=\lambda$ et $d^v(z,y)=\mu$, pour tout couple $(x,y)\in\mathcal{I}_0^2$ tel que $d^v(x,y)=\nu$. Ce nombre ne dépend pas d'un tel couple. En effet, si $(x,y)\in\mathcal{I}^2$ vérifie $d^v(x,y)=\nu$, posons $M_{\lambda,\mu}(\nu,(x,y))=\{z\in\mathcal{I}|(d^v(x,z),d^v(z,y))=(\lambda,\mu)\}$. Soit $(x',y')\in\mathcal{I}^2$ tel que $d^v(x,y)=\nu$. Alors il existe $g\in G$ tel que $x'=g.x$ et $y'=g.y$. On a alors $M_{\lambda,\mu}(\nu,(x',y'))=g.M_{\lambda,\mu}(\nu,(x,y))$ d'où l'indépendance du cardinal. Les $m_{\lambda,\mu}(\nu)$ s'appellent les constantes de structure de $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$.

Lemme 2.2.3.2. *Soient c une chambre de $\mathcal{I}$ et $r\in\mathbb{N}$. Soit E_r l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}$ à distance inférieure à r de c. Alors E_r est fini.*

Démonstration : Montrons le par récurrence sur r. Si $r=0$, c'est clair. Soit $r\in\mathbb{N}$ tel que E_r soit fini. Soit F l'ensemble des cloisons des chambres de E_r. Alors F est fini et toute chambre de E_{r+1} admet un élément de F pour cloison. Comme $\mathcal{I}$ est d'épaisseur finie, E_{r+1} est fini. □

Lemme 2.2.3.3. *Soient $x\in\mathcal{I}_0$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $\mathcal{S}=\{y\in\mathcal{I}_0|d(y,x)=r\}$. Alors $\mathcal{S}$ est fini.*

Démonstration : Montrons qu'il existe un ensemble fini E de chambres tel que tout point de $\mathcal{S}$ est un point de l'adhérence d'une chambre de E.

Soit c une chambre contenant x dans son adhérence. Choisissons un appartement A contenant c. Soit B_A la boule de centre x et de rayon r dans A. Alors l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des chambres de A qui sont d'intersection non vide avec B_A est fini. Ainsi il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que toute galerie minimale reliant une chambre de $\mathcal{C}_A$ à c est de longueur inférieure à k. Soient B la boule de centre x et de rayon r dans $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}$ d'intersection non vide avec B. Soit $c'\in\mathcal{C}$ et Γ une galerie minimale de c à c'. Soit A' un appartement contenant c et c' et $\phi:A'\to A$ l'isomorphisme fixant $A\cap A'$. Alors $\phi(\Gamma)$ est une galerie minimale de c à $\phi(c)\in\mathcal{C}_A$, de même longueur que Γ, donc Γ est de longueur inférieure à k. Soit E l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}$ à distance inférieure à k de c. Comme $\mathcal{I}$ est d'épaisseur finie, E est fini (d'après le lemme 2.2.3.2), et E vérifie bien la propriété voulue au début de la preuve.

Comme $\mathbb{A}\cap\mathcal{I}_0=Y$, c'est un réseau de V, qui est donc discret. Ainsi, toute chambre de $\mathbb{A}$ ne contient qu'un nombre fini de points de $\mathcal{I}_0$, donc toute chambre de $\mathcal{I}$ ne contient qu'un nombre fini de points de I_0 (en effet si d est une chambre de $\mathcal{I}$, d est en bijection avec c par un élément de G). On en déduit que $\mathcal{S}$ est fini. □

Lemme 2.2.3.4. *Soit $(x,\lambda)\in\mathcal{I}^2$. Alors $\{y\in\mathcal{I}|d^v(x,y)=\lambda\}$ est fini.*

Démonstration : Soient $F=\{y\in\mathcal{I}|d^v(x,y)=\lambda\}$ et $d=d(\lambda,0)$. Si $y\in F$, alors $d(x,y)=d$. On a vu dans la preuve du lemme 2.2.3.3 qu'il existe un ensemble fini E de chambres de $\mathcal{I}$ tel que pour tout $y\in F$, y soit dans l'adhérence d'une chambre de E. Soit C une chambre de E. Soit $F_C=F\cap\overline{C}$. Soit $A=g.\mathbb{A}$ un appartement contenant x et $\overline{C}$. Si $z\in F_C$, $g^{-1}.z-g^{-1}.x=w\lambda$, pour $w\in W^v$. On en déduit que F_C est fini et donc que F est fini. □

On en déduit que pour tous $\lambda,\ \mu,\ \nu\in Y^{++}$, $m_{\lambda,\mu}(\nu)$ est fini.

Lemme 2.2.3.5. *Soient $\lambda,\ \mu\in Y^{++}$. Alors $\{\nu\in Y^{++}|m_{\lambda,\mu}(\nu)\neq 0\}$ est fini.*

Démonstration : Soit $x\in\mathcal{I}$. Posons $F=\{z\in\mathcal{I}|d^v(x,z)=\lambda\}$ et $T=\{y\in\mathcal{I}|\exists z\in F|d^v(z,y)=\mu\}$. Alors F est fini par le lemme 2.2.3.4, donc T aussi par le même lemme et donc $\{d^v(x,y)|y\in T\}$ est fini. Comme $\{\nu\in Y^{++}|m_{\lambda,\mu}(\nu)\neq 0\}=\{d^v(x,y)|y\in T\}$, on a le résultat voulu. □

On peut donc définir une structure d'algèbre sur $\mathcal{H}$ en posant pour $\lambda,\ \mu \in Y^{++}$, $c_\lambda * c_\mu = \sum_{\nu\in Y^{++}} m_{\lambda,\mu}(\nu)c_\nu$.

Théorème 2.2.3.6. *Soient $\lambda,\ \mu \in Y^{++}$. Alors $c_\lambda^{\mathcal{I}} * c_\mu^{\mathcal{I}} = \sum_{\nu\in Y^{++}} m_{\lambda,\mu}(\nu)c_\nu^{\mathcal{I}}$. En particulier, le produit de convolution de deux éléments de $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ est bien défini, à valeurs dans $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ et munit $\mathcal{H}^{\mathcal{I}}$ d'une structure d'algèbre associative.*

Démonstration : Soit $(x,y) \in \mathcal{I}_0^2$. On a $c_\lambda^{\mathcal{I}} * c_\mu^{\mathcal{I}}(x,y) = \sum_{z\in\mathcal{I}_0} c_\lambda^{\mathcal{I}}(x,z)c_\mu^{\mathcal{I}}(z,y)$. De plus, si $z\in\mathcal{I}$, $c_\lambda^{\mathcal{I}}(x,z)c_\mu^{\mathcal{I}}(z,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } d^v(x,z)=\lambda \text{ et } d^v(z,y)=\mu \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. Soit $\nu = d^v(x,y)$. On a donc $c_\lambda^{\mathcal{I}} * c_\mu^{\mathcal{I}}(x,y) = m_{\lambda,\mu}(\nu)c_\nu^{\mathcal{I}}(x,y)$, ce qui donne le résultat annoncé. □

L'algèbre ainsi définie s'appelle l'*algèbre de Hecke sphérique associée à $\mathcal{I}$.*

2.2.4 Module des fonctions sur les sommets de type 0

On pose $\mathfrak{S}_{-\infty}$ le germe de quartier de $-C_f^v$, c'est-à-dire l'ensemble des sous-quartiers de $-C_f^v$. Soit U^- le fixateur de $\mathfrak{S}_{-\infty}$, c'est-à-dire l'ensemble des $g\in G$ fixant un sous-quartier $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{S}_{-\infty}$. On pose alors $\rho_{-\infty} = \rho_{\mathbb{A},-C_f^v}$ (cette rétraction a été définie dans la sous-partie 1.4.7, on utilise le fait que le système d'appartements est cohérent). Par définition, pour $z\in\mathcal{I}$, $\rho_{-\infty}(z)$ est l'unique point de l'orbite de $U^-.z$ dans $\mathbb{A}$.

On note $\hat{\mathcal{F}}$ l'ensemble des fonctions U^--invariantes à gauche sur $\mathcal{I}_0$. Pour $\mu\in Y$, on définit $\chi_\mu\in\hat{\mathcal{F}}$ la fonction caractéristique de $U^-.\mu$. Pour $\chi = \sum_{\mu\in Y} a_\mu\chi_\mu \in \hat{\mathcal{F}}$, où $a_\mu\in R$ pour tout $\mu\in Y$, on définit le *support* de χ par $\mathrm{supp}(\chi) = \{\mu\in Y | a_\mu \neq 0\}$. On pose alors $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\hat{\mathcal{F}}$ à support fini.

Soit $R[Y]$ l'algèbre de groupe de Y ($R[Y] = \{\sum a_y e^{\mu'} | (a_{\mu'}) \in R^{(Y)}\}$ où $(e^{\mu'})_{\mu'\in Y}$ est une base d'une algèbre sur R vérifiant $e^\mu e^{\mu'} = e^{\mu+\mu'}$ pour tous $\mu,\mu'\in Y$).

On munit $\mathcal{F}$ d'une structure de $R[Y]$-module en posant $(f.\chi)(\mu) = \sum_{\mu'\in Y} a_{\mu'}\chi(\mu-\mu')$ pour $f = \sum a_{\mu'}e^{\mu'} \in R[Y]$, $\chi\in\mathcal{F}$.

On a alors, pour tous $\mu,\mu'\in Y$, $e^{\mu'}.\chi_\mu = \chi_{\mu+\mu'}$. On en déduit que $\mathcal{F}$ est un $R[Y]$-module libre de rang 1 admettant χ_μ comme base pour tout $\mu\in Y$.

Nous allons maintenant introduire des paramètres $n_\lambda(\mu)$ pour $\mu\in Y$ et $\lambda\in Y^{++}$. Ceux-ci nous permettront de définir une action à droite de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{F}$ que nous utiliserons pour définir l'isomorphisme de Satake.

Lemme 2.2.4.1. *Soient $\lambda\in Y^{++}$ et $\mu,\mu'\in Y$. On pose $N_\lambda(\mu',\mu) = \{y\in\mathcal{I}_0 | \rho_{-\infty}(y) = \mu$ et $d^v(y,\mu') = \lambda\}$. Alors $|N_\lambda(\mu,\mu')|$ ne dépend que de $\mu'-\mu$.*

Démonstration : Soient $\eta\in Y$ et $n\in N$ tel que $\nu(n)=\eta$. Montrons que $n\circ\rho_{-\infty} = \rho_{-\infty}\circ n$.

Soient $x\in\mathcal{I}$ et B un appartement contenant x et un sous-quartier $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{S}_{-\infty}$. Alors $n^{-1}.B$ est un appartement (l'image par un élément de G d'un appartement est un appartement) contenant un sous-quartier de $\mathfrak{C}$ (car n^{-1} agit par translation sur $\mathbb{A}$) donc $\rho_{-\infty|n^{-1}.B}$ est un isomorphisme de $n^{-1}.B$ sur $\mathbb{A}$ fixant $\mathbb{A}\cap B$ (par définition de $\rho_{-\infty}$). On en déduit que $\rho_{-\infty}\circ n^{-1}$ est un isomorphisme de B sur $\mathbb{A}$. Alors $(\rho_\infty|_B)^{-1}\circ n\circ\rho_{-\infty}\circ n^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathbb{A}$ sur lui-même fixant un sous-quartier de $\mathfrak{S}_{-\infty}$. Par l'argument standard d'unicité (voir la remarque 1.1.0.10), c'est donc l'identité, donc $\rho_{-\infty}\circ n = n\circ\rho_{-\infty}$.

On en déduit que $n.N_\lambda(\mu',\mu)) \subset N_\lambda(n.\mu', n.\mu)$, et comme $Z = \nu^{-1}(Y)$ est un groupe, $n.N_\lambda(\mu',\mu)) = N_\lambda(n.\mu',n.\mu)$, c'est-à-dire que $n.N_\lambda(\mu',\mu)) = N_\lambda(\eta+\mu',\eta+\mu)$ et donc $|N_\lambda(\mu',\mu)| = |N_\lambda(\mu'+\eta,\mu+\eta)|$, d'où le résultat. □

Pour $\mu, \mu' \in Y$, on pose $n_\lambda(\mu'-\mu) = |N_\lambda(\mu, \mu')|$, qui est bien défini par le lemme précédent.

On munit $\mathbb{A}$ d'un ordre comme suit : si $x, y \in \mathbb{A}$, on dit que $x \leq_{Q^\vee} y$ si $y - x \in Q_+^\vee$.

Proposition 2.2.4.2. *Soient $\lambda \in Y^{++}$, $\mu, \mu' \in Y$, alors si $n_\lambda(\mu' - \mu) \neq 0$, $\mu' - \mu \leq_{Q^\vee} \lambda$. De plus, $n_\lambda(\lambda) = 1$.*

On ne démontrera pas cette proposition qui utilise principalement la théorie des chemins de Hecke. Le point de départ est de montrer que l'image par $\rho_{-\infty}$ d'un segment est un chemin de Hecke, c'est-à-dire une ligne brisée qui vérifie certaines conditions. Cette théorie est développée dans [GR08] par exemple.

Proposition 2.2.4.3. *Soient $\lambda \in Y^{++}$,et $\mu \in Y$. Alors $n_\lambda(\mu)$ est fini.*

Démonstration : Par définition, $n_\lambda(\mu) = |\{y \in \mathcal{I}_0 | \rho_{-\infty}(y) = 0 \text{ et } d^v(y, \mu) = \lambda\}|$. Or pour tout $y \in Y$, $d(d^v(y, \mu), 0) = d(y, \mu)$, donc si $d^v(y, \mu) = \lambda$, $d(y, \mu) = d(\lambda, 0)$. On conclut alors par le lemme 2.2.3.3. $\square$

Proposition 2.2.4.4. *Soit $\lambda \in Y^{++}$. Alors $\{\mu \in Y | n_\lambda(\mu) \neq 0\}$ est fini. En d'autres termes, $(n_\lambda(y))_{y \in Y}$ est presque nulle.*

Démonstration : Supposons qu'il existe $y \in \mathcal{I}_0$ tel que $\rho_{-\infty}(y) = 0$ et $d^v(y, \mu) = \lambda$. Alors $d(\rho_{-\infty}(y), \rho_{-\infty}(\mu)) \leq d(y, \mu)$ comme on l'a admis lorsqu'on a défini $\rho_{-\infty}$ (sous-partie 1.4.7), donc $d(0, \mu) \leq d(\lambda, 0)$ et le lemme 2.2.3.3 permet de conclure. $\square$

Pour $\chi \in \mathcal{F}$, $\phi \in \mathcal{H}$ et $x \in \mathcal{I}_0$, on pose $\chi * \phi(x) = \sum_{y \in \mathcal{I}_0} \chi(y) \phi^{\mathcal{I}}(y, x)$.

Le lemme suivant combiné à la proposition 2.2.4.4 montre que si $\chi \in \mathcal{F}$ et $\phi \in \mathcal{H}$, $\chi * \phi \in \mathcal{F}$ et donc que $*$ munit $\mathcal{F}$ d'une structure de $\mathcal{H}$-module à droite.

Lemme 2.2.4.5. *Soient $\lambda \in Y^{++}$ et $\mu' \in Y$, alors $(\chi_\mu * c_\lambda)(\mu') = n_\lambda(\mu' - \mu)$.*

Démonstration : On a $(\chi_\mu * c_\lambda)(\mu') = \sum_{y \in \mathcal{I}_0} \chi_\mu(y) c_\lambda^{\mathcal{I}}(y, \mu') = |\{y \in U^-.\mu | d^v(y, \mu') = \lambda\}|$.

Or $y \in U^-.\mu$ si et seulement si $\rho_{-\infty}(y) = \mu$, donc $(\chi_\mu * c_\lambda)(\mu') = n_\lambda(\mu - \mu')$. $\square$

Lemme 2.2.4.6. *L'action à droite de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{F}$ commute avec l'action de $Z = \{n \in N | \nu(n) \in Y\}$ et plus généralement avec l'action de $R[Y]$.*

Démonstration : Soient $\chi \in \mathcal{F}$, $\phi \in \mathcal{H}$, $t \in Z$ et $x \in \mathcal{I}_0$. Alors

$$\chi * \phi(tx) = \sum_{y \in \mathcal{I}_0} \chi(y) \phi^{\mathcal{I}}(y, tx) = \sum_{y \in \mathcal{I}_0} \chi(ty') \phi^{\mathcal{I}}(ty', tx) = ((\chi \circ t) * \phi)(x),$$

c'est-à-dire que $(\chi \circ t) * \phi = (\chi * \phi) \circ t$. Si $\nu(t) = \mu \in Y$ et $\mu' \in Y$, $z \in \mathcal{I}_0$, $\chi_{\mu'} \circ t(z) = \chi_{\mu'}(z + \mu)$ donc $\chi_{\mu'} \circ t = e^{-\mu}.\chi_{\mu'}$. On en déduit que $\chi_\mu \circ t = e^{-\mu}.\chi$.

On a alors $e^{-\mu}(\chi * \phi) = (\chi * \phi) \circ t = (\chi \circ t) * \phi = (e^{-\mu}.\chi) * \phi$ donc l'action à droite de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{F}$ commute avec l'action à gauche de $R[Y]$.$\square$

2.2.5 Isomorphisme de Satake

2.2.5.1 Définition de l'isomorphisme

Le morphisme S_* Comme $\mathcal{F}$ est un $R[Y]$-module libre de rang 1, $\mathrm{End}_{R[Y]}(\mathcal{F}) = R[Y]$. L'action à droite de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{F}$ induit donc un morphisme d'algèbres $S_* : \mathcal{H} \to R[Y]$ tel que $\chi * \phi = S_*(\phi).\chi$, pour tout $(\phi, \chi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{F}$. Comme $e^{\mu'}.\chi_\mu = \chi_{\mu+\mu'}$, on obtient la formule :

$$S_*(c_\lambda) = \sum_{\nu \leq_{Q^\vee} \lambda} n_\lambda(\nu) e^\nu = e^\lambda + \sum_{\nu <_{Q^\vee} \lambda} n_\lambda(\nu) e^\nu.$$

L'isomorphisme de Satake sera obtenu en modifiant S_* à l'aide d'un caractère de $Q^\vee$.

On va utiliser les paramètres de $\mathcal{I}$ de la sous-partie 2.2.2 pour définir un caractère δ à l'aide duquel nous définirons l'isomorphisme de Satake.

Le caractère δ Soit $\delta : \begin{array}{c} Q^\vee \to \mathbb{R}_+^* \\ \sum_{i\in[\![1,n]\!]} a_i\alpha_i^\vee \mapsto \prod_{i\in[\![1,n]\!]} (q_iq_i')^{a_i} \end{array}.$

Comme $Q^\vee$ est un sous-réseau de $P^\vee$ et que $\mathbb{Z}$ est principal, on peut choisir une $\mathbb{Z}$-base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $P^\vee$ et des nombres $d_1,\ldots,d_n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tels que $d_1e_1,\ldots,d_ne_n$ soit une $\mathbb{Z}$-base de $Q^\vee$. Pour $x = \sum(\lambda_ie_i) \in P^\vee$, on pose alors $\delta(x) = \prod \delta(d_i\lambda_ie_i)^{1/d_i}$ et on obtient un morphisme $\delta : P^\vee \to \mathbb{R}_+^*$. On obtient ainsi des morphismes $\delta, \delta^{1/2} : Y \to \mathbb{R}_+^*$ et donc des morphismes $\delta = \delta\circ\nu, \delta^{1/2} : Z \to \mathbb{R}_+^*$ (on abuse ici des notations).

On suppose à partir de maintenant que l'anneau R contient l'image de $\delta^{1/2}$. On définit alors un automorphisme d'algèbres en posant $\Phi : \begin{array}{c} R[Y] \to R[Y] \\ \sum a_ye^y \mapsto \sum \delta^{1/2}(y)a_ye^y \end{array}.$

L'isomorphisme de Satake On pose alors $S = \Phi\circ S_*$, où plus explicitement, pour $\lambda \in Y^{++}$

$$S(c_\lambda) = \sum_{\mu\leq_{Q^\vee}\lambda} \delta^{1/2}(\mu)n_\lambda(\mu)e^\mu = \delta^{1/2}(\lambda)e^\lambda + \sum_{\mu\lneq_Q^\vee\lambda} \delta^{1/2}(\mu)n_\lambda(\mu)e^\mu.$$

Alors S est un morphisme d'algèbre appelé *isomorphisme de Satake* et le reste de cette partie sera consacré à la démonstration du fait que c'est bien un isomorphisme (en restreignant l'image).

On peut déjà vérifier que S est injectif. En effet, si $\phi = \sum a_\lambda c_\lambda \in \mathcal{H}$ est non nul, alors en choisissant λ_0 maximum parmi les éléments de $\mathrm{supp}(\phi)$, on obtient que λ_0 est toujours maximum dans $\mathrm{supp}(S(\phi))$ et donc $S(\phi) \neq 0$.

Image de S On définit une action de W^v sur $R[Y]$ en posant $w.e^y = e^{w.y}$ pour $w \in W^v$ et $\lambda \in Y$.

Théorème 2.2.5.1. *Le morphisme S est un isomorphisme de $\mathcal{H}$ dans l'ensemble $R[Y]^{W^v}$ des éléments W^v invariants de $R[Y]$.*

Démonstration : Comme pour $\lambda \in Y^{++}$, $S(c_\lambda) = \sum_{\mu\leq_Q^\vee\lambda} \delta^{1/2}(\mu)n_\lambda(\mu)e^\mu$, il suffit, pour montrer que S est bien à valeur dans $R[Y]^{W^v}$ que pour $w \in W^v$, $\delta^{1/2}(\mu)n_\lambda(\mu) = \delta^{1/2}(w.\mu)n_\lambda(w.\mu)$.

Il suffit de vérifier que pour chaque réflexion fondamentale r_i, cette formule est vraie en prenant $w = r_i$. Il faut donc démontrer la formule suivante :

$$n_\lambda(r_i.\mu) = n_\lambda(\mu)(\sqrt{q_iq_i'})^{\alpha_i(\mu)}. \tag{2.1}$$

Admettons provisoirement cette formule. On sait alors que $S(\mathcal{H}) \subset R[Y]^{W^v}$.

Pour $\mu = \sum \mu_i\alpha_i^\vee \in Y^{++}$, on pose $|\mu| = \sum \mu_i \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in R[Y]^{W^v}$. On pose suppm l'ensemble des éléments de $\mathrm{supp}(f)$ maximaux pour $<_{Q^\vee}$. Soit $\mu \in \mathrm{supp}(f)$ alors si $\mu \notin Y^{++}$, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\alpha_i(\mu) < 0$. Alors $r_i(\mu) >_{Q^\vee} \mu$ et $r_i(\mu) \in \mathrm{supp}(f)$, donc $\mu \notin \mathrm{suppm}(f)$. On en déduit que $\mathrm{suppm}(f) \subset Y^{++}$.

On écrit $f = \sum a_ye^y$. Soit alors $\phi = \sum_{\mu\in\mathrm{suppm(f)}} a_\mu\delta(\mu)^{-1/2}c_\mu$. Alors

$$f - S(\phi) = \sum_{\mu\in\mathrm{suppm}(f)} \sum_{\lambda<_Q^\vee\mu} b_\lambda e^\mu \in R[Y]^{W^v},$$

où (b_λ) est une suite presque nulle.

On en déduit que $\max\{|\mu||\mu \in \mathrm{suppm}(f - S(\Phi))\} < \max\{|\mu||\mu \in \mathrm{suppm}(f)\}$, ce qui permet de construire un antécédent à f en un nombre fini d'étapes. D'où le résultat. $\square$.

À l'aide de la remarque 2.2.2.4, on peut déjà voir que dans la formule (2.1), $\sqrt{q_i q_i'}^{\alpha_i(\mu)}$ est bien un entier.

2.2.5.2 Arbres associés à un mur

Arbre étendu associé à $(\mathbb{A}, \alpha_i)$ Pour démontrer la formule 2.1, on va montrer qu'il suffit de démontrer la formule dans le cas d'un arbre. Pour ce faire, nous allons associer des arbres à $\mathcal{I}$. On utilisera notamment le paragraphe 7 de [Tit86]. Cependant, les axiomes qu'utilise Tits pour définir les immeubles étant énoncés différemment de ceux que l'on a utilisés, les énoncés sont un peu différents. On utilisera la notion de parallélisme sur les murs définie sous-partie 1.4.8.

Soit M un mur vectoriel de $\mathbb{A}$. On note $\mathcal{A}(M_\infty)$ l'ensemble des appartements contenant un mur parallèle à M et on pose $\mathcal{I}(M_\infty) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}(M_\infty)} A$. Posons $G(M_\infty) = \{g \in G | g(M) \parallel M\}$. Alors $G(M_\infty)$ agit transitivement sur $\mathcal{A}(M_\infty)$. En effet, si $A \in \mathcal{A}(M_\infty)$, on choisit $g \in G$ tel que $g.A = \mathbb{A}$. Soit M' un mur de A parallèle à M. On choisit $w \in W^v$ tel que $wg.M'$ soit parallèle à M (c'est possible car W^v agit transitivement sur les murs vectoriels de $\mathbb{A}$). Soit $n \in N$ tel que $\nu(n) = w$, on a alors $ng.A = \mathbb{A}$ et $ng \in G(M_\infty)$.

Soit $A \in \mathcal{A}(M_\infty)$. On munit A du groupe de réflexions engendré par toutes les réflexions orthogonales par rapport à un mur parallèle à M. Alors $\mathcal{I}(M_\infty)$ muni de ces structures de complexes de Coxeter est un immeuble. Plus précisément c'est un arbre étendu (c'est-à-dire qu'il n'est pas forcément essentiel, mais la partie essentielle est de rang 1) dont les bouts sont en bijection avec les demi-appartements de $\mathcal{I}_\infty$ bordés par un mur parallèle à M. Les facettes de $\mathbb{A}$ pour cet arbre sont les $\alpha_i^{-1}(]k, k+1[)$ et $\alpha_i^{-1}(\{k\})$ pour $k \in \mathbb{Z}$, si $M = \ker \alpha_i$.

L'action de $G(M_\infty)$ sur $\mathcal{I}(M_\infty)$ est fortement transitive.

Décomposition de l'arbre étendu Soit $\mathcal{A}_0(M)$ l'ensemble des appartements de $\mathcal{I}(M_\infty)$ contenant M. Soit r la réflexion orthogonale de $\mathbb{A}$ par rapport à M.

Lemme 2.2.5.2. *Soit A un appartement de $\mathcal{I}$ contenant 0. Alors tout mur de A est parallèle à un mur de A passant par 0.*

Démonstration : Cette assertion est vraie en prenant $A = \mathbb{A}$. En effet, tout mur de $\mathbb{A}$ est de la forme $\alpha_i^{-1}(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $i \in [\![1, n]\!]$, et est donc parallèle à $\alpha_i^{-1}(\{0\})$. Supposons que A est un appartement de $\mathcal{I}$ contenant 0. On choisit $g \in G$ envoyant A sur $\mathbb{A}$ et fixant $A \cap \mathbb{A}$. Soit M un mur de A. Alors $g.M$ est parallèle à un mur M' de $\mathbb{A}$ contenant 0. Alors $g^{-1}.M'$ est un mur de A parallèle à M car g est une isométrie et préserve donc le parallélisme (g préserve le parallélisme sur les rayons et donc le parallélisme sur les murs). $\square$

Lemme 2.2.5.3. *Soit $x \in \mathcal{I}(M_\infty)$. Alors il existe $A \in \mathcal{A}_0(M)$ contenant x.*

Démonstration : Soit A un appartement de $\mathcal{I}(M_\infty)$ contenant x et 0. Par le lemme 2.2.5.2, A contient un mur M' parallèle à M et passant par 0. Par le lemme 1.4.8.3, $M = M'$. Donc A contient M, c'est-à-dire que $A \in \mathcal{A}_0(M)$. $\square$

Lemme 2.2.5.4. *Soit $x \in \mathcal{I}(M_\infty)$. On choisit $A \in \mathcal{A}_0(M)$ contenant x et $\phi : A \to \mathbb{A}$ un isomorphisme fixant M. Alors pour tout $B \in \mathcal{A}_0(M)$ contenant x et tout isomorphisme $\psi : B \to \mathbb{A}$ fixant M, $\psi(x) \in \{\phi(x), r \circ \phi(x)\}$. De plus, si x n'est pas dans M et si $\psi(x) = \phi(x)$, alors $\psi_{|A \cap B} = \phi_{|A \cap B}$.*

Démonstration : Gardons les notations de l'énoncé. Alors $\phi^{-1} \circ \psi : B \to A$ est un isomorphisme d'espaces euclidiens fixant M. On en déduit $\phi^{-1} \circ \psi(x) \in \{x, y\}$ où y est le symétrique de x par rapport à M dans A. On a donc $\psi(x) \in \{\phi(x), \phi(y)\}$. Mais $\phi(y)$ est le symétrique de $\phi(x)$ par rapport à M dans $\mathbb{A}$, c'est donc $r \circ \phi(x)$.

Supposons maintenant que $x \notin M$ et que $\phi(x) = \psi(x)$. Soit $z \in A \cap B$. Si $z \in M$, $\phi^{-1} \circ \psi(z) = z$. Supposons que x et z sont strictement du même côté de M. Alors $\phi^{-1} \circ \psi(z)$ et $\phi^{-1} \circ \psi(x) = x$ sont du même côté de M donc $\phi^{-1} \circ \psi(z) = z$. On démontre de même que ceci est vrai si z et x ne sont pas du même côté de M. □

Lemme 2.2.5.5. *Notons $p : \mathbb{A} \to M$ et $q : \mathbb{A} \to \mathbb{R}\alpha_i^\vee$ les projections orthogonales sur M et $M^\perp = \mathbb{R}\alpha_i^\vee$. Soient alors x, A et ϕ comme dans le lemme 2.2.5.4. On pose $P(x) = p(\phi(x))$ et $Q(x) = \phi^{-1}(q(\phi(x)))$. Alors $P(x)$ et $Q(x)$ ne dépendent pas des choix faits pour x.*

Démonstration : On a $p(r \circ \phi(x)) = p(x)$ ce qui permet de conclure pour $P(x)$ par le lemme 2.2.5.4.

Soit $x \in \mathcal{I}(M_\infty)$. Si $x \in M$, l'image de x par ϕ ne dépend pas des choix de A et de ϕ, $\phi(x) \in M = x$, $q(\phi(x)) = 0 \in \mathbb{A}$ et donc $\phi^{-1}(q(\phi(x))) = Q(x) = 0$ ne dépend pas des choix faits pour x.

Supposons $x \notin M$. Choisissons $A \in \mathcal{A}_0(M)$ contenant x et $\phi : A \to \mathbb{A}$ fixant M. Posons $\phi' = r \circ \phi$: c'est l'autre isomorphisme de A dans $\mathbb{A}$ fixant M. On a alors $\phi'^{-1} \circ q \circ \phi' = \phi^{-1} \circ r \circ q \circ r \circ \phi = \phi^{-1} \circ q \circ \phi$ car $r \circ q = q \circ r = -q$, donc $Q(x)$ ne dépend pas du choix du morphisme une fois que l'on a choisi $A \in \mathcal{A}_0(M)$ contenant x.

Soit $B \in \mathcal{A}_0(M)$ contenant x. Soit $\psi : B \to \mathbb{A}$ l'isomorphisme fixant M tel que $\psi(x) = \phi(x)$. Soit F la facette de $\mathcal{I}(M)$ contenant x. Alors $q(\phi(x))$ et $\phi(x)$ sont dans la même facette F' et donc $\phi^{-1}(q(\phi(x)))$ et $\phi^{-1}(\phi(x)) = x$ sont dans la même facette F, qui contient donc aussi $\psi^{-1}(q(\phi(x)))$. Cette facette F est incluse dans $A \cap B$ donc par le lemme 2.2.5.4, $\phi(\psi^{-1}(q(\psi(x))) = \psi(\psi^{-1}(q(\psi(x))) = q(\psi(x)) = q(\phi(x))$, donc $Q(x)$ ne dépend pas des choix faits pour x.□

Pour tout appartement A de $\mathcal{I}(M_\infty)$, on pose alors $\overline{A} = Q(A)$. Soit alors $\overline{\mathcal{I}(M_\infty)}$ l'union pour tous les appartements A de $\mathcal{I}(M_\infty)$ des $\overline{A}$. Alors $\overline{\mathcal{I}(M_\infty)}$ est un immeuble dont les appartements sont en bijection avec ceux de $\mathcal{I}(M_\infty)$ par $A \mapsto \overline{A}$. Les morphismes P et Q permettent alors une décomposition $\mathcal{I}(M_\infty) = \overline{\mathcal{I}(M_\infty)} \times M$. Autrement dit, $(P, Q) : \mathcal{I}(M_\infty) \to \overline{\mathcal{I}(M_\infty)} \times M$ est une bijection.

Lemme 2.2.5.6. *Soit $F = \mathrm{Fix}_G(M) = \{g \in G | g_{|M} = id_M\}$. Alors l'action de F sur $\mathcal{I}(M_\infty)$ est compatible avec la décomposition $\mathcal{I}(M_\infty) = \overline{\mathcal{I}(M_\infty)} \times M$, ce qui signifie que si $x = (u, v) \in \overline{\mathcal{I}(M_\infty)} \times M$, alors $g(x) = (g(u), v)$.*

Démonstration : Soient $x \in \mathcal{I}(M_\infty)$, $A \in \mathcal{A}_0(M)$ contenant x et $\phi : A \to \mathbb{A}$ un isomorphisme fixant M. Alors $g.A$ contient M et $g.x$, et $\phi \circ g^{-1} : g.A \to \mathbb{A}$ est un isomorphisme fixant M. On a donc $Q(g(x)) = g \circ \phi^{-1} \circ q \circ \phi \circ g^{-1}(g.x) = g.Q(x)$. □

2.2.5.3 Réécriture de la formule souhaitée

Rétraction parabolique Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $M = \ker \alpha_i$. Soit $\mathfrak{F}_\infty$ la facette conique de l'immeuble à l'infini $\mathcal{I}_\infty$ de direction $\mathfrak{S}_{-\infty} \cap M$ (où $\mathfrak{S}_{-\infty}$ est $-C_f^v$).

Définissons une rétraction de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{I}(M_\infty)$ de centre $\mathfrak{F}_\infty$.

Lemme 2.2.5.7. *Soient $x \in \mathcal{I}$ et $\mathfrak{F} = x + \mathfrak{F}_\infty$ la facette conique de direction $\mathfrak{F}_\infty$ et de base x (dont l'existence et l'unicité ont été admises au lemme 1.4.7.7). Alors il existe un appartement A de $\mathcal{I}(M_\infty)$ contenant un sous-cône parallèle de $\mathfrak{F}$.*

Démonstration : Par le théorème 1.4.7.12 il existe un appartement A de $\mathcal{I}$ contenant un sous-cône parallèle de $\mathfrak{F}_1$ de $\mathfrak{F}$ et un sous-quartier $\mathfrak{C}$ de C_f^v (car on a supposé que le système d'appartements de $\mathcal{I}$ était cohérent). Nous allons montrer que cet appartement convient.

Soit y la base de $\mathfrak{F}_1$. Soit M' un mur de $\mathbb{A}$ d'intersection non vide avec $\mathfrak{C}$ et $z \in \mathfrak{C} \cap M'$. Alors la facette conique $z + \mathfrak{F}_\infty$ est incluse dans $\mathbb{A} \cap A$. En effet, $z + \mathfrak{F}_\infty$ est l'image de $\mathfrak{F}_1$ par la translation de A de vecteur $z - y$, mais c'est aussi l'image de $0 + \mathfrak{F}_\infty$ par la translation de $\mathbb{A}$ de vecteur y. Comme $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est une base de V^*, on peut identifier $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{A}$ via $x \mapsto (\alpha_j(x))_{j \in [\![1,n]\!]}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $M' = \{x \in \mathbb{A} | \alpha_i(x) = k\}$. Alors il existe $C > 0$ tel que $M' \cap \mathfrak{C} \supset \{x | \alpha_j(x) > C \; \forall j \neq i\} \cap M'$ et $z + \mathfrak{F}_\infty \supset \{x | \alpha_j(x) < -C \; \forall j \neq i\} \cap M'$. On en déduit que M' est l'enveloppe convexe de $M' \cap \mathfrak{C}$ et de $z + \mathfrak{F}_\infty$. D'après la proposition 1.4.5.5, $A \cap \mathbb{A}$ contient l'enveloppe convexe de $A \cap \mathbb{A}$ donc A contient M', ce qu'on voulait démontrer. □

Soit x un point de $\mathcal{I}$ et A_x un appartement contenant un sous-cône parallèle de $\mathfrak{F}$. Alors il existe un appartement B_x de $\mathcal{I}(M_\infty)$ contenant un sous-cône parallèle de $\mathfrak{F}$. Soit alors ψ_x l'isomorphisme d'appartements fixant $A_x \cap B_x$. On pose alors $\rho(x) = \psi_x(x)$. On appelle $\rho = \rho_{\mathfrak{F}_\infty, M}$ la rétraction de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{I}(M_\infty)$ de centre $\mathfrak{F}_\infty$. Montrons que $\rho(x)$ ne dépend pas des choix faits.

Soit H_x l'hyperplan de B_x de direction M et contenant un sous-cône parallèle de $x + \mathfrak{F}_\infty$. Alors $\psi_x^{-1}(H_x)$ est un hyperplan de A_x contenant un sous-cône parallèle de $x + \mathfrak{F}_\infty$ donc $x \in \psi_x^{-1}(H_x)$, c'est-à-dire $\psi_x(x) \in H_x$, et H_x ne dépend pas du choix de B_x. De plus, pour deux choix $\psi_x : A_x \to B_x$ et $\psi'_x : A'_x \to B_x$, $\psi'_x \circ \psi_x^{-1}$ est l'identité sur un sous-quartier de $x + \mathfrak{F}_\infty$ et donc sur H_x. On a donc $\psi_x(x) = \psi'_x(x)$.

Factorisation de $\rho_{-\infty}$ Soit $\mathfrak{S}'$ le quartier $\{x \in \mathbb{A} | \alpha_i(x) < 0\}$ dans $\mathcal{I}(M_\infty)$. Notons $\rho'_{-\infty}$ la rétraction de $\mathcal{I}(M_\infty)$ sur $\mathbb{A}$ de centre $\mathfrak{S}'$.

Lemme 2.2.5.8. *On a la factorisation suivante :* $\rho_{-\infty} = \rho'_{-\infty} \circ \rho$.

Démonstration : Soit $x \in \mathcal{I}$. Choisissons un appartement A_x contenant x et un sous-quartier de $-C_f^v$. Choisissons un appartement B_x de $\mathcal{I}(M_\infty)$ contenant un sous-quartier de $-C_f^v$ et un sous-cône parallèle de $x + \mathfrak{F}_\infty$ (c'est possible car $x - C_f^v$ contient $x + \mathfrak{F}_\infty$). Soit alors $\psi_x : A_x \to B_x$ fixant $A_x \cap B_x$. Alors $\psi_x(x) = \rho(x)$ car A_x et B_x satisfont aux conditions données dans la définition de cette rétraction.

L'appartement B_x contient un sous-quartier de $\mathfrak{S}'$. Soit $\theta : B_x \to \mathbb{A}$ l'isomorphisme fixant $B_x \cap \mathbb{A}$. Comme $\rho(x) \in B_x$, on a $\rho'_{-\infty} \circ \rho(x) = \theta(\rho(x)) = \theta \circ \psi_x(x)$. Par ailleurs, A_x contient un sous-quartier de $\mathfrak{S}'$ et $\theta \circ \psi_x : A_x \to \mathbb{A}$ fixe un sous-quartier de $-C_f^v$ donc $\mathbb{A} \cap A_x$ par l'argument standard d'unicité (remarque 1.1.0.10), donc $\theta \circ \psi_x(x) = \rho_{-\infty}(x)$, donc $\rho_{-\infty} = \rho'_{-\infty} \circ \rho$.□

Cette factorisation permet d'obtenir une nouvelle expression de $n_\lambda(\mu)$ pour $\lambda \in Y^{++}$ et $\mu \in Y$. On rappelle que $n_\lambda(\mu) = |\{y \in \mathcal{I}_0 | \rho_{-\infty}(y) = -\mu \text{ et } d^v(y, 0) = \lambda\}|$ (c'est le lemme 2.2.4.5). Pour $z \in \mathcal{I}(M)$, on pose $p_\lambda(z) = |\{y \in \mathcal{I}_0 | \rho(y) = z \text{ et } d^v(y, 0) = \lambda\}|$. Alors par le lemme 2.2.5.8, $n_\lambda(\mu) = \sum_{z \in \mathcal{I}_0(M_\infty) \cap \rho'^{-1}_{-\infty}(\{-\mu\})} p_\lambda(z)$, où $\mathcal{I}_0(M_\infty) = \mathcal{I}(M_\infty) \cap \mathcal{I}_0$.

Comme $F = \mathrm{Fix}_G(M)$ fixe $\mathfrak{F}_\infty$. On en déduit que ρ est F-équivariante. En effet si $x \in \mathcal{I}$, $g \in F$ et A_x, B_x sont comme dans la définition de ρ, on peut choisir $A_{g.x} = g.A_x$ et $B_{g.x} = B_x$. Soit ϕ_x l'isomorphisme fixant $A_{g.x} \cap B_x$. Alors $\phi_x = g \circ \psi_x$ et on en déduit que $\rho(g.x) = g \circ \rho(x)$.

La fonction p_λ est donc constante sur les orbites de F dans $\mathcal{I}(M_\infty) \cap \mathcal{I}_0$. Par conséquent, $n_\lambda(\mu) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\lambda(\omega) n_\omega(-\mu)$, où Ω est l'ensemble des orbites de $\mathcal{I}(M_\infty) \cap \mathcal{I}_0$ sous l'action de F et $n_\omega(\nu) = |\{z \in \omega | \rho'_{-\infty}(z) = \nu\}|$ pour tout $w \in \Omega$.

Il suffit donc de prouver que $n_\omega(r_i.\nu) = n_\omega(\nu)(\sqrt{q_i q'_i})^{-\alpha_i(\nu)}$ pour tout $w \in \Omega$ et tout $\nu \in Y$ pour montrer la formule (2.1).

Lemme 2.2.5.9. *Soit $x \in \mathcal{I}_0(M_\infty)$. On écrit $x = (u, v) \in \overline{\mathcal{I}(M_\infty)} \times M$. Alors l'orbite $F.x$ de x sous l'action de F est $S_r \times \{v\}$, où $r = d(0, u)$ et $S_r = \{u' \in \overline{\mathcal{I}(M_\infty)} | d(u', 0) = r\}$.*

Démonstration : soit $f \in F$. Alors $f.x = (f.u, v)$ et $d(f.u, f.0) = d(f.u, 0) = d(u, 0)$ donc $f.u \in S_r$.

Réciproquement, soit A un appartement contenant M. Alors il existe un isomorphisme d'appartements ϕ fixant $A \cap \mathbb{A}$ et $\phi \in F$. Ainsi, F agit transitivement sur les appartements contenant M. On en déduit que F agit transitivement sur les appartements de $\overline{\mathcal{I}(M_\infty)}$ contenant 0. Soit alors $y \in S_r$. On choisit un appartement $\overline{A}$ de $\overline{\mathcal{I}(M_\infty)}$ contenant 0 et y un appartement B de $\overline{\mathcal{I}(M_\infty)}$ contenant 0 et x. On a donc $A = f.B$, avec $f \in F$. Alors $f.y \in A$ et $d(f.y, 0) = r$. Ainsi $f.y$ est soit x soit le symétrique de x par rapport à 0 dans A. Comme la réflexion par rapport à 0 dans A est induite par un élément s de F, soit $s.f.y = x$, soit $f.y = x$, donc $F.x = S_r \times \{v\}$. $\square$

On en déduit qu'il suffit de démontrer la formule dans le cas particulier du paragraphe suivant.

2.2.5.4 Démonstration de la formule voulue dans le cas d'un arbre

Cas d'un arbre On suppose que $\mathcal{I}$ est de rang 1. On identifie alors $\mathbb{A}$ et $\mathbb{R}$, et on identifie les sommets de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{Z}$. La valence d'un sommet $s \in \mathbb{Z}$ est $1 + q$ (respectivement $1 + q'$) si s est pair (respectivement s impair). Soit $-\infty$ le bout de $\mathbb{A}$ correspondant à $-\mathbb{N}$. Soit ρ' la rétraction de $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{A}$ de centre $-\infty$.

Proposition 2.2.5.10. *En conservant les notations du paragraphe introductif, pour $m \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{A}$ et $r \in \mathbb{N}$, on a $n_r(m) = n_r(-m)(\sqrt{qq'})^m$.*

Démonstration : (cette démonstration est illustrée par les figures 2.2.1 et 2.2.2) pour $z \in S_r$, on note $s_z \in \mathbb{Z}$ le sommet de $\mathbb{A}$ tel que $[0, s_z] = [0, z] \cap \mathbb{Z}$. On a alors $\rho'(z) = s_z + (r - |s_z|)$. Pour calculer $n_r(m)$ on distingue deux cas.

1) $s_z \geq 0$, ce qui est équivalent à $\rho'(z) = r$. On en déduit que le choix d'un sommet z tel que $\rho'(-z) = r$ est équivalent au choix d'une portion d'un appartement se branchant en 0, s'« éloignant » de $-\infty$ et de longueur r. Il y a $qq'qq'$... (r-facteurs) possibilités donc $n_r = qq'qq'$... (r-facteurs)

2) $-r \leq s_z < 0$, ce qui équivaut à $\rho'(z) < r$. On a alors $\rho'(z) = r + 2s_z$, c'est-à-dire $s_z = (\rho'(z) - r)/2$. Pour choisir un antécédent à m par ρ' il faut donc choisir une portion de longueur $r + s_z$ d'un appartement se branchant en $s_z \in \mathbb{A}$, quittant $\mathbb{A}$ et de longueur $r + s_z$. On a donc $n_r(m) = 1$ si $m = s_z = -r$, $n_r(m) = (q-1)q'qq'$... ($r + s_z = (r+m)/2$ facteurs) si s_z est impair et $n_m(r) = (q'-1)qq'$...($r + s_z = (r+m)/2$ facteurs) si s_z est impair. On obtient alors la formule voulue en utilisant le fait que $q = q'$ quand m est impair. $\square$

On a donc complété la preuve du théorème 2.2.5.1, et prouvé que S est un isomorphisme entre $\mathcal{H}$ et $R[Y]^{W^v}$. Cet isomorphisme est appelé isomorphisme de Satake. En utilisant le théorème 2.1.3.1, on obtient de plus que l'algèbre de Hecke sphérique sur $\mathbb{C}$ d'un immeuble régulier est isomorphe au centre de l'algèbre de Hecke affine associée à cet immeuble.

2.3 Formule de Gindikin-Karpelevich

2.3.1 Introduction

Dans cette partie, j'expose le début de nos travaux de recherche sur la formule de Gindikin-Karpelevich. L'objectif dans un premier temps serait de démontrer cette formule réécrite en

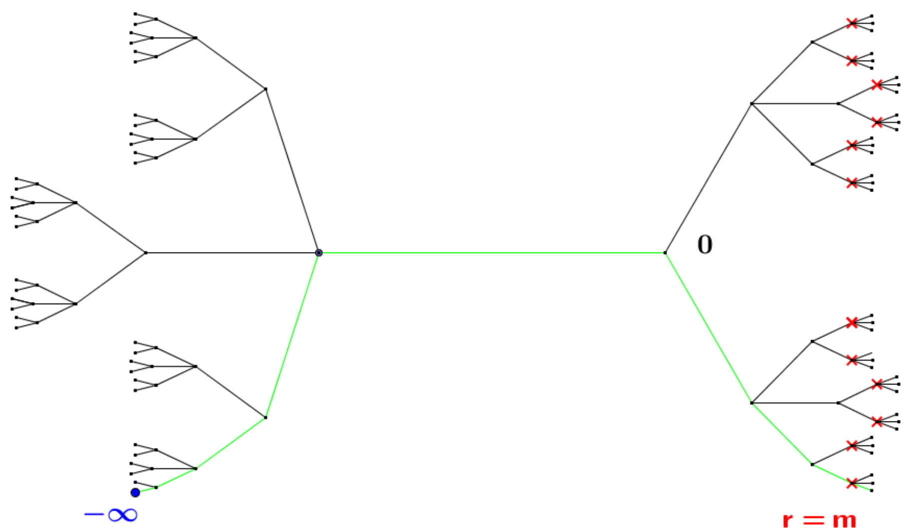

FIGURE 2.2.1 – Rétraction dans un arbre semi-homogène, cas 1)$(q = 2,\ q' = 3,\ r = 3,\ m = 3$

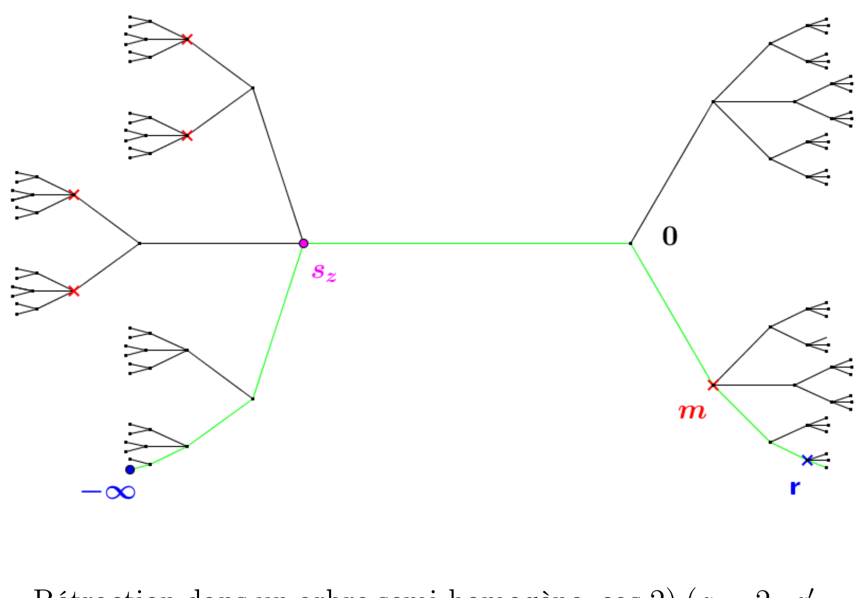

FIGURE 2.2.2 – Rétraction dans un arbre semi-homogène, cas 2) $(q = 2,\ q' = 3,\ r = 3,\ m = 1$

termes d'immeubles et à terme, de la généraliser dans le cadre des masures. On garde les hypothèses et notations de la partie 2.2.1. On suppose de plus que tous les paramètres de $\mathcal{I}$ sont égaux et l'on note q ce paramètre. Cela signifie que toute chambre de $\mathcal{I}$ est adjacente à exactement $q+1$ chambres (cf les parties 2.2.2 et 2.1.2). On note $\rho_{+\infty}$ et $\rho_{-\infty}$ les rétractions par rapport à C^v et $-C^v$. On note $Q^\vee$ le réseau des copoids radiciels de R, c'est-à-dire le réseau engendré par $R^\vee$. On note $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R^+}\alpha$ et $\Delta = \prod_{\alpha\in R_+^\vee}\frac{1-q^{-1}e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}$. La formule de Gindikin-Karpelevich que l'on souhaiterait démontrer est la suivante : pour tout $\lambda\in Q^\vee$,

$$\Delta = \sum_{\mu\in Q^\vee}|\rho_{-\infty}^{-1}(\lambda)\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\lambda+\mu)|q^{\rho(\mu)}e^{\mu}\in\mathbb{Q}(Q^\vee)$$

Cette formule provient de [BGKP14] mais a été réécrite en termes d'immeubles (et légèrement corrigée). On admet que l'expression de l'isomorphisme de Satake est donnée par

$$S(c_\lambda) = \sum_{\mu\in Q^\vee}|B^v(0,\lambda)\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\mu)|e^{\mu}$$

pour tout $\lambda\in Q_{++}^\vee = Q^\vee\cap C^v$, où $B^v(0,\lambda)=\{y\in\mathcal{I}|d^v(0,x)=\lambda\}$ et S désigne l'isomorphisme de Satake.

On a alors la formule de Macdonald suivante (toujours d'après [BGKP14]) : pour tout $\lambda\in Q_{++}^\vee$,

$$S(c_\lambda) = \sum_{w\in\Delta}w(\Delta)e^{w\lambda}$$

La formule de Macdonald implique celle de Gindikin-Karpelevich, comme nous le montrerons partie 2.3.2. Il restera à montrer la formule de Macdonald, ce que nous envisageons de faire en utilisant [Sch06].

Lemme 2.3.1.1. *Soit $\mu\in Q^\vee$. Alors $|\{x\in\mathcal{I}|\rho_{-\infty}(x)=\lambda \text{ et } \rho_{+\infty}(x)=\lambda+\mu\}|$ ne dépend pas de $\lambda\in Q^\vee$.*

Démonstration : Soit $X=\{x\in\mathcal{I}|\rho_{-\infty}(x)=0 \text{ et } \rho_{+\infty}(x)=\mu\}$. Soient $\lambda\in Q^\vee$ et $g\in G$ dont la restriction à $\mathbb{A}$ est la translation de vecteur λ. Soient $x\in\mathbb{A}$ et A un appartement de $\mathcal{I}$ contenant x et un sous-quartier $\mathfrak{C}$ de $-C^v$. Soit ϕ l'isomorphisme fixant $A\cap\mathbb{A}$. Alors $g\circ\phi\circ g^{-1}$ fixe $\mathfrak{C}\cap g^{-1}.\mathfrak{C}$, qui contient un sous-quartier de $-C^v$ et donc $\rho_{-\infty}(g.x)=g\circ\phi\circ g^{-1}(g.x)=g.\rho_{-\infty}(x)$. De même, $\rho_{+\infty}\circ g = g\circ\rho_{+\infty}$. Ainsi, $g.X=\{x\in\mathcal{I}|\rho_{-\infty}(x)=\lambda \text{ et } \rho_{+\infty}(x)=\lambda+\mu\}$, et donc $|g.X|=|X|$. $\square$

Cas d'un arbre Dans le cas d'un arbre, la formule de Gindikin-Karpelevich est assez facile à vérifier, tous les cardinaux pouvant s'écrire explicitement.

On suppose dans ce paragraphe que $\mathcal{I}$ est un arbre. On identifie $\mathbb{A}$ à $\mathbb{R}$ et les sommets de $\mathbb{A}$ à $\mathbb{Z}$. On alors $R=\{1,-1\}$, $R^\vee=\{2,-2\}$, $Q^\vee=2\mathbb{Z}$ et $\rho=\frac{1}{2}$.

On a alors la formule de Gindikin-Karpelevich :

Proposition 2.3.1.2. *Soit $\mathcal{I}$ un arbre. Alors pour tout λ de $Q^\vee$,*

$$\sum_{\mu\in Q^\vee}|\rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\})\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda+\mu\})|q^{\frac{\mu}{2}}e^{\mu} = \frac{1-q^{-1}e^{-2}}{1-e^{-2}}$$

Démonstration : pour $x \in \mathcal{I}$, on pose $s_x \in \mathbb{Z}$ tel que $[0, s_x] = [0, x] \cap \mathbb{A}$. Posons $r = d(0, x)$. Alors, $\rho_{+\infty}(x) = s_x + (|s_x| - r)$ et $\rho_{-\infty}(x) = s_x + (r - |s_x|)$. Ainsi si $s_x \geq 0$, $\rho_{-\infty}(x) = r$ et $\rho_{+\infty}(x) = 2s_x - r$. Si $s_x \leq 0$, $\rho_{+\infty}(x) = -r$ et $\rho_{-\infty}(x) = 2s_x + r$.

D'après le lemme 2.3.1.1, on peut supposer que $\lambda = 0$. En faisant des calculs similaires à ceux de la proposition 2.2.5.10, on obtient les résultats suivants : si $\mu > 0$, $|\rho_{-\infty}^{-1}(\{0\}) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})| = 0$, si $\mu = 0$, $|\rho_{-\infty}^{-1}(\{0\}) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})| = 1$ et si $\mu < 0$, $|\rho_{-\infty}^{-1}(\{0\}) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})| = (q-1)q^{-\mu/2-1}$, $q^{|\mu|} = q^{\mu/2}$, d'où le résultat. □

2.3.2 Déduction de la formule Gindikin-Karpelevich de celle de Macdonald

Dans cette partie, on déduit la formule de Gindiki-Karpelevich de celle de Macdonald en détaillant les explications de [BGKP14]. On ne suppose plus que $\mathcal{I}$ est un arbre.

Nous utiliserons sans les démontrer le lemme suivant et son corollaire :

Lemme 2.3.2.1. *Soit $\mu \in Q^\vee$. Alors il existe $\lambda \in Q^\vee_{++}$ tel que pour tout $\lambda' \in Q^\vee$ tel que $\lambda' >_{Q^\vee} \lambda$, $B^v(0, \lambda) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda + \mu\}) = \rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\}) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda + \mu\})$.*

Corollaire 2.3.2.2. *Soit $G \subset Q^\vee$ un ensemble fini. Alors il existe $\lambda \in Q^\vee_{++}$ tel que pour tout $\lambda' \in Q^\vee$ tel que $\lambda' >_{Q^\vee} \lambda$ et tout $\mu \in G$, $B^v(0, \lambda) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda + \mu\}) = \rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\}) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda + \mu\})$.*

Supposons que la formule de Macdonald est vraie pour $\mathcal{I}$.

On pose $\Delta' = \prod_{w \in W} w(\prod_{\alpha \in R^+}(1 - e^{-\alpha})) = \sum_{f \in F} a_f e^f$, où F est un ensemble fini.

Lemme 2.3.2.3. *Il existe un ensemble H fini tel que pour tout $\lambda \in Q^\vee_{++}$, si $\Delta' S(C_\lambda) = \sum b_\mu e^\mu$, $\{\mu \in Q | b_\mu \neq 0\} \subset \bigcup_{w \in W} w\lambda + H$.*

Démonstration : on a $\Delta' S(c_\lambda) = q^{\rho(\lambda)} \sum_{w \in W} e^{w\lambda}(w(\Delta)\Delta')$. Pour $w \in W$, on écrit $w(\Delta)\Delta' = \sum_{h \in H(w)} b_h(w) e^h$ avec $H(w)$ fini, et alors $H = \bigcup H(w)$ convient. □

On choisit $g \in Q^\vee$ et on pose $G = H \cup \{g\}$. Soit $\lambda \in Q^\vee$ tel que $w\lambda + G \subset wC$ pour tout $w \in W$ et $B^v(0, \lambda) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\}) = \rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\}) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})$ pour tout $\mu \in \lambda + G - F$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\Delta' S(c_\lambda) &= \sum_{\mu \in \Lambda, f \in F} a_f |B^v(0, \lambda) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})| q^{\rho(\mu)} e^{\mu + f} \\
&= \sum_{\nu \in Q^\vee} \Big(\sum_{\mu \in Q^\vee, f \in F | \mu + f = \nu} a_f |B^v(0, \lambda) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})| q^{\rho(\mu)} \Big) e^\nu \\
&= \sum_{w \in W, h \in G} \Big(\sum_{\mu \in Q^\vee, f \in F, \mu + f = w\lambda + h} a_f |B^v(0, \lambda) \cap \rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})| q^{\rho(\mu)} \Big) e^{w\lambda + h}
\end{aligned}$$

Soit $P : \begin{array}{l} \mathbb{Z}[Q^\vee] \to \mathbb{Z}[Q^\vee] \\ \displaystyle\sum_{\nu \in Q^\vee} d_\nu e^\nu \mapsto \sum_{\nu \in Q^\vee_{++}} d_\nu e^\nu \end{array}$

Alors, grâce à la formule de Macdonald et au fait que $w\lambda + G \subset wC$ pour tout $w \in W$, $P(\Delta' S(c_\lambda)) = q^{\rho(\lambda)} e^\lambda \Delta \Delta'$.

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta'\Delta e^{\lambda}q^{\rho(\lambda)} &= \sum_{h\in G}\Big(\sum_{\mu\in Q^\vee, f\in F|\mu+f=\lambda+h} a_f|B^v(0,\lambda)\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})|q^{\rho(\mu)}\Big)e^{\lambda+h}\\ &= \sum_{h\in G}\Big(\sum_{\mu\in Q^\vee, f\in F|\mu+f=\lambda+h} a_f|\rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\})\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu\})|q^{\rho(\mu)}\Big)e^{\lambda+h}\\ &= \sum_{h\in G}\Big(\sum_{\mu\in Q^\vee, f\in F|\mu+f=h} a_f|\rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\})\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\{\mu+\lambda\})|q^{\rho(\mu)+\rho(\lambda)}\Big)e^{\lambda+h}.\end{aligned}$$

Ainsi les coefficients devant e^g de $\Delta'\Delta$ et de $\Delta'\sum_{\mu\in Q^\vee}|\rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\})\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda+\mu\})|q^{\rho(\mu)}e^{\mu}$ sont les mêmes. Le λ que l'on a choisi dépend de g mais $\Delta'\sum_{\mu\in Q^\vee}|\rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\})\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda+\mu\})|q^{\rho(\mu)}e^{\mu}$ ne dépend pas de λ. On a donc $\Delta'\Delta=\Delta'\sum_{\mu\in Q^\vee}|\rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\})\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda+\mu\})|q^{\rho(\mu)}e^{\mu}$ donc $\Delta=\sum_{\mu\in Q^\vee}|\rho_{-\infty}^{-1}(\{\lambda\})\cap\rho_{+\infty}^{-1}(\{\lambda+\mu\})|q^{\rho(\mu)}e^{\mu}$. On a donc déduit la formule de Gindikin-karpelevich de celle de Macdonald.

Remerciements Je remercie Stéphane Gaussent de m'avoir encadré et d'avoir été disponible pendant ce stage. Je remercie Ramla Abdellatif d'avoir pris beaucoup de temps et d'avoir été de bon conseil dans le choix de mon stage.

Index

Bibliographie

[BGKP14] A Braverman, H Garland, D Kazhdan, and M Patnaik. An affine gindikin-karpelevich formula. *Perspectives in Representation Theory (Yale University, May 12–17, 2012)(P. Etingof, M. Khovanov, and A. Savage, eds.), Contemp. Math*, 610 :43–64, 2014.

[Bou68] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique : Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie ; Chap. 4, Groupes de Coxeter et systèmes de Tits ; Chap. 5 ; Chap. 6, Systèmes de racines*. Hermann, 1968.

[Bro89] Kenneth S Brown. *Buildings*. Springer, 1989.

[BT72] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 41(1) :5–251, 1972.

[BT84] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 60(1) :5–184, 1984.

[Cha10] Cyril Charignon. *Immeubles affines et groupes de Kac-Moody*. PhD thesis, université Henri Poincarré nancy 1, 2010.

[GP00] Meinolf Geck and Götz Pfeiffer. *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*. Number 21. Oxford University Press, 2000.

[GR08] Stéphane Gaussent and Guy Rousseau. Kac-moody groups, hovels and littelmann paths. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 58, pages 2605–2657, 2008.

[GR14] Stéphane Gaussent and Guy Rousseau. Spherical hecke algebras for kac-moody groups over local fields. *Annals of Mathematics*, 180(3) :1051–1087, 2014.

[Mac03] Ian Grant Macdonald. *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, volume 157. Cambridge University Press, 2003.

[Par06] James Parkinson. Buildings and hecke algebras. *Journal of Algebra*, 297(1) :1–49, 2006.

[Ron89] Mark Ronan. Lectures on buildings, volume 7 of perspectives in mathematics. *Academic Press Inc., Boston, MA*, 11 :12, 1989.

[Rou11] Guy Rousseau. Masures affines. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 7(3) :859–921, 2011.

[Sch06] Christoph Schwer. Galleries, hall-littlewood polynomials, and structure constants of the spherical hecke algebra. *International Mathematics Research Notices*, 2006 :75395, 2006.

[Tit86] Jacques Tits. Immeubles de type affine. In *Buildings and the Geometry of Diagrams*, pages 159–190. Springer, 1986.