

Mémoire d'habilitation à diriger les recherches

présenté par **Jérémy FAUPIN**

Spécialité : Mathématiques

Contributions à l'analyse mathématique de modèles issus de la théorie quantique des champs

soutenu le 26 novembre 2012

après avis des rapporteurs

Christian Gérard	Professeur à l'Université de Paris XI
Benoît Grébert	Professeur à l'Université de Nantes
Alain Joye	Professeur à l'Université de Grenoble I

devant le jury composé de

Laurent Amour	Professeur à l'Université de Reims	Examineur
Alain Bachelot	Professeur à l'Université de Bordeaux I	Examineur
Stephan De Bièvre	Professeur à l'Université de Lille I	Président
Mouez Dimassi	Professeur à l'Université de Bordeaux I	Examineur
Christian Gérard	Professeur à l'Université de Paris XI	Rapporteur
Benoît Grébert	Professeur à l'Université de Nantes	Rapporteur
Alain Joye	Professeur à l'Université de Grenoble I	Rapporteur

Remerciements

Je tiens à remercier vivement Christian Gérard, Benoît Grébert et Alain Joye pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en tant que rapporteurs. Merci aussi à Stephan De Bièvre, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury d'habilitation, et à Laurent Amour, Alain Bachelot, et Mouez Dimassi pour avoir accepté de faire partie du jury.

Mes sincères remerciements vont également à tous mes collaborateurs, avec lesquels j'ai toujours autant de plaisir à travailler. Merci aussi à tous mes collègues de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, en particulier aux membres de l'équipe EDP et physique mathématique. Merci enfin, bien sûr, à ma famille et à mes amis pour leur soutien.

Table des matières

Travaux présentés dans ce mémoire	1
I Contributions à l'analyse mathématique de modèles issus de la théorie quantique des champs	3
1 Introduction	5
1-1 Espace de Fock : notations	6
1-2 Modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste	8
1-2.1 Définition	8
1-2.2 Quelques propriétés	10
1-2.3 Prise en compte du spin de l'électron	11
1-3 Modèle de Nelson	12
1-3.1 Définition	12
1-3.2 Quelques propriétés	12
1-4 Modèles invariants par translations	13
1-4.1 L'électron habillé	13
1-4.2 Quelques propriétés	14
1-4.3 L'atome d'hydrogène mobile	15
1-5 Organisation de la première partie	16
2 Etats fondamentaux	17
2-1 L'électron habillé dans un champ magnétique : existence et non existence d'un état fondamental	17
2-2 L'atome d'hydrogène habillé : splitting hyperfin et unicité de l'état fondamental	20
3 Règle d'or de Fermi	25
3-1 Régularité des vecteur propres	26
3-1.1 Cadre abstrait	26
3-1.2 Application : modèle de Nelson non massif	28

3-2	Théorie des perturbations au second ordre pour des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel	31
3-2.1	Cadre abstrait	31
3-2.2	Application : modèle de Nelson non massif	36
4	Résonances et temps de vie des états métastables	39
5	Dynamique effective	45
6	Décroissance de l'énergie locale à basses énergies	49
6-1	L'électron habillé	50
6-2	Modèles mathématiques de l'interaction faible	53
6-2.1	Définition du modèle	54
6-2.2	Résultats	56
6-3	Régularité de la résolvante et décroissance de l'énergie locale à basses énergies	58
7	Théorie de la diffusion	63
7-1	Vitesse maximale des photons	64
7-2	Sur la vitesse minimale des photons et la complétude asymptotique	66
II	Quelques résultats de théorie spectrale inverse en dimension 1	73
8	Introduction	75
9	Opérateurs de Sturm-Liouville sur $[0, 1]$ avec des potentiels dans des espaces de Sobolev	77
10	Opérateurs AKNS sur $[0, 1]$	81

Travaux présentés dans ce mémoire

- [xvii] J. Faupin and I.M. Sigal, *On quantum Huygens principle and Rayleigh scattering*. Soumis pour publication.
- [xvi] V. Bach, T. Chen, J. Faupin, J. Fröhlich and I.M. Sigal, *Effective dynamics of an electron coupled to an external potential in non-relativistic QED*. Annales Henri Poincaré, à paraître.
- [xv] L. Amour and J. Faupin, *Inverse spectral results in Sobolev spaces for the AKNS operator with partial informations on the potentials*. Soumis pour publication.
- [xiv] J.-F. Bony, J. Faupin and I.M. Sigal, *Maximal velocity of photons in non-relativistic QED*. Advances in Mathematics, 231, (2012), 3054–3078.
- [xiii] L. Amour and J. Faupin, *Hyperfine splitting in non-relativistic QED : Uniqueness of the dressed hydrogen atom ground state*, Communications in Mathematical Physics, à paraître.
- [xii] J.-F. Bony and J. Faupin, *Resolvent smoothness and local decay at low energies for the standard model of non-relativistic QED*, Journal of Functional Analysis, 262, (2012), 850–888.
- [xi] T. Chen, J. Faupin, J. Fröhlich and I.M. Sigal, *Local Decay in Non-relativistic QED*, Communications in Mathematical Physics, 309, (2012), 543–583.
- [x] W.H. Aschbacher, J.-M. Barbaroux, J. Faupin, and J.-C. Guillot, *Spectral theory for a mathematical model of the weak interaction : The decay of the intermediate vector bosons W_{\pm} . II*, Annales Henri Poincaré, 12, (2011), 1539–1570.
- [ix] L. Amour and J. Faupin, *Hyperfine Splitting of the Dressed Hydrogen Atom Ground State in Non-relativistic QED*, Reviews in Mathematical Physics, 23, (2011), 553–574.
- [viii] J. Faupin, J.S. Møller and E. Skibsted, *Second order perturbation theory for embedded eigenvalues*, Communications in Mathematical Physics, 306, (2011), 193–228.
- [vii] J. Faupin, J.S. Møller and E. Skibsted, *Regularity of bound states*, Reviews in Mathematical Physics, 23, (2011), 453–530.
- [vi] L. Amour and J. Faupin, *Inverse spectral results for the Schrödinger operator in Sobolev spaces*, International Mathematics Research Notices, 22, (2010), 4319–4333.
- [v] W.K. Abou Salem, J. Faupin, J. Fröhlich and I.M. Sigal, *On the Theory of Resonances in Non-Relativistic QED and Related Models*, Advances in Applied Mathematics, 43, (2009), 201–230.
- [iv] L. Amour, J. Faupin and T. Raoux, *Inverse Spectral Results for Schrödinger Operators on the Unit Interval with Partial Informations Given on the Potentials*, Journal of Mathematical Physics, 50 (3), (2009), art. no. 033505.
- [iii] L. Amour, J. Faupin, B. Grébert and J.-C. Guillot,
 - a) *On the Infrared Problem for the Dressed Non-Relativistic Electron in a Magnetic Field*, in *Spectral and Scattering Theory for Quantum Magnetic Systems*, vol. 500 of Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009), 1–24.
 - b) *Le problème infrarouge pour l'électron habillé non relativiste dans un champ magnétique*, C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. I, 346, (2008), 1045–1050.

ARTICLES ISSUS DE LA THÈSE DE DOCTORAT (NON DÉCRITS DANS CE MÉMOIRE) :

- [ii] J. Faupin, *Resonances of the confined hydrogen atom and the Lamb-Dicke effect in non-relativistic QED*, Annales Henri Poincaré, 9, no 4, (2008), 743–773.
- [i] L. Amour and J. Faupin,
 - a) *Existence of a Ground State for the Confined Hydrogen Atom in Non-Relativistic QED*, Proceedings of the Joint Physics/Mathematics Workshop on Quantum Few-Body Systems, Aarhus, Denmark, 19-20 March 2007, AIP Conference Proceedings, Vol. 998, (2008).
 - b) *The confined hydrogenoid ion in non-relativistic quantum electrodynamics*, Cubo Mathematical Journal, 9, no. 2, (2007), 103–137.
 - c) *L'ion hydrogénoïde piégé en électrodynamique quantique non relativiste*, C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. I, 343, (2006), 27–30.

Première partie

Contributions à l'analyse mathématique de modèles issus de la théorie quantique des champs

Chapitre 1

Introduction

La majeure partie des travaux décrits dans ce mémoire concerne l'analyse mathématique rigoureuse de modèles issus de la théorie quantique des champs. La théorie quantique des champs fournit un cadre théorique à l'étude de systèmes de mécanique quantique ayant un nombre infini de degrés de liberté. Parmi les quatre interactions fondamentales de la nature, trois peuvent être décrites comme des théories de champs quantiques : l'interaction électromagnétique, l'interaction faible et l'interaction forte. L'interprétation habituelle est que ces interactions sont véhiculées par l'échange de quanta, ou particules de champs : les photons pour l'interaction électromagnétique, les bosons vecteurs intermédiaires pour l'interaction faible, et les gluons pour l'interaction forte.

Dans le formalisme que nous allons suivre, basé sur la seconde quantification, les particules des champs quantifiés sont associées à des vecteurs dans un espace de Fock. L'énergie du système que l'on considère est associée à un certain opérateur auto-adjoint, un hamiltonien, agissant dans un espace de Hilbert qui est défini à partir d'un ou plusieurs espaces de Fock. Le hamiltonien engendre une dynamique unitaire représentant l'évolution quantique des états du système.

Nous nous intéresserons le plus souvent à l'étude de modèles décrivant des particules quantiques non relativistes interagissant avec un champ quantifié. On peut notamment citer le modèle standard de l'électrodynamique quantique (QED) non relativiste, décrivant l'interaction de particules chargées non relativistes avec le champ de photons, et obtenu en quantifiant les équations de Newton (pour les particules chargées) couplées de façon minimale aux équations de Maxwell (pour le champ électromagnétique). Citons également le modèle de Nelson, décrivant l'interaction de particules quantiques non relativistes avec un champ de bosons scalaires (par exemple un champ de phonons en physique du solide), obtenu en quantifiant les équations de Newton couplées aux équation de Klein-Gordon, ou encore le modèle spin-bosons décrivant l'interaction d'un spin avec un champ de bosons scalaires.

Le modèle standard de la QED non relativiste, le modèle de Nelson et le modèle spin-bosons peuvent être vus comme appartenant à une classe de modèles que l'on appelle parfois modèles de Pauli-Fierz. D'une manière générale, pour un tel modèle, le système physique est représenté par un espace de Hilbert s'écrivant comme le produit tensoriel

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_f,$$

et par un hamiltonien ayant une expression de la forme

$$H_g = H_p \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_f} + \mathbb{1}_{\mathcal{H}_p} \otimes H_f + gW,$$

où H_p est le hamiltonien associé aux particules non relativistes, agissant dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_p , et H_f est le hamiltonien du champ libre agissant dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_f . Ce dernier est un espace de Fock symétrique construit à partir de l'espace de Hilbert associé à une particule de champ. Le terme

gW apparaissant dans l'expression du hamiltonien H_g représente l'interaction entre les particules non relativistes et le champ quantifié. Le paramètre $g \in \mathbb{R}$ est une constante de couplage, traité comme un petit paramètre dans les théories perturbatives, et l'opérateur W s'exprime généralement en fonctions d'opérateurs de création et d'annihilation sur l'espace de Fock. L'opérateur H_f , correspondant à l'énergie du champ quantifié libre, est la seconde quantification de l'opérateur de multiplication par la relation de dispersion $\omega(k)$. Dans les modèles que nous considérons, la relation de dispersion est de la forme $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$. Nous dirons que le modèle est massif si $m > 0$ et sans masse si $m = 0$. Bien sûr, du point de vue physique, le cas sans masse présente un intérêt fondamental puisque la masse des photons est effectivement nulle. Les travaux présentés dans cette première partie portent presque exclusivement sur le cas non massif.

L'image physique générale décrivant l'évolution asymptotique de systèmes représentés par un hamiltonien de Pauli-Fierz non massif est la suivante : étant donné un état initial quelconque, le système, au bout d'un temps infini, retourne à l'équilibre (l'état fondamental) en émettant des bosons qui se propagent à l'infini à vitesse constante. Afin de justifier cette image de manière rigoureuse, on peut alors s'intéresser à certaines propriétés du hamiltonien, notamment :

- Le spectre de H_g . Correspondant à un état d'équilibre, on s'attend à ce qu'un état fondamental existe, autrement dit que le bas du spectre de H_g soit une valeur propre. Pour certains modèles, on peut être amené à devoir changer de représentation pour obtenir l'existence d'un état fondamental.

Au-dessus de l'énergie minimale, on s'attend à ce que le spectre de H_g soit purement absolument continu. En particulier, on s'attend à ce que les états excités du hamiltonien libre deviennent des états métastables, associés à des résonances, sous l'effet de l'interaction.

- Le comportement asymptotique de la dynamique engendrée par H_g , autrement dit, la théorie de la diffusion pour H_g . On s'attend à ce que la vitesse asymptotique de propagation des bosons soit constante, et à ce que les opérateurs d'ondes soient asymptotiquement complets dans un sens à préciser.

De nombreuses difficultés bien connues apparaissent lorsque l'on essaye de démontrer ces propriétés. Mentionnons ainsi que les valeurs propres du hamiltonien libre H_0 sont toutes plongées dans le spectre essentiel, plus précisément, elles sont à l'origine d'une demi-droite de spectre essentiel. En particulier, la théorie usuelle des perturbations de Kato [127] n'est pas applicable. De plus, l'interaction n'est pas une perturbation relativement compacte du hamiltonien libre ; même pour de petites valeurs de la constante de couplage, l'étude de H_g est délicate. Rappelons aussi que la singularité à l'origine du hamiltonien d'interaction est à l'origine de nombreux problèmes, dont la célèbre catastrophe infrarouge. Par ailleurs, pour certaines questions relatives aux basses énergies, la non régularité en 0 de la relation de dispersion $k \mapsto \omega(k) = |k|$ présente des difficultés techniques.

Dans les années 60 et 70, de nombreux travaux ont été dédiés à l'étude de tels hamiltoniens de théorie quantique des champs. Citons notamment les travaux importants de Nelson [149], Høegh-Krohn [112, 113, 114] et Fröhlich [70, 71]. Plus récemment, depuis les articles fondateurs de Bach, Fröhlich et Sigal [25, 26, 27] et Dereziński et Gérard [61, 62, 95], les théories spectrales et de la diffusion en théorie quantique des champs sont devenues des sujets de recherche très étudiés.

Dans la suite de cette introduction, nous commençons par introduire certaines notations utilisées dans la première partie de ce mémoire, puis nous rappelons les définitions et quelques propriétés des modèles auxquels nous allons nous intéresser.

1-1 Espace de Fock : notations

Nous nous contentons dans ce paragraphe de rappeler les définitions des espaces de Fock et de certains opérateurs agissant dans de tels espaces ; pour plus de détails concernant les propriétés bien

connues de ces opérateurs, nous renvoyons, par exemple, à [41, 42], [155, 156], ou [20].

Etant donné un espace de Hilbert \mathfrak{h} , l'espace de Fock symétrique construit à partir de \mathfrak{h} est défini par

$$\Gamma_s(\mathfrak{h}) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n \mathfrak{h}^{\otimes n},$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation dans $\mathfrak{h}^{\otimes n}$. L'espace de Fock antisymétrique est défini de la même façon par

$$\Gamma_a(\mathfrak{h}) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \mathfrak{h}^{\otimes n},$$

avec A_n l'opérateur d'antisymétrisation. Un élément $\Phi \in \Gamma_{\#}(\mathfrak{h})$ (où $\Gamma_{\#}(\mathfrak{h})$ désigne $\Gamma_s(\mathfrak{h})$ ou $\Gamma_a(\mathfrak{h})$) peut être écrit sous la forme $\Phi = (\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n)}, \dots)$. Le vecteur $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$ est appelé le vide. On pourra parfois être amené à utiliser le sous-espace $\Gamma_{\text{fin}}(\mathfrak{h}) \subset \Gamma_{\#}(\mathfrak{h})$ donné par

$$\Gamma_{\text{fin}}(\mathfrak{h}) = \{ \Phi \in \Gamma_{\#}(\mathfrak{h}), \Phi^{(n)} = 0 \text{ pour tout } n \text{ sauf au plus un nombre fini} \}.$$

Pour $h \in \mathfrak{h}$, l'opérateur de création $a^*(h) : \Gamma_s(\mathfrak{h}) \rightarrow \Gamma_s(\mathfrak{h})$ (respectivement $a^*(h) : \Gamma_a(\mathfrak{h}) \rightarrow \Gamma_a(\mathfrak{h})$) est défini pour $\varphi \in S_n \mathfrak{h}^{\otimes n}$ (respectivement $\varphi \in A_n \mathfrak{h}^{\otimes n}$) par

$$a^*(h)\varphi = \sqrt{n+1} S_{n+1} h \otimes \varphi,$$

(respectivement $a^*(h)\varphi = \sqrt{n+1} A_{n+1} h \otimes \varphi$). L'opérateur d'annihilation $a(h)$ est défini comme l'adjoint de $a^*(h)$, puis, ces opérateurs étant fermables, on note leurs fermetures de la même façon. On peut noter que $a^*(h)$ et $a(h)$ sont bornés dans le cas antisymétrique. Dans le cas où l'espace de Hilbert à une particule \mathfrak{h} est égal à $L^2(\mathbb{R}^3)$, on peut voir, par exemple dans le cas symétrique, que $a(f)$ et $a^*(f)$ opèrent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (a(f)\Phi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) &= \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(k)} \Phi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) dk, \\ (a^*(f)\Phi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(k_i) \Phi^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n), \end{aligned}$$

où la notation $(k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n)$ signifie que la variable k_i est retirée du n-uple (k_1, \dots, k_n) . Des expressions correspondantes existent dans le cas antisymétrique. Pour les photons, l'espace à une particule est $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$; les expressions des opérateurs de création et d'annihilation sont alors identiques aux précédentes, en remplaçant les variables $k_i \in \mathbb{R}^3$ par $(k_i, \lambda_i) \in \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}$, puis en remplaçant l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^3} dk$ par $\sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} dk$. Nous utiliserons aussi les notations usuelles,

$$a(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(k)} a(k) dk, \quad a^*(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f(k) a^*(k) dk,$$

où $a(k)$ et $a^*(k)$ sont vus comme des distributions à valeurs opérateurs.

Pour $h \in \mathfrak{h}$, l'opérateur de champ $\Phi(h)$ est défini par l'expression

$$\Phi(h) = a^*(h) + a(h).$$

Cet opérateur est essentiellement auto-adjoint sur $\Gamma_{\text{fin}}(\mathfrak{h})$; on utilise le même symbole pour l'extension auto-adjointe correspondante.

La seconde quantification d'un opérateur, par exemple dans le cas de l'espace de Fock symétrique, est définie comme suit : si ω est un opérateur auto-adjoint agissant dans \mathfrak{h} , de domaine dense $\mathcal{D}(\omega)$, on définit l'opérateur $\omega^{(n)}$ agissant dans $\mathfrak{h}^{\otimes n}$ et de domaine $S_n \otimes_{i=1}^n \mathcal{D}(\omega)$ par :

$$\omega^{(n)} = \omega \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \omega \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \omega.$$

La seconde quantification de ω , notée $d\Gamma(\omega)$, est alors l'opérateur agissant dans $\Gamma_s(\mathfrak{h})$, de domaine $\mathcal{D}_\omega = \{\Phi \in \Gamma_{\text{fin}}(\mathfrak{h}), \forall n, \Phi^{(n)} \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{D}(\omega)\}$, et défini par

$$d\Gamma(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{(n)}.$$

En particulier donc,

$$d\Gamma(\omega)\Omega = 0.$$

On peut montrer que $d\Gamma(\omega)$ est essentiellement auto-adjoint sur \mathcal{D}_ω , l'extension auto-adjointe correspondante est notée par le même symbole. Dans le cas où $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3)$ (ou, de même, si $\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ pour les photons), et si ω est un opérateur de multiplication par une fonction $\omega(k)$, on utilisera aussi la notation habituelle

$$d\Gamma(\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) a^*(k) a(k) dk.$$

Enfin, si ω est un opérateur borné agissant dans \mathfrak{h} , l'opérateur $\Gamma(\omega)$ agissant dans $\Gamma_s(\mathfrak{h})$ est défini par sa restriction aux sous-espaces à n particules par l'expression

$$\Gamma(\omega)|_{\mathbb{C}} = \mathbf{1}_{\mathbb{C}}, \quad \Gamma(\omega)|_{S_n \mathfrak{h}^{\otimes n}} = \omega \otimes \cdots \otimes \omega.$$

En particulier, $\Gamma(e^{i\omega}) = e^{id\Gamma(\omega)}$.

1-2 Modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste

1-2.1 Définition

Commençons par décrire le modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste associé à un électron sans spin interagissant avec le champ de radiation quantifié et placé dans un potentiel extérieur V . Nous donnerons dans un second temps les modifications à apporter si l'on souhaite prendre en compte les degrés de liberté associés au spin de l'électron. On pourrait naturellement généraliser au cas d'atomes plus complexes, ou de molécules.

L'espace de Hilbert pour un électron sans spin est

$$\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3). \quad (1.1)$$

Pour un photon, tenant compte des degrés de liberté dus à la polarisation de la lumière, l'espace de Hilbert considéré est $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$. Pour décrire le champ de photons, on utilise alors l'espace de Fock symétrique construit à partir de $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$, c'est-à-dire, avec les notations précédentes,

$$\mathcal{H}_{\text{ph}} = \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})). \quad (1.2)$$

L'espace de Hilbert pour le système total est ainsi

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}, \quad (1.3)$$

et l'opérateur hamiltonien du modèle standard de la QED non relativiste, agissant dans \mathcal{H} , est l'opérateur de Pauli-Fierz s'écrivant sous la forme

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_{\text{el}}} (p_{\text{el}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A(x_{\text{el}}))^2 + H_{\text{ph}} + V_\alpha(x_{\text{el}}). \quad (1.4)$$

Ici et dans tout ce document, les unités sont choisies de telle façon que $\hbar = c = 1$, où \hbar est la constante de Planck divisée par 2π et c est la vitesse de la lumière. Le paramètre m_{el} représente la masse de l'électron, et $\alpha = e^2$ est la constante de structure fine, e désignant la charge de l'électron. Rappelons que, d'après les mesures physiques, α est de l'ordre de $1/137$. Les opérateurs position et impulsion de l'électron sont notés respectivement $x_{\text{el}} = (x_{\text{el},1}, x_{\text{el},2}, x_{\text{el},3})$ et $p_{\text{el}} = (p_{\text{el},1}, p_{\text{el},2}, p_{\text{el},3}) = -i\nabla_{x_{\text{el}}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, le potentiel vecteur associé au champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb est défini par l'expression

$$A(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}}} \varepsilon^\lambda(k) \left[e^{-ik \cdot x} a_\lambda^*(k) + e^{ik \cdot x} a_\lambda(k) \right] dk, \quad (1.5)$$

autrement dit, pour $j \in \{1, 2, 3\}$, la $j^{\text{ème}}$ composante $A_j(x)$ est un opérateur de champ,

$$A_j(x) = \Phi(h_j^A(x)), \quad (1.6)$$

où $h_j^A(x) \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ est donné par

$$h_j^A(x, k, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\chi_\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}}} \varepsilon_j^\lambda(k) e^{-ik \cdot x}. \quad (1.7)$$

Ici, $\varepsilon^1(k)$ et $\varepsilon^2(k)$ sont des vecteurs de polarisation, c'est-à-dire tels que le triplet $(k/|k|, \varepsilon^1(k), \varepsilon^2(k))$ forme une base orthonormale dans \mathbb{R}^3 pour tout k différent de 0. En fonction des problèmes étudiés, nous pourrions avoir besoin d'hypothèses supplémentaires sur ε^1 et ε^2 ; elles seront précisées le cas échéant. Dans tous les cas, nous pourrions faire par exemple le choix suivant :

$$\varepsilon^1(k) = \frac{(k_2, -k_1, 0)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad \varepsilon^2(k) = \frac{k}{|k|} \wedge \varepsilon^1(k) = \frac{(-k_1 k_3, -k_2 k_3, k_1^2 + k_2^2)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}}. \quad (1.8)$$

Dans (1.5), $\chi_\Lambda(k)$ désigne une fonction de troncature ultraviolette dépendant d'un paramètre Λ . Cette troncature, nécessaire pour que le modèle soit bien défini, élimine l'interaction entre l'électron et les photons de très hautes énergies. Encore une fois, nous aurons besoin de faire différentes hypothèses sur χ_Λ selon les problèmes étudiés. Typiquement, on pourra garder à l'esprit l'un des trois choix suivants :

- * $\chi_\Lambda(k) = \mathbf{1}_{|k| \leq \Lambda}(k)$,
- * $\chi_\Lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ si l'on a besoin d'une certaine régularité,
- * $\chi_\Lambda(k) = e^{-k^2/\Lambda^2}$ si l'on a besoin d'analyticité.

L'énergie du champ de photons libre dans (1.4) est représentée par l'opérateur H_{ph} . Mathématiquement, cet opérateur est la seconde quantification de l'opérateur de multiplication par la relation de dispersion $\omega(k) = |k|$, c'est-à-dire

$$H_{\text{ph}} = d\Gamma(\omega) = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega(k) a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) dk, \quad \omega(k) = |k|.$$

Le potentiel extérieur $V_\alpha(x_{\text{el}})$ est à valeurs réelles, dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$, et sera généralement supposé relativement borné par rapport à $p_{\text{el}}^2 = -\Delta_{x_{\text{el}}}$, avec borne relative 0. Par exemple, pour l'atome d'hydrogène, le potentiel engendré par le noyau est le potentiel de Coulomb

$$V_\alpha(x_{\text{el}}) = -\frac{\alpha}{|x_{\text{el}}|}.$$

Dans ce cas le spectre de l'opérateur électronique

$$H_{\text{el}} = \frac{p_{\text{el}}^2}{2m_{\text{el}}} + V_{\alpha}(x_{\text{el}}), \quad (1.9)$$

est composé de valeurs propres négatives, notées $\{e_0, e_1, \dots\}$ (ordonnées dans l'ordre croissant), et de la demi-droite de spectre absolument continu $[0, +\infty[$.

Lorsque l'on traite l'interaction entre l'électron et le champ de photons comme une perturbation, l'usage est d'imposer une troncature ultraviolette à l'échelle $\alpha^2\Lambda$ (c'est-à-dire que l'on remplace χ_{Λ} par $\chi_{\alpha^2\Lambda}$ dans (1.5)), puis d'effectuer le changement d'échelle

$$(x_{\text{el}}, k_1, \lambda_1, \dots, k_n, \lambda_n) \mapsto (x_{\text{el}}/\alpha, \alpha^2 k_1, \lambda_1, \dots, \alpha^2 k_n, \lambda_n). \quad (1.10)$$

On est alors ramené à l'étude de l'opérateur (noté toujours H_{α})

$$H_{\alpha} = \frac{1}{2m_{\text{el}}} (p_{\text{el}} - \alpha^{\frac{3}{2}} A(\alpha x_{\text{el}}))^2 + H_{\text{ph}} - \frac{1}{|x_{\text{el}}|},$$

où $A(\alpha x_{\text{el}})$ est donné par (1.5). Pour un potentiel V abstrait, on obtient alors l'opérateur

$$H_{\alpha} = \frac{1}{2m_{\text{el}}} (p_{\text{el}} - \alpha^{\frac{3}{2}} A(\alpha x_{\text{el}}))^2 + H_{\text{ph}} + V(x_{\text{el}}). \quad (1.11)$$

Le paramètre $\alpha^{\frac{3}{2}}$ est ensuite traité comme une constante de couplage, et on posera parfois $g = \alpha^{\frac{3}{2}}$.

1-2.2 Quelques propriétés

Nous listons ici quelques propriétés importantes du modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste établies dans la littérature. La liste n'est pas exhaustive, et nous ne détaillons pas toutes les hypothèses nécessaires à la démonstration des résultats concernés.

- *Caractère auto-adjoint.* A partir de l'expression (1.4), il n'est pas difficile de définir le hamiltonien H_{α} comme une forme quadratique fermée et semi-bornée inférieurement ; on peut alors lui associer de façon unique un opérateur auto-adjoint. Une telle définition est suffisante pour de nombreuses études, mais ne fournit pas explicitement le domaine de H_{α} .

Pour de petites valeurs de la constante de couplage α , en utilisant le théorème de Kato-Rellich et le fait que les opérateurs de création et d'annihilation sont relativement bornés par rapport à H_f , on peut montrer que $\mathcal{D}(H_{\alpha}) = \mathcal{D}(H_0)$. Pour des valeurs quelconques de α , une telle propriété peut également être établie. Elle a été obtenue par Hiroshima [105] à l'aide d'une représentation en intégrale fonctionnelle, puis plus récemment, Hasler et Herbst [99] l'ont redémontrée en utilisant des propriétés de commutation.

- *Décroissance exponentielle en dessous du seuil d'ionisation.* Le seuil d'ionisation est défini par

$$\Sigma_{\alpha} = \lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\varphi \in D_R, \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H_{\alpha} \varphi \rangle, \quad (1.12)$$

où $D_R = \{\varphi \in \mathcal{D}(H_{\alpha}), \varphi(x_{\text{el}}) = 0 \text{ si } |x_{\text{el}}| < R\}$. L'interprétation du seuil d'ionisation est que les vecteurs d'énergies supérieures à Σ_{α} représentent des états du système physique dans lequel l'atome est ionisé. Une propriété importante est que les états d'énergie strictement inférieures à Σ_{α} sont bien localisés en la position électronique dans le sens où pour tous δ et ξ vérifiant $\xi + \delta^2 < \Sigma_{\alpha}$, on a

$$\|e^{\delta|x_{\text{el}}|} \mathbf{1}_{(-\infty, \xi]}(H_{\alpha})\| < \infty.$$

Une telle propriété a été démontrée par Bach, Fröhlich et Sigal pour de petites valeurs de α dans [27], puis pour des valeurs quelconques de α par Griesemer dans [89].

- *Existence d'un état fondamental.* L'existence d'un état fondamental pour H_α est établie, pour des valeurs suffisamment petites de la constante de couplage α , par Bach, Fröhlich et Sigal dans [27], puis, pour des valeurs quelconques de α , par Griesemer, Lieb et Loss dans [91, 135]. Autrement dit, le bas du spectre de H_α est une valeur propre (de multiplicité 1 si $e_0 = \inf \text{spec}(H_{\text{el}})$ est de multiplicité 1).

Pour établir l'existence d'un état fondamental, un ingrédient important est ce que l'on appelle la transformation de Pauli-Fierz (ou transformation de Power-Zienau-Wooley), qui définit un opérateur unitairement équivalent à H_α mais avec des termes d'interaction moins singuliers dans l'infrarouge. Cette transformation permet d'ailleurs de montrer que les états fondamentaux de H_α appartiennent à $\mathcal{D}(N_{\text{ph}}^{1/2})$, où $N_{\text{ph}} = d\Gamma(\mathbf{1})$ est l'opérateur du nombre de photons.

- *Instabilité des valeurs propres excitées et existence de résonances.* Sous une hypothèse de règle d'or de Fermi, l'instabilité des valeurs propres excitées du hamiltonien électronique H_{el} est obtenue par Bach, Fröhlich, Sigal et Soffer [28] en utilisant la théorie de Mourre, et par Bach, Fröhlich et Sigal [27] à l'aide d'une déformation complexe de H_α et de l'isospectralité de l'application Feshbach-Schur. Plus précisément, il est établi que le spectre de H_α est purement absolument continu dans un voisinage des valeurs propres excitées $(e_j)_{j \geq 1}$ de H_{el} . Ce résultat, basé sur une théorie de perturbation au second ordre pour des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel, n'est naturellement valable que pour des valeurs suffisamment petites de α .

Dans [163], Sigal montre plus précisément l'existence de résonances associées aux $(e_j)_{j \geq 1}$ pour H_α , en affinant la méthode du groupe de renormalisation spectral de Bach, Fröhlich et Sigal [25, 26].

- *Théorie spectrale à basses énergies.* Les résultats cités précédemment ne permettent pas de décrire le spectre de H_α dans un intervalle d'énergie arbitrairement proche du bas du spectre. Dans [75], Fröhlich, Griesemer et Sigal obtiennent un principe d'absorption limite dans un tel intervalle, en combinant une décomposition de l'espace de Fock en basses et hautes énergies avec la théorie de Mourre. Cela montre en particulier que le spectre de H_α est purement absolument continu au-dessus de l'énergie fondamentale.

1-2.3 Prise en compte du spin de l'électron

Pour tenir compte du spin de l'électron, les modifications à apporter sont les suivantes : l'espace de Hilbert électronique devient

$$\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2),$$

puis on ajoute un terme de champ magnétique au hamiltonien total. Après le changement d'échelle (1.10), on obtient ainsi l'opérateur

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_{\text{el}}} (p_{\text{el}} - \alpha^{\frac{3}{2}} A(\alpha x_{\text{el}}))^2 - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2m_{\text{el}}} \sigma^{\text{el}} \cdot B(\alpha x_{\text{el}}) + H_{\text{ph}} - \frac{1}{|x_{\text{el}}|}. \quad (1.13)$$

Le triplet $\sigma^{\text{el}} = (\sigma_1^{\text{el}}, \sigma_2^{\text{el}}, \sigma_3^{\text{el}})$ est formé par les trois matrices de Pauli associées au spin de l'électron, et, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $B(x)$ est donné par l'expression

$$B(x) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k|^{\frac{1}{2}} \chi_\Lambda(k) \left(\frac{k}{|k|} \wedge \varepsilon^\lambda(k) \right) \left[e^{-ik \cdot x} a_\lambda^*(k) - e^{ik \cdot x} a_\lambda(k) \right] dk. \quad (1.14)$$

Pour un tel modèle, les propriétés citées dans la sous-section précédente restent valables, exceptée l'unicité de l'état fondamental ; il est en effet montré par Hiroshima et Spohn dans [110] et Loss, Miyao et Spohn dans [137] que la multiplicité de la valeur propre $E_\alpha = \inf \text{spec}(H_\alpha)$ est égale à 2 si le spin de l'électron est pris en compte (toujours en supposant que $e_0 = \inf \text{spec}(H_{\text{el}})$ est de multiplicité 1).

1-3 Modèle de Nelson

1-3.1 Définition

Le modèle de Nelson décrit un champ de bosons scalaires (par abus de langage, on les appellera parfois photons) interagissant avec une particule quantique non relativiste, disons un électron. Les principales différences avec le modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste sont les suivantes : l'espace de Hilbert pour le champ de bosons est l'espace de Fock construit à partir de $L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\mathcal{H}_f = \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)),$$

et l'énergie du champ de bosons libre est

$$H_f = d\Gamma(\omega), \quad \omega(k) = |k|.$$

L'électron est toujours associé à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3)$ et au hamiltonien

$$H_{\text{el}} = \frac{p_{\text{el}}^2}{2m_{\text{el}}} + V(x_{\text{el}}).$$

Le couplage entre l'électron et le champ de bosons, décrit par un opérateur de champ $\Phi(h(x_{\text{el}}))$, est linéaire en les opérateurs de création et d'annihilation. On obtient ainsi le hamiltonien de Nelson agissant dans $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_f$ et défini par

$$H_g = H_{\text{el}} + H_f + g\Phi(h(x_{\text{el}})), \quad (1.15)$$

où $g \in \mathbb{R}$ est une constante de couplage. On supposera que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, la fonction de couplage $h(x) \in L^2(\mathbb{R}^3, dk)$ est donnée par

$$h(x, k) = \chi_\Lambda(k) |k|^\mu e^{ik \cdot x}. \quad (1.16)$$

Comme précédemment, χ_Λ est une fonction de troncature ultraviolette. On supposera toujours que le paramètre infrarouge μ vérifie $\mu \geq -1/2$, et selon les problèmes étudiés, on sera amené à imposer certaines restrictions plus contraignantes sur les valeurs admissibles de μ .

1-3.2 Quelques propriétés

Sous une hypothèse suffisante de régularité infrarouge (c'est-à-dire pour des valeurs du paramètre μ dans (1.16) suffisamment grandes, selon les cas $\mu > -1/2$ ou $\mu \geq 1/2$) les propriétés listées dans la sous-section 1-2.2 restent valables pour le modèle de Nelson. Mentionnons quelques propriétés supplémentaires démontrées dans la littérature.

- *Absence d'état fondamental.* Sans régularisation infrarouge, c'est-à-dire avec $\mu = -1/2$ dans (1.16), Lörinczi, Minlos et Spohn [138] et Dereziński et Gérard [63] démontrent que le bas du spectre du hamiltonien de Nelson n'est pas une valeur propre, autrement dit qu'il n'existe pas d'état fondamental.

Comme établi par Arai [16] et Dereziński et Gérard [63], on peut néanmoins obtenir l'existence d'un état fondamental pour le modèle de Nelson dans une représentation non-Fock.

- *Théorie spectrale pour des valeurs arbitraires de la constante de couplage.* Dans [82, 83], Georgescu, Gérard et Møller développent une extension de la théorie de Mourre permettant d'étudier le spectre du hamiltonien de Nelson sans condition de petitesse sur la constante de couplage, en supposant

que l'opérateur H_{el} est à résolvante compacte (c'est le cas notamment si $V(x_{\text{el}})$ est un potentiel confinant). La méthode permet d'ailleurs d'étudier une classe plus générale de modèles abstraits de type Pauli-Fierz.

Les résultats obtenus par Georgescu, Gérard et Møller montrent que le spectre singulier continu est vide, et que le spectre ponctuel est localement fini. Un principe d'absorption limite fournit également une propriété de décroissance de l'énergie locale en dehors du spectre ponctuel.

- *Théorie de la diffusion.* Pour des modèles massifs, la théorie de la diffusion des hamiltoniens de Pauli-Fierz est développée par Dereziński et Gérard [61] pour des modèles confinants (c'est-à-dire avec $V(x_{\text{el}})$ potentiel confinant), puis par Fröhlich, Griesemer et Schlein [73] pour des modèles avec un seuil d'ionisation fini. En particulier la complétude asymptotique est établie pour de tels modèles massifs.

Le modèle de Nelson non massif, avec potentiel électronique confinant, est considéré par Gérard [95] qui obtient plusieurs résultats importants, dont une propriété appelée complétude asymptotique géométrique. Les résultats de [95] montrent par ailleurs que si une estimation de Mourre sur un intervalle spectral Δ avec le générateur des dilatations dans l'espace de Fock comme opérateur conjugué est vérifiée, alors une version restreinte de la complétude asymptotique est satisfaite dans Δ .

Dans [63], Dereziński et Gérard développent une théorie de la diffusion adaptée à l'étude de modèles singuliers dans l'infrarouge (typiquement, avec une fonction de couplage de la forme (1.16) avec $\mu = -1/2$).

1-4 Modèles invariants par translations

1-4.1 L'électron habillé

Si, dans le cadre du modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste, on considère une particule libre (en interaction avec le champ de radiation quantifié), autrement dit si l'on suppose que $V(x_{\text{el}}) = 0$ dans (1.4), on obtient alors un système invariant par translations. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que le hamiltonien H_α commute avec l'opérateur d'impulsion total défini par

$$P_{\text{tot}} = p_{\text{el}} + P_{\text{ph}}, \quad (1.17)$$

où P_{ph} est l'opérateur d'impulsion du champ de photon libre, c'est-à-dire

$$P_{\text{ph}} = d\Gamma(k) = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} k a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) dk.$$

On peut alors décomposer H_α en intégrale directe par rapport au spectre de P_{tot} : il existe un isomorphisme unitaire U tel que

$$U H_\alpha U^* = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_\alpha(P) dP,$$

où pour tout $P \in \mathbb{R}^3$, $H_\alpha(P)$ agit dans l'espace de Fock \mathcal{H}_{ph} et a pour expression

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{2m_{\text{el}}} (P - P_{\text{ph}} + \alpha^{\frac{1}{2}} A(0))^2 + H_{\text{ph}}. \quad (1.18)$$

Le bas du spectre de $H_\alpha(P)$ sera noté

$$E_\alpha(P) = \inf \text{spec}(H_\alpha(P)).$$

On peut naturellement procéder de la même façon pour décomposer le hamiltonien de Nelson (1.15) dans le cas où $V(x_{\text{el}}) = 0$.

1-4.2 Quelques propriétés

L'étude mathématique des hamiltoniens de type Pauli-Fierz invariants par translations à impulsion totale fixée est initiée par les travaux de Fröhlich [70, 71]. Plus récemment, plusieurs propriétés importantes ont pu être établies, nous en rappelons quelques unes ici.

- *Radiation de Cerenkov.* Pour le système découplé (c'est-à-dire pour $\alpha = 0$), l'expression de l'énergie fondamentale en fonction de l'impulsion totale est explicite, et n'est pas difficile à obtenir. Plus précisément, pour tout $P \in \mathbb{R}^3$, $E_0(P) = P^2/2m_{\text{el}}$ est une valeur propre de $H_0(P)$. Pour $|P| \leq m_{\text{el}}$, $E_0(P) = P^2/2m_{\text{el}}$ coïncide avec l'infimum du spectre de $H_0(P)$, mais pour $|P| > m_{\text{el}}$, $\inf \text{spec}(H_0(P)) = |P| - m_{\text{el}}/2$. En particulier, la valeur propre $P^2/2m_{\text{el}}$ est strictement plongée dans le spectre essentiel de $H_0(P)$ (voir la figure 1.1). Pour de telles valeurs de l'impulsion totale, $|P| > m_{\text{el}}$, l'électron peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière (radiation de Cerenkov).

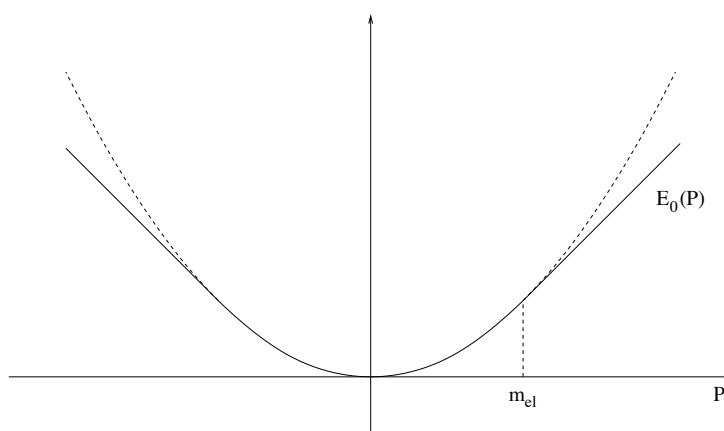


FIGURE 1.1 – L'application $P \mapsto E_0(P) = \inf \text{spec}(H_0(P))$:
 si $|P| \leq m_{\text{el}}$, $E_0(P) = P^2/2m_{\text{el}} \in \sigma_{\text{pp}}(H_0(P))$,
 si $|P| > m_{\text{el}}$, $E_0(P) = |P| - m_{\text{el}}/2 \notin \sigma_{\text{pp}}(H_0(P))$.

Certains résultats liés à la radiation de Cerenkov pour $H_\alpha(P)$ sont obtenus par De Roeck, Fröhlich et Pizzo [54].

- *Existence d'un état fondamental.* L'existence d'un état fondamental pour $H_\alpha(P)$ pour de petites valeurs de α est étudiée par Chen [46] et Chen, Fröhlich et Pizzo [48]. Il est établi que, pour $P = 0$, $E_\alpha(0)$ est une valeur propre de $H_\alpha(0)$, mais pour $P \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ (et $|P|$ strictement plus petit qu'une certaine valeur critique de l'ordre de $m_{\text{el}} - \mathcal{O}(\alpha^{1/2})$), $E_\alpha(P)$ n'est pas une valeur propre de $H_\alpha(P)$. Pour $P \neq 0$, Chen et Fröhlich [47] étudient et montrent l'existence d'un état fondamental dans une représentation différente.

Dans [98], sans restriction sur la constante de couplage, Hasler et Herbst montrent que $H_\alpha(P)$ n'a pas d'état fondamental pour toute valeur de P en laquelle l'application $P \mapsto E_\alpha(P)$ est dérivable et de dérivée non nulle (sachant que l'on peut vérifier facilement que $P \mapsto E_\alpha(P)$ est dérivable presque partout).

- *Masse renormalisée de l'électron.* Pour définir la masse renormalisée de l'électron, la difficulté majeure est de démontrer que l'énergie fondamentale en tant que fonction de l'impulsion totale est une application régulière. En s'appuyant sur une version adaptée du groupe de renormalisation spectral introduit dans [25, 26], Bach, Chen, Fröhlich et Sigal [23] et Chen [46] montrent que l'application $P \mapsto E_\alpha(P)$ est de classe C^2 dans $\{P \in \mathbb{R}^3, |P| \leq p_c\}$, où p_c est une certaine valeur critique que l'on peut choisir de l'ordre de $m_{\text{el}} - \mathcal{O}(\alpha^{1/2})$. Ce résultat est établi de façon différente par Fröhlich

et Pizzo [79], en affinant la méthode due à Pizzo [152] et développée par Chen, Fröhlich et Pizzo [48].

L'application $P \mapsto E_\alpha(P)$ ne dépendant que de $|P|$, les résultats précédents montrent de plus que $(\partial_{|P|}^2 E_\alpha)(0) \neq 0$. Cela permet de définir la masse renormalisée de l'électron en posant

$$m_{\text{ren}} = ((\partial_{|P|}^2 E_\alpha)(0))^{-1}.$$

1-4.3 L'atome d'hydrogène mobile

De la même façon que pour l'électron habillé, on peut étudier des atomes ou des molécules en mouvement. Considérons par exemple l'atome d'hydrogène dans le cadre du modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste. Si le noyau est traité, comme l'électron, comme une particule quantique mobile, et en tenant compte des degrés de liberté liés à son spin, l'espace de Hilbert du modèle est

$$\mathcal{H}_{\text{at}} = L^2(\mathbb{R}^6; \mathbb{C}^4).$$

Après le changement d'échelle (1.10), le hamiltonien de l'atome d'hydrogène devient

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \frac{1}{2m_{\text{el}}} (p_{\text{el}} - \alpha^{\frac{3}{2}} A(\alpha x_{\text{el}}))^2 + \frac{1}{2m_{\text{n}}} (p_{\text{n}} + \alpha^{\frac{3}{2}} A(\alpha x_{\text{n}}))^2 \\ &\quad - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2m_{\text{el}}} \sigma^{\text{el}} \cdot B(\alpha x_{\text{el}}) + \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2m_{\text{n}}} \sigma^{\text{n}} \cdot B(\alpha x_{\text{n}}) + H_{\text{ph}} - \frac{1}{|x_{\text{el}} - x_{\text{n}}|}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Comme pour l'électron, on utilise les notations $x_{\text{n}}, p_{\text{n}}, m_{\text{n}}, \sigma^{\text{n}}$ pour la position, l'impulsion, la masse, et le triplet des matrices de Pauli associées au spin du noyau. Le système est invariant par translations, ce qui se traduit par le fait que H_α commute avec l'opérateur d'impulsion totale maintenant donné par

$$P_{\text{tot}} = p_{\text{n}} + p_{\text{el}} + P_{\text{ph}}. \quad (1.20)$$

De la même façon que pour l'électron libre, on peut décomposer H_α en intégrale directe par rapport au spectre de P_{tot} ,

$$U H_\alpha U^* = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_\alpha(P) dP,$$

où pour tout $P \in \mathbb{R}^3$, $H_\alpha(P)$ agit dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3, dr; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$ et a pour expression

$$\begin{aligned} H_\alpha(P) &= \frac{1}{2m_{\text{el}}} \left(\frac{m_{\text{el}}}{M} (P - P_{\text{ph}}) + p_r - \alpha^{\frac{3}{2}} A\left(\frac{m_{\text{el}}}{M} \alpha r\right) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2m_{\text{n}}} \left(\frac{m_{\text{n}}}{M} (P - P_{\text{ph}}) - p_r + \alpha^{\frac{3}{2}} A\left(-\frac{m_{\text{n}}}{M} \alpha r\right) \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{|r|} + H_{\text{ph}} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2m_{\text{el}}} \sigma^{\text{el}} \cdot B\left(\frac{m_{\text{el}}}{M} \alpha r\right) + \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2m_{\text{n}}} \sigma^{\text{n}} \cdot B\left(-\frac{m_{\text{n}}}{M} \alpha r\right). \end{aligned}$$

Ici r représente la position relative de l'atome ($r = x_{\text{n}} - x_{\text{el}}$), $p_r = -i\nabla_r$ est l'opérateur impulsion associé, et $M = m_{\text{el}} + m_{\text{n}}$.

Notons que des modèles représentant des systèmes atomiques libres et interagissant avec le champ de photons ont été étudiés notamment dans [9, 136, 74, 98]. Dans [9], Amour, Grébert et Guillot montrent l'existence d'un état fondamental pour $H_\alpha(P)$ dans le cas d'atomes neutres et pour de petites valeurs de la constante de couplage. Loss, Miyao et Spohn [136] obtiennent un résultat similaire sans restriction sur la constante de couplage, pour des particules chargées sans spin. Hasler et Herbst [98], dans le cas

d'un ion chargé positivement, montrent que $H_\alpha(P)$ n'a pas d'état fondamental pour toute valeur de P en laquelle l'application $P \mapsto E_\alpha(P)$ est dérivable et de dérivée non nulle. Enfin, dans [74], Fröhlich, Griemser et Schlein étudient la théorie de la diffusion pour un atome, en imposant une troncature infrarouge dans le hamiltonien d'interaction.

1-5 Organisation de la première partie

Dans le chapitre 2, nous décrivons les articles [iii], [ix] et [xiii] concernant l'étude du bas du spectre de différents modèles de QED non relativiste. Le chapitre 3 décrit des résultats abstraits obtenus dans [vii] et [viii], sur la théorie des perturbations au second ordre de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel, avec application au modèle de Nelson pour un couplage arbitraire. Le chapitre 4 correspond aux résultats de [v] sur la théorie des résonances pour le modèle de Nelson ou le modèle standard de la QED non relativiste. Dans le chapitre 5, nous expliquons l'article [xvi], où une dynamique effective est déterminée pour le modèle standard de la QED non relativiste avec un potentiel extérieur variant lentement. Le chapitre 6 décrit les résultats obtenus dans [x], [xi] et [xii] concernant l'analyse du spectre et de la décroissance de l'énergie locale à basses énergies pour différents modèles de théorie quantique des champs. Enfin, dans le chapitre 7, nous décrivons les résultats des articles [xiv] et [xvii] qui s'inscrivent dans le cadre de la théorie de la diffusion pour des modèles de type Pauli-Fierz.

D'une manière générale, dans chaque section, après avoir introduit le contexte de notre étude, nous énonçons nos résultats principaux ; divers commentaires sont ensuite formulés sous forme de remarques, puis nous concluons en comparant nos résultats à la littérature, et en donnant quelques éléments de preuve.

Chapitre 2

Etats fondamentaux

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés des états fondamentaux de modèles d'électrodynamique quantique non relativiste.

Le modèle étudié dans la première section est un exemple de système pour lequel il n'existe pas d'état fondamental dans l'espace de Fock. Plus précisément, pour un électron non relativiste interagissant à la fois avec le champ de photons et avec un champ magnétique classique extérieur, on identifie une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un état fondamental pour l'opérateur de Hamilton associé au modèle. On montre ensuite que le hamiltonien renormalisé, écrit dans une représentation non Fock des relations canoniques de commutation, possède un état fondamental.

La seconde section est une description mathématique d'un phénomène bien connu en physique théorique, le splitting hyperfin de l'état fondamental de l'hydrogène. Considérant un atome d'hydrogène mobile et non relativiste, on montre que l'interaction entre les spins du proton et de l'électron, véhiculée par le champ de radiation quantifié, induit un "éclatement" de la valeur propre située au bas du spectre d'énergie. On obtient alors l'unicité de l'état fondamental.

2-1 L'électron habillé dans un champ magnétique : existence et non existence d'un état fondamental

Cette section décrit les résultats obtenus en collaboration avec L. Amour, B. Grébert et J.-C. Guillot dans les travaux [iii]a)–[iii]b). Etant donné un système physique modélisé par un certain hamiltonien, l'existence d'un état fondamental justifie dans un certain sens la stabilité du système. Pour des modèles de théorie quantique des champs, il est bien connu qu'au-delà d'une certaine singularité infrarouge, il n'existe pas d'état fondamental dans l'espace de Fock. En revanche, l'écriture du hamiltonien dans une autre représentation, non unitairement équivalente à la représentation Fock, peut permettre d'obtenir l'existence d'un état fondamental. Nous étudions un exemple d'un tel phénomène dans cette section.

Décrivons plus précisément le modèle étudié. Nous considérons un électron non relativiste interagissant avec un champ magnétique classique extérieur pointant dans la direction x_3 . L'électron interagit par ailleurs avec le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb. Comme décrit dans le chapitre 1, l'espace de Hilbert pour l'électron, incluant les degrés de liberté spinoriels, est $\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$. L'espace de Hilbert pour le champ de photons est l'espace de Fock symétrique \mathcal{H}_{ph} donné dans (1.2). Le système que l'on considère est associé à l'opérateur hamiltonien de Pauli H_g agissant dans $\mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$,

défini par

$$H_g = \frac{1}{2m_{\text{el}}} \left(p_{\text{el}} - \alpha^{\frac{1}{2}} a(x'_{\text{el}}) - gA(x_{\text{el}}) \right)^2 - \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2m_{\text{el}}} \sigma_3^{\text{el}} b(x'_{\text{el}}) - \frac{g}{2m_{\text{el}}} \sigma^{\text{el}} \cdot B(x_{\text{el}}) + V(x'_{\text{el}}) + H_{\text{ph}}. \quad (2.1)$$

Dans ce modèle, on a remplacé la charge $e = \alpha^{\frac{1}{2}}$ de l'électron par une constante de couplage notée g dans les termes contenant le champ électromagnétique quantifié, et les paramètres α et g sont maintenant considérés comme étant indépendants; nous allons en effet traiter l'interaction entre l'électron et le champ de radiation de manière perturbative.

La variable x'_{el} est définie par $x'_{\text{el}} = (x_{\text{el},1}, x_{\text{el},2})$ et $V(x'_{\text{el}})$ est un potentiel électrique. Le champ magnétique classique est de la forme $(0, 0, b(x'_{\text{el}}))$, où

$$b(x'_{\text{el}}) = \frac{\partial a_2}{\partial x_{\text{el},1}}(x'_{\text{el}}) - \frac{\partial a_1}{\partial x_{\text{el},2}}(x'_{\text{el}}),$$

et $a(x'_{\text{el}})$ est un potentiel vecteur.

Comme dans la section 1-4, l'opérateur H_g est invariant par translation. Ici, l'invariance par translation n'existe que dans la direction $x_{\text{el},3}$, c'est-à-dire que H_g commute avec la troisième composante de l'opérateur d'impulsion totale (voir (1.20)),

$$P_{\text{tot},3} = p_{\text{el},3} + d\Gamma(k_3),$$

où $d\Gamma(k_3)$ est la seconde quantification de l'opérateur de multiplication par $k_3 \in \mathbb{R}$. Aussi H_g admet une décomposition en intégrale directe par rapport au spectre de $P_{\text{tot},3}$, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur unitaire U tel que

$$UH_gU^* = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_g(P_3) dP_3,$$

Pour tout $P_3 \in \mathbb{R}$, l'opérateur $H_g(P_3)$ agit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$, et (voir [10])

$$H_g(P_3) = \frac{1}{2m_{\text{el}}} \sum_{j=1,2} \left(p_j - \alpha^{\frac{1}{2}} a_j(x'_{\text{el}}) - gA_j(x'_{\text{el}}, 0) \right)^2 + \frac{1}{2m_{\text{el}}} \left(P_3 - d\Gamma(k_3) - gA_3(x'_{\text{el}}, 0) \right)^2 - \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2m_{\text{el}}} \sigma_3^{\text{el}} b(x'_{\text{el}}) - \frac{g}{2m_{\text{el}}} \sigma^{\text{el}} \cdot B(x'_{\text{el}}, 0) + V(x'_{\text{el}}) + H_{\text{ph}}.$$

Soient

$$h(b, V) = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m_{\text{el}}} (p_j - \alpha^{\frac{1}{2}} a_j(x'_{\text{el}}))^2 - \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2m_{\text{el}}} \sigma_3^{\text{el}} b(x'_{\text{el}}) + V(x'_{\text{el}}),$$

et $e_0 = \inf \text{spec}(h(b, V))$. Nous supposons que b et V sont choisis de telle façon que e_0 est une valeur propre isolée et de multiplicité 1 (nous renvoyons à [21, 122, 154, 167] pour des choix possibles de couples (b, V) satisfaisant cette propriété). Posons également $e_1 = \inf[\text{spec}(h(b, V)) \setminus \{e_0\}]$.

Soit $H_{g,\sigma}(P_3)$ l'opérateur obtenu en introduisant dans $H_g(P_3)$ une troncature infrarouge, c'est-à-dire en remplaçant l'intégrale sur \mathbb{R}^3 définissant $A(x)$ dans (1.5) par l'intégrale sur $\{k \in \mathbb{R}^3, |k| \geq \sigma\}$. Il est établi dans [10] que, pour g et P_3 suffisamment petits, et pour tout $\sigma \geq 0$, $H_{g,\sigma}(P_3)$ est auto-adjoint et semi-borné inférieurement. Nous notons $E_{g,\sigma}(P_3) = \inf \text{spec}(H_{g,\sigma}(P_3))$ l'infimum du spectre de $H_{g,\sigma}(P_3)$ pour $\sigma > 0$, et $E_g(P_3) = \inf \text{spec}(H_g(P_3))$ pour $\sigma = 0$.

D'après [10], pour tout $\sigma > 0$, $H_{g,\sigma}(P_3)$ possède un unique état fondamental. On note $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$ un vecteur propre normalisé associé à $E_{g,\sigma}(P_3)$

Pour $h \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$, l'opérateur de Weyl $W(h)$ est défini par l'expression

$$W(h) = e^{i\Phi(h)}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(k, \lambda) = \frac{g}{2m_{\text{el}}} \frac{\chi_\Lambda(k) \varepsilon_3^\lambda(k)}{k_3 |k|^{1/2}} \frac{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3)}{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) + |k|}.$$

Si $E_g(\cdot)$ est de classe $C^{1+\alpha}$ avec $\alpha > 0$ au voisinage de P_3 , alors $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ si et seulement si $E'_g(P_3) = 0$ (on utilise, pour le vérifier, le fait que pour g et P_3 suffisamment petits,

$$E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) \geq -3|k|/4,$$

voir [10, Lemma 4.3]). Introduisons alors, de la même façon que dans [16], un opérateur "renormalisé" $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ à partir de l'expression formelle $H_g^{\text{ren}}(P_3) = W(if)H_g(P_3)W(if)^*$. Nous obtenons (voir par exemple [61]) :

$$\begin{aligned} H_g^{\text{ren}}(P_3) &= \frac{1}{2m_{\text{el}}} \sum_{j=1,2} \left(p_j - \alpha^{\frac{1}{2}} a_j(x'_{\text{el}}) - gA_j(x'_{\text{el}}, 0) + g\text{Re}\langle h_j^A(x'_{\text{el}}), f \rangle \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2m_{\text{el}}} \left(P_3 - d\Gamma(k_3) + \Phi(k_3 f) + \frac{1}{2}(k_3 f, f) - gA_3(x'_{\text{el}}, 0) + g\text{Re}\langle h_3^A(x'_{\text{el}}), f \rangle \right)^2 \\ &- \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2m_{\text{el}}} \sigma_3^{\text{el}} b(x'_{\text{el}}) - \frac{g}{2m_{\text{el}}} \sigma^{\text{el}} \cdot B(x'_{\text{el}}, 0) + V(x'_{\text{el}}) + H_{\text{ph}} - \Phi(|k|f) - \frac{1}{2}\langle |k|f, f \rangle, \end{aligned}$$

où, rappelons-le, $A_j(x'_{\text{el}}, 0) = \Phi(h_j^A(x'_{\text{el}}))$. La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne ici le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$.

Remarquons que $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ est unitairement équivalent à $H_g(P_3)$ si et seulement si f appartient à $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$. Notre principal résultat est alors :

Théorème 2.1 *Il existe $g_c > 0$ et $p_c > 0$ tels que pour tous $0 < |g| \leq g_c$ et $0 < |P_3| \leq p_c$,*

- (i) $H_g(P_3)$ possède un état fondamental si et seulement si $E'_g(P_3) = 0$.
- (ii) $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ possède un état fondamental.

Remarque 2.2

1. La preuve du théorème 2.1 s'adapte au cas des atomes et des ions (voir [9]), en remplaçant la condition $E'_g(P_3) = 0$ dans (i) par $Q\nabla E_g(P) = 0$, où Q représente la charge totale du système atomique. Le cas des atomes, $Q = 0$, est traité dans [9]. Pour toute valeur de la constante de couplage, l'existence d'un état fondamental pour $Q = 0$ est également obtenue dans [136], en adaptant la méthode de [91], mais sous l'hypothèse $E_g(P) \geq E_g(0)$ qui, jusqu'à maintenant, n'a pas pu être vérifiée pour une valeur quelconque de g . Dans [98], les auteurs montrent l'absence d'état fondamental pour $H_g(P)$ dans le cas $Q < 0$, en supposant que $\nabla E_g(P)$ est différent de 0. Ainsi, par rapport à ces résultats, la méthode que nous employons permet en plus d'obtenir l'existence d'un état fondamental pour $H_g^{\text{ren}}(P)$ et pour $H_g(P)$ lorsque $\nabla E_g(P) = 0$.
2. Si $E'_g(P_3) \neq 0$, (ii) fournit l'existence d'un état fondamental dans une représentation non équivalente à la représentation Fock des relations canoniques de commutation, comme dans le cas du modèle de Nelson (pour un système atomique non invariant par translation, voir [16, 63, 150]).

Un des points centraux de l'approche suivie pour démontrer le théorème 2.1, basée notamment sur des arguments développés dans [63], est la décomposition du hamiltonien d'interaction en une partie scalaire singulière et une partie régulière. Due en particulier au fait que le modèle considéré est invariant par translation, la difficulté principale est d'identifier une bonne décomposition du hamiltonien d'interaction, et de montrer que la partie "régulière" l'est effectivement. Pour ce faire, nous nous appuyons sur la régularité de l'énergie fondamentale par rapport à l'impulsion totale, et nous combinons cette propriété avec la formule de Feynman-Hellmann. Nous verrons d'ailleurs que l'association de ces deux propriétés trouve des applications dans d'autres contextes, voir les chapitres 5 et 6.

La propriété de régularité de l'application $P_3 \mapsto E_g(P_3)$ que nous utilisons dans notre preuve du théorème 2.1 est énoncée dans la proposition suivante :

Proposition 2.3 *Il existe $g_c > 0$ et $p_c > 0$ tels que pour tous $0 < |g| \leq g_c$, $P_3, k_3 \in \mathbb{R}$ tels que $|P_3| \leq p_c$, $|P_3 + k_3| \leq p_c$, $0 \leq \sigma \leq (e_1 - e_0)/2$, et $\delta > 0$,*

$$|E'_{g,\sigma}(P_3 + k_3) - E'_{g,\sigma}(P_3)| \leq C_\delta |k_3|^{\frac{1}{4} - \delta}, \quad (2.2)$$

où $C_\delta > 0$ est une constante dépendant de δ (mais ne dépendant pas de σ).

Remarquons qu'une propriété de régularité similaire dans le cas d'un électron libre interagissant avec le champ électromagnétique quantifié (voir (1.18)) est obtenue dans [46, 48, 79]. Notons par ailleurs que, pour ce modèle où un seul électron est considéré, $H_g(P)$ ne contient pas de partie électronique $h(b, V)$ ce qui, dans une certaine mesure, simplifie l'étude par rapport au modèle envisagé ici. Dans [46], le caractère C^2 de l'application $P \mapsto E_g(P) = \inf \text{spec}(H_g(P))$ est obtenu à partir d'une méthode basée sur l'utilisation du groupe de renormalisation spectral de Bach, Fröhlich et Sigal (voir aussi [23]). L'auteur montre de plus que $\nabla E(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$. Dans [48], à partir du travail antérieur de Pizzo [152] sur le modèle de Nelson, il est établi que $P \mapsto E_g(P)$ est de classe $C^{1+\delta}$ pour tout $0 \leq \delta < 1/4$. Nous avons pu adapter cette dernière méthode à notre modèle.

L'inégalité (2.2) est utilisée à la fois dans la preuve du point (i) du théorème 2.1 et dans celle de (ii). Plus précisément, nous utilisons (2.2) avec $\sigma = 0$ afin d'obtenir l'absence d'état fondamental de $H_g(P_3)$ lorsque $E'_g(P_3) \neq 0$: nous basant sur [63, Lemma 2.6], nous obtenons une contradiction en supposant l'existence d'un état fondamental $\Phi_g(P_3)$, grâce à la propriété

$$(k, \lambda) \mapsto \left\| [a_\lambda(k) - f(k, \lambda)] \Phi_g(P_3) \right\| \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}).$$

Un des points clés de la preuve, qui semble être un argument nouveau, repose sur la formule de Feynman-Hellmann combinée avec la proposition 2.3. Cela nous permet de montrer que

$$\left\| (H_{g,\sigma}(P_3 - k_3) - E_{g,\sigma}(P_3 - k_3))^{1/2} \Phi_{g,\sigma}(P_3) \right\| = \mathcal{O}(|k_3|^{\frac{1+\delta}{2}}).$$

Il s'avère que cet argument, ou une version similaire, trouve des applications dans d'autres contextes ; il est ainsi réutilisé dans [xvi] (voir le chapitre 6) et [xi] (voir le chapitre 5).

L'existence d'un état fondamental pour $H_g^{\text{ren}}(P_3)$, ou pour $H_g(P_3)$ lorsque $E'(P_3) = 0$, s'obtient quant à elle de la même façon que dans [10], en utilisant de plus (2.2) avec $\sigma > 0$ pour contrôler le nombre de photons dans l'état fondamental de $H_{g,\sigma}(P_3)$.

2-2 L'atome d'hydrogène habillé : splitting hyperfin et unicité de l'état fondamental

Nous décrivons dans ce chapitre les résultats obtenus en collaboration avec L. Amour dans [ix] et [xiii]. L'étude concerne l'analyse spectrale du hamiltonien associé à un atome d'hydrogène mobile en

électrodynamique quantique non relativiste, et l'objectif est de justifier, dans ce contexte, le splitting hyperfin de l'état fondamental. Commençons par rappeler brièvement ce phénomène dans le cas où l'interaction avec le champ de radiation n'est pas prise en compte (pour plus de détails, on pourra consulter par exemple [14, 50, 121, 143]).

Un système hydrogénoïde neutre, composé d'un électron de spin $\frac{1}{2}$ et d'un noyau de spin $\frac{1}{2}$, peut être décrit par le hamiltonien de Pauli agissant dans $L^2(\mathbb{R}^6; \mathbb{C}^4)$ et donné par l'expression

$$\begin{aligned} H^{\text{Pa}} = & \frac{1}{2m_{\text{el}}}(p_{\text{el}} - \alpha^{\frac{1}{2}}A_{\text{n}}(x_{\text{el}}))^2 - \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2m_{\text{el}}}\sigma^{\text{el}} \cdot B_{\text{n}}(x_{\text{el}}) \\ & + \frac{1}{2m_{\text{n}}}(p_{\text{n}} + \alpha^{\frac{1}{2}}A_{\text{el}}(x_{\text{n}}))^2 + \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{2m_{\text{n}}}\sigma^{\text{n}} \cdot B_{\text{el}}(x_{\text{n}}) - \frac{\alpha}{|x_{\text{el}} - x_{\text{n}}|}. \end{aligned}$$

Les notations $x_{\#}$, $p_{\#}$, $m_{\#}$, $\sigma^{\#}$ ont été introduites dans le chapitre 1. L'opérateur $A_{\text{n}}(x_{\text{el}})$ désigne le potentiel vecteur du champ électromagnétique engendré par le noyau et vu par l'électron, que l'on peut écrire sous la forme $A_{\text{n}}(x_{\text{el}}) = C\alpha^{1/2}(\sigma^{\text{n}} \wedge (x_{\text{el}} - x_{\text{n}})) / (m_{\text{n}}|x_{\text{el}} - x_{\text{n}}|^3)$, où C est une constante positive. Le vecteur $A_{\text{el}}(x_{\text{n}})$ est défini de la même façon, et $B_{\text{n}}(x_{\text{el}}) = ip_{\text{el}} \wedge A_{\text{n}}(x_{\text{el}})$, $B_{\text{el}}(x_{\text{n}}) = ip_{\text{n}} \wedge A_{\text{el}}(x_{\text{n}})$.

Le hamiltonien H^{Pa} peut s'obtenir comme limite non relativiste du hamiltonien de Dirac. Il permet de justifier la *structure hyperfine* de l'état fondamental de l'hydrogène. Plus précisément, notons $H^{\text{Pa}}(0)$ l'opérateur obtenu dans le cas où l'impulsion totale de l'atome est égale à 0. Alors $H^{\text{Pa}}(0)$ agit dans $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ et peut être décomposé en une somme de 4 termes, $H^{\text{Pa}}(0) = H_0 + H_1 + H_2 + H_3$, avec $H_0 = p_r^2/(2\mu) - \alpha/|r|$ (μ désigne la masse réduite de l'atome, et $p_r = -i\nabla_r$), H_1 est l'interaction orbitale, H_2 est l'interaction spin-orbite, et H_3 est l'interaction spin-spin (voir par exemple [14, Chapitre 4] et [3] pour plus de détails). Observons que H_0 possède un état fondamental de multiplicité 4. Les termes de corrections, H_1 , H_2 et H_3 induisent un déplacement de l'énergie fondamentale. De plus, due à l'interaction spin-spin, la valeur propre fondamentale se scinde en 2 parties : une valeur propre associée à un état fondamental non dégénéré, et une valeur propre de multiplicité 3. C'est ce phénomène que l'on appelle *splitting hyperfin* de l'état fondamental de l'hydrogène. Cela permet notamment d'expliquer la fameuse *raie à 21-cm* observée dans le spectre lumineux de l'hydrogène.

On souhaite ici comprendre le phénomène de *splitting hyperfin* dans le contexte de l'électrodynamique quantique non relativiste. Autrement dit, on étudie le hamiltonien défini par l'équation (1.19). On procède à la décomposition en intégrale directe décrite dans le paragraphe correspondant ; on arrive alors à l'opérateur $H_g(P)$ agissant dans

$$\mathcal{H}_{\text{fib}} = \mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{R}^3, dr) \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}},$$

et donné par l'expression

$$\begin{aligned} H_g(P) = & \frac{1}{2m_{\text{el}}}\left(\frac{m_{\text{el}}}{M}(P - P_{\text{ph}}) + p_r - gA\left(\frac{m_{\text{el}}}{M}g^{\frac{2}{3}}r\right)\right)^2 \\ & + \frac{1}{2m_{\text{n}}}\left(\frac{m_{\text{n}}}{M}(P - P_{\text{ph}}) - p_r + gA\left(-\frac{m_{\text{n}}}{M}g^{\frac{2}{3}}r\right)\right)^2 \\ & - \frac{1}{|r|} + H_{\text{ph}} - \frac{g}{2m_{\text{el}}}\sigma^{\text{el}} \cdot B\left(\frac{m_{\text{el}}}{M}g^{\frac{2}{3}}r\right) + \frac{g}{2m_{\text{n}}}\sigma^{\text{n}} \cdot B\left(-\frac{m_{\text{n}}}{M}g^{\frac{2}{3}}r\right), \end{aligned}$$

où $M = m_{\text{el}} + m_{\text{n}}$. Pour désigner la constante de couplage, que l'on supposera suffisamment petite, on a posé $g = \alpha^{\frac{3}{2}}$. On choisit, pour fixer les idées, la fonction de troncature ultraviolette apparaissant dans les expressions de $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ (voir (1.5) et (1.14)) de la forme explicite $\chi_{\Lambda}(k) = \mathbf{1}_{|k| \leq \Lambda}(k)$. De même, les vecteurs de polarisation $\varepsilon_{\lambda}(k)$ sont choisis de la forme explicite (1.8) L'énergie fondamentale est notée

$$E_g(P) = \inf \text{spec}(H_g(P)).$$

Dans [9], en utilisant notamment des techniques de [25, 91, 103], il est établi que pour g et P suffisamment petits, $E_g(P)$ est une valeur propre de $H_g(P)$, c'est-à-dire que $H_g(P)$ possède un état fondamental. Mentionnons également [136] où l'existence d'un état fondamental pour $H_g(P)$ est obtenue pour des valeurs arbitraires de g , sous l'hypothèse $E_g(0) \leq E_g(P)$. De plus, en utilisant un argument de [107], il est établi dans [9] que la multiplicité de $E_g(P)$ est inférieure à la multiplicité de $E_0(P) = \inf \text{spec}(H_0(P))$, où $H_0(P) = H_{g=0}(P)$ est l'opérateur non perturbé. En d'autres termes,

$$(0 <) \dim \text{Ker}(H_g(P) - E_g(P)) \leq \dim \text{Ker}(H_0(P) - E_0(P)) (= 4). \quad (2.3)$$

La multiplicité de $E_g(P)$ dépend bien sûr de la valeur des spins de l'électron et du noyau. Si les spins de l'électron et du noyau sont tous deux égaux à 0, $E_0(P)$ est non dégénérée, et c'est donc aussi le cas pour $E_g(P)$ d'après (2.3). Si le spin de l'électron est égal à $\frac{1}{2}$ et le spin du noyau est égal à 0, alors $E_0(P)$ est de multiplicité 2. En utilisant le théorème de dégénérescence de Kramer (voir [137]), on peut montrer que la multiplicité de $E_g(P)$ est paire ; elle est donc elle aussi égale à 2 d'après (2.3).

Revenons au cas qui nous intéresse. Notre principal résultat est le suivant.

Théorème 2.4 *Il existe $g_c > 0$ et $p_c > 0$ tels que, pour tous $0 < g \leq g_c$ et $0 \leq |P| \leq p_c$,*

$$E_g(P) = \inf \text{spec}(H_g(P)) \text{ est une valeur propre non dégénérée de } H_g(P).$$

Remarque 2.5

1. La valeur critique p_c peut être choisie égale à $M - \varepsilon$, avec $M = m_n + m_{\text{el}}$, en autorisant g_c à dépendre de ε . Pour des valeurs de $|P|$ supérieures à la masse totale M , en revanche, on s'attend à ce que $E_g(P)$ ne soit pas une valeur propre (en raison de la radiation de Cerenkov).
2. Le théorème 2.4 est établi dans l'article [xiii]. Dans [ix], en raisonnant par l'absurde, et à l'aide d'un argument basé sur une utilisation de l'application Feshbach-Schur, on montre le résultat plus faible $\dim \text{Ker}(H_g(P) - E_g(P)) < 4$. Certains lemmes intermédiaires de [ix] sont d'ailleurs réutilisés dans [xiii].
3. À côté de cet état fondamental unique, on s'attend à la présence de 3 résonances de parties réelles légèrement plus grandes que $E_g(P)$, et de parties imaginaires très petites. Démontrer l'existence de telles résonances permettrait d'expliquer la raie à 21-cm du spectre de l'hydrogène par la théorie de l'électrodynamique quantique non relativiste..
4. L'approche suivie pour démontrer le théorème 2.4 s'adapte facilement à d'autres cas, par exemple le modèle de l'atome d'hydrogène confiné par son centre de masse utilisé pour justifier l'effet Lamb-Dicke (voir les articles [i] et [ii]).

Les principaux ingrédients utilisés dans la preuve du théorème 2.4 sont une décomposition infrarouge de l'espace de Fock, combinée à une théorie de perturbations appliquée de manière itérative. L'introduction d'une troncature infrarouge dans le hamiltonien d'interaction est une étape standard dans l'analyse de modèles de QED non relativiste [70, 71]. L'idée de considérer une suite de hamiltoniens avec une troncature infrarouge de plus en plus petite, et de les comparer itérativement en utilisant la théorie des perturbations est due à Pizzo [152]. Cette idée a ensuite été appliquée dans différents contextes [24, 32, 48], voir aussi les sections 2-1 et 6-2.

Dans les articles précédemment cités, la méthode employée pour établir l'existence d'un état fondamental est la suivante : notons H le hamiltonien du modèle considéré, et H_σ le hamiltonien avec troncature infrarouge de paramètre σ , agissant sur l'espace de Fock des particules ayant une énergie plus grande que σ . Pour σ très grand, l'interaction disparaît, aussi vérifie-t-on aisément que H_σ possède un état fondamental unique, séparé du reste du spectre par un gap d'ordre $\mathcal{O}(\sigma)$. Ensuite, en utilisant la théorie des perturbations, on montre que, si étant donné un certain $\sigma > 0$, H_σ vérifie cette propriété

(unicité de l'état fondamental et gap d'ordre $\mathcal{O}(\sigma)$ au-dessus de l'état fondamental), alors il en est de même pour $H_{\sigma/2}$. Un raisonnement par récurrence montre alors que H_σ possède un état fondamental Φ_σ pour tout $\sigma > 0$. Ensuite, pour obtenir l'existence d'un état fondamental pour H , on considère la limite faible $\Phi = w\text{-}\lim \Phi_{\sigma_j}$ le long d'une sous-suite $\sigma_j \rightarrow 0$. On observe facilement que $H\Phi = E\Phi$, où $E = \inf \text{spec}(H)$, et il reste alors à vérifier que $\Phi \neq 0$. Pour ce faire, en utilisant un argument de type "pull-through", on montre que $\langle \Phi, N_{\text{ph}}\Phi \rangle \ll 1$ (pourvu que la constante de couplage soit suffisamment petite), où $N_{\text{ph}} = d\Gamma(\mathbf{1})$ est l'opérateur du nombre de photons. Ceci implique que le produit scalaire de Φ avec l'état fondamental non perturbé est non nul, et donc que Φ lui-même est non nul.

Ce raisonnement repose en particulier sur le fait que l'état fondamental du hamiltonien non perturbé est non dégénéré. Dans notre contexte, la multiplicité de l'état fondamental non perturbé est égale à 4 et la méthode ne peut donc pas s'appliquer directement. De manière un peu plus précise, notons $H_{g,\sigma}(P)$ l'opérateur obtenu à partir de $H_g(P)$ en introduisant une troncature infrarouge $\mathbf{1}_{|k| \geq \sigma}$ dans les expressions de $A(\cdot)$ et $B(\cdot)$ puis en restreignant l'opérateur obtenu à l'espace

$$\mathcal{H}_{\text{fib}, \geq \sigma} = \mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{R}^3, dr) \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}, \geq \sigma},$$

où $\mathcal{H}_{\text{ph}, \geq \sigma} = \Gamma_s(L^2(\{k \in \mathbb{R}^3, |k| \geq \sigma\} \times \{1, 2\}))$. Notons aussi $E_{g,\sigma}(P) = \inf \text{spec}(H_{g,\sigma}(P))$. Bien sûr, pour $\sigma \geq \Lambda$, on a $H_{g,\sigma}(P) = H_{0,\sigma}(P)$ et donc le spectre de $H_{g,\sigma}(P)$ est explicite : il se compose de la valeur propre $E_{g,\sigma}(P)$ (de multiplicité 4), et de la demi-droite de spectre absolument continu $[E_{g,\sigma}(P) + C\sigma, +\infty[$ où C est une certaine constante positive (voir la figure 2.1).



FIGURE 2.1 – Spectre de $H_{g,\sigma}(P)$ pour $\sigma \geq \Lambda$

On souhaite alors commencer la théorie des perturbations itérativement, en étudiant $H_{g,\sigma/2}$ comme perturbation de $H_{g,\sigma}$. Toutefois, par rapport aux modèles étudiés précédemment dans la littérature, la difficulté principale que l'on rencontre vient du fait que, lorsque σ devient strictement plus petit que Λ , $E_{g,\sigma}(P)$ se scinde en 4 valeurs propres généralement distinctes. En particulier, pour des valeurs de σ telles que $g^2 \ll \sigma < \Lambda$, la distance de $E_{g,\sigma}(P)$ au reste du spectre de $H_{g,\sigma}(P)$ est négligeable par rapport à σ . Il nous faut ainsi choisir comme hamiltonien initial du procédé itératif de perturbations l'opérateur $H_{g,\sigma}(P)$ avec σ de la forme $\sigma = Cg^2$ (et non plus $\sigma \geq \Lambda$) où C est une constante positive à déterminer. Pour une telle valeur du paramètre de troncature infrarouge, le hamiltonien d'interaction dans $H_{g,\sigma}(P)$ est du même ordre que la distance de $E_{g,\sigma}(P)$ au reste du spectre, et on ne peut donc pas appliquer directement la théorie analytique des perturbations de Kato pour des valeurs propres isolées. On s'appuie à la place sur une théorie des perturbations au second ordre en utilisant l'application Feshbach-Schur.

L'application Feshbach-Schur est un outil naturel pour étudier la perturbation au second ordre de valeurs propres éventuellement plongées dans le spectre essentiel. Dans le cadre de la QED non relativiste, les opérateurs de Feshbach-Schur ont été introduits et étudiés dans [25, 26], puis de façon plus approfondie dans [22, 90].

Dans notre approche, nous combinons, semble-t-il pour la première fois, l'application Feshbach-Schur avec le principe du min-max. Cela nous permet de montrer que le spectre de $H_{g,\sigma}(P)$ est de la forme représentée dans la figure 2.2 : le bas du spectre $E_{g,\sigma}(P)$ est une valeur propre isolée séparée par une distance d'ordre g^2 de 3 autres valeurs propres et d'une demi-droite de spectre essentiel.

Le reste de la preuve reprend, en les affinant quelque peu, des idées de [24, 152] et de la section 2-1. On prouve que si l'état fondamental de $H_{g,\sigma}(P)$ est unique et séparé du reste du spectre par une distance

FIGURE 2.2 – Spectre de $H_{g,\sigma}(P)$ pour $\sigma = Cg^2$, $C \gg 1$

supérieure à $\eta\sigma$, alors il en est de même pour $H_{g,\tau}(P)$, avec $\tau = \kappa\sigma$ et $0 < \kappa < 1$. Cela montre que, pour des petites valeurs de σ , le spectre de $H_{g,\sigma}(P)$ a la forme décrite dans la figure 2.3 : une valeur propre non dégénérée $E_{g,\sigma}(P)$ séparée du reste du spectre par une distance supérieure ou égale à $\eta\sigma$ pour un certain $\eta > 0$. On conclut alors la preuve en fixant comme il faut les paramètres η et κ .

FIGURE 2.3 – Spectre de $H_{g,\sigma}(P)$ pour $\sigma \leq C'g^2$, $C' \ll 1$

Chapitre 3

Règle d'or de Fermi

Ce chapitre résume les résultats obtenus en collaboration avec J. S. Møller et E. Skibsted dans les articles [vii] et [viii]. La question à l'origine de ces travaux est de savoir ce que l'on peut dire du spectre ponctuel de hamiltoniens de type Pauli-Fierz (par exemple le hamiltonien de Nelson), sans imposer de condition de faible couplage.

Comme mentionné dans l'introduction, pour de faibles couplages, le spectre des hamiltoniens de Pauli-Fierz est maintenant relativement bien connu, au moins pour la partie située entre le bas du spectre (l'énergie fondamentale) et le seuil d'ionisation. Grâce à la théorie de Mourre [28, 64, 85, 166] ou à la théorie des résonances [25, 163] (voir aussi l'article [ii]), on vérifie en particulier que le critère de la règle d'or de Fermi est satisfait : si on ajoute une petite perturbation, les valeurs propres excitées du hamiltonien libre disparaissent. Physiquement, ceci est dû au fait que les états excités d'un atome ou d'une molécule sont instables (métastables), associés à des résonances plutôt qu'à des valeurs propres. Nous reviendrons sur cette propriété au chapitre suivant.

Pour des valeurs quelconques de la constante de couplage, à condition que l'interaction soit suffisamment régulière dans l'infrarouge, il est établi qu'un état fondamental existe [91, 94]. Le spectre ponctuel est donc non vide, mais hormis cette propriété, peu de choses sont connues. Une conséquence de l'inégalité de Mourre obtenue dans [82, 83] est que le spectre ponctuel est localement fini, c'est-à-dire que, dans tout intervalle borné, on peut trouver au plus un nombre fini de valeurs propres, chacune étant de multiplicité finie.

Dans ce chapitre nous allons voir que le spectre ponctuel de hamiltoniens de type Pauli-Fierz, pour des valeurs quelconques de la constante de couplage, est génériquement réduit au bas du spectre. "Génériquement" signifie ici que, si pour une interaction donnée, une valeur propre excitée apparaît dans le spectre de l'opérateur étudié, alors cette valeur propre est instable au sens de la règle d'or de Fermi. Autrement dit les hamiltoniens de Pauli-Fierz satisfont le critère de la règle d'or de Fermi.

Pour mener à bien notre étude, nous nous plaçons dans le cadre abstrait de la théorie de Mourre. Nous qualifions de "régulière" la théorie de Mourre pour laquelle les commutateurs itérés entre H (le hamiltonien) et A (l'opérateur conjugué), en particulier le premier commutateur $[H, A]$, sont contrôlables par les résolvantes de H . Voir [4, 13, 28, 61, 75, 86, 119, 148]. A l'inverse nous appelons "singulière" la théorie de Mourre pour laquelle le commutateur $[H, A]$ n'est pas nécessairement contrôlable par le hamiltonien. Cette situation apparaît notamment dans [64, 82, 83, 85, 146, 166]. La théorie de Mourre régulière est ainsi un cas particulier de la théorie de Mourre singulière.

Dans la première section, on s'intéresse à la question de la régularité des états propres par rapport à l'opérateur conjugué A . Dans la seconde section, on établit la validité du critère de la règle d'or de Fermi pour une classe abstraite de hamiltoniens, sous une hypothèse de régularité des vecteurs propres.

En combinant les deux parties, on vérifie alors que le critère de la règle d'or de Fermi est satisfait pour des hamiltoniens de Pauli-Fierz avec des valeurs quelconques de la constante de couplage.

3-1 Régularité des vecteur propres

3-1.1 Cadre abstrait

L'idée centrale de laquelle découlent les résultats de cette section remonte à [68, 69]. Dans [68, 69], la décroissance exponentielle des fonctions propres d'opérateurs de Schrödinger à N corps est établie. Ici, nous n'étudions pas la décroissance de fonctions propres dans l'espace des positions, mais plutôt la décroissance dans la représentation spectrale d'un opérateur auxiliaire A , conjugué à H dans le sens de Mourre. Soit, plus précisément, H un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert et ψ un vecteur propre de H . On s'intéresse à la question suivante :

Q(k) : Etant donné $k \in \mathbb{N}$, sous quelles conditions sur la paire d'opérateurs H et A peut-on dire que ψ est dans le domaine de A^k ?

C'est une question qui apparaît naturellement dans le contexte de la théorie des perturbations au second ordre pour des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel. En effet, une réponse affirmative à la question $Q(k)$ permet, à l'aide du principe d'absorption limite, de construire puis d'analyser l'opérateur de règle d'or de Fermi. Dans [119], en reprenant de façon abstraite l'approche de [4], le critère de la règle d'or de Fermi est formulé puis vérifié sous la condition que les états propres sont dans le domaine de A^2 . Voir aussi [28, 64, 146].

Pour des opérateurs de Schrödinger à N corps, l'opérateur conjugué est généralement choisi comme le générateur des dilatations ; la condition $\psi \in \mathcal{D}(A^2)$ est alors remplie d'après la propriété de décroissance exponentielle de Froese et Herbst. Dans d'autres contextes, en revanche, la question de savoir si les états propres sont dans le domaine de A^2 est non triviale. Les premières réponses à cette question, dans le cadre de la théorie de Mourre régulière, sont dues à Cattaneo [44, 45].

Décrivons maintenant plus précisément nos résultats. Nous rappelons que, étant donné deux opérateurs auto-adjoints H, A sur un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} et $j \in \mathbb{N}^*$, H est dit de classe $C^j(A)$ s'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \text{spec}(H)$ tel que l'application $t \mapsto e^{itA}(H - z)^{-1}e^{-itA}$ est de classe $C^j(\mathbb{R})$ pour la topologie forte de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Rappelons également (voir [13]) que si $H \in C^1(A)$, l'ensemble $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{D}(H)$, et la forme $[H, A]$ définit sur le domaine $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$ se prolonge à une forme bornée sur $\mathcal{D}(H)$. L'extension correspondante est notée $[H, A]^0$ et est interprétée comme un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{D}(H)^*)$. Si $[H, A]^0$ se prolonge par continuité à un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{H})$, nous dirons que $H \in C_{\text{Mo}}^1(A)$. D'après [81], nous pouvons noter que $H \in C_{\text{Mo}}^1(A)$ si et seulement si les conditions de Mourre [148] pour le premier commutateur sont satisfaites.

Nos principales hypothèses sont les suivantes.

Conditions 3.1 *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe séparable. Soient H, A et N des opérateurs auto-adjoints dans \mathcal{H} et H' un opérateur symétrique dans \mathcal{H} tels que $\mathcal{D}(H') = \mathcal{D}(N)$ et $N \geq \mathbf{1}$. Posons $R(\eta) = (A - \eta)^{-1}$ pour $\eta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On suppose*

1. *L'opérateur N est de classe $C_{\text{Mo}}^1(A)$. Notons $N' = i[N, A]^0$.*
2. *L'opérateur N est de classe $C^1(H)$, et il existe $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ tel que*

$$i[N, H]^0 \in \mathcal{B}(N^{-\frac{1}{2}+\kappa}\mathcal{H}, N^{\frac{1}{2}-\kappa}\mathcal{H}).$$

3. Il existe $\sigma > 0$ tel que, pour tout $\eta \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|\operatorname{Im} \eta| \geq \sigma$,

$$i[H, R(\eta)] = -R(\eta)H'R(\eta).$$

au sens des formes sur $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(N^{1/2})$ (on peut vérifier que les opérateurs $N^{-1/2}H'N^{-1/2}$ et $N^{\mp 1/2}R(\eta)N^{\pm 1/2}$ sont bornés si σ est suffisamment grand).

4. Le commutateur $i[H', A]$ défini au sens des formes sur $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(N)$ se prolonge à un opérateur H'' vérifiant

$$H'' = i[H', A]^0 \in \mathcal{B}(N^{-\frac{1}{2}}\mathcal{H}, N^{\frac{1}{2}}\mathcal{H}).$$

Condition 3.2 (Condition du viriel) Il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ telles que

$$N \leq C_1H + C_2H' + C_3\mathbb{1}, \quad (3.1)$$

au sens des formes sur $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(N^{1/2})$.

Condition 3.3 (Condition de Mourre) Pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $c_0 > 0$, $C_4 \in \mathbb{R}$, $f_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $0 \leq f_\lambda \leq 1$ et $f_\lambda = 1$ dans un voisinage de λ , et un opérateur compact K_0 dans \mathcal{H} tels que

$$H' \geq c_0\mathbb{1} - C_4f_\lambda^\perp(H)^2\langle H \rangle - K_0, \quad (3.2)$$

au sens des formes quadratiques sur $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(N^{1/2})$, où l'on a utilisé les notations $f_\lambda^\perp = 1 - f_\lambda$ et $\langle H \rangle = (1 + H^2)^{1/2}$.

Remarque 3.4

1. On peut vérifier qu'étant donnés H , A et N , il existe au plus un opérateur H' tel que les conditions 3.1 (1), (2), et (3) sont satisfaites.
2. En pratique, on peut utiliser une version plus faible de la condition de Mourre de la forme

$$H' \geq c_0\mathbb{1} - \mathbb{R}e\{B(H - \lambda)\} - K_0,$$

où $B = B(\lambda)$ est un opérateur borné tel que $B\mathcal{D}(N^{1/2}) \cup B^*\mathcal{D}(N^{1/2}) \subset \mathcal{D}(N^{1/2})$.

Théorème 3.5 Supposons que les conditions 3.1, 3.2 et 3.3 soient satisfaites. Soit ψ un état propre, $(H - \lambda)\psi = 0$ (avec λ donné par la condition 3.3), tel que

$$\psi \in \mathcal{D}(N^{\frac{1}{2}}). \quad (3.3)$$

Alors $\psi \in \mathcal{D}(A)$ et $A\psi \in \mathcal{D}(N^{1/2})$.

Si l'on impose des conditions sur les commutateurs entre H et A d'ordres supérieurs, on obtient un résultat de régularité plus grande.

Condition 3.6 Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que le commutateur $i^\ell \operatorname{ad}_A^\ell(H')$ défini au sens des formes quadratiques sur $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(N)$, $\ell = 0, \dots, k_0$, se prolonge à un opérateur

$$i^\ell \operatorname{ad}_A^\ell(H') \in \mathcal{B}(N^{-1}\mathcal{H}, \mathcal{H}); \quad \ell = 0, \dots, k_0 - 1.$$

$$i^{k_0} \operatorname{ad}_A^{k_0}(H') \in \mathcal{B}(N^{-\frac{1}{2}}\mathcal{H}, N^{\frac{1}{2}}\mathcal{H}).$$

Théorème 3.7 Supposons que les conditions 3.1–3.3 et 3.6 soient satisfaites. Soit ψ un état propre, $(H - \lambda)\psi = 0$ (avec λ donné par la condition 3.3), vérifiant (3.3). Soit k_0 donné par la condition 3.6. Alors $\psi \in \mathcal{D}(A^{k_0})$, et pour tout $k \in \{1, \dots, k_0\}$, on a $A^k\psi \in \mathcal{D}(N^{1/2})$.

En imposant une condition supplémentaire sur le second commutateur entre N et A , on peut améliorer le résultat du théorème 3.5 de la façon suivante.

Théorème 3.8 *Supposons que les conditions 3.1–3.3 soient satisfaites. Supposons de plus qu'il existe $\kappa_1 > 0$ tel que le commutateur $i[N', N]$ initialement défini au sens des formes sur $\mathcal{D}(N)$ se prolonge à un opérateur vérifiant*

$$i[N', N] \in \mathcal{B}(N^{-1}\mathcal{H}, N^{1-\kappa_1}\mathcal{H}). \quad (3.4)$$

Soit ψ un état propre, $(H - \lambda)\psi = 0$ (avec λ donné par la condition 3.3), vérifiant (3.3). Alors $\psi \in \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{D}(A)$, $N^{1/2}\psi \in \mathcal{D}(A)$ et $A\psi \in \mathcal{D}(N^{1/2})$.

Remarque 3.9

1. *En imposant des conditions sur des commutateurs entre A et N d'ordres supérieurs, on peut généraliser le résultat du théorème 3.8 (voir plus précisément le théorème 2.12 dans [vii]).*
2. *Dans tous les résultats précédents, l'hypothèse $N \geq \mathbb{1}$ est faite par commodité ; il suffit en fait de supposer que N est semi-borné inférieurement.*
3. *Lorsque H est semi-borné inférieurement, les conditions de la théorie de Mourre régulière sont un cas particulier du cadre précédent, en choisissant $N = H + C \geq \mathbb{1}$. Même si H n'est pas semi-borné inférieurement, il est d'ailleurs possible d'adapter les preuves pour vérifier que nos résultats sont toujours valables.*
4. *Le résultat du théorème 3.7 est optimal par rapport au nombre de commutateurs qu'il est nécessaire de contrôler. Autrement dit, le résultat est faux si l'on considère un commutateur de moins dans la condition 3.6. Par rapport à [45], notre méthode requiert le contrôle d'un commutateur de moins.*
5. *Les preuves des théorèmes 3.5, 3.7 et 3.8 fournissent des estimations explicites. Plus précisément, si toutes les constantes c_0, C_1, \dots, C_4 dans (3.1) et (3.2) sont uniformes par rapport à λ dans un certain intervalle compact I donné, et si toutes les normes d'opérateurs apparaissant dans les conditions 3.1–3.3 et 3.6 sont aussi uniformes, alors les estimations obtenues sont par exemple de la forme*

$$\|N^{\frac{1}{2}}A^k\psi\| \leq C\|N^{\frac{1}{2}}\psi\|,$$

où $C = C(k, I, K_0)$, $K_0 = K_0(\lambda)$ est l'opérateur compact donné par (3.2), et $k \leq k_0$. Dans le contexte de la théorie des perturbations, I sera typiquement un petit intervalle centré en une valeur propre non perturbée λ_0 , et $K_0 = K_0(\lambda_0)$. Ainsi les constantes obtenues ne dépendront que de cet intervalle I .

Formellement, en utilisant un développement en commutateurs entre H et des puissances de A , combinée à la positivité du premier commutateur fournie par l'estimation de Mourre, la preuve de nos résultats (en particulier le théorème 3.7) s'écrit sans difficulté notable. Néanmoins, pour justifier les calculs, il est bien entendu nécessaire de mettre en place certaines approximations, par exemple en approximant les puissances A^k par certaines fonctions bornées de A . Le cœur de la difficulté est alors de trouver de bonnes approximations permettant d'estimer les termes de restes convenablement, tout en minimisant le nombre de commutateurs utilisés. Pour l'application à la théorie quantique des champs qui suit, il est en effet crucial de minimiser le nombre de commutateurs ; et comme mentionné dans la remarque 3.9 4), le nombre de commutateurs requis pour nos résultats est optimal.

3-1.2 Application : modèle de Nelson non massif

On en vient maintenant à l'application de la théorie présentée dans la sous-section précédente à des modèles issus de la théorie quantique des champs. Mentionnons que l'on peut également appliquer la

théorie de la sous-section 3-1.1 au modèle AC-Stark (décrivant N particules chargées dans un champ de Stark périodique) et obtenir ainsi certains résultats nouveaux dans ce contexte ; nous ne donnons pas les détails, voir pour plus de précisions la section 1.3 dans [vii].

Nous considérons typiquement le modèle de Nelson de la section 1-3,

$$H_g = H_{\text{el}} + H_f + g\Phi(h(x_{\text{el}})), \quad (3.5)$$

avec un opérateur électronique $H_{\text{el}} = p_{\text{el}}^2/(2m_{\text{el}}) + V(x_{\text{el}})$ agissant dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Nous allons supposer que le potentiel V est confinant, et, plus précisément, que l'hypothèse suivante est satisfaite :

Condition 3.10 $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et il existe c_0, c_1 et $\alpha > 2$ tels que $V(x) \geq c_0|x|^{2\alpha} - c_1$.

Nous considérons de plus, pour simplifier et fixer les idées, une fonction de couplage (voir (1.16)) donnée par

$$h(x, k) = e^{-\frac{|k|^2}{2\Lambda^2}} |k|^\mu e^{ik \cdot x}. \quad (3.6)$$

Pour énoncer notre principal théorème concernant le modèle de Nelson confiné, il nous faut également introduire un opérateur conjugué. Celui que nous considérons est un générateur des translations radiales dans l'espace de Fock, modifié au voisinage de l'origine (dans l'espace des impulsions) de telle façon qu'une estimation de Mourre est vérifiable (voir [83]). On considère une fonction $d \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ satisfaisant

$$d(\omega) = 1 \text{ si } \omega \geq 1, \quad -C_d \frac{d(\omega)}{\omega} \leq d'(\omega) < 0 \text{ si } 0 < \omega < 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} d(\omega) = +\infty,$$

pour une certaine constante $C_d > 0$, et

$$\forall \omega \in]0, 1], \quad d(\omega) \leq C'_d \omega^{-\frac{1}{2}},$$

pour une certaine constante $C'_d > 0$. Ensuite, soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(\omega) = 1$ pour $|\omega| < 1/2$, et $\chi(\omega) = 0$ pour $|\omega| > 1$. Etant donné un paramètre δ tel que $0 < \delta \leq 1/2$, on considère alors la fonction s_δ de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} donnée par

$$s_\delta(\omega) = \chi(\omega/\delta)d(\delta)\omega^{-1} + (1 - \chi)(\omega/\delta)d(\omega)\omega^{-1}.$$

A partir de cette fonction, on construit le champ de vecteurs $\vec{s}_\delta(k) = s_\delta(|k|)k$, égal à $k/|k|$ pour $|k| > 1$ et à $d(\delta)k/|k|$ pour $|k| < \delta/2$. Sur l'espace à une particule, notre opérateur conjugué est donné par

$$a_\delta = \frac{1}{2}(\vec{s}_\delta \cdot i\nabla_k + i\nabla_k \cdot \vec{s}_\delta).$$

Cet opérateur est symétrique et fermable sur le domaine $\{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), f(0) = 0\}$. Sa fermeture, représentée par le même symbole, est un opérateur symétrique maximal mais non auto-adjoint. L'opérateur conjugué utilisé pour notre étude est alors la seconde quantification de a_δ ,

$$A_\delta = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{\text{el}}} \otimes d\Gamma(a_\delta),$$

qui est également un opérateur symétrique maximal.

Sous sa forme la plus simple, notre principal résultat concernant le modèle de Nelson est alors le suivant :

Théorème 3.11 *Supposons que la condition 3.10 est satisfaite et que la fonction de couplage est donnée par l'expression (3.6), avec $\mu > 1/2$. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Il existe $0 < \delta \leq 1/2$, $r > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $g \in \mathbb{R}$, avec $|g - g_0| \leq r$, et $\lambda \in \text{spec}_{\text{pp}}(H_g) \cap]-\infty, \lambda_0]$ on a*

$$\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(H_g): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}(N_{\text{ph}}^{\frac{1}{2}} A_\delta) \cap \mathcal{D}(A_\delta N_{\text{ph}}^{\frac{1}{2}}) \cap \mathcal{D}(N_{\text{ph}}),$$

et

$$\|N_{\text{ph}}^{\frac{1}{2}} A_\delta \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(H_g)\| + \|A_\delta N_{\text{ph}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(H_g)\| + \|N_{\text{ph}} \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(H_g)\| \leq C,$$

où $N_{\text{ph}} = d\Gamma(\mathbf{1})$.

Remarque 3.12

1. *Ce théorème est valable pour une classe de modèles de type Pauli-Fierz confinants contenant comme cas particulier le modèle de Nelson donné ici (voir la section 5 dans l'article [vii]). De même, on peut considérer des perturbations de la fonction de couplage initiale par des éléments d'un certain espace de Banach de fonctions (autrement dit ce n'est pas seulement la constante de couplage qui varie, mais la fonction de couplage elle-même).*
2. *Grâce à l'hypothèse de confinement 3.10, on peut utiliser la transformation de Pauli-Fierz (ou transformation de Power-Zienau-Wooley, voir [83, Section 1] ou la section 1 dans [vii]) pour améliorer le comportement infrarouge de l'interaction. Pour le hamiltonien transformé, on peut alors énoncer un théorème similaire avec la condition plus faible $\mu > -1/2$.*
3. *L'énoncé du théorème peut aussi être légèrement amélioré de la façon suivante : pour tout δ suffisamment petit, il existe $r > 0$ et C tels que la conclusion du théorème est vérifiée. L'énoncé plus haut est suffisant pour le problème qui nous intéresse.*
4. *Le domaine de a_δ ne dépend pas de δ et est égal au domaine du générateur des translations radiales dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. En revanche, après seconde quantification, le domaine de A_δ pourrait dépendre de δ , d'où la formulation du théorème en termes de δ . Rappelons que le choix de cet opérateur conjugué (dépendant d'un petit paramètre δ) est fait dans [83] et permet d'obtenir une estimation de Mourre pour H_g .*
5. *Il était jusqu'à présent seulement connu que les états propres de H_g appartenaient à $\mathcal{D}(N_{\text{ph}}^{1/2})$. Le résultat que les états propres sont dans le domaine de N_{ph} est nouveau.*

Remarquons que dans la théorie abstraite présentée dans la sous-section 3-1.1, l'opérateur conjugué est supposé auto-adjoint. Ici, l'opérateur conjugué A_δ n'est pas auto-adjoint, seulement symétrique maximal. Pour s'affranchir de cette difficulté, nous utilisons une astuce de [123], réutilisée dans [64, 65, 95], consistant à "élargir" l'espace de Hilbert en ajoutant un ensemble de photons non physiques. Plus précisément, en coordonnées polaires, l'espace de Hilbert pour un photon peut s'écrire sous la forme $L^2([0, +\infty[) \otimes L^2(S^2)$, la relation de dispersion étant la multiplication par la variable radiale $\omega \in [0, +\infty[$. On élargit alors cet espace à $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(S^2)$, et on prolonge convenablement la relation de dispersion dans la partie non physique $] -\infty, 0]$. Dans [64, 65, 95], le prolongement choisi est l'application linéaire évidente $\omega \rightarrow \omega$ sur $] -\infty, 0]$. Afin, en particulier, de conserver une estimation de Mourre pour l'opérateur étendu, nous avons été amenés à choisir un nouveau prolongement donné par $\omega \rightarrow -e^{-\omega} - 1 - \omega^2/2$ sur $] -\infty, 0]$. On peut alors définir un opérateur conjugué auto-adjoint sur l'espace de Hilbert élargi, démontrer les résultats pour l'opérateur hamiltonien élargi, puis en déduire les résultats pour le hamiltonien initial.

Dans la section suivante, nous allons voir comment les résultats de régularité des états propres obtenus sont cruciaux pour le critère de la règle d'or de Fermi.

3-2 Théorie des perturbations au second ordre pour des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel

Nous étudions maintenant la théorie des perturbations au second ordre pour des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint. La théorie des perturbations pour des valeurs propres isolées de multiplicités finies est bien comprise, au moins dans le cas où les perturbations considérées sont analytiques au sens de Kato (voir [127, 157]). La question est en revanche plus délicate pour des valeurs propres plongées dans le spectre essentiel. Pour étudier ce problème, on peut, sous certaines conditions, utiliser des techniques de déformation analytique, donnant lieu à la présence de résonances (mentionnons ici les références [5, 25, 29, 123, 157, 165] parmi de nombreuses autres contributions). Dans [4], une autre méthode permettant d'étudier le comportement de valeurs propres plongées sous l'effet de perturbations est développée, basée sur la méthode des commutateurs de Mourre [148]. Dans cette section, nous allons développer ce point de vue dans un cadre abstrait.

Nous ferons essentiellement deux hypothèses. La première correspond à un ensemble de conditions requis pour pouvoir appliquer la méthode de Mourre (voir la condition 3.15 plus bas). Comme mentionné au début de cette section, nous nous placerons ici dans le cadre d'une théorie de Mourre singulière proche de celles développées dans [82, 83, 146, 166]. Nous verrons que cette théorie de Mourre singulière s'applique à l'étude d'opérateurs de type Pauli-Fierz dans la sous-section 3-2.2. Notre deuxième hypothèse concerne la régularité des états propres par rapport à un opérateur conjugué (voir les conditions 3.19, 3.21 et 3.22 plus bas). Pour l'application principale qui nous intéresse, la régularité des états propres est une conséquence des résultats obtenus dans la section précédente.

Nos principaux objectifs sont de vérifier la "semi-continuité du spectre ponctuel" (dans le sens du théorème 3.26) et de montrer que le critère de la règle d'or de Fermi est satisfait (théorème 3.28).

3-2.1 Cadre abstrait

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe séparable. Soient H et M deux opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} tels que $M \geq 0$. Soit R un opérateur symétrique tel que $\mathcal{D}(R) \supset \mathcal{D}(H)$. Soit

$$H' = M + R \quad \text{défini sur} \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}(M) \cap \mathcal{D}(H).$$

Sous la condition 3.15 (1), nous verrons que \mathcal{D} est dense dans \mathcal{H} (voir la remarque 3.16 2) plus bas). Soit

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}(M^{\frac{1}{2}}) \cap \mathcal{D}(|H|^{\frac{1}{2}}),$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{G}}^2 = \|M^{\frac{1}{2}}u\|_{\mathcal{H}}^2 + \||H|^{\frac{1}{2}}u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Soit A un opérateur fermé et symétrique maximal sur \mathcal{H} . En particulier, en introduisant les indices de défaut $n_{\mp} = \dim \text{Ker}(A^* \pm i)$, ou bien $n_+ = 0$, ou bien $n_- = 0$. Pour fixer les idées, nous supposons que $n_+ = 0$, si bien que A est le générateur d'un C_0 -semi-groupe d'isométries noté $\{W_t\}_{t \geq 0}$ (voir par exemple [53, Théorème 10.4.4]; si $n_- = 0$, il suffit de remplacer A par $-A$ dans la théorie qui va suivre). Rappelons que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe signifie que l'application $[0, +\infty[\ni t \mapsto W_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vérifie $W_0 = I$, $W_t W_s = W_{t+s}$ pour $t, s \geq 0$, et $w\text{-}\lim_{t \rightarrow 0^+} W_t = I$ (voir par exemple [82, Sous-section 2.5] ou [101, Chapitre 10]). La notation $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés sur \mathcal{H} et $w\text{-}\lim$ désigne la limite faible (rappelons qu'un C_0 -semi-groupe sur un espace de Hilbert est nécessairement

fortement continu sur $[0, +\infty[$, voir [101, Théorème 10.6.5]). L'opérateur A est le générateur du C_0 -semi-groupe $\{W_t\}_{t \geq 0}$ signifie que

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{H}, \lim_{t \rightarrow 0^+} (it)^{-1}(W_t u - u) \text{ existe}\}, \quad Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} (it)^{-1}(W_t u - u). \quad (3.7)$$

On note alors $W_t = e^{itA}$.

Etant donnés deux espaces de Hilbert \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , on note $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ l'ensemble des opérateurs bornés de \mathcal{H}_1 dans \mathcal{H}_2 . Si B est un opérateur fermé, on utilise la notation $\langle B \rangle = (1 + B^*B)^{1/2}$. Rappelons la définition suivante due à [82] :

Définition 3.13 Soient $\{W_{1,t}\}$ et $\{W_{2,t}\}$ deux C_0 -semi-groupes sur des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, avec générateurs respectifs A_1 et A_2 . Un opérateur $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ appartient à $C^1(A_1; A_2)$ si et seulement si

$$\|W_{2,t}B - BW_{1,t}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)} \leq Ct, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Remarque 3.14

1. D'après [82, Proposition 2.29], $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ est de classe $C^1(A_1; A_2)$ si et seulement si la forme sesquilinéaire ${}_2[B, iA]_1$ définie sur $\mathcal{D}(A_2^*) \times \mathcal{D}(A_1)$ par

$$\langle \phi, {}_2[B, iA]_1 \psi \rangle = i \langle B^* \phi, A_1 \psi \rangle - i \langle A_2^* \phi, B \psi \rangle,$$

est borné dans $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1$ muni de la topologie produit. L'opérateur borné associé, appartenant à $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$, est noté $[B, iA]^0$. On a alors

$$[B, iA]^0 = s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}[BW_{1,t} - W_{2,t}B], \quad (3.8)$$

où $s\text{-}\lim$ désigne la limite forte. On dit que B est de classe $C^2(A_1; A_2)$ si et seulement si $B \in C^1(A_1; A_2)$ et si $[B, iA]^0 \in C^1(A_1; A_2)$.

2. Un opérateur B est de classe $C^1(A)$ dans le sens habituel (voir section 3-1) si et seulement s'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $(B - z)^{-1} \in C^1(A; A)$ (c'est-à-dire $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}$ et $A_j = A$, $j = 1, 2$).
3. La classe de Mourre standard, cf. [148], est un sous-ensemble de $C^1(A)$ donné comme suit. Remarquons que pour tout $B \in C^1(A)$, le commutateur $[B, iA]$ défini au sens des formes sur $\mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(A)$ se prolonge de manière unique (par continuité) à une forme bornée, $[B, iA]^0$, sur $\mathcal{D}(B)$. Nous disons que B est de classe Mourre- $C^1(A)$ si et seulement si $[B, iA]^0$ est un opérateur B -borné sur \mathcal{H} . L'ensemble des opérateurs Mourre- $C^1(A)$ est ici noté $C_{\text{Mo}}^1(A)$.

Conditions 3.15

1. $H \in C_{\text{Mo}}^1(M)$.
2. Il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\eta \in I$, il existe $c_0 > 0$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $f_\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq f_\eta \leq 1$ et $f_\eta = 1$ dans un voisinage de η , et un opérateur compact K_0 sur \mathcal{H} tels que

$$H' \geq c_0 \mathbf{1} - C_1 f_\eta^\perp(H)^2 \langle H \rangle - K_0,$$

au sens des formes quadratiques sur \mathcal{D} , où $f_\eta^\perp(H) = 1 - f_\eta(H)$, et $\langle H \rangle = (1 + H^2)^{1/2}$.

3. \mathcal{G} est "boundedly-stable" par $\{W_t\}$ et $\{W_t^*\}$, c'est-à-dire que $W_t \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$, $W_t^* \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$, $t > 0$, et pour tout $\phi \in \mathcal{G}$,

$$\sup_{0 < t < 1} \|W_t \phi\|_{\mathcal{G}} < \infty, \quad \sup_{0 < t < 1} \|W_t^* \phi\|_{\mathcal{G}} < \infty. \quad (3.9)$$

Soit $A_{\mathcal{G}}$ le générateur du C_0 -semi-groupe $W_t|_{\mathcal{G}}$ et soit $A_{\mathcal{G}^*}$ le générateur du C_0 -semi-groupe obtenu comme l'extension de W_t à \mathcal{G}^* (voir la remarque 3.16 1) pour une justification).

4. $H \in C^2(A_{\mathcal{G}}; A_{\mathcal{G}^*})$ (voir la remarque 3.16 2) pour la justification de la notation), et pour tout $\phi \in \mathcal{D}$,

$$H'\phi = [H, iA]^0 \phi. \quad (3.10)$$

Remarque 3.16

1. En utilisant (3.9), le théorème du graphe fermé et un argument de densité, on vérifie que $W_t|_{\mathcal{G}}$ appartient à $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ et que $W_t|_{\mathcal{G}}$ est un C_0 -semi-groupe, voir [82, Lemme 2.33]. De la même façon, on vérifie que chaque W_t se prolonge par continuité à un opérateur borné dans \mathcal{G}^* , et que les prolongements correspondant forment un C_0 -semi-groupe dans \mathcal{G}^* . Cela justifie les notations $A_{\mathcal{G}}$ et $A_{\mathcal{G}^*}$ utilisées dans la condition 3.15 (3).
2. Une conséquence de la condition 3.15 (1) est que \mathcal{D} est un coeur de H et de M , voir par exemple [81] ou [82]. Une autre conséquence est la suivante : soit G l'extension de Friedrich de l'opérateur $M + \langle H \rangle$ sur \mathcal{D} . Alors $\mathcal{D}(\sqrt{G}) = \mathcal{G}$. En particulier,

$$\mathcal{D} \text{ est dense dans } \mathcal{G}. \quad (3.11)$$

D'après (3.11), on peut considérer les opérateurs H et H' comme éléments de $\mathcal{B}(\mathcal{G}; \mathcal{G}^*)$. Ainsi, en écrivant $H' \in \mathcal{B}(\mathcal{G}; \mathcal{G}^*)$, (3.10) est vérifiée pour tout $\phi \in \mathcal{G}$ et on peut introduire la notation

$$H'' = [H', iA]^0 \in \mathcal{B}(\mathcal{G}; \mathcal{G}^*).$$

3. Si la condition 3.15 est vérifiée, alors on a

$$\langle \phi_1, (M + R)\phi_2 \rangle = i\langle H\phi_1, A\phi_2 \rangle - i\langle A^*\phi_1, H\phi_2 \rangle,$$

pour tout $\phi_1 \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}(A^*)$ et $\phi_2 \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}(A)$. C'est une conséquence de (3.8). Une autre conséquence de (3.8) est la version suivante du théorème du viriel : pour tout vecteur propre de H , $(H - \lambda)\psi = 0$, avec $\psi \in \mathcal{D}(M^{1/2})$, on a

$$\langle \psi, (M + R)\psi \rangle := \|M^{1/2}\psi\|^2 + \langle \psi, R\psi \rangle = 0,$$

voir [82, Proposition 4.2]. Une conséquence standard du théorème du viriel est que le nombre de valeurs propres de H dans un intervalle compact $J \subset I$ est fini, et chaque valeur propre à une multiplicité finie (ici nous supposons implicitement que les vecteurs propres correspondant sont dans $\mathcal{D}(M^{1/2})$). Par ailleurs, le principe d'absorption limite établi dans [82] montre que sous la condition 3.15, H n'a pas de spectre singulier continu dans I .

4. La théorie de Mourre régulière considérée par exemple dans [13, 44, 45, 117, 119, 148] est un cas particulier de la condition 3.15 obtenu avec $M = 0$. Dans [13, 44, 45, 119, 148], l'opérateur conjugué A est supposé auto-adjoint tandis que dans [117], A est seulement supposé être le générateur d'un C_0 -semi-groupe d'isométries.
5. L'idée de décomposer le commutateur $i[H, A]$ en une partie positive non relativement bornée par rapport à H et une partie relativement bornée par rapport à H est due à [166].
6. La condition 3.15 (avec $K_0 = 0$ dans (2)) est plus forte que l'ensemble d'hypothèses (M1)–(M5) utilisées dans [82]. Les résultats de [82] sont donc valables si l'on suppose la condition 3.15.

Introduisons les classes d'opérateurs suivantes (que l'on considérera comme des classes de perturbations) :

Définition 3.17 On dit qu'un opérateur symétrique V tel que $\mathcal{D}(V) \supset \mathcal{D}(H)$ et V est relativement borné par rapport à H avec borne relative 0, appartient à \mathcal{V}_1 si et seulement si $V \in C^1(A_{\mathcal{G}}; A_{\mathcal{G}^*})$ et $V' = [V, iA]^0$ se prolonge à un opérateur H -borné. Pour tout $V \in \mathcal{V}_1$, on pose

$$\|V\|_1 = \|V(H - i)^{-1}\| + \|V'(H - i)^{-1}\|.$$

D'après le théorème de Kato-Rellich, pour tout $V \in \mathcal{V}_1$, l'opérateur $H + V$ est auto-adjoint avec domaine $\mathcal{D}(H + V) = \mathcal{D}(H)$.

Définition 3.18 On dit qu'un opérateur $V \in \mathcal{V}_1$ appartient à \mathcal{V}_2 si et seulement si $V' \in C^1(A_{\mathcal{G}}; A_{\mathcal{G}^*})$. On pose alors $V'' = [V', iA]^0$ et

$$\|V\|_2 = \|V\|_1 + \|V''\|_{\mathcal{B}(\mathcal{G}; \mathcal{G}^*)}.$$

Nos principales hypothèses sur les états propres non perturbés apparaissent dans les conditions 3.19 et 3.21.

Condition 3.19 Si $\lambda \in I$ est une valeur propre de H , tout vecteur propre ψ associé à λ , $H\psi = \lambda\psi$, vérifie $\psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(M)$.

Remarque 3.20 Sous la condition 3.19, on vérifie en utilisant (3.8) et le fait que \mathcal{D} est dense dans $\mathcal{D}(H)$ que $\psi \in \mathcal{D}(HA) = \{\phi \in \mathcal{D}(A) \mid A\phi \in \mathcal{D}(H)\}$, voir la remarque 3.16 3).

Condition 3.21 Si $\lambda \in I$ est une valeur propre de H , tout vecteur propre ψ associé à λ , $H\psi = \lambda\psi$, vérifie $\psi \in \mathcal{D}(A^2) \cap \mathcal{D}(M)$.

Nous pourrions supposer que les états propres perturbés (s'ils existent) satisfont la condition suivante :

Condition 3.22 Pour tout intervalle compacte $J \subset I$, il existe $\gamma > 0$ et un sous-ensemble $\mathcal{B}_{1,\gamma}$ de la boule de centre 0 et de rayon γ dans \mathcal{V}_1 ,

$$\mathcal{B}_{1,\gamma} \subset \{V \in \mathcal{V}_1, \|V\|_1 \leq \gamma\},$$

tel que $\{0\} \subset \mathcal{B}_{1,\gamma}$, $\mathcal{B}_{1,\gamma}$ est étoilé et symétrique par rapport à 0, et l'hypothèse suivante est satisfaite : il existe $C > 0$ tel que, si $V \in \mathcal{B}_{1,\gamma}$ et $(H + V - \lambda)\psi = 0$ avec $\lambda \in J$, alors $\psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(M)$ et

$$\|A\psi\| \leq C\|\psi\|.$$

Les deux conditions qui suivent sont utilisées dans notre version du critère de la règle d'or de Fermi. La première est une condition technique, qui peut être évitée en renforçant légèrement la condition 3.15 (3) ou en considérant une classe de perturbations légèrement plus petite que \mathcal{V}_1 .

Condition 3.23 $\mathcal{D}(M^{1/2}) \cap \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A^*)$ est dense dans $\mathcal{D}(A^*)$.

Condition 3.24 (Condition de la règle d'or de Fermi) Supposons que les conditions 3.19 et 3.23 sont satisfaites. Soit $\lambda \in \text{spec}_{\text{pp}}(H)$. Soient $P = \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(H)$ et $\bar{P} = \mathbf{1} - P$. Etant donné $V \in \mathcal{V}_1$, il existe $c > 0$ tel que

$$PV\text{Im}((H - \lambda - i0^+)^{-1}\bar{P})VP \geq cP. \quad (3.12)$$

Remarque 3.25 On peut vérifier que le membre de gauche de (3.12) définit bien un opérateur borné pour tout $V \in \mathcal{V}_1$.

Nous avons le résultat suivant sur la semicontinuité du spectre ponctuel ; en d'autres termes, on montre que la multiplicité totale des valeurs propres perturbées au voisinage d'une valeur propre non perturbée λ ne peut pas être plus grande que la multiplicité de λ .

Théorème 3.26 *Supposons que les conditions 3.15 et 3.22 sont satisfaites. Soient $\lambda \in I$ et $J \subset I$ un intervalle compact contenant λ tel que $\text{spec}_{\text{pp}}(H) \cap J = \{\lambda\}$. Soient $\gamma > 0$ et $\mathcal{B}_{1,\gamma}$ donné par la condition 3.22. Il existe alors $0 < \gamma' \leq \gamma$ tel que si $V \in \mathcal{B}_{1,\gamma}$ et $\|V\|_1 \leq \gamma'$, la multiplicité totale des valeurs propres de $H + V$ dans J est au plus égale à $\dim \text{Ker}(H - \lambda)$.*

Remarque 3.27

1. La quantité $\dim \text{Ker}(H - \lambda)$ est finie. C'est une conséquence des conditions 3.15 et 3.19, voir la remarque 3.16 3).
2. Dans le cas particulier où H n'a pas de valeur propre dans J , on n'a pas besoin de la condition 3.22 pour établir la semi-continuité du spectre ponctuel. Plus précisément, on peut montrer que $\text{spec}_{\text{pp}}(H + \sigma V) \cap J = \emptyset$ pour $|\sigma|$ suffisamment petit si l'on suppose que $V \in \mathcal{V}_2$. Si l'on suppose seulement que $V \in \mathcal{V}_1$, le résultat est toujours valable, mais à condition de supposer en plus que $\text{spec}_{\text{pp}}(H + \sigma V)$ est inclus dans $\mathcal{D}(M^{1/2})$.

Le théorème 3.26 est une version abstraite de [4, Théorème 2.5] où la semi-continuité du spectre ponctuel d'opérateurs de Schrödinger à N corps est établie. Notre approche est similaire à celle de [4].

Pour tout $V \in \mathcal{V}_1$ et $\sigma \in \mathbb{R}$, nous posons pour simplifier $H_\sigma = H + \sigma V$.

Théorème 3.28 *Supposons que les conditions 3.15, 3.19 et 3.23 sont satisfaites. Supposons que la condition 3.24 est satisfaite pour un certain $V \in \mathcal{V}_1$. Soit $J \subset I$ un intervalle compact tel que $\text{spec}_{\text{pp}}(H) \cap J = \{\lambda\}$. Supposons de plus que l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :*

i) La condition 3.21 est satisfaite et $V \in \mathcal{V}_2$.

ou

i') La condition 3.22 est satisfaite et $V \in \mathcal{B}_{1,\gamma}$.

Alors il existe $\sigma_0 > 0$ tel que pour tout $\sigma \in]-\sigma_0, \sigma_0[\setminus \{0\}$,

$$\text{spec}_{\text{pp}}(H_\sigma) \cap J = \emptyset.$$

Ce type de résultat est généralement appelé critère de la règle d'or de Fermi. Dans le cadre de la théorie de Mourre régulière (c'est-à-dire, en particulier, si $M = 0$) et si A est auto-adjoint, le critère de la règle d'or de Fermi est bien connu. Il est établi dans [4] pour des opérateurs de Schrödinger, sous une hypothèse du type $V \in \mathcal{V}_2$ et en utilisant la décroissance exponentielle des états propres (qui implique une propriété analogue à notre condition 3.21). Dans [119], le théorème 3.28 est établi dans un cadre abstrait en supposant une condition du type 3.21 et le fait que V'' est H -borné. Dans [44, 45], toujours dans le cadre de la théorie de Mourre abstraite et avec A auto-adjoint, il est démontré qu'une hypothèse du type $H \in C^4(A)$ implique la condition 3.21. Un résultat similaire apparaît aussi dans [86] sous des hypothèses "locales" légèrement plus faibles, en supposant toujours le contrôle d'au moins 4 commutateurs.

Le théorème 3.28 améliore les résultats précédents pour les raisons suivantes : tout d'abord, comme nous l'avons déjà mentionné, nous ne supposons pas que A est auto-adjoint ni que le commutateur $i[H, A]$ est H -borné, ce qui se révèle important dans les applications à la théorie quantique des champs que nous considérons. Ensuite, nous prouvons le critère de la règle d'or de Fermi sous la condition 3.22 et l'hypothèse $V \in \mathcal{B}_{1,\gamma}$ (c'est-à-dire la condition i') du théorème 3.28), ce qui constitue un nouveau résultat même pour la théorie de Mourre régulière. Insistons sur le fait que la condition 3.22 demande seulement que les états propres de H soient dans le domaine de A et non dans le domaine de A^2 . Le prix

que l'on a à payer est que la condition 3.22 impose une condition sur les états propres perturbés qui peut sembler, a priori, difficile à vérifier dans des situations concrètes. C'est là, néanmoins, qu'interviennent les résultats de la section 3-1, nous permettant de vérifier simplement la condition 3.22 dans une situation concrète.

Selon que l'on suppose i) ou $i')$, les méthodes de preuve du théorème 3.28 sont différentes. Dans le premier cas, nous obtenons un développement au second ordre des valeurs propres perturbées (supposant qu'elles existent). Dans le second cas, on peut également obtenir ce développement si $\dim \text{Ran}(P) = 1$, mais nous procédons différemment si la valeur propre non perturbée est dégénérée. Dans les deux cas, un ingrédient crucial est l'obtention d'un "principe d'absorption limite réduit" (voir la section 3 dans [viii] pour plus de détails).

3-2.2 Application : modèle de Nelson non massif

On considère le hamiltonien de Nelson (3.5), le potentiel V satisfaisant la condition 3.10 et la fonction de couplage étant donnée par (3.6). On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.29 *Supposons que la condition 3.10 est satisfaite. Soit J un intervalle compact tel que $\text{spec}_{\text{pp}}(H_g) \cap J = \{\lambda\}$. Soit $P_g = \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(H_g)$ et $\bar{P}_g = \mathbf{1} - P_g$. On a :*

- i) Il existe $g_c > 0$ tel que pour tout $0 \leq |g'| \leq g_c$, la multiplicité totale des valeurs propres de $H_{g+g'}$ dans J est au plus égale à $\dim \text{Ran}(P_g)$.*
- ii) Supposons de plus que*

$$P_g \Phi(h(x)) \text{Im}((H_g - \lambda - i0^+)^{-1} \bar{P}_g) \Phi(h(x)) P_g \geq c P_g,$$

pour un certain $c > 0$. Alors il existe $g_c > 0$ tel que pour tout $0 < |g'| \leq g_c$,

$$\text{spec}_{\text{pp}}(H_{g+g'}) \cap J = \emptyset.$$

Remarque 3.30

- 1. Comme dans la section 3-1, ce théorème est valable pour une classe de modèles de type Pauli-Fierz confinants plus large que le cas particulier du modèle de Nelson donné ici (voir la section 2 dans [viii]). On peut aussi considérer des perturbations de la fonction de couplage initiale par des éléments d'un certain espace de Banach de fonctions (autrement dit ce n'est pas seulement la constante de couplage qui varie, mais la fonction de couplage elle-même). Et de même, grâce à l'hypothèse de confinement 3.10, on peut encore une fois utiliser la transformation de Pauli-Fierz pour améliorer le comportement infrarouge de l'interaction. Pour le hamiltonien transformé, on peut alors énoncer un théorème similaire avec la condition infrarouge plus faible $\mu > -1/2$.*
- 2. Dans le cas particulier où le hamiltonien non perturbé est l'opérateur libre $H = H_0 = H_{\text{el}} + H_f$, on peut choisir $M = \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{el}}} \otimes N_{\text{ph}}$, $R = 0$, et A le générateur des translations radiales dans l'espace de Fock. On vérifie alors facilement que les conditions 3.15 (avec $I = \mathbb{R}$) et 3.21 sont satisfaites. En particulier, le fait que la condition 3.21 est satisfaite est évident puisque les états propres non perturbés sont de la forme $\phi \otimes \Omega$, où ϕ est un état propre de H_{el} et Ω est le vide dans l'espace de Fock.*

Sous certaines conditions sur la fonction de couplage, la validité du critère de la règle d'or de Fermi avec H_0 comme opérateur non perturbé et petites constantes de couplage est démontrée dans [64, 85]. Le principal résultat à retenir du théorème 3.29 est donc que l'opérateur H_g , pour un g quelconque, peut être considéré comme opérateur non perturbé. Dans ce sens, cela justifie le fait qu'il n'y a génériquement pas d'états propres excités pour les modèles de type Pauli-Fierz avec couplage quelconque.

Pour prouver le théorème 3.29, on vérifie que les hypothèses des théorèmes 3.26 et 3.28 sont satisfaites avec (en utilisant les notations de la section 3-1.2) $H = H_g$, $A = A_\delta$, $R = -\phi(\text{ia}_\delta h(x_{\text{el}}))$, et $M = M_\delta$ définit par

$$M_\delta = \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{el}}} \otimes d\Gamma(m_\delta(\omega)), \quad m_\delta(\omega) = \chi\left(\frac{\omega}{\delta}\right) d(\delta) + (1 - \chi)\left(\frac{\omega}{\delta}\right) d(\omega).$$

En particulier, le fait que la condition 3.22 est satisfaite est une conséquence du théorème 3.11.

Chapitre 4

Résonances et temps de vie des états métastables

Ce chapitre est consacré aux résultats obtenus en collaboration avec W. K. Abou Salem, J. Fröhlich et I. M. Sigal dans [v]. On s'intéresse à la théorie des résonances pour le modèle de Nelson ou pour le modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste ; en particulier, on relie les résonances, définies comme valeurs propres complexes d'une famille d'opérateurs non auto-adjoints, au temps de vie d'états métastables.

L'une des grandes réussites de la mécanique quantique a été de permettre le calcul du spectre d'énergie (discret) et des états stationnaires associés pour des atomes et des molécules. Ce calcul est fait en négligeant l'interaction entre les atomes ou les molécules avec le champ électromagnétique quantifié. Si cette interaction est prise en compte, en revanche, on s'attend à ce qu'il n'y ait plus d'états stables excités, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (critère de la règle d'or de Fermi). Plus précisément, on s'attend à ce que les états excités deviennent des états métastables avec un temps de vie très long, et des énergies proches des valeurs propres du hamiltonien libre.

Selon l'interprétation physique, la décroissance des états métastables s'accompagne de l'émission de photons dont les énergies sont à peu près égales à la différence des énergies des états finaux et initiaux (condition de Bohr). Ces états métastables sont associés à des résonances quantiques, et l'objectif de ce chapitre est de développer une méthode permettant de les analyser. Du fait de l'interaction entre les électrons et les photons, les techniques habituelles pour étudier les résonances (voir par exemple [119, 157] et les références citées dans ces articles) ne sont pas applicables directement.

D'une manière générale, on peut introduire la notion de résonance quantique de la façon suivante. Considérons un hamiltonien quantique H_g , avec constante de couplage $g \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une famille à un paramètre de transformations unitaire $\mathcal{U}_\theta, \theta \in \mathbb{R}$, telle que $H_{g,\theta} = \mathcal{U}_\theta H_g \mathcal{U}_\theta^{-1}$ possède un prolongement analytique en θ dans un disque $D(0, \theta_0) \subset \mathbb{C}$. Ce prolongement est appelé déformation complexe de H_g . Le spectre essentiel de $H_{g,\theta}$ est déformé par une telle transformation, mais, pour des familles \mathcal{U}_θ convenablement choisies, les valeurs propres isolées et de multiplicités finies de $H_{g,\theta}$ sont localement indépendantes de θ . Les valeurs propres complexes de $H_{g,\theta}$, pour $\text{Im } \theta > 0$, sont appelées résonances de H_g .

Physiquement, les résonances sont associées à des états métastables. Le temps de vie de ceux-ci est donné par l'inverse de la partie imaginaire de la résonance correspondante. Une approche permettant d'établir une telle propriété est basée sur la formule de Combes [5, 29],

$$\langle \psi, (H_g - z)^{-1} \psi \rangle = \langle \psi_{\bar{\theta}}, (H_{g,\theta} - z)^{-1} \psi_\theta \rangle, \quad (4.1)$$

valable pour des vecteurs ψ tels que $\{\psi_\theta = \mathcal{U}_\theta \psi\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ possède un prolongement analytique en θ dans le plan complexe. Si l'on prolonge le membre de droite analytiquement, d'abord en θ , puis en z , on voit que $\langle \psi, (H_g - z)^{-1} \psi \rangle$ possède un prolongement analytique en z à travers le spectre essentiel de H_g (pourvu que le spectre essentiel de $H_{g,\theta}$ ait été déplacé en dehors de l'axe réel pour $\text{Im}\theta > 0$). Les valeurs propres isolées et de multiplicités finies de $H_{g,\theta}$ sont des pôles de ce prolongement analytique, et dans ce cas particulier (valeurs propres isolées et de multiplicités finies), on peut montrer la propriété de métastabilité en utilisant la relation entre le propagateur et la résolvante, une déformation du contour d'intégration, et la formule de Cauchy (voir [118, 119]).

Pour des modèles issus de l'électrodynamique quantique non relativiste, les résonances ne sont pas des valeurs propres isolées du hamiltonien déformé $H_{g,\theta}$, et la propriété de métastabilité des résonances devient difficile à établir.

Nous considérons le modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste défini dans la section 1-2 (voir (1.11)), ou le modèle de Nelson introduit dans la section 1-3 (voir (1.15)). Le hamiltonien associé est noté H_g dans les deux cas (en posant $g = \alpha^{3/2}$ pour le hamiltonien (1.11)). On fait les hypothèses suivantes :

Condition 4.1 *Le potentiel $V(x_{\text{el}})$ est analytique par rapport aux dilatations, c'est-à-dire que l'application $\theta \mapsto V(e^\theta x)(p_{\text{el}}^2 + 1)^{-1}$ possède un prolongement analytique dans un disque $D(0, \theta_0) \subset \mathbb{C}$ pour un certain $\theta_0 > 0$.*

Remarque 4.2 *Le potentiel de Coulomb $V(x_{\text{el}}) = -1/|x_{\text{el}}|$ est analytique par rapport aux dilatations. En revanche, pour une molécule dans l'approximation de Born-Oppenheimer (avec des noyaux fixes), le potentiel de Coulomb n'est pas analytique par rapport aux dilatations ; on peut alors utiliser la notion plus générale de distortion pour contourner le problème (voir par exemple [119]).*

Condition 4.3 *La fonction de troncature ultraviolette χ_Λ est analytique par rapport aux dilatations, c'est-à-dire que l'application $\theta \mapsto \chi_\Lambda(e^{-\theta} k)$ possède un prolongement analytique dans un disque $D(0, \theta_0) \subset \mathbb{C}$, pour un certain $\theta_0 > 0$.*

Dans le cas du modèle standard de la QED non relativiste, les vecteurs de polarisation $\varepsilon_\lambda(k)$, $\lambda = 1, 2$, apparaissant dans (1.5) sont de plus supposés ne dépendre que de $k/|k|$.

Remarque 4.4 *On peut par exemple choisir la fonction $\chi_\Lambda(k) = e^{-k^2/\Lambda^2}$ pour un paramètre Λ arbitrairement grand. Dans le cas du modèle standard de la QED non relativiste, les vecteurs de polarisation peuvent être choisis comme dans (1.8).*

Pour définir les résonances, nous utilisons les dilatations des positions des électrons et des impulsions des photons données par

$$x_j \rightarrow e^\theta x_j, \quad k \rightarrow e^{-\theta} k,$$

où θ est un paramètre réel. Ces dilatations sont associées à un opérateur unitaire \mathcal{U}_θ agissant sur l'espace de Hilbert total $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit alors la famille d'opérateurs unitairement équivalents

$$H_{g,\theta} = \mathcal{U}_\theta H_g \mathcal{U}_\theta^{-1}.$$

Grâce aux hypothèses 4.1 et 4.3 ci-dessus sur V et χ , la famille $H_{g,\theta}$ se prolonge en une famille analytique de type A au sens de Kato, pour $\theta \in D(0, \theta_0)$, θ_0 étant donné comme le minimum des θ_0 apparaissant dans les conditions 4.1 et 4.3. Les résonances de H_g sont alors définies comme les valeurs propres complexes de $H_{g,\theta}$ pour $\text{Im}\theta > 0$.

Soit $e_0 = \inf \text{spec}(H_{g=0})$. On considère les valeurs propres e_j de H_{el} (qui coïncident avec les valeurs propres de $H_0 = H_{\text{el}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$) satisfaisant $e_0 < e_j < \Sigma_g$, où Σ_g désigne le seuil d'ionisation (voir

(1.12)). Une application du groupe de renormalisation spectral (voir [25, 26, 163]), montre que, lorsque l'interaction entre l'électron et les photons est prise en compte, si le critère de la règle d'or de Fermi est vérifiée, ces valeurs propres e_j deviennent des résonances $e_{j,g}$ telles que $\text{Im } e_{j,g} < 0$. Ces résonances sont indépendantes de θ .

Pour simplifier, nous supposons que les valeurs propres e_j sont non dégénérées et nous notons

$$\Psi_j = \psi_j \otimes \Omega$$

un vecteur propre de H_0 normalisé associé à e_j , ψ_j étant un vecteur propre normalisé de H_{el} associé à e_j . Nous faisons aussi l'hypothèse suivante :

Condition 4.5 *Le critère de la règle d'or de Fermi pour e_j est satisfait.*

Nous ne détaillons pas plus la condition 4.5. Elle correspond au critère apparaissant dans le chapitre 3 ; nous renvoyons à [25, 26, 27] pour une autre formulation équivalente de cette condition. Remarquons que cela implique l'inégalité $\text{Im } e_{j,g} \leq -c_0 g^2$, pour une certaine constante $c_0 > 0$ (voir [25, 26, 27]).

Nos principaux résultats sont résumés dans les théorèmes suivants.

Théorème 4.6 *Supposons que les hypothèses 4.1, 4.3, 4.5 soient vérifiées. Il existe $g_c > 0$ tel que pour tout $0 < g < g_c$ et $t \geq 0$,*

$$\langle \Psi_j, e^{-itH_g} \Psi_j \rangle = e^{-ite_{j,g}} + \mathcal{O}(g^\gamma), \quad (4.2)$$

où $\gamma = \frac{2+2\mu}{3+\mu}$ pour le modèle de Nelson ($\mu > -1/2$ apparaissant dans la fonction de couplage (1.16)), et $\gamma = \frac{2}{3}$ pour le modèle standard de la QED non relativiste.

Remarque 4.7

1. On s'attend à ce que le résultat du théorème 4.6 s'étende à des situations où la condition 4.5 de la règle d'or de Fermi n'est pas satisfaite, pourvu que $\text{Im } e_{j,g}$ reste strictement négatif.
2. En choisissant une meilleure approximation de l'état résonant, l'exposant γ dans le terme de reste peut être amélioré.
3. Le théorème 4.6 implique que

$$\|e^{-itH_g} \Psi_j - e^{-ite_{j,g}} \Psi_j\| = [1 - e^{2t\text{Im } e_{j,g}} + \mathcal{O}(g^\gamma)]^{1/2}, \quad (4.3)$$

qui est très petit pour des temps $t \ll 1/|\text{Im } e_{j,g}|$.

Il existe un sous-espace dense $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ tel que pour tout $\psi \in \mathcal{D}$, la famille de vecteurs $\{\mathcal{U}_\theta \psi\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ possède une extension analytique en θ dans le plan complexe satisfaisant $\mathcal{U}_\theta \psi \in \mathcal{D}$ pour tout $\theta \in \mathbb{C}$ (\mathcal{D} est parfois appelé ensemble des vecteurs analytiques par rapport aux dilatations). Pour $z_* \in \mathbb{C}$ et $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$, nous définissons l'ensemble

$$W_{z_*}^{\varphi_1, \varphi_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_*| < \frac{1}{2} |\text{Im } z_*|, \varphi_1 \leq \arg(z - z_*) \leq \varphi_2\}.$$

Théorème 4.8 *Supposons que les hypothèses 4.1, 4.3, 4.5 soient vérifiées. Il existe $g_c > 0$ et un ensemble dense $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ tel que pour tous $g < g_c$ et $\psi \in \mathcal{D}'$, la fonction*

$$F_\psi(z) = \langle \psi, (H_g - z)^{-1} \psi \rangle$$

possède un prolongement analytique en z depuis le demi-plan supérieur, au-dessus d'un voisinage de e_j , et jusqu'au domaine $W_{e_j,g}^{\varphi_1,\varphi_2}$, pour certains $\varphi_1 < \pi/2$ et $\varphi_2 > \pi$. Ce prolongement satisfait

$$F_\psi(z) = \frac{p(\psi)}{e_{j,g} - z} + r(z; \psi),$$

avec

$$|r(z; \psi)| \leq C(\psi)|e_{j,g} - z|^{-\beta},$$

pour un certain $\beta < 1$. Les notations $p(\psi)$ et $r(z; \psi)$ désignent des formes quadratiques bornées sur le domaine $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$, et $C(\psi)$ est une constante positive dépendant de ψ .

Remarque 4.9

1. Dans la mesure où l'on peut effectuer une rotation du spectre de $H_{g,\theta}$ en faisant varier θ dans $D(0, \theta_0)$, si $\theta_0 < \pi/2$ est suffisamment grand, on s'attend à pouvoir prolonger $F_\psi(z)$ dans un voisinage de $e_{j,g}$ plus grand que le domaine $W_{e_j,g}^{\varphi_1,\varphi_2}$ apparaissant dans le théorème 4.8.
2. L'ensemble \mathcal{D}' du théorème 4.8 peut être choisi explicitement :

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}(\mathrm{d}\Gamma(\omega^{-\frac{1}{2}})) = \{\psi \in \mathcal{D}, \|\mathrm{d}\Gamma(\omega^{-\frac{1}{2}})(\mathbf{1} - \Pi_\Omega)\psi\| < \infty\},$$

dans le cas du modèle de Nelson, où Π_Ω est la projection sur le vide Ω de l'espace de Fock. Dans ce cas, $\beta = (2 + \frac{2}{3}\mu)^{-1}$. Pour le modèle standard de la QED non relativiste,

$$\mathcal{D}' = \{\psi \in \mathcal{D}, \|e^{\delta(x)}\mathrm{d}\Gamma(\omega^{-1/2})(\mathbf{1} - \Pi_\Omega)\psi\| < \infty \text{ pour un certain } \delta > 0\}.$$

En utilisant le fait que $\mathcal{U}_\theta \mathrm{d}\Gamma(\omega^{-1/2}) = e^{\theta/2} \mathrm{d}\Gamma(\omega^{-1/2}) \mathcal{U}_\theta$, on peut voir que l'ensemble \mathcal{D}' est dense dans \mathcal{D} .

Dans [128], le temps de vie des états métastables pour un spin interagissant avec un champ de photons est étudié, en imposant certaines restrictions importantes sur la fonction de couplage. Dans [27], une borne supérieure sur l'évolution des états métastables est obtenue, et dans [100], l'évolution est étudiée en fonction de la dynamique engendrée par l'opérateur "level-shift" lié au critère de la règle d'or de Fermi. En particulier, les approches de [27, 100, 128] sont basées sur la perturbation au second ordre des valeurs propres plongées, et, contrairement à notre approche, ne sont donc pas applicables dans le cas où la condition de la règle d'or de Fermi n'est pas satisfaite.

Comme mentionné plus haut, la principale difficulté dans la preuve des deux théorèmes précédents vient du fait que la valeur propre non perturbée e_j est plongée dans le spectre essentiel, et se situe à l'origine d'une demi-droite de spectre essentiel. Pour traiter ce problème, nous introduisons une troncature infrarouge qui a pour effet de faire apparaître un gap autour de la résonance dans le spectre de l'opérateur $H_{g,\theta}$. Plus précisément, si l'on considère par exemple le modèle de Nelson (1.15) de la section 1-3, l'opérateur dilaté peut s'écrire sous la forme

$$H_{g,\theta} = H_{0,\theta} + \Phi(h_\theta(x)),$$

où $H_{0,\theta} = \mathcal{U}_\theta H_0 \mathcal{U}_\theta^{-1}$ et $\Phi(h_\theta(x)) = \mathcal{U}_\theta \Phi(h(x)) \mathcal{U}_\theta^{-1}$. On note alors $H_{g,\theta,\sigma}$ l'opérateur obtenu en introduisant une troncature infrarouge $\mathbb{1}_{|k| \geq \sigma}(k)$ dans l'expression de $\Phi(h_\theta(x))$. Une propriété importante de l'opérateur $H_{g,\theta,\sigma}$ est qu'il possède une valeur propre complexe $e_{j,g,\sigma}$ issue de e_j telle que, si l'on considère la restriction de l'opérateur $H_{g,\theta,\sigma}$ à l'espace de Fock des photons d'énergies $\geq \sigma$, un gap d'ordre $\mathcal{O}(\sigma)$ apparaît dans le spectre autour de $e_{j,g,\sigma}$. Remarquons que la valeur propre $e_{j,g,\sigma}$ dépend de θ dans la mesure où, pour $\sigma > 0$ fixé, $\theta \mapsto H_{g,\theta,\sigma}$ n'est pas une famille analytique au sens de Kato.

Une fois ces résultats préliminaires obtenus, la stratégie de la preuve est d'appliquer à l'opérateur H_g la méthode de Hunziker [118] basée sur la formule de Stone, la formule de Combes (4.1) et une déformation du contour d'intégration, puis d'approximer la résolvante de $H_{g,\theta}$ par la résolvante de $H_{g,\theta,\sigma}$ (plus exactement, par un opérateur modifié construit à partir de $H_{g,\theta,\sigma}$). L'erreur introduite par l'introduction de cette troncature infrarouge artificielle est alors contrôlée en utilisant le fait que l'interaction entre l'électron et les photons s'annule suffisamment rapidement dans les basses énergies. On conclut en optimisant le choix du paramètre σ .

Chapitre 5

Dynamique effective

Ce chapitre est consacré aux résultats obtenus en collaboration avec V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich et I.M. Sigal dans [xvi]. L'objectif est de montrer que la masse renormalisée de l'électron, qui apparaît lorsque l'on tient compte de l'interaction entre l'électron et le champ électromagnétique quantifié, est très proche de la "masse cinétique" obtenue lorsque l'électron est placé dans un potentiel extérieur variant lentement. Nous plaçons notre étude dans le cadre du modèle standard de la QED non relativiste, la masse renormalisée de l'électron étant définie par la relation $m_{\text{ren}} = ((\partial^2 E_\alpha)/(\partial|P|^2)(0))^{-1}$, où $E_\alpha(P) = \inf \text{spec}(H_\alpha(P))$ désigne l'énergie minimale de l'électron habillé avec une impulsion totale fixée égale à P (voir la définition de $H_\alpha(P)$ dans (1.18); en utilisant l'invariance par rotations, on vérifie aisément que $E_\alpha(P)$ ne dépend que de $|P|$). La masse cinétique apparaît dans la dynamique effective de l'électron subissant l'influence d'une force extérieure variant lentement.

Considérons donc la dynamique d'un électron interagissant avec le champ électromagnétique quantifié, et placé dans un potentiel extérieur $V_\varepsilon(x) = V(\varepsilon x)$ variant lentement. Le hamiltonien associé, H_α^V , agit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$, où $\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3)$, et \mathcal{H}_{ph} est l'espace de Fock symétrique construit à partir de $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$. L'expression de H_α^V est la suivante :

$$H_\alpha^V = H_\alpha + V_\varepsilon,$$

où H_α est le hamiltonien du modèle standard de la QED non relativiste sans potentiel extérieur, défini comme dans le chapitre 1 par

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_{\text{el}}} (p_{\text{el}} - \alpha^{1/2} A(x_{\text{el}}))^2 + H_{\text{ph}}.$$

On s'intéresse à l'évolution de certains états pouvant être paramétrés par des fonctions $u_0^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant $\|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$ et $\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \varepsilon^\kappa$, avec $0 \leq \kappa < 1/3$. On montre que l'évolution de tels états peut être approchée, sur un long intervalle de temps, par une dynamique de Schrödinger effective associée à l'opérateur

$$H_{\alpha, \text{eff}} = E_\alpha(-i\nabla_x) + V_\varepsilon(x), \quad (5.1)$$

dans \mathcal{H}_{el} , l'énergie cinétique étant donnée par l'énergie fondamentale à impulsion totale fixée, $P \mapsto E_\alpha(P)$.

Afin de pouvoir formuler précisément notre principal théorème, il nous faut d'abord définir quelques notations. Suivant une procédure standard, nous commençons par introduire une troncature infrarouge dans le modèle, en insérant la fonction $\mathbb{1}_{|k| \geq \sigma}(k)$ dans l'expression de $A(x_{\text{el}})$. Cela définit un nouvel hamiltonien avec troncature infrarouge $H_{\alpha, \sigma}$. De la même façon que H_α , $H_{\alpha, \sigma}$ est invariant par translations

et se décompose en intégrale directe (voir section 1-4),

$$UH_{\alpha,\sigma}U^{-1} = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_{\alpha,\sigma}(P)dP, \quad (5.2)$$

pour un certain opérateur unitaire U . L'expression de $H_{\alpha,\sigma}(P)$ est la même que celle de $H_{\alpha}(P)$ en (1.18), excepté le fait que $A(0)$ est remplacé par $A_{\sigma}(0)$, le potentiel vecteur dans lequel la troncature $\mathbf{1}_{|k| \geq \sigma}(k)$ a été introduite.

On pose $\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^3, |P| \leq m_{\text{el}}/3\}$. Notant de plus $E_{\alpha,\sigma}(P) = \inf \text{spec}(H_{\alpha,\sigma}(P))$, nous rappelons les propriétés fondamentales suivantes de $E_{\alpha,\sigma}(P)$, établies dans [23, 46, 48] :

Proposition 5.1 *L'application $P \mapsto E_{\alpha,\sigma}(P)$ satisfait les propriétés :*

1. Pour tout $\sigma > 0$, $P \mapsto E_{\alpha,\sigma}(P) \in C^2(\mathcal{S})$, et pour tout $P \in \mathcal{S}$, $E_{\alpha,\sigma}(P)$ est une valeur propre non dégénérée de $H_{\alpha,\sigma}(P)$.
2. Il existe $\alpha_c > 0$ et $c > 0$, tels que pour tous $P \in \mathcal{S}$, $0 < \alpha \leq \alpha_c$, et $\sigma \geq 0$,

$$|\nabla_P E_{\alpha,\sigma}(P) - P| \leq c\alpha|P|, \quad \text{et} \quad 1 - c\alpha \leq \partial_{|p|}^2 E_{\alpha,\sigma}(p) \leq 1.$$

Soit $\Psi_{\alpha,\sigma}(P) \in \mathcal{H}_{\text{ph}}$, pour $P \in \mathcal{S}$, un état fondamental normalisé de $H_{\alpha,\sigma}(P)$ convenablement choisi. Pour tous $0 < \sigma < \rho \leq 1$ et $P \in \mathcal{S}$, on introduit les opérateurs de Weyl

$$W_{\nabla E_{\alpha,\sigma}(P)}^{\sigma,\rho} = \exp \left[\alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\sigma \leq |k| \leq \rho} dk \frac{\nabla E_{\alpha,\sigma}(P) \cdot \varepsilon_{\lambda}(k) a_{\lambda}(k) - \text{h.c.}}{|k|^{1/2} (|k| - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P) \cdot k)} \right].$$

Notons que pour tout $\sigma > 0$, les opérateurs $W_{\nabla E_{\alpha,\sigma}(P)}^{\sigma,\rho}$ sont unitaires. On définit alors les états

$$\Phi_{\alpha,\sigma}^{\rho}(P) = W_{\nabla E_{\alpha,\sigma}(P)}^{\sigma,\rho} \Psi_{\alpha,\sigma}(P).$$

L'une des étapes importantes de notre approche consiste à obtenir des propriétés de régularité de l'application $P \mapsto \Phi_{\alpha,\sigma}^{\rho}(P)$. Ces propriétés sont résumées dans la proposition suivante.

Proposition 5.2 *Pour tous $P \in \mathcal{S}$, $0 < \rho \leq 1$, et $0 < \alpha \ll 1$, on a*

1. La limite

$$\Phi_{\alpha}^{\rho}(P) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Phi_{\alpha,\sigma}^{\rho}(P),$$

existe dans \mathcal{H}_{ph} .

2. Pour tout $\theta < \frac{2}{3}$, l'application $P \mapsto \Phi_{\alpha,\sigma}^{\rho}(P)$ est θ -Hölder continue,

$$\sup_{P, P' \in \mathcal{S}} \frac{\|\Phi_{\alpha,\sigma}^{\rho}(P) - \Phi_{\alpha,\sigma}^{\rho}(P')\|}{|P - P'|^{\theta}} \leq C(\theta) < \infty,$$

uniformément par rapport à σ et ρ satisfaisant $0 \leq \sigma < \rho \leq 1$.

Dans le cas $\rho = 1$, ces propriétés sont établies dans [48, 152], avec $\theta < 1/4$ pour la régularité Hölder. La preuve de l'existence de la limite $\Phi_{\alpha}^{\rho}(P)$ pour $\rho < 1$ est une adaptation assez directe de la méthode de [48, 152]. En revanche, pour obtenir la régularité Hölder jusqu'à $\theta < 2/3$, nous utilisons un argument supplémentaire, basé sur la formule de Feynman-Hellmann, similaire à celui utilisé dans la section 2-1.

Nous introduisons maintenant une famille d'applications $\mathcal{J}_0^{\rho} : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{H}$ en posant

$$\mathcal{J}_0^{\rho}(u) = U^{-1} \chi_{S_{\mu}} \widehat{u} \Phi_{\alpha}^{\rho}, \quad (5.3)$$

où U est l'opérateur unitaire apparaissant dans (5.2) et où $\chi_{\mathcal{S}_\mu}$ désigne une fonction caractéristique régularisée de l'ensemble $\mathcal{S}_\mu = (1 - \mu)\mathcal{S} \subset \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, ($0 < \mu < 1$).

Notre objectif est d'étudier l'évolution d'états de la forme $\mathcal{J}_0^\rho(u_0^\varepsilon)$, représentant un électron associé une fonction d'onde u_0^ε variant lentement et habillé par un nuage de photons ayant une énergie plus petite que ρ . Plus précisément, nous étudions les solutions de l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t \Psi(t) = H_\alpha^V \Psi(t), \quad \text{avec} \quad \Psi(0) = \mathcal{J}_0^\rho(u_0^\varepsilon).$$

L'idée est de relier la solution $\Psi(t) = e^{-itH_\alpha^V} \mathcal{J}_0^\rho(u_0^\varepsilon)$ de cette équation de Schrödinger à la solution de l'équation de Schrödinger effective

$$i\partial_t u_t^\varepsilon = H_{\alpha, \text{eff}} u_t^\varepsilon, \quad \text{avec} \quad u_{t=0}^\varepsilon = u_0^\varepsilon, \quad (5.4)$$

associée à l'opérateur $H_{\alpha, \text{eff}}$ défini dans (5.1). On montre ainsi que $\Psi(t)$ reste proche, pour des temps grands, de l'état $\mathcal{J}_0^\rho(u_t^\varepsilon) \in \mathcal{H}$, où $u_t^\varepsilon = e^{-itH_{\alpha, \text{eff}}} u_0^\varepsilon$ est la solution de l'équation (5.4). On choisit une donnée initiale satisfaisant

$$\|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \quad \|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \varepsilon^\kappa, \quad 0 \leq \kappa < \frac{1}{3}. \quad (5.5)$$

Cela assure en particulier que le support de $\widehat{u}_t^\varepsilon$ reste concentré dans l'ensemble \mathcal{S} pour des temps suffisamment longs (pourvu que le support de $\widehat{u}_0^\varepsilon$ soit contenu dans \mathcal{S}).

Théorème 5.3 *Soient $0 < \varepsilon < 1/3$, $0 \leq \kappa < 1/3$ et $u_0^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^3)$ vérifiant (5.5). Supposons que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ soit tel que $\widehat{V} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et*

$$\text{supp}(\widehat{V}) \subset \{k \in \mathbb{R}^3, |k| \leq 1\}.$$

Soient $0 < \delta < 2(\frac{1}{3} - \kappa)$ et $\rho = \rho_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2}{3} - \delta}$. Il existe $\alpha_\delta > 0$ tel que, pour tout $0 \leq \alpha \leq \alpha_\delta$,

$$\|e^{-itH_\alpha^V} \mathcal{J}_0^{\rho_\varepsilon}(u_0^\varepsilon) - \mathcal{J}_0^{\rho_\varepsilon}(e^{-itH_{\alpha, \text{eff}}} u_0^\varepsilon)\|_{\mathcal{H}} \leq C_\delta (\varepsilon^{\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} + \kappa} t + \varepsilon^{\frac{4}{3} - \frac{\delta}{2}} t^2), \quad (5.6)$$

pour tout $t \geq 0$. En particulier, pour tout $0 \leq t \leq \varepsilon^{-2/3}$, on a

$$\|e^{-itH_\alpha^V} \mathcal{J}_0^{\rho_\varepsilon}(u_0^\varepsilon) - \mathcal{J}_0^{\rho_\varepsilon}(e^{-itH_{\alpha, \text{eff}}} u_0^\varepsilon)\|_{\mathcal{H}} \leq C_\delta \varepsilon^{\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} + \kappa} t.$$

Remarque 5.4

1. *Le théorème 5.3 implique que pour tout $\delta' > 0$ tel que $\delta' < \frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} + \kappa$,*

$$\|e^{-itH_\alpha^V} \mathcal{J}_0^{\rho_\varepsilon}(u_0^\varepsilon) - \mathcal{J}_0^{\rho_\varepsilon}(e^{-itH_{\alpha, \text{eff}}} u_0^\varepsilon)\|_{\mathcal{H}} \leq C_\delta \varepsilon^{\delta'},$$

pour tout t satisfaisant $0 \leq t \leq \varepsilon^{-(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2} + \kappa) + \delta'}$.

2. *Les conditions initiales dans le théorème 5.3 sont choisies de telle façon que l'impulsion initiale est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^\kappa)$. Les conditions sur le potentiel extérieur impliquent que la force extérieure, et par conséquent l'accélération, sont d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Ainsi, au temps t , l'impulsion est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^\kappa) + \mathcal{O}(\varepsilon t)$, et donc l'action $E(P)t - E(0)t \approx \frac{1}{2m_{\text{ren}}} P^2 t$ est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{2\kappa} t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 t^3)$. Si on choisit κ et δ satisfaisant $\frac{1}{3} - \kappa > \frac{\delta}{2}$ et $t \leq \varepsilon^{-1 + \kappa}$, on voit que le terme $E(P)t - E(0)t$ est beaucoup plus grand que le terme d'erreur dans (5.6). Autrement dit, notre analyse fait bien apparaître la masse renormalisée de l'électron (on ne peut pas remplacer $E(P)$ par $E(0)$ dans $H_{\alpha, \text{eff}}$ à moins d'autoriser un terme d'erreur beaucoup plus grand dans (5.6)).*

Des résultats de même nature existent dans la littérature pour des particules quantiques interagissant avec des bosons massifs (voir [173]), mais notre travail est semble-t-il le premier concernant le cas des bosons non massifs, faisant ainsi apparaître l'effet de la masse renormalisée de l'électron. Mentionnons aussi un résultat obtenu dans [172] concernant la dynamique effective de deux particules massives interagissant par l'intermédiaire de bosons non massifs.

Pour démontrer le théorème 5.3, on étudie le hamiltonien avec troncature infrarouge

$$H_{\alpha,\sigma}^V = H_{\alpha,\sigma} + V_\varepsilon,$$

et on montre une estimation similaire à (5.6), uniformément par rapport à σ . Plus précisément, en définissant, de la même façon que dans (5.1),

$$H_{\alpha,\sigma,\text{eff}} = E_{\alpha,\sigma}(-i\nabla_x) + V_\varepsilon(x),$$

et, de la même façon que dans (5.3),

$$\mathcal{J}_\sigma^\rho(u) = U^{-1} \chi_{S_\mu} \widehat{u} \Phi_{\alpha,\sigma}^\rho,$$

on a

$$\|e^{-itH_{\alpha,\sigma}^V} \mathcal{J}_\sigma^\rho(u_0^\varepsilon) - \mathcal{J}_\sigma^\rho(e^{-itH_{\alpha,\sigma,\text{eff}}} u_0^\varepsilon)\|_{\mathcal{H}} \leq C_\delta (1 + \ln(\rho^{-1})) \varepsilon^{\frac{2}{3}-\delta} t + C \alpha^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} t (\varepsilon^\kappa + \varepsilon t),$$

uniformément par rapport à σ et ρ satisfaisant $0 < \sigma < \rho \leq 1$. Ce résultat est démontré en utilisant des arguments de type Cook, c'est-à-dire en écrivant le terme apparaissant dans la norme du membre de gauche de l'inégalité précédente sous la forme de l'intégrale d'une dérivée :

$$\begin{aligned} & e^{-itH_{\alpha,\sigma}^V} \mathcal{J}_\sigma^\rho(u_0^\varepsilon) - \mathcal{J}_\sigma^\rho(e^{-itH_{\alpha,\sigma,\text{eff}}} u_0^\varepsilon) \\ &= -i e^{-itH_{\alpha,\sigma}^V} \int_0^t ds e^{isH_{\alpha,\sigma}^V} (H_{\alpha,\sigma}^V \mathcal{J}_\sigma^\rho - \mathcal{J}_\sigma^\rho H_{\alpha,\sigma,\text{eff}}) e^{-isH_{\alpha,\sigma,\text{eff}}} u_0^\varepsilon. \end{aligned}$$

Il s'agit alors de décomposer l'intégrande de façon adéquate et d'utiliser comme il faut les propriétés de régularités de $P \mapsto \Phi_{\alpha,\sigma}^\rho(P)$ décrites dans la proposition 5.2. Un autre ingrédient important de la preuve est l'estimation suivante que nous obtenons en contrôlant les termes d'interactions :

$$\|(H_{\alpha,\sigma}(P) - W_{\nabla E_{\alpha,\sigma}(P)}^{\sigma,\rho} H_{\alpha,\sigma}(P) (W_{\nabla E_{\alpha,\sigma}(P)}^{\sigma,\rho})^*) \Phi_{\alpha,\sigma}^\rho(P)\|_{\mathcal{H}_{\text{ph}}} \leq C \alpha^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} |P|,$$

pour tout $P \in \mathcal{S}$, où C est uniforme par rapport à α, σ, ρ et $|P|$.

Chapitre 6

Décroissance de l'énergie locale à basses énergies

Dans ce chapitre, nous décrivons divers résultats liés à la décroissance de l'énergie locale pour des modèles de théorie quantique des champs. La décroissance de l'énergie locale est une propriété importante justifiant dans notre contexte que, étant donné un certain état initial, le système évolue en émettant des particules du champ quantifié (par exemple des photons) qui se propagent à l'infini avec probabilité 1 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Une méthode classique pour obtenir la décroissance de l'énergie locale est de commencer par prouver un principe d'absorption limite, lui-même pouvant s'obtenir en appliquant la méthode des commutateurs positifs de Mourre. D'un point de vue général, c'est cette approche qui sera suivie dans ce chapitre. Notons d'ailleurs qu'une autre conséquence du principe d'absorption limite est le caractère absolument continu du spectre essentiel (dans tout intervalle où le principe d'absorption limite est satisfait).

Nous nous placerons dans des régimes de faible couplage. Pour de tels régimes, il n'est en général pas très difficile d'obtenir la décroissance de l'énergie locale dans des intervalles situés suffisamment loin des valeurs propres du hamiltonien libre, en particulier, suffisamment loin de l'énergie fondamentale. Si l'on choisit le générateur des dilatations dans l'espace de Fock comme opérateur conjugué (dans le but d'appliquer la théorie de Mourre), l'énergie fondamentale devient en effet un seuil ; comme dans de nombreux autres contextes, l'analyse du spectre, de la résolvante et de la dynamique du hamiltonien près d'un seuil est un problème délicat. L'objectif des travaux décrits dans ce chapitre est d'étudier ce problème pour différents modèles et en suivant différentes approches.

Dans la première section, nous considérons un électron libre interagissant avec le champ de radiation quantifié dans le modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste. Le modèle étant invariant par translations, on décompose le hamiltonien en intégrale directe comme décrit dans la section 1-4, puis on étudie le hamiltonien obtenu pour une impulsion totale fixée.

La deuxième section concerne un modèle mathématique de l'interaction faible, décrivant la désintégration du boson vecteur W^\pm en un électron et un antineutrino.

Enfin, dans la troisième section, nous nous intéressons à un atome d'hydrogène avec noyau fixe dans le modèle standard de la QED non relativiste. Nous montrons des propriétés de régularité de la résolvante et de décroissance de l'énergie locale uniformément en la distance de l'intervalle d'énergie considéré au bas du spectre.

6-1 L'électron habillé

Nous décrivons ici les résultats obtenus en collaboration avec T. Chen, J. Fröhlich et I.M. Sigal dans [xi]. On considère un électron libre (sans potentiel extérieur) interagissant avec le champ électromagnétique quantifié dans le modèle standard de la QED non relativiste. Comme décrit dans la section 1-2, l'espace de Hilbert est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$, où \mathcal{H}_{el} est donné par (1.1), \mathcal{H}_{ph} est défini en (1.2), et le hamiltonien est donné par l'expression (1.4) avec $V = 0$; le hamiltonien étudié est donc

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_{\text{el}}} (p_{\text{el}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A(x_{\text{el}}))^2 + H_{\text{ph}}.$$

Afin d'appliquer la méthode de Mourre, nous supposons que les vecteurs de polarisation $\varepsilon_\lambda(k)$ apparaissant dans l'expression (1.5) de $A(x_{\text{el}})$ sont tels que $\varepsilon_\lambda(k) = \varepsilon_\lambda(k/|k|)$ (ainsi la relation $(k \cdot \nabla_k \varepsilon_\lambda)(k) = 0$ est vérifiée), et que la fonction de troncature ultraviolette χ_Λ vérifie

$$\chi_\Lambda \in C_0^\infty(\{k, |k| \leq \Lambda\}; [0, 1]), \quad \text{et} \quad \chi_\Lambda = 1 \quad \text{sur} \quad \{k, |k| \leq 3\Lambda/4\}.$$

Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, notre objectif est de montrer une propriété de décroissance de l'énergie locale, justifiant que la probabilité de trouver tous les photons dans une région finie de l'espace, centrée en la position x_{el} de l'électron, tend vers 0 quand le temps t tend vers $+\infty$. En d'autres termes, l'électron émet certains photons qui se propagent à l'infini. Nous allons montrer ce résultat en considérant un état initial arbitraire dont l'impulsion totale est plus petite qu'une certaine valeur critique $p_c < m_{\text{el}}c = m_{\text{el}}$ (rappelons que nous travaillons toujours dans les unités choisies telles que, en particulier, la vitesse de la lumière c est égale à 1). La raison physique pour laquelle nous nous restreignons à des valeurs de l'impulsion totale telles que $|P| \leq p_c < m_{\text{el}}$ est liée à la radiation de Cerenkov (voir la figure 1.1 dans la section 1-4).

En fait, on s'attend à ce que, asymptotiquement, le système soit proche d'un état de diffusion décrivant, d'une part, un électron habillé par un nuage de photons, et d'autre part un nombre infini de photons se propageant à une distance de l'électron divergeant linéairement par rapport à t (diffusion Compton). Démontrer un tel résultat pour des photons non massifs reste néanmoins un problème ouvert (pour le cas de photons massifs, voir [73]).

Le système que nous étudions est invariant par translations et admet, comme décrit dans la section 1-4, une décomposition en intégrale directe par rapport au spectre de l'opérateur d'impulsion totale,

$$UH_\alpha U^{-1} = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_\alpha(P) dP, \quad (6.1)$$

où l'expression de $H_\alpha(P)$ est donnée par (1.18). Notre premier objectif est d'établir un principe d'absorption limite pour les hamiltoniens $H_\alpha(P)$, pour des valeurs de α suffisamment petites et pour une impulsion totale $P \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant $|P| \leq p_c < m_{\text{el}}$.

Etant donné un intervalle $J \subset \mathbb{R}$, on pose $J_\pm = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}z \in J, 0 < \pm \text{Im}z \leq 1\}$. L'opérateur $d\Gamma(\langle x_{\text{ph}} - x_{\text{el}} \rangle)$ étant invariant par translations (dans le sens où il commute avec l'opérateur d'impulsion totale P_{tot} défini en (1.17)), on peut le représenter par l'intégrale directe

$$Ud\Gamma(\langle x_{\text{ph}} - x_{\text{el}} \rangle)U^{-1} = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} d\Gamma(\langle y \rangle) dP, \quad (6.2)$$

où $y = i\nabla_k$ désigne l'opérateur "position" d'un photon, relativement à la position de l'électron. (On utilise ici le symbole y pour distinguer l'opérateur position d'un photon par rapport à l'électron dans les espaces fibrés, de l'opérateur position d'un photon $x_{\text{ph}} = i\nabla_k$ dans l'espace de Fock initial \mathcal{H}_{ph}). Notre principal résultat est formulé dans le théorème suivant.

Théorème 6.1 *Il existe $\alpha_c > 0$ tel que, pour tout $|P| \leq p_c (= m_{\text{el}}/40)$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $1/2 < s \leq 1$, et tout intervalle compact $J \subset]E_\alpha(P), +\infty[$, on a*

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \text{Re } z \in J} \|(\text{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)^{-s} (H_\alpha(P) - z)^{-1} (\text{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)^{-s}\| \leq C, \quad (6.3)$$

où C est une constante dépendant de J et de s , et $\langle y \rangle = (1 + y^2)^{1/2}$. De plus, l'application

$$J \ni \lambda \mapsto (\text{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)^{-s} (H_\alpha(P) - \lambda \pm i0^+)^{-1} (\text{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)^{-s} \in B(\mathcal{H}) \quad (6.4)$$

est uniformément Hölder-continue d'ordre $s - 1/2$.

Remarque 6.2

1. Nous choisissons $p_c = m_{\text{el}}/40$ pour une question de commodité, sans essayer de trouver une valeur optimale pour p_c . Avec une analyse plus précise, on pourrait obtenir le résultat pour une valeur de p_c d'ordre $p_c = m_{\text{el}} - \mathcal{O}(\alpha^{1/2})$.
2. Notre preuve montre que, si $\text{dist}(E_\alpha(P), J) = \sigma$, la constante C apparaissant dans (6.3) est d'ordre $\mathcal{O}(\sigma^{-1})$.
3. L'approche que nous utilisons pour démontrer le théorème 6.1 s'adapte facilement au cas d'électrons liés à des noyaux fixes et interagissant avec un champ de radiation quantifié, ou encore au cas de systèmes d'atomes ou d'ions invariants par translations, pour une impulsion totale fixée.

Corollaire 6.3 *Il existe $\alpha_c > 0$ tel que pour tous $|P| \leq p_c (= m_{\text{el}}/40)$ et $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, le spectre de $H_\alpha(P)$ est purement absolument continu dans l'intervalle $]E_\alpha(P), +\infty[$.*

Remarque 6.4 *Combinés aux résultats antérieurs de [23, 46, 48, 79], le corollaire 6.3 complète la description du spectre de $H_\alpha(P)$ pour α suffisamment petit et $|P| \leq p_c$:*

– Si $P = 0$,

$$\text{spec}_{\text{pp}}(H_\alpha(0)) = \{E_\alpha(0)\}, \quad \text{spec}_{\text{ac}}(H_\alpha(0)) = [E_\alpha(0), +\infty[, \quad \text{spec}_{\text{sc}}(H_\alpha(0)) = \emptyset.$$

– Si $P \neq 0$ (et $|P| \leq p_c < m_{\text{el}}$),

$$\text{spec}_{\text{pp}}(H_\alpha(P)) = \emptyset, \quad \text{spec}_{\text{ac}}(H_\alpha(P)) = [E_\alpha(P), +\infty[, \quad \text{spec}_{\text{sc}}(H_\alpha(P)) = \emptyset.$$

Corollaire 6.5 *Soient $\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^3, |P| < p_c\}$ et $\Phi \in \mathcal{H}$ un état satisfaisant $U\Phi = \int_{\mathcal{S}}^\oplus \Phi(P) dP$ et*

$$\|(\text{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)^s \Phi(P)\| < \infty,$$

pour un certain $1/2 < s \leq 1$ et pour tout $P \in \mathcal{S}$. Alors il existe $\alpha_c > 0$ tel que pour tout $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$,

$$\|(\text{d}\Gamma(\langle x_{\text{ph}} - x_{\text{el}} \rangle) + 1)^{-s} e^{-itH_\alpha} g(H_\alpha, P_{\text{tot}}) \Phi\| \leq Ct^{-(s-\frac{1}{2})},$$

pour toute fonction $g \in C_0^\infty(\mathcal{M}_{\text{a.c.}})$, où l'on a posé

$$\mathcal{M}_{\text{a.c.}} = \{(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}, \lambda > E_\alpha(P)\}$$

Remarque 6.6 *Le corollaire 6.5 implique la propriété suivante : si A est un opérateur auto-adjoint (une observable) dans \mathcal{H} satisfaisant*

$$\|(\text{d}\Gamma(\langle x_{\text{ph}} - x_{\text{el}} \rangle) + 1)^s A (\text{d}\Gamma(\langle x_{\text{ph}} - x_{\text{el}} \rangle) + 1)^s\| < \infty,$$

et $\Phi \in \mathcal{H}$ est comme dans le corollaire 6.5, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \Phi, e^{itH_\alpha} A e^{-itH_\alpha} \Phi \rangle = 0.$$

Plus généralement, on s'attend à ce que la propriété de retour à l'équilibre soit satisfaite dans le sens suivant : soit $h \in C^\infty(\cdot - \infty, E_c[\times \mathcal{S}])$, où $E_c = E_\alpha(P)$ avec $|P| = p_c$, et soit $\Phi_h = h(H_\alpha, P_{\text{tot}})\Phi$ (où $\Phi \in \mathcal{H}$ est toujours comme dans le corollaire 6.5). Soit de plus $A = U^{-1} \int_{\mathbb{R}^3}^\oplus A(P) dPU$ une observable bornée et invariante par translations. Alors on s'attend à ce que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle e^{-itH_\alpha} \Phi_h, A e^{-itH_\alpha} \Phi_h \rangle = \int_{\mathcal{S}} d\mu_{\Phi_h}(P) \langle \Psi_\alpha(P), A(P) \Psi_\alpha(P) \rangle,$$

où $\text{supp}\{d\mu_{\Phi_h}\} \subseteq \mathcal{S}$, et où $\Psi_\alpha(P)$ désigne un état fondamental généralisé (i.e. dans une représentation non unitairement équivalente à la représentation Fock) du hamiltonien $H_\alpha(P)$.

Notre preuve du principe d'absorption limite apparaissant dans le théorème 6.1 repose sur une application de l'application Feshbach-Schur lisse introduite dans [22] (voir aussi [77, 90]) combinée avec la théorie de Mourre (voir [13, 119, 148, 151]). L'application Feshbach-Schur lisse dépend du choix d'un opérateur non perturbé. Un point important de notre approche, qui semble-t-il n'avait pas encore été considéré dans la littérature, est de choisir comme opérateur non perturbé non pas le hamiltonien libre, mais plutôt le hamiltonien obtenu en supprimant l'interaction entre l'électron et les photons de basses énergies. Plusieurs résultats et idées antérieurs, notamment présents dans [22, 75, 79, 90] (voir aussi la section 2-1), sont cela dit des ingrédients cruciaux de notre preuve. D'ailleurs, comme dans le chapitre 5, l'une des propriétés fondamentales utilisées dans notre analyse est la régularité de l'application $P \mapsto E_\alpha(P)$, où $E_\alpha(P) = \inf \text{spec}(H_\alpha(P))$. Ces propriétés de régularité ont été étudiées dans [23, 46, 48, 79] et celles d'entre elles que nous utilisons sont résumées dans la proposition 5.1.

Pour un atome d'hydrogène avec noyau fixe dans le modèle standard de la QED non relativiste, un principe d'absorption limite à basses énergies est démontré dans [75] et [77]. Si l'on compare les approches de [75], [77] et la nôtre, en appliquant chacune des méthodes au modèle de Nelson de la section 1-3 dans un régime de faible couplage, on voit que la méthode de [75] est applicable pour des valeurs du paramètre infrarouge μ apparaissant dans (1.16) telles que $\mu \geq 1/2$, la méthode de [77] est applicable pour $\mu > -1/2$, et la nôtre pour $\mu \geq -1/2$. Notre approche est ainsi bien adaptée pour traiter des modèles singuliers dans le domaine infrarouge (le fait que le hamiltonien ne possède pas d'état fondamental n'apparaît pas comme une difficulté particulière dans notre preuve).

Pour le modèle invariant par translations considéré dans ce chapitre, la méthode de [75] n'est pas applicable (la raison en est que, dans notre cas, si l'on considère le hamiltonien avec troncature infrarouge, ce n'est pas seulement l'opérateur libre qui sur les photons de basses énergies, un terme couplant les photons de basses et de hautes énergies est également présent). La méthode de [77], basée sur l'application d'un groupe de renormalisation spectral, pourrait éventuellement s'adapter, mais notre approche, qui ne nécessite qu'une seule utilisation de l'application Feshbach-Schur (au lieu d'une infinité), paraît sensiblement plus simple.

Esquissons un peu plus précisément notre preuve du théorème 6.1. Dans un premier temps, on démontre une partie assez facile, à savoir un principe d'absorption limite dans tout intervalle compact $J \subset]E_\alpha(P), +\infty[$ tel que $\inf J \geq E_\alpha(P) + C_0 \alpha^{1/2}$ avec $C_0 > 0$ suffisamment grand. Cela découle d'une estimation de Mourre de la forme

$$\mathbf{1}_J(H_\alpha(P))[H_\alpha(P), iB]\mathbf{1}_J(H_\alpha(P)) \geq c_0 \mathbf{1}_J(H_\alpha(P)), \quad (6.5)$$

où B est le générateur des dilatations dans l'espace de Fock et $c_0 > 0$. L'inégalité (6.5) se démontre simplement, en utilisant notamment les estimations des opérateurs de création et d'annihilation en fonction de l'énergie du champ de photons libre.

Comme mentionné précédemment, la difficulté principale est de montrer un principe d'absorption limite dans un intervalle proche de $E_\alpha(P)$. On utilise pour ce faire un théorème dû à [77], qui montre essentiellement que l'on peut obtenir un principe d'absorption limite pour $H_\alpha(P)$ en commençant par montrer un principe d'absorption limite pour un opérateur de Feshbach-Schur associé à $H_\alpha(P)$.

Notre construction de l'opérateur de Feshbach-Schur lisse est basé sur une décomposition infrarouge de $H_\alpha(P)$,

$$H_\alpha(P) = H_{\alpha,\sigma}(P) + U_{\alpha,\sigma}(P),$$

où, comme d'habitude, $H_{\alpha,\sigma}(P)$ est l'opérateur avec troncature infrarouge de paramètre σ , obtenu en introduisant une troncature $\mathbf{1}_{\{|k| \geq \sigma\}}(k)$ dans l'expression (1.5) de $A(\cdot)$.

On utilise ensuite le fait que l'espace de Fock \mathcal{H}_{ph} est unitairement équivalent à $\mathcal{H}_{\text{ph}, \geq \sigma} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}, \leq \sigma}$, les espaces de Fock associés aux photons d'énergies respectivement plus petites et plus grandes que σ , puis que la restriction $K_{\alpha,\sigma}(P) = H_{\alpha,\sigma}(P)|_{\mathcal{H}_{\text{ph}, \geq \sigma}}$ possède un gap d'ordre $\mathcal{O}(\sigma)$ dans son spectre au-dessus de l'énergie fondamentale $E_{\alpha,\sigma}(P)$. On construit alors l'application de Feshbach-Schur F_χ (voir [xi] pour la définition précise de F_χ) à partir de la projection $\Pi_{\alpha,\sigma}(P)$ sur l'état fondamental de $K_{\alpha,\sigma}(P)$ en posant $\chi = \Pi_{\alpha,\sigma}(P) \otimes \chi_f^\sigma(H_f)$, où $\chi_f^\sigma(\cdot)$ est une fonction lisse approximant la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\{\cdot \leq \sigma\}}$. L'opérateur qui en résulte, $F(\lambda) = F_\chi(H_\alpha(P) - \lambda)$, dépendant du paramètre spectral λ , est de la forme

$$F(\lambda) = K_{\alpha,\sigma}(P) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{ph}, \leq \sigma}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{ph}, \geq \sigma}} \otimes \left(\frac{1}{2} P_f^2 + H_f \right) - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P) \otimes P_f - \lambda + W,$$

où W est un certain terme d'interaction. Mentionnons ici un point important : l'opérateur non perturbé choisi pour construire $F(\lambda)$ n'est pas $H_{\alpha,\sigma}(P)$ (qui ne permettrait pas à la méthode d'aboutir), mais plutôt

$$T_{\alpha,\sigma}(P) = K_{\alpha,\sigma}(P) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{ph}, \leq \sigma}} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\text{ph}, \geq \sigma}} \otimes \left(\frac{1}{2} P_f^2 + H_f \right) - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P) \otimes P_f.$$

Grâce à la régularité de l'application $P \mapsto E_{\alpha,\sigma}(P)$ (voir la proposition 5.1) et en utilisant la formule de Feynman-Hellmann de la même façon que dans la section 2-1, nous pouvons montrer que la différence $H_{\alpha,\sigma}(P) - T_{\alpha,\sigma}(P)$ est petite dans un sens approprié.

Enfin, pour obtenir un principe d'absorption limite pour $F(\lambda)$, on utilise encore une fois la théorie de Mourre, en choisissant l'opérateur conjugué B^σ défini comme le générateur des dilatations dans l'espace de Fock, mais avec une fonction de troncature lisse restreignant l'action de l'opérateur aux photons d'énergies $|k| \leq \sigma$.

6-2 Modèles mathématiques de l'interaction faible

Cette section décrit les résultats obtenus en collaboration avec W. Aschbacher, J.-M. Barbaroux et J.-C. Guillot dans [x]. On étudie un modèle mathématique de l'interaction faible décrivant la désintégration des bosons vecteurs W^\pm dans la famille des leptons. Rappelons que la famille des leptons est composée de l'électron e^- et du positron e^+ , accompagnés de leurs neutrino ν_e et antineutrino $\bar{\nu}_e$ associés, des muons μ^- et μ^+ associés à leurs neutrino ν_μ et antineutrino $\bar{\nu}_\mu$, et enfin des leptons tau τ^- et τ^+ associés à leur neutrino ν_τ et antineutrino $\bar{\nu}_\tau$. Un exemple de processus bien connu dans ce contexte, que nous considérerons dans ce chapitre, est la désintégration du boson vecteur W^- en un électron et un antineutrino de l'électron,

$$W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e.$$

Comme dans la section précédente, notre objectif principal est d'obtenir un principe d'absorption limite pour des basses énergies, c'est-à-dire dans un intervalle arbitrairement proche de l'énergie fondamentale. Bien que le point de départ soit le même que dans la section 6-1 (décomposition d'un espace de

Fock en un espace associé aux particules d'énergies plus petites qu'un certain paramètre σ , et un autre associé aux particules d'énergie plus grande que σ), l'approche que nous suivons dans cette section est sensiblement différente de la précédente. Dû au fait que le hamiltonien d'interaction est, dans un certain sens, plus simple dans le cas présent que dans la section 6-1, nous n'avons pas besoin d'utiliser une application Feshbach-Schur ; nous reprenons plutôt directement, en l'améliorant, la méthode de [75]. Bien entendu, le modèle considéré, associé à un processus de l'interaction faible, possède également certaines particularités qu'il nous faut traiter par rapport aux modèles de Pauli-Fierz généralement considérés.

Le modèle étudié ici n'étant pas "bien connu", contrairement au modèle de Nelson ou au modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste, nous commençons par le définir dans une première sous-section.

6-2.1 Définition du modèle

Le modèle que l'on considère est défini d'après le Modèle Standard (voir [88, 176, 177]). Les neutrinos et antineutrinos sont des particules non massives d'hélicités respectives $-1/2$ et $+1/2$; nous supposons qu'ils peuvent avoir une hélicité $-1/2$ ou $+1/2$. L'index $\ell \in \{1, 2, 3\}$ est associé à chaque espèce de leptons : $\ell = 1$ désigne l'électron e^- , le positron e^+ et leurs neutrinos associés $\nu_e, \bar{\nu}_e$; $\ell = 2$ désigne les muons μ^-, μ^+ et leurs neutrinos associés $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$; et enfin $\ell = 3$ désigne les leptons τ^- et τ^+ et leurs neutrinos associés $\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$. Remarquons que les leptons e^-, μ^-, τ^- et leurs antiparticules e^+, μ^+, τ^+ sont des particules massives, tandis que les neutrinos $\nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$ sont non massifs.

On note $\xi_1 = (p_1, s_1)$ la variable quantique d'un lepton massif, où $p_1 \in \mathbb{R}^3$ et $s_1 \in \{-1/2, 1/2\}$ (la variable s_1 correspond à la polarisation du spin). De même $\xi_2 = (p_2, s_2)$ désigne la variable quantique d'un lepton non massif, avec $p_2 \in \mathbb{R}^3$ et $s_2 \in \{-1/2, 1/2\}$, et $\xi_3 = (k, \lambda)$ représente la variable quantique des bosons de spin 1 W^+ et W^- , avec $k \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Soient $L^2(\Sigma_1)$, avec $\Sigma_1 = \mathbb{R}^3 \times \{-1/2, 1/2\}$, l'espace de Hilbert pour un lepton, et $L^2(\Sigma_2)$, avec $\Sigma_2 = \mathbb{R}^3 \times \{-1, 0, 1\}$, l'espace de Hilbert pour un boson. On notera pour simplifier $\int_{\Sigma_1} d\xi = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int dp$ et $\int_{\Sigma_2} d\xi = \sum_{\lambda=0,1,-1} \int dk$.

Pour $\ell \in \{1, 2, 3\}$, on note \mathcal{F}_ℓ l'espace de Fock fermionique (ou antisymétrique) associé à l'espèce de leptons ℓ , c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \bigotimes_{i=1}^4 \Gamma_a(L^2(\Sigma_1)).$$

L'espace de Hilbert \mathcal{F}_L associé à l'ensemble des leptons est alors

$$\mathcal{F}_L = \bigotimes_{\ell=1}^3 \mathcal{F}_\ell.$$

De même, l'espace de Hilbert \mathcal{F}_W pour les bosons vecteurs W^+ et W^- est l'espace de Fock symétrique

$$\mathcal{F}_W = \bigotimes_{i=1}^2 \Gamma_s(L^2(\Sigma_2)).$$

Finalement, l'espace de Hilbert pour le système total est

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_L \otimes \mathcal{F}_W.$$

Pour tout $\ell \in \{1, 2, 3\}$, $b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$ (respectivement $b_{\ell,\epsilon}^*(\xi_1)$) désigne l'opérateur d'annihilation (respectivement de création) pour l'espèce correspondante de particules massives lorsque $\epsilon = +$ (par exemple

l'électron pour $\ell = 1$), et pour l'espèce correspondante d'antiparticules massives lorsque $\epsilon = -$ (par exemple le positron pour $\ell = 1$). De même, pour tout $\ell \in \{1, 2, 3\}$, $c_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$ (respectivement $c_{\ell,\epsilon}^*(\xi_2)$) est l'opérateur d'annihilation (respectivement de création) pour l'espèce correspondante de neutrinos lorsque $\epsilon = +$ (par exemple le neutrino ν_e pour $\ell = 1$), et pour l'espèce correspondante d'antineutrinos lorsque $\epsilon = -$ (par exemple l'antineutrino $\bar{\nu}_e$ lorsque $\ell = 1$). Enfin, l'opérateur $a_\epsilon(\xi_3)$ (respectivement $a_\epsilon^*(\xi_3)$) est l'opérateur d'annihilation (respectivement de création) pour les bosons W^- lorsque $\epsilon = +$, et pour les bosons W^+ lorsque $\epsilon = -$. Les opérateurs $b_{\ell,\epsilon}(\xi_1)$, $b_{\ell,\epsilon}^*(\xi_1)$, $c_{\ell,\epsilon}(\xi_2)$ et $c_{\ell,\epsilon}^*(\xi_2)$ vérifient les relations canoniques d'anticommutation, tandis que les opérateurs $a_\epsilon(\xi_3)$ et $a_\epsilon^*(\xi_3)$ vérifient les relations canoniques de commutation (voir par exemple [176, 177]). De plus, les opérateurs a commutent avec les opérateurs b et c . Suivant la convention décrite dans [176, 177], nous supposons que les opérateurs de création et d'annihilation de deux espèces de leptons différentes anticommulent. Nous avons ainsi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \{b_{\ell,\epsilon}(\xi_1), b_{\ell',\epsilon'}^*(\xi_1')\} &= \delta_{\ell\ell'}\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta(\xi_1 - \xi_1') , \\ \{c_{\ell,\epsilon}(\xi_2), c_{\ell',\epsilon'}^*(\xi_2')\} &= \delta_{\ell\ell'}\delta_{\epsilon\epsilon'}\delta(\xi_2 - \xi_2') , \\ [a_\epsilon(\xi_3), a_{\epsilon'}^*(\xi_3')] &= \delta_{\epsilon\epsilon'}\delta(\xi_3 - \xi_3') , \\ \{b_{\ell,\epsilon}(\xi_1), b_{\ell',\epsilon'}(\xi_1')\} &= \{c_{\ell,\epsilon}(\xi_2), c_{\ell',\epsilon'}(\xi_2')\} = 0 , \\ [a_\epsilon(\xi_3), a_{\epsilon'}(\xi_3')] &= 0 , \\ \{b_{\ell,\epsilon}(\xi_1), c_{\ell',\epsilon'}(\xi_2')\} &= \{b_{\ell,\epsilon}(\xi_1), c_{\ell',\epsilon'}^*(\xi_2')\} = 0 , \\ [b_{\ell,\epsilon}(\xi_1), a_{\epsilon'}(\xi_3)] &= [b_{\ell,\epsilon}(\xi_1), a_{\epsilon'}^*(\xi_3)] = [c_{\ell,\epsilon}(\xi_2), a_{\epsilon'}(\xi_3)] = [c_{\ell,\epsilon}(\xi_2), a_{\epsilon'}^*(\xi_3)] = 0 , \end{aligned}$$

où $\{b, b'\} = bb' + b'b$ et $[a, a'] = aa' - a'a$.

Le Hamiltonian libre H_0 est donné par l'expression

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\epsilon=\pm} \int w_\ell^{(1)}(\xi_1) b_{\ell,\epsilon}^*(\xi_1) b_{\ell,\epsilon}(\xi_1) d\xi_1 + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\epsilon=\pm} \int w_\ell^{(2)}(\xi_2) c_{\ell,\epsilon}^*(\xi_2) c_{\ell,\epsilon}(\xi_2) d\xi_2 \\ &+ \sum_{\epsilon=\pm} \int w^{(3)}(\xi_3) a_\epsilon^*(\xi_3) a_\epsilon(\xi_3) d\xi_3 , \end{aligned}$$

où $w_\ell^{(1)}$, $w_\ell^{(2)}$, $w^{(3)}$ sont les énergies relativistes des leptons massifs, neutrinos et bosons respectivement, définies par

$$w_\ell^{(1)}(\xi_1) = (|p_1|^2 + m_\ell^2)^{\frac{1}{2}}, \quad w_\ell^{(2)}(\xi_2) = |p_2|, \quad w^{(3)}(\xi_3) = (|k|^2 + m_W^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Ici m_ℓ est la masse du lepton massif ℓ , et m_W est la masse des bosons ; notons que les mesures physiques donnent $m_1 < m_2 < m_3 < m_W$.

Le hamiltonien d'interaction H_I est exprimé en termes des opérateurs d'annihilation et de création décrits ci-dessus, avec des noyaux $G_{\ell,\epsilon,\epsilon'}^{(\alpha)}(\cdot, \cdot, \cdot)$ ($\alpha = 1, 2$). Les expressions des noyaux $G_{\ell,\epsilon,\epsilon'}^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, que l'on trouve en physique théorique contiennent des distributions de Dirac due à la conservation de l'impulsion (voir par exemple [88] ou [176]). Pour avoir un opérateur bien défini, nous approximations les noyaux singuliers par des fonctions de carrés intégrables. Plus précisément, nous faisons l'hypothèse suivante.

Condition 6.7 Pour tous $\alpha \in \{1, 2\}$, $\ell \in \{1, 2, 3\}$, $\epsilon, \epsilon' = \pm$,

$$G_{\ell,\epsilon,\epsilon'}^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in L^2(\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2) .$$

Le hamiltonien d'interaction est alors défini par l'expression

$$H_I = H_I^{(1)} + H_I^{(2)},$$

où

$$\begin{aligned} H_I^{(1)} &= \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\epsilon \neq \epsilon'} \int G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) b_{\ell, \epsilon}^*(\xi_1) c_{\ell, \epsilon'}^*(\xi_2) a_{\epsilon}(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\epsilon \neq \epsilon'} \int \overline{G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} a_{\epsilon}^*(\xi_3) c_{\ell, \epsilon'}(\xi_2) b_{\ell, \epsilon}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \\ H_I^{(2)} &= \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\epsilon \neq \epsilon'} \int G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) b_{\ell, \epsilon}^*(\xi_1) c_{\ell, \epsilon'}^*(\xi_2) a_{\epsilon}^*(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^3 \sum_{\epsilon \neq \epsilon'} \int \overline{G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} a_{\epsilon}(\xi_3) c_{\ell, \epsilon'}(\xi_2) b_{\ell, \epsilon}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned}$$

En particulier, l'opérateur $H_I^{(1)}$ décrit la désintégration des bosons W^+ et W^- en leptons.

Le hamiltonien total est écrit sous la forme (où g est une constante de couplage),

$$H_g = H_0 + gH_I, \quad g > 0.$$

En utilisant le théorème de Kato-Rellich, il n'est pas difficile de montrer que, sous la condition 6.7 et pour des valeurs suffisamment petites de g , H_g est auto-adjoint avec domaine $\mathcal{D}(H_g) = \mathcal{D}(H_0)$ (voir [32]).

6-2.2 Résultats

Pour énoncer nos principaux résultats, nous avons besoin, en plus de la condition 6.7, d'hypothèses supplémentaires sur les noyaux $G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(\alpha)}$.

Condition 6.8 *Il existe une constante $K(G) > 0$ telle que pour tous $\alpha \in \{1, 2\}$, $\ell \in \{1, 2, 3\}$, $\epsilon, \epsilon' = \pm$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ et $\sigma \geq 0$,*

$$(i) \quad \int_{\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2} \frac{|G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)|^2}{|p_2|^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 < \infty,$$

$$(ii) \quad \left(\int_{\Sigma_1 \times \{|p_2| \leq \sigma\} \times \Sigma_2} |G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)|^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K(G)\sigma,$$

$$(iii-a) \quad (p_2 \cdot \nabla_{p_2}) G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(\alpha)}(\cdot, \cdot, \cdot) \in L^2(\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2) \text{ et}$$

$$\int_{\Sigma_1 \times \{|p_2| \leq \sigma\} \times \Sigma_2} \left| [(p_2 \cdot \nabla_{p_2}) G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(\alpha)}](\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right|^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \leq K(G)\sigma,$$

$$(iii-b) \quad \int_{\Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \Sigma_2} p_{2,i}^2 p_{2,j}^2 \left| \frac{\partial^2 G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(\alpha)}}{\partial p_{2,i} \partial p_{2,j}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \right|^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 < \infty.$$

Sous les conditions 6.7 et 6.8(i), et pour des valeurs suffisamment petites de la constante de couplage g , on peut montrer (voir [32]) que H_g possède un unique état fondamental associée à l'énergie $E_g = \inf \text{spec}(H_g)$. Le spectre de H_g vérifie de plus

$$\text{spec}(H_g) = \text{spec}_{\text{ac}}(H_g) = [E_g, +\infty[.$$

Soit $y = i\nabla_{p_2}$ l'opérateur de $L^2(\Sigma_1)$ associé à la position du neutrino et $\langle y \rangle = (1 + y^2)^{1/2}$; l'opérateur de "position totale" des neutrinos et antineutrinos est défini par

$$\begin{aligned} X_\ell &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes d\Gamma(\langle y \rangle) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes d\Gamma(\langle y \rangle), \quad \text{dans } \mathcal{F}_\ell, \\ X &= (X_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X_2 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes X_3) \otimes (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad \text{dans } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Théorème 6.9 *Supposons que les noyaux $G_{\ell, \epsilon, \epsilon'}^{(\alpha)}$ satisfassent les conditions 6.7 et 6.8 (ii)-(iii). Alors pour tout $\delta > 0$ tel que $0 < \delta < m_1$, il existe $g_\delta > 0$ tel que, pour tout $0 < g \leq g_\delta$,*

(i) *Pour tous $s > 1/2$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, les limites*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \varphi, (X + 1)^{-s} (H_g - \lambda \pm i\epsilon)^{-1} (X + 1)^{-s} \psi \rangle$$

existent pour tout $\lambda \in]E_g, E_g + m_1 - \delta[$.

(ii) *Le spectre de H_g dans $]E_g, E_g + m_1 - \delta]$ est purement absolument continu.*

(iii) *Pour tout $s \in]1/2, 1[$ et $f \in C_0^\infty(]E, E + m_1 - \delta])$, on a*

$$\| (X + 1)^{-s} e^{-itH_g} f(H_g) (X + 1)^{-s} \| = \mathcal{O} \left(t^{-(s-1/2)} \right).$$

Remarque 6.10 *Les trois assertions (i), (ii), (iii) du théorème 6.9 sont conséquences d'un résultat plus fort, un principe d'absorption limite avec des poids exprimés en fonction d'un certain opérateur conjugué à H_g au sens de Mourre (pour obtenir (iii), on montre aussi une propriété de régularité Hölder de la résolvante de H_g sur l'axe réel dans des espaces à poids; voir (6.4) pour une propriété de régularité similaire).*

La base de l'approche que nous suivons pour démontrer le théorème 6.9 reprend des ingrédients développés dans [24] et [75]. Plus précisément, comme mentionné plus haut, le point de départ de notre analyse est d'approcher le hamiltonien H_g par un hamiltonien avec troncature infrarouge $H_{g,\sigma}$ défini de telle façon que l'interaction entre les particules massives et les neutrinos ou antineutrinos d'énergies $\leq \sigma$ a été supprimée. Notons ici $K_{g,\sigma}$ la restriction de $H_{g,\sigma}$ à l'espace de Hilbert associé aux particules massives et aux neutrinos et antineutrinos d'énergies $\geq \sigma$. En adaptant la méthode de [24] (voir aussi la section 2-1), on peut montrer que le hamiltonien $K_{g,\sigma}$ possède un gap de taille $\mathcal{O}(\sigma)$ dans son spectre au-dessus de l'énergie fondamentale (contrairement à [32] où un tel résultat est également établi, nous n'avons pas besoin ici d'imposer une troncature ultraviolette à support compact pour les neutrinos et antineutrinos).

Ensuite, comme dans [75], [32] et dans la section 6-1, on combine cette propriété de gap à la méthode de Mourre (voir [13, 161, 148]). Dans [32], l'opérateur conjugué choisi est le générateur des dilatations dans l'espace de Fock des neutrinos et antineutrinos. Afin d'appliquer la méthode de [75], une régularisation infrarouge est alors nécessaire (dans [75], pour le modèle standard de la QED non relativiste, une application de la transformation de Pauli-Fierz permet de se passer d'une régularisation infrarouge).

Pour démontrer le théorème 6.9, nous choisissons comme opérateur conjugué le générateur des dilatations dans l'espace de Fock des neutrinos et antineutrinos, mais avec une troncature restreignant l'action de l'opérateur conjugué aux particules de basses énergies. Remarquons que nous avons fait un

choix similaire dans la section précédente pour le modèle de l'électron habillé. Due à la complexité de l'opérateur d'interaction, nous avons eu besoin dans la section 6-1 d'employer l'application Feshbach-Schur ; ici, nous n'avons pas besoin de l'application Feshbach-Schur, et prouvons une estimation de Mourre directement pour H_g . Notre méthode est ainsi proche de celle de [75], certaines estimations plus fines des termes de restes nous permettant de nous passer de régularisation infrarouge.

6-3 Régularité de la résolvante et décroissance de l'énergie locale à basses énergies

Dans cette section, nous décrivons les résultats obtenus en collaboration avec J.-F. Bony dans [xii]. On considère un atome d'hydrogène non relativiste, avec noyau fixe, dans le modèle standard de l'électrodynamique quantique non relativiste (voir section 1-2, équation (1.4)). Comme dans les autres sections de ce chapitre, l'objet de l'étude concerne les propriétés spectrales et dynamiques du hamiltonien dans la région des basses énergies (plus précisément ici, dans un intervalle situé juste au-dessus de l'énergie fondamentale, et strictement en-dessous de la première valeur propre excitée du hamiltonien électronique). En un certain sens, notre objectif est de montrer que la vitesse de propagation des photons de basses énergies ne dépend pas de leur impulsion, en accord avec l'hypothèse de la théorie de la relativité selon laquelle la vitesse de la lumière est constante.

Notre travail repose sur des résultats abstraits obtenus dans le cadre de la théorie de Mourre [120, 125] combinés à l'inégalité de Mourre obtenue par Fröhlich, Griesemer et Sigal dans [75]. Depuis les travaux de Jensen, Mourre et Perry [125], il est bien connu qu'une inégalité de Mourre, combinée à des propriétés de régularité du hamiltonien par rapport à l'opérateur conjugué et à l'estimation des commutateurs itérés, implique la régularité de la résolvante. Plus précisément, étant donné un opérateur auto-adjoint H , un autre opérateur auto-adjoint A , conjugué à H dans le sens de Mourre, et un intervalle compact J où l'inégalité de Mourre est satisfaite, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{\text{Re}z \in J, \text{Im}z \neq 0} \left\| \frac{d^n}{dz^n} \langle A \rangle^{-n-\frac{1}{2}-\varepsilon} (H-z)^{-1} \langle A \rangle^{-n-\frac{1}{2}-\varepsilon} \right\| < \infty, \quad (6.6)$$

où $\langle A \rangle = (1 + A^2)^{1/2}$, pourvu que les commutateurs itérés $\text{ad}_A^k(H)$ (définis par $\text{ad}_A^0(H) = H$ et $\text{ad}_A^{k+1}(H) = [\text{ad}_A^k(H), A]$) soient contrôlables dans un sens adéquat pour tout $1 \leq k \leq n+2$ (voir [125] pour le résultat précis). De (6.6), on déduit l'existence et la régularité des valeurs au bord de la résolvante $\langle A \rangle^{-1/2-\varepsilon} (H - \lambda \pm i0)^{-1} \langle A \rangle^{-1/2-\varepsilon}$, ainsi que le caractère absolument continu du spectre de H dans J .

Dans [120], sous des hypothèses similaires, Hunziker, Sigal et Soffer établissent la propriété de décroissance de l'énergie locale

$$\| \langle A \rangle^{-s} e^{-itH} \chi(H) \langle A \rangle^{-s} \| \lesssim \langle t \rangle^{-s}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.7)$$

pour tous $s > 0$ et $\chi \in C_0^\infty(J)$, pourvu que les commutateurs $\text{ad}_A^k(H)$ soient bornés pour tous $0 \leq k \leq n$, avec $n > s+1$. La notation $f \lesssim g$ signifie que $f \leq Cg$ pour une certaine constante positive C . Remarquons que, par transformation de Fourier, la régularité de la résolvante (6.6) implique la décroissance de l'énergie locale (6.7) avec le taux de décroissance plus faible $\langle t \rangle^{-s+1/2+\varepsilon}$. De même, (6.7) implique (6.6) avec les poids plus "gros" $\langle A \rangle^{-n-1-\varepsilon}$.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans les deux sections précédentes, pour le modèle standard de la QED non relativiste que nous considérons ici, une inégalité de Mourre à basses énergies existe et est obtenue dans [75]. L'opérateur conjugué dans [75] est le générateur des dilatations dans l'espace de Fock

des photons, que nous notons par le symbole B . Si $\sigma \ll 1$ désigne la taille de l'intervalle spectral J_σ que l'on considère ainsi que sa distance au bas du spectre de H_α (voir (1.11) pour la définition de H_α), alors l'inégalité de Mourre de [75] est de la forme

$$\mathbf{1}_{J_\sigma}(H_\alpha)[H_\alpha, iB]\mathbf{1}_{J_\sigma}(H_\alpha) \geq c_0\sigma\mathbf{1}_{J_\sigma}(H_\alpha), \quad (6.8)$$

pour une certaine constante $c_0 > 0$. Si l'on suppose de plus que l'on est capable d'estimer les commutateurs itérés $\text{ad}_B^k(\chi_\sigma(H_\alpha))$ uniformément par rapport à σ (nous démontrons effectivement une telle propriété dans [xii]), l'inégalité de Mourre (6.8) implique la propriété de décroissance de l'énergie locale

$$\|\langle B \rangle^{-s} e^{-itH_\alpha} \chi_\sigma(H_\alpha) \langle B \rangle^{-s}\| \lesssim \langle \sigma t \rangle^{-s}, \quad (6.9)$$

pour toute fonction $\chi_\sigma \in C_0^\infty(J_\sigma)$. De même, on obtient une borne sur les puissances de la résolvante dans des espaces à poids de la forme

$$\sup_{\text{Re}z \in J_\sigma, \text{Im}z \neq 0} \left\| \langle B \rangle^{-n+\frac{1}{2}-\varepsilon} (H_\alpha - z)^{-n} \langle B \rangle^{-n+\frac{1}{2}-\varepsilon} \right\| \lesssim \sigma^{-n}.$$

Le fait que les bornes obtenues ne soient pas uniformes par rapport à σ est, en fait, un problème typique que l'on rencontre en analysant les propriétés spectrales et dynamiques d'un opérateur auto-adjoint près d'un seuil.

Il n'est pas difficile de vérifier que les poids $\langle B \rangle^{-s}$ dans (6.9) peuvent être remplacés par $\langle X \rangle^{-s}$, où

$$X = d\Gamma(|\nabla_k|),$$

est ici la seconde quantification de la norme de l'opérateur "position" d'un photon. La propriété de décroissance de l'énergie locale (6.9) peut alors s'interpréter en termes de la dynamique des photons de la façon suivante : supposons que le système soit préparé dans un état initial $\Phi \in \mathcal{D}(\langle X \rangle^s)$ et avec un support spectral localisé dans J_σ (où J_σ désigne toujours un intervalle de taille $\mathcal{O}(\sigma)$ situé à une distance $\sigma \ll 1$ du bas du spectre de H_α). Alors pour des temps $t \gg \sigma^{-1}$, la probabilité que l'état au temps t , $e^{-itH_\alpha}\Phi$, soit toujours dans le domaine de $\langle X \rangle^s$ est petite (d'ordre $\langle \sigma t \rangle^{-s}$). En d'autres termes, des photons se sont propagés à l'infini.

Puisque, physiquement, les photons se propagent à la vitesse de la lumière, on s'attend à ce que les propriétés de régularité de la résolvante et de décroissance de l'énergie locale soient satisfaites uniformément par rapport à σ . C'est précisément là ce que nous voulons démontrer.

Pour énoncer nos principaux résultats, nous avons besoin de faire les quelques hypothèses suivantes : les vecteurs de polarisation $\varepsilon_\lambda(k)$, $\lambda = 1, 2$, apparaissant dans (1.5) sont supposés ne dépendre que de $k/|k|$ (par exemple, on peut les prendre comme dans (1.8)), et la fonction de troncature ultraviolette χ_Λ est choisie telle que $\chi_\Lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. D'autre part, le potentiel extérieur V est supposé appartenir à $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ et être relativement borné par rapport à $-\Delta_{x_{\text{el}}}$ avec borne relative 0. Finalement, nous supposons que $e_0 = \inf \text{spec}(-\Delta + V)$ est une valeur propre isolée de multiplicité 1. On pose $e_1 = \inf(\text{spec}(-\Delta + V) \setminus \{e_0\})$ et $e_{\text{gap}} = e_1 - e_0 > 0$.

Posons $E_\alpha = \inf \text{spec}(H_\alpha)$ et rappelons (voir [27, 91]) que E_α est une valeur propre de H_α de multiplicité 1. Soit Π_α la projection sur l'espace propre associé à E_α , et soit $\bar{\Pi}_\alpha = \mathbf{1} - \Pi_\alpha$. Nos principaux résultats sont énoncés dans les théorèmes 6.11, 6.13 et 6.15.

Théorème 6.11 (Principe d'absorption limite) *Il existe $\alpha_c > 0$ tel que, pour tout $s > 1/2$, il existe $C_s > 0$ telle que, pour tout $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$,*

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \text{Re}z \leq E_\alpha + e_{\text{gap}}/4} \left\| \langle X \rangle^{-s} (H_\alpha - z)^{-1} \bar{\Pi}_\alpha \langle X \rangle^{-s} \right\| \leq C_s.$$

Remarque 6.12

1. Le fait que la condition $s > 1/2$ soit suffisante est lié au fait que la vitesse de propagation des photons ne dépend pas de leur impulsion.
2. Le théorème 6.11 implique que le spectre de H_α dans l'intervalle $]E_\alpha, E_\alpha + e_{\text{gap}}/4[$ est purement absolument continu, ce qui était déjà démontré dans [75]

Le résultat suivant fournit une information supplémentaire sur la régularité de la résolvante dans des espaces à poids.

Théorème 6.13 (Régularité de la résolvante) *Il existe $\alpha_c > 0$ tel que, pour tous $1/2 < s < 3/2$ et $\varepsilon > 0$, il existe $C_{s,\varepsilon} > 0$ telle que, pour tout $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$,*

$$\|\langle X \rangle^{-s} ((H_\alpha - z)^{-1} - (H_\alpha - z')^{-1}) \bar{\Pi}_\alpha \langle X \rangle^{-s}\| \leq C_{s,\varepsilon} |z - z'|^{s - \frac{1}{2} - \varepsilon},$$

uniformément en $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfaisant $\text{Re}z, \text{Re}z' \leq E_\alpha + e_{\text{gap}}/4$ et $\text{Im}z \cdot \text{Im}z' > 0$.

Remarque 6.14 *Le théorème 6.13 et un argument standard impliquent que la résolvante dans des espaces à poids possède une limite sur l'axe réel. Plus précisément, pour tous $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $s > 1/2$ et $\lambda \leq E_\alpha + e_{\text{gap}}/4$, les limites*

$$\langle X \rangle^{-s} (H_\alpha - \lambda \pm i0)^{-1} \bar{\Pi}_\alpha \langle X \rangle^{-s} = \lim_{\mu \downarrow 0} \langle X \rangle^{-s} (H_\alpha - \lambda \pm i\mu)^{-1} \bar{\Pi}_\alpha \langle X \rangle^{-s}$$

existent pour la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, et pour tout $1/2 < s < 3/2$ et $\varepsilon > 0$, les applications

$$(-\infty, E_\alpha + e_{\text{gap}}/4] \ni \lambda \longmapsto \langle X \rangle^{-s} (H_\alpha - \lambda \pm i0)^{-1} \bar{\Pi}_\alpha \langle X \rangle^{-s} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

sont Hölder-continues d'ordre $s - 1/2 - \varepsilon$.

Théorème 6.15 (Décroissance de l'énergie locale) *Il existe $\alpha_c > 0$ tel que, pour tous $\chi \in C_0^\infty]-\infty, E_\alpha + e_{\text{gap}}/4[; \mathbb{R}$ et $0 \leq s < 2$,*

$$\langle X \rangle^{-s} e^{-itH_\alpha} \chi(H_\alpha) \langle X \rangle^{-s} = e^{-itE_\alpha} \chi(E_\alpha) \langle X \rangle^{-s} \Pi_\alpha \langle X \rangle^{-s} + \mathcal{O}(\langle t \rangle^{-s}),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, uniformément par rapport à $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$.

Remarque 6.16

1. La notation $\mathcal{O}(\langle t \rangle^{-s})$ désigne un opérateur borné par $C\langle t \rangle^{-s}$, où C ne dépend pas de $t \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$.
2. En utilisant la transformation de Fourier, on vérifie que la remarque 6.14 implique

$$\langle X \rangle^{-s} e^{-itH_\alpha} \chi(H_\alpha) \langle X \rangle^{-s} = e^{-itE_\alpha} \chi(E_\alpha) \langle X \rangle^{-s} \Pi_\alpha \langle X \rangle^{-s} + \mathcal{O}(\langle t \rangle^{-s + \frac{1}{2} + \varepsilon}),$$

pour tous $1/2 < s < 3/2$ et $\varepsilon > 0$; ceci est bien sûr plus faible que le résultat du théorème 6.15.

3. Les restrictions $s < 3/2$ dans le théorème 6.13 et $s < 2$ dans le théorème 6.15 sont dues à la singularité infrarouge intrinsèque au modèle. Plus précisément, si on remplace le potentiel vecteur du champ électromagnétique quantifié dans (1.5) par une version régularisée

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\chi_\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}-\mu}} \varepsilon_\lambda(k) (e^{ik \cdot x} a_\lambda^*(k) + e^{-ik \cdot x} a_\lambda(k)) dk,$$

pour $0 \leq \mu \leq 1$, alors on peut vérifier que le théorème 6.13 est satisfait pour tout $s < 3/2 + \mu$, et le théorème 6.15 pour tout $s < 2 + \mu$ (pourvu que les poids $\langle X \rangle^{-s}$ soient remplacés par les poids plus gros $\langle d\Gamma(\langle i\nabla_k \rangle) \rangle^{-s}$). Pour $\mu > 1$, notre approche ne permet pas d'obtenir des résultats meilleurs que $s < 5/2$ dans le théorème 6.13 et $s < 3$ dans le théorème 6.15. Ces restrictions sont alors dues à l'inégalité de Hardy $\| |k|^{-s} \varphi \| \leq C_s \| |i\nabla_k|^s \varphi \|$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, qui est valide pour $0 \leq s < 3/2$.

4. On peut remplacer $e_{\text{gap}}/4$ par $e_{\text{gap}} - \delta$, avec $\delta > 0$, dans les énoncés des théorèmes 6.11, 6.13 et 6.15. Dans ce cas, bien sûr, la valeur critique α_c dépend de δ .

Comme mentionné précédemment, le problème que nous étudions peut être vu, d'un point de vue général, comme l'étude d'un opérateur auto-adjoint au voisinage d'un seuil. Le comportement asymptotique de la résolvante et de quantités associées, au voisinage d'un seuil, a fait l'objet de nombreuses études dans différents contextes. Les approches suivies sont diverses et variées. Comme dans l'article de Jensen et Kato [124], on peut employer la théorie des perturbations pour étudier l'opérateur $-\Delta_x + V(x)$. La théorie des résonances est efficace pour traiter des opérateurs analytiques par rapport aux dilata-tions (voir par exemple [25]) avec des perturbations compactes ou exponentiellement décroissantes (voir [174]). Comme nous l'avons fait, on peut aussi utiliser la théorie de Mourre pour prouver un principe d'absorption limite à basses énergies. Cette approche est adoptée, par exemple, par Richard [159] dans un formalisme abstrait, Bouclet [38, 39] et Bony et Häfner [35, 36] pour des métriques obtenues comme perturbations de $-\Delta$, Vasy et Wunsch [175] et Rodnianski et Tao [160] pour des variétés avec des bouts coniques, Boussaid et Golénia [40] pour l'opérateur de Dirac, Soffer [168] pour $(-\Delta)^{1/2} + V(x), \dots$

Pour démontrer nos principaux résultats, notre point de départ est [75]. Pour des raisons techniques, de la même façon que dans les sections 6-1 et 6-2, nous considérons une inégalité de Mourre avec un opérateur conjugué modifié, B^σ , défini comme le générateur des dilatations dans l'espace de Fock avec une troncature en la variable impulsion k des photons, restreignant l'action de l'opérateur B aux photons d'énergies plus petites que σ . L'estimation de Mourre que nous utilisons est de la même forme que (6.8), à savoir $\mathbf{1}_{J_\sigma}(H_\alpha)[H_\alpha, iB^\sigma]\mathbf{1}_{J_\sigma}(H_\alpha) \geq c_0\sigma\mathbf{1}_{J_\sigma}(H_\alpha)$. Cette inégalité, établie dans [75], est l'un des principaux ingrédients de notre approche. Nous la combinons ensuite à des techniques similaires à celles développées dans [35, 36], adaptées au cadre de la théorie quantique des champs ; nous établissons des versions second quantifiées de l'inégalité de Hardy, et les utilisons pour obtenir des estimations de la forme

$$\| \langle X \rangle^{-s} \chi_\sigma(H_\alpha) \langle B^\sigma \rangle^s \| \lesssim \sigma^s. \quad (6.10)$$

Une décomposition dyadique adéquate des basses énergies nous permet alors d'obtenir les théorèmes 6.11, 6.13 et 6.15.

Bien sûr, comme nous l'avons déjà expliqué, comparé aux travaux précédents (voir [75] et les sections 6-1 et 6-2), notre principal résultat est d'obtenir des estimations ne dépendant pas de l'intervalle spectral $I \subset]E_\alpha, E_\alpha + e_{\text{gap}}/4[$ considéré.

Mentionnons également une autre approche employée dans la littérature pour étudier les propriétés spectrales et dynamiques de modèles de théorie quantique des champs : on peut, au lieu du générateur des dilatations, considérer le générateur des translations radiales (notons le ici \tilde{B}) comme opérateur conjugué (voir notamment [82, 83] et les articles [vii]–[viii] décrits dans le chapitre 3). Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, le fait que \tilde{B} ne soit pas auto-adjoint et, surtout, que le commutateur $[H, i\tilde{B}]$ ne puisse pas être contrôlé par des puissances de la résolvante du Hamiltonian H , conduisent à des difficultés techniques lors de la mise en oeuvre de la méthode de Mourre. Néanmoins, si l'on adopte ce point de vue, une estimation de Mourre uniforme pour le modèle standard de la QED non relativiste est envisageable, et ainsi, on peut espérer obtenir des propriétés de régularité de la résolvante et de décroissance de l'énergie locale également uniformes. En effet, en un certain sens, lorsque l'on

utilise le générateur des translations radiales comme opérateur conjugué, le bas du spectre n'est plus un seuil. Un autre avantage de cette approche est qu'elle n'oblige pas à se placer dans un régime de faible couplage. Le prix à payer, en revanche, est que la singularité infrarouge apparaissant dans les commutateurs itérés $\text{ad}_B^j(H)$ se trouve augmentée d'une puissance $|k|^{-j}$ (alors que les commutateurs avec le générateur des dilatations n'affectent pas l'ordre de la singularité infrarouge), ce qui impose une hypothèse de régularisation infrarouge assez contraignante sur le modèle initial.

Chapitre 7

Théorie de la diffusion

Ce chapitre s'inscrit dans le cadre de la théorie de la diffusion pour des modèles de Pauli-Fierz non massifs. Nous nous intéressons au comportement asymptotique d'un état d'énergie inférieure au seuil d'ionisation. Nos objectifs principaux sont d'établir des estimations sur la vitesse de propagation asymptotique des photons, et de montrer la complétude asymptotique sous l'hypothèse que l'opérateur du nombre de photons est uniformément borné le long de l'évolution.

Physiquement, on s'attend à ce que l'évolution d'un système constitué d'un atome non relativiste en interaction avec le champ électromagnétique quantifié satisfasse les propriétés suivantes :

- *La décroissance de l'énergie locale*, étudiée dans le chapitre précédent, justifiant, comme nous l'avons vu, que si l'état initial n'est pas l'état fondamental, l'atome émet des photons qui se propagent à l'infini (c'est-à-dire que la probabilité que tous les photons restent localisés dans une région bornée de l'espace tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$).
- *Une estimation de vitesse minimale des photons* (égale à $c > 0$), justifiant que, lorsque $t \rightarrow +\infty$, avec probabilité tendant vers 1, les photons sont soit liés à l'atome, soit se trouvent à une distance de l'atome $\geq c't$ pour tout $c' < c$.
- *Une estimation de vitesse maximale* (égale à $c > 0$), justifiant que la probabilité qu'un photon se trouve à une distance de l'atome $\geq c''t$ avec $c'' > c$ tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.
- *La complétude asymptotique* en dessous du seuil d'ionisation, que l'on peut formuler de la façon suivante : pour tout $\psi_0 \in \text{Ran } \mathbf{1}_{]-\infty, \Sigma_g[}(H_g)$ (où Σ_g désigne le seuil d'ionisation) et $\varepsilon > 0$, il existe un état $f_\varepsilon \in \mathcal{H}_{\text{ph}}$ avec un nombre fini de photons, tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \psi_t - e^{-itE_g} \Phi_g \otimes_s e^{-itH_f} f_\varepsilon \right\| \leq \varepsilon,$$

où Φ_g est un état fondamental de H_g associé à l'énergie E_g . Autrement dit, avec probabilité $\geq 1 - \varepsilon$, l'évolution ψ_t converge vers un état constitué de l'état fondamental Φ_g (atome entouré d'un nuage de photons) et de photons qui se propagent à l'infini

Dans la première section, nous nous intéressons à une estimation de vitesse maximale pour le modèle standard de la QED non relativiste, sans restriction sur la constante de couplage. Dans la deuxième section, pour le modèle de Nelson, nous décrivons certaines formes d'estimations de vitesse minimale, que nous utilisons ensuite pour obtenir la complétude asymptotique sous l'hypothèse que l'opérateur du nombre de photons est uniformément borné le long de l'évolution. Remarquons que les résultats des deux sections sont valables à la fois pour le modèle standard de la QED non relativiste et le modèle de Nelson ; dans la deuxième section, nous choisissons de décrire nos résultats dans le cadre du modèle de Nelson afin de rester proche de l'article [xvii], où ce choix du modèle de Nelson est fait essentiellement dans un souci de simplification des preuves.

7-1 Vitesse maximale des photons

Dans cette section, nous décrivons les résultats obtenus en collaboration avec J.-F. Bony et I.M. Sigal dans [xiv]. Nous considérons un atome ou une molécule avec noyaux fixes, interagissant avec le champ électromagnétique quantifié dans le modèle standard de la QED non relativiste ; pour simplifier, nous présentons nos résultats pour un atome d'hydrogène avec noyau infiniment lourd localisé à l'origine. Le modèle considéré dans cette section est ainsi celui introduit dans la section 1-2, le hamiltonien étant donné par (1.4).

Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la dynamique associée au modèle. Notre objectif est de montrer que les photons émis par l'atome s'éloignent de lui avec une vitesse qui ne dépasse pas la vitesse de la lumière. Notons $y = i\nabla_k$ l'opérateur dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ conjugué à la variable d'impulsion des photons k . Les observables de la forme $d\Gamma(\mathbf{1}_\Omega(y))$, où Ω est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 , sont alors interprétées comme le nombre de photons présents dans la région Ω . Bien que la question de la localisation des photons soit une question délicate, largement débattue en physique théorique, on peut noter que ces observables $d\Gamma(\mathbf{1}_\Omega(y))$ sont proches de celles considérées dans [72, 95, 135] et sont en accord avec une description théorique de la détection des photons (via l'effet photoélectrique, voir [139]).

Rappelons que le seuil d'ionisation Σ_α est défini par l'expression

$$\Sigma_\alpha = \lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\varphi \in D_R \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H_\alpha \varphi \rangle,$$

où $D_R = \{\varphi \in \mathcal{D}(H_\alpha), \varphi(x_{el}) = 0 \text{ si } |x_{el}| < R\}$ (voir [89]). Nous nous intéressons seulement à des états pour lesquels l'atome n'est pas ionisé, c'est-à-dire des états d'énergie strictement inférieure au seuil d'ionisation. Nous dirons que les photons se propagent avec une vitesse $\leq c'$ si pour tout état initial ψ_0 appartenant à un ensemble dense dans $\mathbf{1}_{]-\infty, \Sigma_\alpha[}(H_\alpha)$, pour tout $c > c'$, et pour toute fonction bornée F supportée dans le domaine $\{s \geq 1\}$, l'état ψ_t du système au temps t vérifie

$$\|d\Gamma(F(|y|/(ct)))^{\frac{1}{2}} \psi_t\| \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Travaillant dans les unités telles que, en particulier, la vitesse de la lumière est égale à 1, notre but est de montrer que les photons se propagent avec une vitesse ≤ 1 .

Comme dans la section 6-3, nous faisons les quelques hypothèses suivantes sur le modèle : les vecteurs de polarisation $\varepsilon_\lambda(k)$, $\lambda = 1, 2$, apparaissant dans (1.5), sont supposés ne dépendre que de $k/|k|$ (par exemple, on peut les prendre comme dans (1.8)), et la fonction de troncature ultraviolette χ_Λ est choisie telle que χ_Λ est une fonction radiale et $\chi_\Lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. D'autre part, le potentiel extérieur V est supposé appartenir à $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ et être relativement borné par rapport à $-\Delta_{x_{el}}$ avec borne relative 0.

Introduisons encore quelques notations avant d'énoncer notre principal résultat. Nous définissons l'espace de Hilbert $\mathcal{X} = \mathcal{D}(d\Gamma(\langle y \rangle)^{\frac{1}{2}})$, associé à la norme

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \|(d\Gamma(\langle y \rangle) + 1)^{\frac{1}{2}} u\|.$$

Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ une fonction telle que $\text{supp}(f) \subset [1, 2]$. Posons $F(s) = \int_{-\infty}^s f(\tau) d\tau$ et

$$F(|y| \geq ct) = F(|y|/(ct)). \quad (7.1)$$

Dans ce qui suit, la notation $f \lesssim g$ signifie que $f \leq Cg$ pour une certaine constante positive C .

Théorème 7.1 (Estimation de la vitesse de propagation maximale des photons) Soit F définie comme dans (7.1), $\chi \in C_0^\infty(]-\infty, \Sigma_\alpha])$ et $c > 1$. Pour tout $u \in \mathcal{X}$, l'état $u_t = e^{-itH_\alpha} \chi(H_\alpha) u$ du système au temps t vérifie

$$\left\| d\Gamma(F(|y| \geq ct))^{\frac{1}{2}} u_t \right\| \lesssim t^{-\gamma} \|u\|_{\mathcal{X}},$$

avec

$$\gamma < \min\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c}\right), \frac{1}{10}\right).$$

Remarque 7.2

1. Le théorème précédent montre que l'état u_t est supporté, asymptotiquement, dans la région $\{|y| \leq ct\}$. En d'autres termes, avec la définition précédente, les photons ne se propagent pas plus vite que la vitesse de la lumière.
2. Le théorème 7.1 est valable pour des valeurs quelconques de la constante de couplage α .
3. La preuve du théorème 7.1 s'adapte aisément au cas du modèle de Nelson de la section 1-3. Ainsi, pour le hamiltonien (1.15), avec une fonction de couplage de la forme (1.16) et le paramètre μ vérifiant $\mu > 0$, on obtient

$$\left\| d\Gamma(F(|y| \geq ct))^{\frac{1}{2}} e^{-itH_g} \chi(H_g) u \right\| \lesssim t^{-\gamma} \|u\|_{\mathcal{X}},$$

avec

$$\gamma < \frac{\mu}{2} \min\left(\frac{\bar{c} - 1}{2\bar{c} - 1}, \frac{1}{2 + \mu}\right).$$

4. Dans la littérature, une estimation du type de celle apparaissant dans le théorème 7.1 est généralement appelée estimation de propagation forte (voir [60, 164]).

Pour des hamiltoniens de Pauli-Fierz avec un champ de bosons massifs (c'est-à-dire que la relation de dispersion $\omega(k) = |k|$ est remplacée par $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$, $m > 0$), une version faible de l'estimation de vitesse maximale est obtenue dans [61] (voir aussi [72]). Bien sûr, comme c'est souvent le cas, la principale difficulté pour passer du résultat pour un modèle massif au résultat pour un modèle non massif vient du fait que, dans les modèles non massifs, le nombre de photons n'est pas relativement borné par rapport au hamiltonien. Par ailleurs, le fait de savoir si le nombre de photons émis est uniformément borné en temps reste une question ouverte importante (une telle propriété est tout de même établie pour le modèle spin-bosons, voir [55]).

Comme on peut le deviner à la lecture de la remarque 7.2 3), la singularité infrarouge du modèle standard de la QED non relativiste est ici une autre difficulté qu'il nous faut traiter (la singularité infrarouge est de l'ordre de $|k|^{-1/2}$, alors que, pour le modèle de Nelson, notre preuve est applicable pour des singularités infrarouges d'ordre $|k|^\mu$ avec $\mu > 0$). L'usage pour contourner cette difficulté est d'appliquer une transformation de Pauli-Fierz améliorant la singularité infrarouge de l'interaction. Pour des raisons de commodité technique, nous utilisons une transformation de Pauli-Fierz généralisée du type de celle introduite dans [163]. Nous la définissons de la façon suivante : soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction croissante telle que $\varphi(r) = r$ si $|r| \leq 1/2$ et $|\varphi(r)| = 1$ si $|r| \geq 1$. Pour $0 < \mu < 1/2$, on définit la fonction

$$q_\alpha(x, k, \lambda) = -\alpha^{\frac{1}{2}} \frac{\chi_\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2} + \mu}} \varphi(|k|^\mu \varepsilon_\lambda(k) \cdot x),$$

et l'opérateur unitaire

$$\mathcal{U} = e^{-\frac{i}{\sqrt{2}} \Phi(q_\alpha(x))},$$

dans \mathcal{H} . Le hamiltonien de Pauli-Fierz transformé est alors défini par $\tilde{H}_\alpha = \mathcal{U}H_\alpha\mathcal{U}^*$. Un simple calcul donne l'expression

$$\tilde{H}_\alpha = (p + \alpha^{\frac{1}{2}}\tilde{A}(x))^2 + E_\alpha(x) + H_f + \tilde{V}_\alpha(x),$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{A}(x) &= \Phi(\tilde{h}_\alpha^A(x)), & \tilde{h}_\alpha^A(x, k, \lambda) &= h^A(x, k, \lambda) + \nabla_x q_\alpha(x, k, \lambda), \\ E_\alpha(x) &= \Phi(e_\alpha(x)), & e_\alpha(x, k, \lambda) &= i|k|q_\alpha(x, k, \lambda), \\ \tilde{V}_\alpha(x) &= V(x) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} |k| |q_\alpha(x, k, \lambda)|^2 dk,\end{aligned}$$

où h^A est définie dans (1.6). La transformation de Pauli-Fierz généralisée est commode dans la mesure où l'opérateur \tilde{H}_α est auto-adjoint avec domaine $\mathcal{D}(\tilde{H}_\alpha) = \mathcal{D}(H_\alpha) = \mathcal{D}(p^2 + H_f)$ pour toutes valeurs de α (voir [99, 105]). Les fonctions de couplages $q_\alpha(x)$, $\tilde{h}_\alpha^A(x)$ et $e_\alpha(x)$ vérifient

$$\begin{aligned}|\partial_k^m q_\alpha(x, k, \lambda)| &\lesssim \chi_m(k) |k|^{-\frac{1}{2}-|m|} \langle x \rangle^{1+|m|}, \\ |\partial_k^m \tilde{h}_\alpha^A(x, k, \lambda)| &\lesssim \chi_m(k) |k|^{\frac{1}{2}-|m|} \langle x \rangle^{\frac{1}{\mu}+|m|}, \\ |\partial_k^m e_\alpha(x, k, \lambda)| &\lesssim \chi_m(k) |k|^{\frac{1}{2}-|m|} \langle x \rangle^{1+|m|},\end{aligned}$$

où $\chi_m(k) \geq 0$ est à support compact et domine la fonction de troncature ultraviolette $\chi_\Lambda(k)$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $|m|$. En particulier, la singularité infrarouge des fonctions de couplage dans \tilde{H}_α est d'ordre $|k|^{1/2}$. A l'aide de ces estimations, nous montrons un résultat similaire au théorème 7.1 pour l'opérateur \tilde{H}_α , puis nous concluons en transférant le résultat à l'opérateur initial H_α .

Pour montrer l'estimation de vitesse maximale pour \tilde{H}_α , nous employons la méthode des observables de propagation en construisant une observable positive, non bornée, et dont la dérivée de Heisenberg est négative à des termes de reste intégrables près. L'observable que l'on choisit est de la forme

$$\Phi_t = t^{2\gamma} d\Gamma(G(y^2/(ct)^2)),$$

où G est une fonction croissante, non bornée, convenablement choisie. La dérivée de Heisenberg est définie, rappelons le, par l'expression

$$D\Phi_t = \partial_t \Phi_t - i[\Phi_t, \tilde{H}_\alpha].$$

L'une des difficultés principales dans notre preuve est de montrer que les termes de restes sont effectivement intégrables. Pour cela, comme dans la section 6-3, nous utilisons une version second quantifiée de l'inégalité de Hardy dans \mathbb{R}^3 , et nous combinons cette inégalité avec un contrôle de l'observable $d\Gamma(|k|^{-\delta})$ le long de l'évolution pour $0 \leq \delta \leq 1$, obtenu de la même façon que dans [95].

7-2 Sur la vitesse minimale des photons et la complétude asymptotique

Dans cette section nous décrivons les résultats obtenus en collaboration avec I.M. Sigal dans [xvii]. Comme dans la section précédente, on s'intéresse au comportement asymptotique de la dynamique d'un système de particules quantiques non relativistes interagissant avec le champ électromagnétique quantifié. Notre objectif est maintenant d'obtenir des estimations sur la vitesse minimale de propagation des photons. En utilisant certaines de ces estimations, nous montrons la complétude asymptotique pour la

diffusion Rayleigh, à condition que l'opérateur du nombre de photons soit uniformément borné le long de l'évolution.

Afin de souligner l'importance de la singularité infrarouge de l'interaction dans notre approche, nous considérons le modèle de Nelson de la section 1-3 ; nos résultats sont néanmoins valables pour le modèle standard de la QED non relativiste de la section 1-2.

Notons donc H_g le hamiltonien de Nelson défini en (1.15), où la fonction de couplage est donnée dans (1.16). Nous supposons dans cette section que la fonction de troncature ultraviolette χ_Λ est choisie telle que χ_Λ est une fonction radiale, $\chi_\Lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, et que le potentiel extérieur V appartient à $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ et est relativement borné par rapport à $-\Delta_{x_{\text{el}}}$ avec borne relative 0.

Soit $y = i\nabla_k$ l'opérateur associé à la position d'un photon. Rappelons que le seuil d'ionisation Σ_g est défini par l'expression

$$\Sigma_g = \lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\varphi \in D_R \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, H_g \varphi \rangle,$$

où $D_R = \{\varphi \in \mathcal{D}(H_g), \varphi(x) = 0 \text{ si } |x| < R\}$.

Comme précédemment, dans ce qui suit, la notation $f \lesssim g$ signifie que $f \leq Cg$ pour une certaine constante positive C . Nous dirons que le principe de Huygens quantique est satisfait si l'état du système au temps t , $\psi_t = e^{-itH}\psi_0$, vérifie l'estimation

$$\int_1^\infty dt t^{-\alpha'} \|\text{d}\Gamma(\chi_{\frac{|y|}{ct^\alpha}=1})^{\frac{1}{2}} \psi_t\|^2 \lesssim \|\psi_0\|_0^2,$$

pour toute condition initiale $\psi_0 \in \text{Ran } \mathbf{1}_{]-\infty, \Sigma_g[}(H_g)$ dans un certain espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_0$, et pour tous $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que ou bien $\alpha < 1$ et c est quelconque, ou bien $\alpha = 1$ et $c < 1$, le paramètre α' étant tel que $0 < \alpha' \leq 1$. En d'autres termes, asymptotiquement quand $t \rightarrow +\infty$, il n'y a pas de photon dans la région $\{|y| \leq ct^\alpha\}$ avec $\alpha < 1$ et c quelconque, ou dans la région $\{|y| \leq ct\}$ avec $c < 1$. Dans nos estimations, le paramètre α' dépend naturellement de α , et peut être choisi croissant lorsque α décroît. La notation $\chi_{.=1}$ désigne une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ et supportée dans un voisinage de 1.

Comme dans le chapitre 4, nous supposons que les valeurs propres excitées du hamiltonien électro-nique H_{el} sont instables, ce qui est assurée par la condition suivante.

Condition 7.3 *Le critère de la règle d'or de Fermi est satisfait pour toutes les valeurs propres excitées $(e_j)_{j \geq 1}$ de H_{el} .*

Remarque 7.4 *Pour traiter le cas exceptionnel où une valeur propre e_j ne serait pas instable, on aurait besoin d'une estimation du type $\|\Pi_\Omega f(H_g)\| \lesssim |g|$, où Π_Ω est la projection sur le vide dans l'espace de Fock, et $f \in C_0^\infty(\cdot)E_g, \Sigma_g[\setminus \text{spec}_{\text{pp}}(H_g))$, uniformément en la distance du support de f à $\text{spec}_{\text{pp}}(H_g)$.*

Soit $\nu(\rho) \geq 0$ le plus petit des réels positifs satisfaisant l'estimation

$$\langle \psi_t, \text{d}\Gamma(|k|^\rho) \psi_t \rangle \lesssim t^{\nu(\rho)} \|\psi_0\|_\rho^2, \quad (7.2)$$

pour tout $\psi_0 \in \text{Ran } \mathbf{1}_{]-\infty, \Sigma_g[}(H_g)$, où $\|\psi\|_\rho = \|(\text{d}\Gamma(|k|^\rho) + 1)^{1/2} \psi\|$. Comme nous l'avons brièvement mentionné dans la section 7-1, en généralisant un résultat de [95], on peut montrer que pour tout $-1 \leq \rho \leq 1$, l'inégalité (7.2) est satisfaite avec $\nu(\rho) = (1 - \rho)/(2 + \mu)$.

Nous allons considérer des conditions initiales appartenant aux ensembles

$$\mathcal{X}_1 = \{\psi_0 \in f(H_g)\mathcal{D}(\text{d}\Gamma(|k|^{-1})^{1/2}), f \in C_0^\infty(\cdot)E_g, \Sigma_g[\cdot)\},$$

et, pour $\Delta \subset]E_g, \Sigma_{\text{el}}[$,

$$\mathcal{X}_2(\Delta) = \{\psi_0 \in f(H_g)\mathcal{D}(\text{d}\Gamma(\langle y \rangle)), f \in C_0^\infty(\Delta)\},$$

où $\langle y \rangle = (1 + y^2)^{1/2}$ et $\Sigma_{\text{el}} = \inf \text{spec}_{\text{ess}}(H_{\text{el}})$.

Théorème 7.5 (Estimation de la vitesse de propagation minimale des photons) *Supposons que le paramètre μ dans la fonction de couplage (1.16) vérifie $\mu > -1/2$. Soient β et c tels que, ou bien $\beta < 1$ et $c > 0$, ou bien $\beta = 1$ et $0 < c < 1$. Supposons de plus que*

$$\beta > \max\left(\frac{5}{6} + \frac{\nu(-1) - \nu(0)}{6}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\frac{3}{2} + \mu)}\right). \quad (7.3)$$

Alors, pour toute condition initiale $\psi_0 \in \mathcal{X}_1$ et pour tout $a > 1$, l'état $\psi_t = e^{-itH_g}\psi_0$ du système au temps t vérifie

$$\int_1^\infty dt t^{-\beta - a\nu(0)} \|\text{d}\Gamma(\chi_{\frac{|y|}{ct^\beta}=1})^{\frac{1}{2}}\psi_t\|^2 \lesssim \|\psi_0\|_{-1}^2. \quad (7.4)$$

Théorème 7.6 (Propagation d'au moins un photon) *Supposons que le paramètre μ dans la fonction de couplage (1.16) vérifie $\mu > -1/2$. Soit $\Delta \subset]E_g, \Sigma_{\text{el}}[$. Supposons que la constante de couplage g soit suffisamment petite et que la condition 7.3 soit satisfaite. Soit $\nu(-1) < \alpha < 1 - \nu(0)$. Pour toute condition initiale $\psi_0 \in \mathcal{X}_2(\Delta)$, l'état $\psi_t = e^{-itH_g}\psi_0$ du système au temps t vérifie*

$$\|\Gamma(\chi_{|y| \leq ct^\alpha})\psi_t\| \lesssim t^{-\gamma} \|(\text{d}\Gamma(\langle y \rangle) + 1)\psi_0\|, \quad (7.5)$$

où $\gamma < \frac{1}{2} \min(1 - \alpha - \nu(0), \frac{1}{2}(\alpha - \nu(0) - \nu(-1)))$.

Remarque 7.7

1. Si l'on suppose que $\nu(0) = 0$, on peut prendre $\nu(-1) = (3/2 + \mu)^{-1}$. La condition (7.3) sur le paramètre β dans le théorème 7.5 devient alors $\beta > 5/6 + 1/(6(3/2 + \mu))$, et la condition sur α dans le théorème 7.6 devient $(3/2 + \mu)^{-1} < \alpha < 1$.
2. L'estimation (7.5) peut être interprétée de la façon suivante : quand $t \rightarrow +\infty$, avec probabilité tendant vers 1, ou bien tous les photons restent liés à l'électron dans l'état fondamental, ou bien au moins un photon s'éloigne de l'électron avec une distance entre les deux qui grandit comme $\mathcal{O}(t^\alpha)$.
3. Pour $\mu \geq 1/2$, un certain $\alpha > 0$ et $\psi_0 \in \mathbf{1}_\Delta(H_g)$, avec $\Delta \subset]E_{g_s}, e_1 - \mathcal{O}(g)[$ (où e_1 est toujours la première valeur propre excitée de H_{el}), on peut obtenir directement (7.5) en utilisant la décroissance de l'énergie locale uniforme de la section 6-3 combinée au fait que le nombre de photons ne croît "pas trop vite" le long de l'évolution.

Théorème 7.8 (Complétude asymptotique) *Supposons que le paramètre μ dans la fonction de couplage (1.16) vérifie $\mu > -1/2$. Soit $\Delta \subset]-\infty, \Sigma_{\text{el}}[$. Supposons que la constante de couplage g soit suffisamment petite et que la condition 7.3 soit satisfaite. Supposons de plus que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :*

(i) Pour tout $\psi_0 \in f(H_g)\mathcal{D}(N_{\text{ph}}^{1/2})$, avec $f \in C_0^\infty(\Delta)$,

$$\|N_{\text{ph}}^{\frac{1}{2}}\psi_t\| \lesssim \|N_{\text{ph}}^{\frac{1}{2}}\psi_0\| + \|\psi_0\|, \quad (7.6)$$

uniformément par rapport à $t \in [0, +\infty[$ (autrement dit $\nu(0) = 0$),

ou bien

(i') Il existe un ensemble \mathcal{D} tel que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}(\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-1/2}\langle y \rangle |k|^{-1/2})^{\frac{1}{2}})$ est dense dans $\mathrm{Ran} \mathbf{1}_{\Delta}(H_g)$ et, pour tout $\psi_0 \in \mathcal{D}$,

$$\|\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-1})^{\frac{1}{2}}\psi_t\| \leq C(\psi_0), \quad (7.7)$$

uniformément par rapport à $t \in [0, +\infty[$, où $C(\psi_0)$ est une constante positive dépendant de ψ_0 . Alors la complétude asymptotique est satisfaite dans $\mathrm{Ran} \mathbf{1}_{\Delta}(H_g)$.

Remarque 7.9

1. Nous considérons des états d'énergie inférieure à Σ_{el} , plutôt que des états d'énergie inférieure à Σ_g , pour pouvoir couvrir la situation pour laquelle Σ_{el} est un point d'accumulation de valeurs propres de H_{el} (c'est le cas, par exemple, si V est le potentiel de Coulomb). Remarquons que, lorsque g tend vers 0, Σ_g tend vers Σ_{el} .
2. L'hypothèse (i) peut être remplacée par l'hypothèse légèrement plus faible suivante : il existe $1/2 \leq \delta_1 \leq \delta_2$ tels que, pour tout $\psi_0 \in f(H_g)\mathcal{D}(N_{\mathrm{ph}}^{\delta_2})$, avec $f \in C_0^\infty(\Delta)$,

$$\|N_{\mathrm{ph}}^{\delta_1}\psi_t\| \lesssim \|N_{\mathrm{ph}}^{\delta_2}\psi_0\| + \|\psi_0\|,$$

uniformément par rapport à $t \in [0, +\infty[$.

3. L'avantage de l'hypothèse (i') est que la borne uniforme sur l'observable $\mathrm{d}\Gamma(|k|^{-1})$ n'est requise que pour un ensemble dense d'états initiaux arbitraire. En particulier, en modifiant légèrement la preuve de De Roeck et Kupiainen [55], on peut montrer que l'hypothèse (i') est vérifiée pour le modèle spin-bosons non massif. Nos résultats combinés à ceux de [55] démontrent donc la complétude asymptotique pour le modèle spin-bosons.
4. Les résultats des théorèmes 7.5, 7.6 et 7.8 s'adaptent au cas du modèle standard de la QED non relativiste.
5. La complétude asymptotique peut être reformulée en termes d'opérateur d'ondes, par exemple de la façon suivante. Notons $\mathcal{H}_b = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H_g) \cap \mathbf{1}_{]-\infty, \Sigma_g[}(H)$ l'espace engendré par l'ensemble des vecteurs propres de H_g associés à des valeurs propres dans $]-\infty, \Sigma_g[$. Soit

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ h \in L^2(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} (|k|^{-1} + |k|^2)|h(k)|^2 dk < \infty \right\}.$$

L'opérateur d'onde Ω_+ est défini sur $\mathcal{H}_b \otimes \Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{h}_0)$ par la formule

$$\Omega_+ = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} e^{itH_g} I(e^{-itH_g} \otimes e^{-itH_f}),$$

où $s\text{-}\lim$ désigne la limite forte, et où I est l'opérateur d'identification (voir [61, 72, 95, 116]) défini initialement sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathrm{el}} \otimes \Gamma_{\mathrm{fin}}(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \Gamma_{\mathrm{fin}}(L^2(\mathbb{R}^3))$ par l'expression

$$I\Phi \otimes \prod_1^n a^*(h_i)\Omega = \prod_1^n a^*(h_i)\Phi,$$

puis prolongé par continuité en un opérateur non borné sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$. On peut montrer (voir [61, 72, 92]) que Ω_+ est bien défini sur $\mathcal{H}_b \otimes \Gamma_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{h}_0)$ et se prolonge en une isométrie, désignée par le même symbole, $\Omega_+ : \mathcal{H}_{\mathrm{as}} \rightarrow \mathcal{H}$ sur l'espace des états asymptotiques $\mathcal{H}_{\mathrm{as}} = \mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{ph}}$. Sous les conditions du théorème 7.8, pour tout intervalle $\Delta \subset]-\infty, \Sigma_g[$, on a alors

$$\Omega_+(\Pi_g \otimes \bar{\Pi}_\Omega)W_+\bar{\Pi}_g + \Pi_g = \mathbf{1}_{\Delta}(H_g), \quad (7.8)$$

où W_+ est l'opérateur d'ondes inverses de Deift-Simon (voir plus bas), Π_g est la projection sur l'état fondamental de H_g , Π_Ω est la projection sur le vide dans l'espace de Fock, et $\bar{\Pi}_\# = \mathbf{1} - \Pi_\#$.

Pour des modèles avec un champ de bosons massifs, le théorème 7.5 et une version faible du théorème 7.6 sont montrés dans [61]. La complétude asymptotique est démontrée pour un certain modèle explicite (impliquant notamment un oscillateur harmonique) dans [15], pour une petite perturbation d'un modèle explicite dans [169], et, pour des modèles avec un champ de bosons massifs, dans [61] pour des systèmes confinés, et dans [72] pour des systèmes non confinés en dessous du seuil d'ionisation.

Dans [95], Gérard considère un modèle abstrait de type Nelson avec des conditions sur la fonction de couplage permettant par exemple le choix (1.16) avec $\mu > 0$, et avec $V(x)$ croissant à l'infini comme $V(x) \geq c_0|x|^{2\alpha} - c_1$, $c_0 > 0$, $\alpha > 0$. Dans ce cas, en particulier, le seuil d'ionisation Σ_g est égal à $+\infty$. Plusieurs résultats importants sont établis dans [95] ; des espaces \mathcal{H}_c^\pm (pour $c < 1$) sont construits de telle façon que \mathcal{H}_c^\pm contient les états avec seulement un nombre fini de photons dans la région $\{|y| \geq c't\}$, $c' > c$, quand $t \rightarrow +\infty$. Une propriété appelée complétude asymptotique géométrique est établie : dans \mathcal{H}_c^\pm , l'ensemble des vides asymptotiques coïncide avec l'ensemble des états avec aucun photon dans la région $\{|y| \geq c't\}$ pour tout $c' > c$, quand $t \rightarrow \infty$ (où l'ensemble des vides asymptotiques est défini comme $\{\Phi \in \mathcal{H}, \forall h \in L^2(\mathbb{R}^3), a_\pm(h)\Phi = 0\}$). De plus, il est montré dans [95] que si une estimation de Mourre est satisfaite dans un intervalle spectral Δ , avec le générateur des dilatations B dans l'espace de Fock comme opérateur conjugué, alors l'ensemble des vides asymptotiques appartenant à \mathcal{H}_c^\pm , et avec énergies dans Δ , coïncide avec l'ensemble des vecteurs propres de H_g associés à des valeurs propres dans Δ . Enfin, il apparaît possible de montrer à partir des résultats de [95] que si le nombre de photons émis est uniformément borné par rapport au temps, alors pour $c < 1$, $\mathcal{H}_c^\pm = \mathcal{H}$; une conséquence des résultats de [95] serait donc, pour les systèmes confinés, que si le nombre de photons émis est uniformément borné (c 'est le cas en particulier si (7.6) est satisfait), et si le hamiltonien vérifie une inégalité de Mourre avec B comme opérateur conjugué dans un intervalle Δ , alors la complétude asymptotique est vérifiée dans Δ . Mentionnons que, pour de petites valeurs de la constante de couplage, il n'est pas difficile de montrer une estimation de Mourre avec B comme opérateur conjugué en dehors d'un voisinage du spectre ponctuel de H_{e1} . Par ailleurs, en supposant que le paramètre infrarouge μ apparaissant dans (1.16) vérifie $\mu \geq 1/2$, [75] fournit une méthode permettant d'avoir une telle estimation de Mourre à basses énergies.

Notre approche de la complétude asymptotique présente assez peu de points communs avec celle de [95]. De plus un avantage de notre approche est qu'elle nous permet de traiter des modèles avec un seuil d'ionisation fini (par exemple le modèle standard de la QED non relativiste avec le potentiel de Coulomb comme potentiel extérieur) et d'obtenir la complétude asymptotique en dessous du seuil d'ionisation, en supposant que le critère de la règle d'or de Fermi est vérifié, que le paramètre μ est strictement positif, et que l'une des deux hypothèses (i) ou (i') est satisfaite.

Comme dans la section précédente, nous utilisons la méthode des observables de propagation pour démontrer les théorèmes 7.5 et 7.6. Au lieu de considérer directement l'observable $|y|$, qui pose un certain nombre de difficultés techniques, nous commençons par démontrer des estimations correspondant à celles des théorèmes 7.5 et 7.6 pour l'opérateur b_ε défini par

$$b_\varepsilon = \frac{1}{2}(v(k) \cdot y + y \cdot v(k)), \quad v(k) = \frac{k}{|k| + \varepsilon}, \quad \varepsilon = t^{-\kappa},$$

avec $\kappa > 0$. Notons en particulier que l'opérateur b_ε est auto-adjoint lorsque $\varepsilon > 0$; ce n'est pas le cas pour $\varepsilon = 0$, voir par exemple le chapitre 3. Une fois que l'on a obtenu ces estimations de propagations avec b_ε , nous en déduisons les théorèmes 7.5 et 7.6 en faisant intervenir d'autres observables de propagation convenablement choisies.

Pour obtenir la complétude asymptotique formulée dans le théorème 7.8, un résultat central consiste à démontrer l'existence de l'opérateur d'onde inverse de Deift-Simon W_+ . Celui-ci est défini de la façon suivante : posons

$$j_0 = \chi_{\frac{b_\varepsilon}{c t^\alpha} \leq 1},$$

où $\chi_{\cdot \leq 1}$ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ décroissante, bornée, et supportée dans $] -\infty, 1[$, et définissons j_∞ par la relation $j_0^2 + j_\infty^2 = \mathbf{1}$. On définit alors l'application $j : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$, par $j : h \mapsto j_0 h \oplus j_\infty h$. Transférée à l'espace de Fock, on obtient une application

$$\Gamma(j) : \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)).$$

Les espaces $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3))$ et $\Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3))$ étant unitairement équivalents, on note U l'opérateur unitaire permettant de passer du premier au second, et on pose

$$\check{\Gamma}(j) : \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \rightarrow \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)) \otimes \Gamma_s(L^2(\mathbb{R}^3)), \quad \check{\Gamma}(j) = U\Gamma(j).$$

Nous avons ainsi $\check{\Gamma}(j)^* \check{\Gamma}(j) = \mathbf{1}$. Notons qu'une telle construction abstraite de l'opérateur $\check{\Gamma}(j)$ apparaît dans [61]. La particularité de notre approche consiste en le choix des opérateurs j_0 et j_∞ donnés par $j_0 = \chi_{\frac{b_\varepsilon}{ct^\alpha} \leq 1}$ et $j_0^2 + j_\infty^2 = \mathbf{1}$. Avec ces notations, l'opérateur d'onde inverse de Deift-Simon est défini par l'expression

$$W_\pm = \text{s-} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{it(H_g \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_f)} \check{\Gamma}(j) e^{-itH_g}. \quad (7.9)$$

En choisissant bien les paramètres $\varepsilon = t^{-\kappa}$ et α , puis en utilisant l'estimation de vitesse minimale du théorème 7.5 avec b_ε à la place de $|y|$, l'estimation de vitesse maximale obtenue dans la section précédente, et l'hypothèse de borne uniforme (i) ou (i') du théorème 7.8, nous démontrons alors à l'aide d'un argument de type Cook que W_\pm existe.

Finalement, les définitions (7.8) et (7.9) de Ω_\pm et W_\pm , combinées aux relations $\check{\Gamma}(j)^* \check{\Gamma}(j) = \mathbf{1}$, $\check{\Gamma}(j)^* = I\Gamma(j_0) \otimes \Gamma(j_\infty)$, et à l'estimation de vitesse minimale du théorème 7.6 (encore une fois avec b_ε à la place de $|y|$) nous permettent de démontrer le théorème 7.8.

Deuxième partie

Quelques résultats de théorie spectrale inverse en dimension 1

Chapitre 8

Introduction

Le problème de base de la théorie spectrale inverse consiste à retrouver la forme d'un certain opérateur à partir de son spectre. Dans cette optique, les résultats théoriques les plus précis ont sans doute été obtenus pour les opérateurs de Sturm-Liouville, c'est-à-dire les opérateurs de Schrödinger en dimension 1,

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

où q est un potentiel à valeurs réelles. Sur un intervalle borné, le spectre d'un tel opérateur est purement discret ; le problème est alors de savoir si l'on peut retrouver le potentiel $q(x)$ en supposant connues les valeurs propres de H . La littérature existant sur ce sujet est extrêmement vaste ; nous nous contenterons ici de mentionner quelques résultats importants en lien avec les travaux que nous allons présenter dans la suite.

En 1946, Borg [37] montre que deux spectres d'opérateurs de Sturm-Liouville déterminent de manière unique le potentiel q . Plus précisément, soient deux opérateurs de Sturm-Liouville

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + q_1(x), \quad H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + q_2(x),$$

sur un intervalle borné. Si H_1 et H_2 ont les mêmes spectres lorsque l'on fixe un ensemble de conditions aux bords, et s'ils ont toujours le même spectre pour un second ensemble de conditions aux bords, alors $q_1 = q_2$ presque partout sur l'intervalle borné considéré. Voir aussi Levinson [131].

A la suite des travaux de Marčenko [140, 141], un rôle important dans la théorie spectrale inverse des opérateurs de Sturm-Liouville est joué par certains opérateurs dits opérateurs de transformation. En appliquant ceux-ci, Marčenko montre qu'un opérateur de Sturm-Liouville est déterminé de façon unique par sa "fonction spectrale". Voir aussi Gel'fand et Levitan [80]. La connaissance de la fonction spectrale d'un opérateur de Sturm-Liouville A est par ailleurs équivalente à la connaissance de la "donnée spectrale" de A , constituée de l'ensemble des valeurs propres de A et d'un ensemble de nombres appelés "poids" (voir par exemple [67]).

En 1978, Hochstadt et Lieberman [111] initient un nouveau type de résultats en supposant que le potentiel q est connu partiellement a priori. Il est établi que la connaissance du potentiel $q(x)$ sur une moitié de l'intervalle considéré, ajoutée à la connaissance du spectre de H , détermine $q(x)$ sur l'intervalle total de façon unique. Plus précisément, si q_1 et q_2 coïncident sur $[0, 1/2]$ et si, étant données certaines conditions aux bords, les spectres de H_1 et H_2 sont égaux, alors $q_1 = q_2$ presque partout sur $[0, 1]$. Voir aussi Hald [97] où il est démontré que le résultat ne change pas si l'on suppose que l'on connaît seulement le spectre privé d'une valeur propre, pourvu que q soit continu au voisinage de $1/2$.

En 2000, Gesztesy et Simon [84] généralisent les résultats de Hochstadt–Lieberman et Hald dans plusieurs directions (voir aussi Del Rio, Gesztesy et Simon [56, 57]). En particulier, Gesztesy et Simon montrent que si q est de classe C^{2k} dans un voisinage de $1/2$, alors il suffit de connaître q sur $[0, 1/2]$ ainsi que le spectre de H privé de $(k + 1)$ valeurs propres pour pouvoir déterminer q de façon unique sur $[0, 1]$. De plus, il est établi dans [84] que l'on peut remplacer la connaissance de q sur $[0, 1/2]$ par la connaissance de q sur un intervalle plus grand $[0, a]$, avec $1/2 \leq a \leq 1$, ce qui autorise à supposer connue une quantité plus petite, dépendant de a , de valeurs propres de H , pour pouvoir affirmer que q est déterminé de façon unique.

Les résultats que nous allons présenter dans cette partie s'inscrivent dans la continuité des travaux [56, 84, 97, 111] et concernent ainsi la théorie spectrale inverse en dimension 1 d'opérateurs pour lesquelles certaines informations partielles sur le potentiel sont supposées connues a priori. Le chapitre 9 fournit une généralisation d'un résultat de Gesztesy et Simon pour les opérateurs de Sturm-Liouville sur l'intervalle unité, les hypothèses de régularité de q apparaissant dans [84] (du type $q \in C^{2k}$) étant remplacées par des hypothèses de régularité de q dans des espaces de Sobolev. Dans le chapitre 10, nous étudions la théorie spectrale inverse d'un opérateur AKNS (ou opérateur de Dirac) sur l'intervalle unité, et obtenons, pour cet opérateur, des résultats du même type que ceux du chapitre 9.

Chapitre 9

Opérateurs de Sturm-Liouville sur $[0, 1]$ avec des potentiels dans des espaces de Sobolev

Dans ce chapitre nous décrivons les résultats obtenus en collaboration avec L. Amour et T. Raoux dans les articles [iv] et [vi]. Nous considérons l'opérateur de Schrödinger

$$A_{q,h,H} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

défini sur l'intervalle $[0, 1]$, où q est un potentiel à valeurs réelles appartenant à $L^1([0, 1])$. Cet opérateur est associé aux conditions aux bords

$$u'(0) + hu(0) = 0, \quad u'(1) + Hu(1) = 0,$$

où h et H sont des nombres réels. Rappelons que pour tout $(q, h, H) \in L^1([0, 1]) \times \mathbb{R}^2$, l'opérateur $A_{q,h,H}$ dans l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$ est un opérateur auto-adjoint. Le spectre de $A_{q,h,H}$, noté $\text{spec}(A_{q,h,H})$, est purement discret ; il est constitué d'une suite strictement croissante et non bornée de valeurs propres de multiplicités 1 que l'on note $(\lambda_j(q, h, H))_{j \in \mathbb{N}}$.

Comme mentionné dans l'introduction, notre objectif est ici de déterminer un ensemble de valeurs propres qui, ajouté à la connaissance du potentiel q sur $[a, 1]$ pour un certain $a \in [0, 1/2]$, permet de déterminer q presque partout sur $[0, 1]$ de façon unique. Comparé aux résultats de la littérature cités dans l'introduction (voir en particulier [84]), l'hypothèse centrale de notre théorème concerne l'appartenance des potentiels à des espaces de Sobolev $W^{k,p}$.

Pour toute suite complexe $\alpha = (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et pour tout $t \geq 0$, on pose

$$n_\alpha(t) = \#\{j \in \mathbb{N}, |\alpha_j| \leq t\}.$$

Théorème 9.1 Soient $q_1, q_2 \in L^1([0, 1])$, $a \in]0, 1/2]$, $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. Supposons que $q_1 = q_2$ sur $[a, 1]$, $q_1, q_2 \in W^{k,1}(]a - \varepsilon, a])$ et $q_1 - q_2 \in W^{k,p}(]a - \varepsilon, a[)$ pour un certain $\varepsilon \in]0, a[$.

Soient $h_1, h_2, H \in \mathbb{R}$. Soit de plus un ensemble de valeurs propres communes

$$S \subset \text{spec}(A_{q_1, h_1, H}) \cap \text{spec}(A_{q_2, h_2, H}),$$

tel que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

(i) Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $t \in \text{spec}(A)$,

$$n_S(t) \geq 2a n_{\text{spec}(A)}(t) - \frac{k}{2} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} - a,$$

où A désigne $A_{q_1, h_1, H}$ ou $A_{q_2, h_2, H}$.

ou bien

(i') Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \geq t_0$, $t \in S$,

$$2a n_{\text{spec}(A)}(t) + C \geq n_S(t) \geq 2a n_{\text{spec}(A)}(t) - \frac{k}{2} + \frac{1}{2p} - 2a,$$

où A désigne $A_{q_1, h_1, H}$ ou $A_{q_2, h_2, H}$.

Alors $h_1 = h_2$ et $q_1 = q_2$.

Remarque 9.2

1. Dans le cas $p = +\infty$, le terme $1/p$ dans les hypothèses (i) et (i') est retiré.
2. Seule la différence entre q_1 et q_2 est supposée appartenir à $W^{k,p}$ au voisinage de a , et non les potentiels q_1 et q_2 eux-mêmes.
3. Dans le cas où $k = 0$, $p = 1$ et $a = 1/4$, on retrouve grâce à l'hypothèse (i') un résultat déjà obtenu par Amour et Raoux dans [12] (où des potentiels dans des espaces L^p sont considérés) : soient $q \in L^1([0, 1])$ et $H \in \mathbb{R}$. Alors le spectre pair (respectivement impair) $(\lambda_{2j}(q, h, H))_{j \geq 0}$ (respectivement $(\lambda_{2j+1}(q, h, H))_{j \geq 0}$), ajoutée à la connaissance de q sur $[1/4, 1]$ et à la connaissance de H , déterminent h et le potentiel q presque partout sur $[0, 1]$ de façon unique.
4. Dans le cas $p = +\infty$ et $a = 1/2$, en utilisant l'hypothèse (i), on obtient un énoncé qui améliore légèrement un théorème de Gesztesy et Simon [84]. Plus précisément, on a le résultat suivant : soient $k \in \mathbb{N}$, et $q_1, q_2 \in L^1([0, 1])$ tels que $q_1 = q_2$ sur $[1/2, 1]$, $q_1, q_2 \in W^{2k,1}([1/2 - \varepsilon, 1/2[$ et $q_1 - q_2 \in W^{2k,\infty}([1/2 - \varepsilon, 1/2[)$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Soient $h_1, h_2, H \in \mathbb{R}$. Si

$$\text{spec}(A_{q_1, h_1, H}) = \text{spec}(A_{q_2, h_2, H}),$$

sauf au plus pour $k + 1$ valeurs propres, alors $h_1 = h_2$ et $q_1 = q_2$ presque partout sur $[0, 1]$. Dans [84], l'hypothèse plus forte $q_1 - q_2 \in C^{2k}$ dans un voisinage de $1/2$ est considérée.

5. Comme cas particulier du résultat énoncé dans la remarque précédente, on retrouve aussi le résultat de Hald [97] : si $q \in L^1([0, 1])$ est dans L^∞ au voisinage de $1/2$ (donc, en particulier, si q est continue au voisinage de $1/2$), alors la connaissance de q sur $[1/2, 1]$, de H , et de toutes les valeurs propres de $A_{q, h, H}$ sauf au plus une, déterminent h et q presque partout sur $[0, 1]$ de façon unique.
6. Dans l'article [iv], nous obtenons un résultat similaire, mais seulement pour $k \in \{0, 1, 2\}$, et avec des hypothèses de régularités de q_1, q_2 sur l'intervalle $[0, a]$ entier. L'analyse de l'article [vi], basée sur l'utilisation d'opérateurs de transformation, nous permet de considérer des valeurs quelconques de k et de n'imposer la régularité de q_1 et q_2 que sur un voisinage arbitrairement petit de a .

Notre approche pour démontrer le théorème 9.1 est différente de celle de Gesztesy et Simon [84]. La stratégie générale suivie dans la preuve du théorème 9.1 est néanmoins standard (voir par exemple [130]) : écrivons l'ensemble S de valeurs propres communes du théorème 9.1 sous la forme $S = \{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. On construit alors une fonction entière f qui s'annule en tous les points s_j et dont on peut estimer le taux de croissance à l'infini dans le plan complexe. En utilisant le fait que la distribution des

zéros d'une fonction entière est liée à son taux de croissance à l'infini (théorème de Jensen, voir par exemple [130]), on en déduit que la fonction f est identiquement nulle, puis que $h_1 = h_2$ et $q_1 = q_2$.

Plus précisément, la fonction f est définie comme suit : pour $q \in L^1([0, 1])$, $H, h \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, soit $\psi(\cdot, z, q, h)$ la solution sur $[0, 1]$ de l'équation

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + q\psi = z^2\psi$$

avec conditions aux bords $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = -h$. Rappelons que $\psi(x, \cdot, q, h)$ est une fonction entière (voir par exemple [133]). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, posons

$$f(z) = \int_0^a \left(\psi(x, z, q_1, h_1)\psi(x, z, q_2, h_2) - \frac{1}{2} \right) (q_1(x) - q_2(x))dx.$$

L'estimation que nous obtenons sur la fonction f , basée sur l'utilisation d'opérateurs de transformation (voir par exemple [67, 130, 134, 142]), est le point central de notre démonstration ; elle est énoncée dans la proposition suivante :

Proposition 9.3 *Soient $a \in]0, 1/2[$, $k \in \mathbb{N}$, et $p \in [1, +\infty[$. Soient $q_1, q_2 \in L^1([0, 1]) \cap W^{k,1}(]a - \varepsilon, a[)$ tels que $q_1 - q_2 \in W^{k,p}(]a - \varepsilon, a[)$ pour un certain $\varepsilon \in]0, a[$. Supposons de plus que, dans le cas où $k \geq 1$, $q_1 - q_2 \in C^{k-1}(]a - \varepsilon, a + \varepsilon[)$ pour un certain $\varepsilon \in]0, a[$. Alors il existe $C \geq 0$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,*

$$|f(z)| \leq C \frac{e^{2|\operatorname{Im}z|a}}{|\operatorname{Im}z|^{k+1-\frac{1}{p}}} (e^{-\varepsilon'|\operatorname{Im}z|} + o(1)),$$

quand $\varepsilon' \rightarrow 0^+$.

Etant donnée cette estimation, on procède alors de la façon suivante pour démontrer le théorème 9.1 : soit $S^{1/2} = \{\pm\sqrt{s_j}, j \in \mathbb{N}\}$. Pour toute suite complexe α , on pose

$$N_\alpha(R) = \int_0^R \frac{n_\alpha(t)}{t} dt,$$

pour tout $R > 0$, où $n_\alpha(t)$ est défini plus haut. En utilisant le comportement asymptotique de la distribution des valeurs propres des opérateurs de Sturm-Liouville (voir par exemple [67, 153]), on vérifie que l'une des deux hypothèses (i) ou (i') impliquent que la suite

$$\left(N_{S^{1/2}}(\sqrt{s_j}) - \frac{4a}{\pi}\sqrt{s_j} + \left(k + 1 - \frac{1}{p} \right) \ln \sqrt{s_j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

est semi-bornée inférieurement. D'autre part, en utilisant la proposition 9.3 et le théorème de Jensen, on montre que, si f n'est pas identiquement nulle, alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} N_{f^{-1}(0)}(R) - \frac{4a}{\pi}R + \left(k + 1 - \frac{1}{p} \right) \ln R = -\infty.$$

Les deux dernières équations, combinées au fait que $N_{f^{-1}(0)} \geq N_{S^{1/2}}$, entraînent une contradiction si l'on suppose que f n'est pas identiquement nulle. Pour conclure, on utilise le résultat bien connu que $f \equiv 0$ implique $(q_1, h_1) = (q_2, h_2)$ (voir par exemple [130]).

Chapitre 10

Opérateurs AKNS sur $[0, 1]$

Ce chapitre décrit les résultats obtenus en collaboration avec L. Amour dans l'article [xv]. Nous considérons l'opérateur $\mathcal{H}(p, q)$ agissant dans $L^2([0, 1]) \times L^2([0, 1])$ et défini par l'expression

$$\mathcal{H}(p, q) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} -q & p \\ p & q \end{pmatrix},$$

pour $p, q \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$. Cet opérateur est appelé opérateur AKNS (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur [1]). Rappelons que l'opérateur AKNS est unitairement équivalent à l'opérateur de Zakharov-Shabat [180], et qu'il apparaît comme le premier opérateur dans la décomposition en somme directe de l'opérateur de Dirac avec potentiel radial dans \mathbb{R}^3 (voir par exemple [162]).

Un élément $F \in L^2([0, 1]) \times L^2([0, 1])$ est noté sous la forme

$$F = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

L'opérateur AKNS est associé aux conditions de Dirichlet $Y(0) = Y(1) = 0$. Sans perte de généralité (voir [8]), on peut en fait choisir les conditions aux bords $Z(0) = Z(1) = 0$, ou plus généralement

$$\begin{cases} \cos \alpha Y(0) + \sin \alpha Z(0) = 0 \\ \cos \beta Y(1) + \sin \beta Z(1) = 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Nous notons $H(\alpha, \beta, p, q)$ l'opérateur auto-adjoint de domaine

$$\mathcal{D}(H(\alpha, \beta, p, q)) = \left\{ F = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}, F \in H^1(0, 1) \times H^1(0, 1), F \text{ satisfait (10.1)} \right\},$$

et défini par

$$H(\alpha, \beta, p, q)F = \mathcal{H}(p, q)F,$$

pour tout $F \in \mathcal{D}(H(\alpha, \beta, p, q))$. Le spectre de $H(\alpha, \beta, p, q)$ est purement discret et est constitué d'une suite strictement croissante de valeurs propres non dégénérées $(\lambda_k(\alpha, \beta, p, q))_{k \in \mathbb{Z}}$. Le développement asymptotique des valeurs propres est donné par (voir par exemple [7, 87])

$$(\lambda_k(\alpha, \beta, p, q) - k\pi - \alpha + \beta)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}). \quad (10.2)$$

Notre principal résultat fournit un ensemble de valeurs propres suffisamment grand pour déterminer de façon unique la paire de potentiels (p, q) , pourvu que p et q soient déjà connus sur l'intervalle $]a, 1]$ et qu'ils satisfassent une hypothèse de régularité au voisinage de a . Comme dans la section précédente, pour tout ensemble de nombres complexes E et pour tout $t \geq 0$, nous notons

$$n_E(t) = \#\{e \in E, |e| \leq t\}.$$

Théorème 10.1 Soient $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in L^2([0, 1]) \times L^2([0, 1])$ et soit $a \in]0, 1/2]$ tels que $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$ sur $]a, 1]$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$. Soit S un ensemble commun de valeurs propres de $H(\alpha, \beta, p_1, q_1)$ et $H(\alpha, \beta, p_2, q_2)$, i.e.

$$S \subset \text{spec}(H(\alpha, \beta, p_1, q_1)) \cap \text{spec}(H(\alpha, \beta, p_2, q_2)).$$

Soient enfin $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [2, +\infty]$.

Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $t \geq M$, $t \in \text{spec}(A)$,

$$n_S(t) \geq 2a n_{\text{spec}(A)}(t) - k - 1 + \frac{1}{r}, \quad (10.3)$$

où l'opérateur A désigne $H(\alpha, \beta, p_1, q_1)$ ou $H(\alpha, \beta, p_2, q_2)$. Supposons de plus que

$$x \mapsto (a-x)^{-k}((p_1 - p_2)(x), (q_1 - q_2)(x)) \in L^r(]a - \varepsilon, a]) \times L^r(]a - \varepsilon, a]), \quad (10.4)$$

pour un certain $\varepsilon > 0$.

Alors $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$ sur $[0, 1]$.

Remarque 10.2

1. En utilisant une inégalité de Hardy, on peut vérifier que l'hypothèse 10.4 peut être remplacée par l'hypothèse plus forte

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2, q_1 - q_2) &\in W^{k,r}(]a - \varepsilon, a]) \times W^{k,r}(]a - \varepsilon, a]), \\ (p_1, q_1)^{(j)}(a^-) &= (p_2, q_2)^{(j)}(a^-), j = 0, \dots, k-1, \end{aligned}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$.

2. Dans le cas $r = +\infty$, le terme $1/r$ est retiré dans l'hypothèse (10.3).
3. Seule la différence de potentiels est supposée satisfaire l'hypothèse (10.4), et non les potentiels eux-mêmes.
4. On peut supposer que les paramètres α et β ne sont pas connus et les retrouver en utilisant (10.2).

Des résultats de théorie spectrale inverse pour l'opérateur AKNS avec des informations *a priori* sur les potentiels sont démontrés par Del Rio et Grébert dans [58]. Dans [58], la partie supposée connue des spectres de $H(\alpha, \beta, p_1, q_1)$ et $H(\alpha, \beta, p_2, q_2)$ est de la forme particulière $S = \{\lambda_{j_0 j}(p, q, \alpha, \beta), j \in \mathbb{Z}\}$ pour un certain $j_0 \in \mathbb{N}$, et les paramètres k et r du théorème 10.1 ont les valeurs particulières $k = 0$ et $r = 2$. Le théorème 10.1 peut donc être vu comme une généralisation des résultats de [58].

L'approche générale que nous suivons pour démontrer le théorème 10.1 est la même que celle de [58] (voir aussi [130] et la section précédente pour le cas des opérateurs de Sturm-Liouville). Plus précisément, on définit une fonction entière f dépendant des deux paires de potentiels (p_1, q_1) et (p_2, q_2) , telle que, en particulier, f s'annule en tout point de l'ensemble S . La fonction f est définie de la façon suivante : soit $F(\cdot, z, p, q)$ la solution définie sur $[0, 1]$ de

$$\mathcal{H}(p, q)F(\cdot, z, p, q) = zF(\cdot, z, p, q), \quad F(0, z, p, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pour $(p, q) \in L^2([0, 1]) \times L^2([0, 1])$ et $z \in \mathbb{C}$. Soient u et v les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définies par $u(a, b) = a_1 b_1 - a_2 b_2$ et $v(a, b) = a_1 b_2 + a_2 b_1$ pour tous $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

On peut vérifier (voir [134]) que, pour tous $x \in [0, 1]$ et $(p, q) \in L^2([0, 1]) \times L^2([0, 1])$, chacune des deux composantes de $z \mapsto F(x, z, p, q)$ est une fonction entière. Posons, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \int_0^a \left\langle \begin{pmatrix} v(F(x, z, p_1, q_1), F(x, z, p_2, q_2)) \\ -u(F(x, z, p_1, q_1), F(x, z, p_2, q_2)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1(x) - p_2(x) \\ q_1(x) - q_2(x) \end{pmatrix} \right\rangle dx.$$

Il n'est pas difficile de vérifier (voir [58] ou [xv]) que f s'annule en toute valeur propre commune de $H(0, 0, p_1, q_1)$ et $H(0, 0, p_2, q_2)$.

La première étape de la preuve est d'estimer la croissance de la fonction f à l'infini dans le plan complexe afin d'en déduire, à l'aide du théorème de Jensen, que f est identiquement nulle. Plus précisément, nous montrons la proposition suivante :

Proposition 10.3 *Soient $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in L^2([0, 1]) \times L^2([0, 1])$, $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [2, +\infty]$. Supposons que l'hypothèse (10.4) est vérifiée pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors il existe $C > 0$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,*

$$|f(z)| \leq C \frac{e^{2|\operatorname{Im}z|^a}}{|\operatorname{Im}z|^{k+1-\frac{1}{r}}} (e^{-\varepsilon'|\operatorname{Im}z|} + o(1)),$$

quand $\varepsilon' \rightarrow 0^+$.

L'estimation de f à partir de l'hypothèse (10.4) apparaissant dans la proposition 10.3 constitue notre principale contribution. Sa preuve est basée sur un découpage adéquat du domaine d'intégration, combiné essentiellement à des estimations de Hölder. En particulier, cette estimation ainsi que la méthode pour l'obtenir diffèrent de celles employées dans [58]. Remarquons également que, si l'on compare le théorème 10.1 au théorème 9.1 du chapitre précédent pour les opérateurs de Sturm-Liouville, une différence notable est que, dans le théorème 10.1, l'hypothèse de régularité portant sur la différence de potentiels n'est plus énoncée en termes d'espaces de Sobolev, mais plutôt en les termes de l'hypothèse (10.4). D'après la remarque 10.2 1), l'hypothèse (10.4) est plus faible que l'hypothèse correspondante de régularité dans des espaces de Sobolev ; cette amélioration par rapport au chapitre 9 est rendue possible grâce à l'approche différente, plus directe, que nous suivons.

La deuxième étape de la preuve est de montrer que si $f \equiv 0$, alors $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$. Ce point ne dépend pas des hypothèses (10.3) et (10.4) ; il est établi dans [58].

Bibliographie

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Studies in Applied Mathematics*, 53(4) :249–315, 1974.
- [2] W. K. Abou Salem and J. Fröhlich. Adiabatic theorems for quantum resonances. *Communications in Mathematical Physics*, 273(3) :651–675, 2007.
- [3] I. E. Abramov and A. V. Andreev. Hyperfine structure of a hydrogen-like atom due to orbit-orbit, spin-orbit and spin-spin interactions. *Moscow Univ. Phys. Bull.*, 62 :283–286, 2007.
- [4] S. Agmon, I. Herbst, and E. Skibsted. Perturbation of embedded eigenvalues in the generalized N -body problem. *Communications in Mathematical Physics*, 122(3) :411–438, 1989.
- [5] J. Aguilar and J.-M. Combes. A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*, 22(4) :269–279, 1971.
- [6] Z. Ammari. Scattering theory for a class of fermionic Pauli-Fierz models. *Journal of Functional Analysis*, 208(2) :302–359, 2004.
- [7] L. Amour. Inverse spectral theory for the AKNS system with separated boundary conditions. *Inverse Problems*, 9(5) :507–523, 1993.
- [8] L. Amour. Explicit isospectral flows for the AKNS operator on the unit interval. *Inverse Problems*, 25(9) :095008, 11, 2009.
- [9] L. Amour, B. Grébert, and J.-C. Guillot. The dressed mobile atoms and ions. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 86(3) :177–200, 2006.
- [10] L. Amour, B. Grébert, and J.-C. Guillot. The dressed nonrelativistic electron in a magnetic field. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 29(10) :1121–1146, 2006.
- [11] L. Amour, B. Grébert, and J.-C. Guillot. A mathematical model for the fermi weak interactions. *Cubo*, 9(2) :37–57, 2007.
- [12] L. Amour and T. Raoux. Inverse spectral results for Schrödinger operators on the unit interval with potentials in L^p spaces. *Inverse Problems*, 23(6) :2367–2373, 2007.
- [13] W. O. Amrein, A. Boutet de Monvel, and V. Georgescu. C_0 -groups, commutator methods and spectral theory of N -body Hamiltonians, volume 135 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
- [14] A. V. Andreev. *Atomic spectroscopy. Introduction to the Theory of Hyperfine Structure*. Springer, 2005.
- [15] A. Arai. On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. I, II. *Journal of Mathematical Physics*, 22(11) :2539–2548, 2549–2552, 1981.
- [16] A. Arai. Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation. *Reviews in Mathematical Physics*, 13(9) :1075–1094, 2001.
- [17] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. *Journal of Functional Analysis*, 151(2) :455–503, 1997.

- [18] A. Arai and M. Hirokawa. Ground states of a general class of quantum field Hamiltonians. *Reviews in Mathematical Physics*, 12(8) :1085–1135, 2000.
- [19] A. Arai, M. Hirokawa, and F. Hiroshima. On the Absence of Eigenvectors of Hamiltonians in a Class of Massless Quantum Field Models without Infrared Cutoff. *Journal of Functional Analysis*, 168(2) :470–497, 1999.
- [20] S. Attal, A. Joye, and C.-A. Pillet, editors. *Open quantum systems. I*, volume 1880 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. The Hamiltonian approach, Lecture notes from the Summer School held in Grenoble, June 16–July 4, 2003.
- [21] J. Avron, I. Herbst, and B. Simon. Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions. *Duke Mathematical Journal*, 45(4) :847–883, 1978.
- [22] V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Smooth Feshbach map and operator-theoretic renormalization group methods. *Journal of Functional Analysis*, 203(1) :44–92, 2003.
- [23] V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. The renormalized electron mass in non-relativistic quantum electrodynamics. *Journal of Functional Analysis*, 243(2) :426–535, 2007.
- [24] V. Bach, J. Fröhlich, and A. Pizzo. Infrared-finite algorithms in QED : The groundstate of an atom interacting with the quantized radiation field. *Communications in Mathematical Physics*, 264(1) :145–165, 2006.
- [25] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Quantum Electrodynamics of Confined Nonrelativistic Particles. *Advances in Mathematics*, 137(2) :299–395, 1998.
- [26] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Renormalization Group Analysis of Spectral Problems in Quantum Field Theory. *Advances in Mathematics*, 137(2) :205–298, 1998.
- [27] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field. *Communications in Mathematical Physics*, 207(2) :249–290, 1999.
- [28] V. Bach, J. Fröhlich, I. M. Sigal, and A. Soffer. Positive commutators and the spectrum of Pauli-Fierz Hamiltonian of atoms and molecules. *Communications in Mathematical Physics*, 207(3) :557–587, 1999.
- [29] E. Balslev and J.-M. Combes. Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilatation-analytic interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 22(4) :280–294, 1971.
- [30] J.-M. Barbaroux, M. Dimassi, and J.-C. Guillot. Quantum electrodynamics of relativistic bound states with cutoffs, II. *Contemporary Mathematics*, 307(6) :9–14, 2002.
- [31] J. M. Barbaroux, M. Dimassi, and J.-C. Guillot. Quantum electrodynamics of relativistic bound states with cutoffs. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 1(2) :271–314, 2004.
- [32] J.-M. Barbaroux and J.-C. Guillot. Limiting absorption principle at low energies for a mathematical model of weak interaction : The decay of a boson. *Comptes Rendus Mathématique*, 347(17-18) :1087–1092, 2009.
- [33] J.-M. Barbaroux and J.-C. Guillot. Spectral theory for a mathematical model of the weak interactions ; the decay of the intermediate vector bosons W^\pm , I. *Advances in Mathematical Physics*, 2009.
- [34] H. A. Bethe and E. E. Salpeter. *Quantum mechanics of one- and two-electron atoms*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [35] J.-F. Bony and D. Häfner. Low frequency resolvent estimates for long range perturbations of the euclidean laplacian. *Mathematical Research Letters*, 17(2) :303–308, 2010.
- [36] J.-F. Bony and D. Häfner. Local energy decay for several evolution equations on asymptotically euclidian manifolds. *preprint*, 2012.

- [37] G. Borg. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte. *Acta Mathematica*, 78 :1–96, 1946.
- [38] J.-M. Bouclet. Low frequency estimates and local energy decay for asymptotically euclidean laplacians. *Communications in Partial Differential Equations*, 36(7) :1239–1286, 2011.
- [39] J.-M. Bouclet. Low frequency estimates for long range perturbations in divergence form. *Canadian Journal of Mathematics*, 63(5) :961–991, 2011.
- [40] N. Boussaid and S. Golénia. Limiting absorption principle for some long range perturbations of Dirac systems at threshold energies. *Communications in Mathematical Physics*, 299(3) :677–708, 2010.
- [41] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1987.
- [42] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997.
- [43] L. Bruneau and J. Dereziński. Pauli-Fierz Hamiltonians defined as quadratic forms. *Reports on Mathematical Physics*, 54(2) :169–199, 2004.
- [44] L. Cattaneo. Mourre’s inequality and embedded bound states. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 129(7) :591–614, 2005.
- [45] L. Cattaneo, G. M. Graf, and W. Hunziker. A general resonance theory based on Mourre’s inequality. *Annales Henri Poincaré*, 7(3) :583–601, 2006.
- [46] T. Chen. Infrared renormalization in non-relativistic QED and scaling criticality. *Journal of Functional Analysis*, 254(10) :2555–2647, 2008.
- [47] T. Chen and J. Fröhlich. Coherent infrared representations in non-relativistic QED, in spectral theory and mathematical physics : A festschrift in honor of Barry Simon’s 60th Birthday. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 76 :25–45, 2007.
- [48] T. Chen, J. Fröhlich, and A. Pizzo. Infraparticle scattering states in non-relativistic QED. II. Mass shell properties. *Journal of Mathematical Physics*, 50(1), 2009.
- [49] T. Chen, J. Fröhlich, and A. Pizzo. Infraparticle scattering states in non-relativistic QED : I. The Bloch-Nordsieck paradigm. *Communications in Mathematical Physics*, 294(3) :761–825, 2010.
- [50] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Lalöe. *Mécanique Quantique II*. Hermann, Paris, 1977.
- [51] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et Atomes*. Edition du CNRS, 1988.
- [52] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d’Interaction Entre Photons et Atomes*. Edition du CNRS, 1988.
- [53] E. B. Davies. *Linear operators and their spectra*, volume 106 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [54] W. De Roeck, J. Fröhlich, and A. Pizzo. Absence of embedded mass shells : Cerenkov radiation and quantum friction. *Annales Henri Poincaré*, 11(8) :1545–1589, 2010.
- [55] W. De Roeck and A. Kupiainen. Approach to ground state and time-independent photon bound for massless spin-boson models. *preprint*, 2011.
- [56] R. del Rio, F. Gesztesy, and B. Simon. Inverse spectral analysis with partial information on the potential. III. Updating boundary conditions. *International Mathematics Research Notices*, 1997(15) :751–758, 1997.
- [57] R. Del Rio, F. Gesztesy, and B. Simon. Corrections and Addendum to ”Inverse Spectral Analysis with Partial Information on the Potential, III. Updating Boundary Conditions”. *International Mathematics Research Notices*, 1999(11) :622–625, 1999.

- [58] R. del Rio and B. Grébert. Inverse spectral results for AKNS systems with partial information on the potentials. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 4(3) :229–244, 2001.
- [59] J. Dereziński. Introduction to representations of the canonical commutation and anticommutation relations. In *Large Coulomb systems*, volume 695 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 63–143. Springer, Berlin, 2006.
- [60] J. Dereziński and C. Gérard. *Scattering theory of classical and quantum N -particle systems*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [61] J. Dereziński and C. Gérard. Asymptotic completeness in quantum in field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians. *Reviews in Mathematical Physics*, 11(4) :383–450, 1999.
- [62] J. Dereziński and C. Gérard. Spectral and scattering theory of spatially cut-off $P(\phi)_2$ Hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*, 213(1) :39–125, 2000.
- [63] J. Dereziński and C. Gérard. Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians. *Annales Henri Poincaré*, 5(3) :523–577, 2004.
- [64] J. Dereziński and V. Jakšić. Spectral theory of Pauli-Fierz operators. *Journal of Functional Analysis*, 180(2) :243–327, 2001.
- [65] J. Dereziński and V. Jakšić. Return to Equilibrium for Pauli-Fierz Systems. *Annales Henri Poincaré*, 4(4) :739–793, 2003.
- [66] M. Dimassi and J.-C. Guillot. The quantum electrodynamics of relativistic bound states with cutoffs. I. *Applied Mathematics Letters*, 16(4) :551–555, 2003.
- [67] G. Freiling and V. Yurko. *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications*. Nova Science Publishers Inc., Huntington, NY, 2001.
- [68] R. Froese and I. Herbst. Exponential bounds and absence of positive eigenvalues for N -body Schrödinger operators. *Communications in Mathematical Physics*, 87(3) :429–447, 1982.
- [69] R. Froese, I. Herbst, M. Hoffmann-Ostenhof, and T. Hoffmann-Ostenhof. On the absence of positive eigenvalues for one-body Schrödinger operators. *Journal d'Analyse Mathématique*, 41(1) :272–284, 1982.
- [70] J. Fröhlich. On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Section A. Physique Théorique*, 19(1) :1–103, 1973.
- [71] J. Fröhlich. Existence of dressed one electron states in a class of persistent models. *Fortschr. Phys.*, 22 :159–198, 1974.
- [72] J. Fröhlich, M. Griesemer, and B. Schlein. Asymptotic completeness for Rayleigh scattering. *Annales Henri Poincaré*, 3(1) :107–170, 2002.
- [73] J. Fröhlich, M. Griesemer, and B. Schlein. Asymptotic completeness for Compton scattering. *Communications in Mathematical Physics*, 252(1-3) :415–476, 2004.
- [74] J. Fröhlich, M. Griesemer, and B. Schlein. Rayleigh scattering at atoms with dynamical nuclei. *Communications in Mathematical Physics*, 271(2) :387–430, 2007.
- [75] J. Fröhlich, M. Griesemer, and I. M. Sigal. Spectral theory for the standard model of non-relativistic QED. *Communications in Mathematical Physics*, 283(3) :613–646, 2008.
- [76] J. Fröhlich, M. Griesemer, and I. M. Sigal. On spectral renormalization group. *Reviews in Mathematical Physics*, 21(4) :511–548, 2009.
- [77] J. Fröhlich, M. Griesemer, and I. M. Sigal. Spectral renormalization group and local decay in the standard model of non-relativistic quantum electrodynamics. *Reviews in Mathematical Physics*, 23(2) :179–209, 2011.

- [78] J. Fröhlich and M. Merkli. Another return of "return to equilibrium". *Communications in Mathematical Physics*, 251(2) :235–262, 2004.
- [79] J. Fröhlich and A. Pizzo. Renormalized electron mass in nonrelativistic QED. *Communications in Mathematical Physics*, 294(2) :439–470, 2010.
- [80] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. *American Mathematical Society Translations*, 1 :253–304, 1955.
- [81] V. Georgescu and C. Gérard. On the virial theorem in quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 208(2) :275–281, 1999.
- [82] V. Georgescu, C. Gérard, and J. S. Møller. Commutators, C_0 -semigroups and resolvent estimates. *Journal of Functional Analysis*, 216(2) :303–361, 2004.
- [83] V. Georgescu, C. Gérard, and J. S. Møller. Spectral theory of massless Pauli-Fierz models. *Communications in Mathematical Physics*, 249(1) :29–78, 2004.
- [84] F. Gesztesy and B. Simon. Inverse spectral analysis with partial information on the potential, II. The case of discrete spectrum. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(6) :2765–2787, 2000.
- [85] S. Golénia. Positive commutators, Fermi golden rule and the spectrum of zero temperature Pauli-Fierz Hamiltonians. *Journal of Functional Analysis*, 256(8) :2587–2620, 2009.
- [86] S. Golénia and T. Jecko. A new look at Mourre's commutator theory. *Complex Analysis and Operator Theory*, 1(3) :399–422, 2007.
- [87] B. Grébert and J.-C. Guillot. Gaps of one-dimensional periodic AKNS systems. *Forum Mathematicum*, 5(5) :459–504, 1993.
- [88] W. Greiner and B. Müller. *Gauge Theory of Weak Interactions*. Springer, Berlin, 1996.
- [89] M. Griesemer. Exponential decay and ionization thresholds in non-relativistic quantum electrodynamics. *Journal of Functional Analysis*, 210(2) :321–340, 2004.
- [90] M. Griesemer and D. Hasler. On the smooth Feshbach-Schur map. *Journal of Functional Analysis*, 254(9) :2329–2335, 2008.
- [91] M. Griesemer, E. H. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Inventiones Mathematicae*, 145(3) :557–595, 2001.
- [92] M. Griesemer and H. Zenk. Asymptotic electromagnetic fields in non-relativistic QED : the problem of existence revisited. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 354(1) :339–346, 2009.
- [93] S. J. Gustafson and I. M. Sigal. *Mathematical concepts of quantum mechanics*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [94] C. Gérard. On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians. *Annales Henri Poincaré*, 1(3) :443–459, 2000.
- [95] C. Gérard. On the scattering theory of massless Nelson models. *Reviews in Mathematical Physics*, 14(11), 2002.
- [96] C. Gérard. A proof of the abstract limiting absorption principle by energy estimates. *Journal of Functional Analysis*, 254(11) :2707–2724, 2008.
- [97] O. H. Hald. Inverse eigenvalue problems for the mantle. *Geophysical Journal, Royal Astronomical Society*, 62(1) :41–48, 1980.
- [98] D. Hasler and I. Herbst. Absence of ground states for a class of translation invariant models of non-relativistic QED. *Communications in Mathematical Physics*, 279(3) :769–787, 2008.

- [99] D. Hasler and I. Herbst. On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians. *Reviews in Mathematical Physics*, 20(7) :787–800, 2008.
- [100] D. Hasler, I. Herbst, and M. Huber. On the lifetime of quasi-stationary states in non-relativistic QED. *Annales Henri Poincaré*, 9(5) :1005–1028, 2008.
- [101] E. Hille and R. S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups*. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957.
- [102] M. Hirokawa. Infrared catastrophe for Nelson’s model - non-existence of ground state and soft-boson divergence. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 42(4) :897–922, 2006.
- [103] F. Hiroshima. Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics., I. *Journal of Mathematical Physics*, 40(12) :6209–6222, 1999.
- [104] F. Hiroshima. Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics. II. *Journal of Mathematical Physics*, 41(2) :661–674, 2000.
- [105] F. Hiroshima. Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants. *Annales Henri Poincaré*, 3(1) :171–201, 2002.
- [106] F. Hiroshima. Analysis of ground states of atoms interacting with a quantized radiation field. *Topics in the Theory of Schrödinger Operators*, pages 145–272, 2004.
- [107] F. Hiroshima. Multiplicity of ground states in quantum field models : Applications of asymptotic fields. *Journal of Functional Analysis*, 224(2) :431–470, 2005.
- [108] F. Hiroshima. Fiber Hamiltonians in non-relativistic quantum electrodynamics. *Journal of Functional Analysis*, 252(1) :314–355, 2007.
- [109] F. Hiroshima and J. Lorinczi. Functional integral representations of the Pauli-Fierz model with spin $1/2$. *Journal of Functional Analysis*, 254(8) :2127–2185, 2008.
- [110] F. Hiroshima and H. Spohn. Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz Hamiltonian with spin. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 5(6) :1091–1104, 2001.
- [111] H. Hochstadt and B. Lieberman. An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 34(4) :676–680, 1978.
- [112] R. Høegh-Krohn. Asymptotic fields in some models of quantum field theory. I. *Journal of Mathematical Physics*, 9 :2075–2080, 1968.
- [113] R. Høegh-Krohn. Boson fields under a general class of cut-off interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 12 :216–225, 1969.
- [114] R. Høegh-Krohn. On the scattering operator for quantum fields. *Communications in Mathematical Physics*, 18 :109–126, 1970.
- [115] M. Horváth. Inverse spectral problems and closed exponential systems. *Annals of Mathematics*, 162(2) :885–918, 2005.
- [116] M. Hübner and H. Spohn. Radiative decay : nonperturbative approaches. *Reviews in Mathematical Physics*, 7(3) :363–387, 1995.
- [117] M. Hübner and H. Spohn. Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian. *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Physique Théorique*, 62(3) :289–323, 1995.
- [118] W. Hunziker. Resonances, metastable states and exponential decay laws in perturbation theory. *Communications in Mathematical Physics*, 132(1) :177–188, 1990.
- [119] W. Hunziker and I. M. Sigal. The quantum N -body problem. *Journal of Mathematical Physics*, 41(6) :3448–3510, 2000.

- [120] W. Hunziker, I. M. Sigal, and A. Soffer. Minimal escape velocities. *Communications in Partial Differential Equations*, 24(11-12) :2279–2295, 1999.
- [121] C. Itzykson and J.-B. Zuber. *Quantum field theory*. McGraw-Hill International Book Co., New York, 1980. International Series in Pure and Applied Physics.
- [122] A. Iwatsuka and H. Tamura. Asymptotic distribution of eigenvalues for Pauli operators with nonconstant magnetic fields. *Duke Mathematical Journal*, 93(3) :535–574, 1998.
- [123] V. Jakšić and C.-A. Pillet. On a model for quantum friction, II. Fermi’s golden rule and dynamics at positive temperature. *Communications in Mathematical Physics*, 176(3) :619–644, 1996.
- [124] A. Jensen and T. Kato. Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions. *Duke Mathematical Journal*, 46(3) :583–611, 1979.
- [125] A. Jensen, E. Mourre, and P. Perry. Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory. *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Section A. Physique Théorique*, 41(2) :207–225, 1984.
- [126] T. Kappeler and J. Pöschel. *KdV & KAM*, volume 45 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [127] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.
- [128] C. King. Resonant decay of a two state atom interacting with a massless non-relativistic quantized scalar field. *Communications in Mathematical Physics*, 165(3) :569–594, 1994.
- [129] Y. Kuwabara and K. Yajima. The limiting absorption principle for schrödinger operators with long-range time-periodic potentials. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. IA*, 34 :833–851, 1987.
- [130] B. Ja. Levin. *Distribution of zeros of entire functions*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.
- [131] N. Levinson. The inverse Sturm-Liouville problem. *Mat. Tidsskr. B.*, 1949 :25–30, 1949.
- [132] B. M. Levitan. *Inverse Sturm-Liouville problems*. VSP, Zeist, 1987. Translated from the Russian by O. Efimov.
- [133] B. M. Levitan and M. G. Gasymov. Determination of a differential equation by two of its spectra. *Russian Mathematical Surveys*, 19(2) :1–63, 1964.
- [134] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan. Sturm-Liouville and Dirac operators. *Mathematics and Its Applications*, 59, 1991.
- [135] E. H. Lieb and M. Loss. Existence of atoms and molecules in non-relativistic quantum electrodynamics. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 7(4) :667–710, 2003.
- [136] M. Loss, T. Miyao, and H. Spohn. Lowest energy states in nonrelativistic QED : Atoms and ions in motion. *Journal of Functional Analysis*, 243(2) :353–393, 2007.
- [137] M. Loss, T. Miyao, and H. Spohn. Kramers degeneracy theorem in nonrelativistic QED. *Letters in Mathematical Physics*, 89(1) :21–31, 2009.
- [138] J. Lörinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. The infrared behaviour in Nelson’s model of a quantum particle coupled to a massless scalar field. *Annales Henri Poincaré*, 3(2) :269–295, 2002.
- [139] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [140] V. A. Marčenko. Some questions of the theory of one-dimensional linear differential operators of the second order. I. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 1 :327–420, 1952.

- [141] V. A. Marčenko. Some questions of the theory of one-dimensional linear differential operators of the second order. II. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 2 :3–83, 1953.
- [142] V. A. Marchenko. Sturm-Liouville operators and applications. *Operator Theory : Advances and Applications*, 22, 1986.
- [143] A. Messiah. *Mécanique Quantique*. Dunod, Paris, 1995.
- [144] J. S. Møller. The translation invariant massive Nelson model : I. The bottom of the spectrum. *Annales Henri Poincaré*, 6(6) :1091–1135, 2005.
- [145] J. S. Møller. On the essential spectrum of the translation invariant Nelson model. *Mathematical physics of quantum mechanics*, 690 :179–195, 2006.
- [146] J. S. Møller and E. Skibsted. Spectral theory of time-periodic many-body systems. *Advances in Mathematics*, 188(1) :137–221, 2004.
- [147] J. S. Møller and M. Westrich. Regularity of eigenstates in regular moure theory. *Journal of Functional Analysis*, 260(3) :852–878, 2011.
- [148] E. Mourre. Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. *Communications in Mathematical Physics*, 78(3) :391–408, 1981.
- [149] E. Nelson. Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field. *Journal of Mathematical Physics*, 5 :1190–1197, 1964.
- [150] A. Panati. Existence and nonexistence of a ground state for the massless Nelson model under binding condition. *Reports on Mathematical Physics*, 63(3) :305–330, 2009.
- [151] P. Perry, I. M. Sigal, and B. Simon. Spectral analysis of N -body Schrödinger operators. *Annals of Mathematics*, 114(3) :519–567, 1981.
- [152] A. Pizzo. One-particle (improper) States in Nelson’s Massless Model. *Annales Henri Poincaré*, 4(3) :439–486, 2003.
- [153] J. Pöschel and E. Trubowitz. *Inverse spectral theory*, volume 130 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.
- [154] G. D. Raikov. Eigenvalue asymptotics for the Pauli operator in strong nonconstant magnetic fields. *Annales de l’Institut Fourier*, 49(5) :1603–1636, 1999.
- [155] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York, 1972.
- [156] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [157] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [158] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979.
- [159] S. Richard. Some improvements in the method of the weakly conjugate operator. *Letters in Mathematical Physics*, 76(1) :27–36, 2006.
- [160] I. Rodnianski and T. Tao. Effective limiting absorption principles and applications. *preprint*, 2012.
- [161] J. Sahbani. The conjugate operator method for locally regular hamiltonians. *Journal of Operator Theory*, 38(2) :297–322, 1997.
- [162] F. Serier. Inverse spectral problem for singular Ablowitz-Kaup-Newell-Segur operators on $[0, 1]$. *Inverse Problems*, 22(4) :1457–1484, 2006.

- [163] I. M. Sigal. Ground state and resonances in the standard model of the non-relativistic qed. *Journal of Statistical Physics*, 134(5-6) :899–939, 2009.
- [164] I.M. Sigal and A. Soffer. Local decay and propagation estimates for time dependent and time independent hamiltonians. *preprint, Princeton University*, 1988.
- [165] B. Simon. Resonances in N -body quantum systems with dilation analytic potentials and the foundations of time-dependent perturbation theory. *Annals of Mathematics*, 97 :247–274, 1973.
- [166] E. Skibsted. Spectral analysis of N -body systems coupled to a bosonic field. *Reviews in Mathematical Physics*, 10(7) :989–1026, 1998.
- [167] A. V. Sobolev. On the Lieb-Thirring estimates for the Pauli operator. *Duke Mathematical Journal*, 82(3) :607–635, 1996.
- [168] A. Soffer. The maximal velocity of a photon. *preprint*, 2012.
- [169] H. Spohn. Asymptotic completeness for Rayleigh scattering. *Journal of Mathematical Physics*, 38(5) :2281–2296, 1997.
- [170] H. Spohn. Ground State of a Quantum Particle Coupled to a Scalar Bose Field. *Letters in Mathematical Physics*, 44(1) :9–16, 1998.
- [171] H. Spohn. *Dynamics of charged particles and their radiation field*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [172] L. Tenuta and S. Teufel. Effective dynamics for particles coupled to a quantized scalar field. *Communications in Mathematical Physics*, 280(3) :751–805, 2008.
- [173] S. Teufel and H. Spohn. Semiclassical motion of dressed electrons. *Reviews in Mathematical Physics*, 14(1) :1–28, 2002.
- [174] B. R. Vainberg. *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*. Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1989. Translated from the Russian by E. Primrose.
- [175] A. Vasy and J. Wunsch. Positive commutators at the bottom of the spectrum. *Journal of Functional Analysis*, 259(2) :503–523, 2010.
- [176] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Vol. I. Foundations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [177] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Vol. II. Modern applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [178] K. Yajima. Existence of solutions for Schrödinger evolution equations. *Communications in Mathematical Physics*, 110(3) :415–426, 1987.
- [179] K. Yosida. *Functional analysis*, volume 123 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 1980.
- [180] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I. *Functional Analysis and Its Applications*, 8(3) :226–235, 1975.