Analyse spectrale du modèle de l'électron habillé en QED non relativiste

Jérémy Faupin

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université de Bordeaux 1

Collaboration avec
T. Chen, J. Fröhlich, I.M. Sigal

Introduction

Système physique

- 1 électron "libre" décrit par les paramètres $x_{\rm el}, p_{\rm el} = -\mathrm{i}\nabla_{x_{\rm el}}, \alpha, m_{\rm el}$
- Spin négligé, $\mathcal{H}_{\rm el} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$
- Unités : $\hbar = c = 1$
- Electron non relativiste, $H_{\rm el} = p_{\rm el}^2/(2m_{\rm el})$
- Interaction avec le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb

Hamiltonien réduit

- Le système physique est invariant par translation : le Hamiltonien H_α commute avec l'opérateur d'impulsion totale
- Pour une impulsion totale P fixée, on s'intéresse au Hamiltonien réduit associé $H_\alpha(P)$

Question

Spectre de $H_\alpha(P)$ pour α et P fixés suffisamment petits ?

Introduction

Système physique

- 1 électron "libre" décrit par les paramètres $x_{\mathrm{el}}, p_{\mathrm{el}} = -\mathrm{i}\nabla_{x_{\mathrm{el}}}, \alpha, m_{\mathrm{el}}$
- Spin négligé, $\mathcal{H}_{\mathrm{el}} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$
- Unités : $\hbar = c = 1$
- Electron non relativiste, $H_{\mathrm{el}} = p_{\mathrm{el}}^2/(2m_{\mathrm{el}})$
- Interaction avec le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb

Hamiltonien réduit

- Le système physique est invariant par translation : le Hamiltonien H_α commute avec l'opérateur d'impulsion totale
- Pour une impulsion totale P fixée, on s'intéresse au Hamiltonien réduit associé $H_\alpha(P)$

Question

Spectre de $H_\alpha(P)$ pour α et P fixés suffisamment petits ?

Introduction

Système physique

- 1 électron “libre” décrit par les paramètres $x_{\mathrm{el}}, p_{\mathrm{el}} = -\mathrm{i}\nabla_{x_{\mathrm{el}}}, \alpha, m_{\mathrm{el}}$
- Spin négligé, $\mathcal{H}_{\mathrm{el}} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$
- Unités : $\hbar = c = 1$
- Electron non relativiste, $H_{\mathrm{el}} = p_{\mathrm{el}}^2/(2m_{\mathrm{el}})$
- Interaction avec le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb

Hamiltonien réduit

- Le système physique est invariant par translation : le Hamiltonien H_α commute avec l'opérateur d'impulsion totale
- Pour une impulsion totale P fixée, on s'intéresse au Hamiltonien réduit associé $H_\alpha(P)$

Question

Spectre de $H_\alpha(P)$ pour α et P fixés suffisamment petits ?

Plan de l'exposé

1. Définition du modèle
   - Espace de Fock
   - Hamiltonien et Hamiltonien réduit
2. Spectre de $H_\alpha(P)$
   - Etats fondamentaux
   - Théorie de Mourre
   - Principe d'absorption limite

Partie I

Définition du modèle

Espace de Fock (1)

- Espace de Hilbert pour un photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{F}_s = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} S_n \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)^n) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_s^n$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation

- Opérateurs de création et d'annihilation pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$:

$$(a^*(f)\Phi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f(K_i) \Phi^{(n-1)}(K_1, \cdots, \hat{K}_i, \cdots, K_n)$$

$$(a(f)\Phi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \bar{f}(K) \Phi^{(n+1)}(K, K_1, \cdots, K_n) \mathrm{d}K$$

- Relations canoniques de commutation :

$$[a^*(f), a^*(g)] = [a(f), a(g)] = 0$$
$$[a(f), a^*(g)] = (f, g)$$

Espace de Fock (1)

- Espace de Hilbert pour un photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{F}_s = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} S_n \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)^n) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{F}_s^n$$

  où S_n est l'opérateur de symétrisation

- Opérateurs de création et d'annihilation pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$:

$$(a^*(f)\Phi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(K_i)\Phi^{(n-1)}(K_1, \cdots, \hat{K}_i, \cdots, K_n)$$

$$(a(f)\Phi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2} \bar{f}(K)\Phi^{(n+1)}(K, K_1, \cdots, K_n)\mathrm{d}K$$

- Relations canoniques de commutation :

$$[a^*(f), a^*(g)] = [a(f), a(g)] = 0$$
$$[a(f), a^*(g)] = (f, g)$$

Espace de Fock (1)

- Espace de Hilbert pour un photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{F}_s = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} S_n \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)^n) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_s^n$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation

- Opérateurs de création et d'annihilation pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$:

$$(a^*(f)\Phi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} f(K_i)\Phi^{(n-1)}(K_1, \cdots, \hat{K}_i, \cdots, K_n)$$

$$(a(f)\Phi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \bar{f}(K)\Phi^{(n+1)}(K, K_1, \cdots, K_n)\mathrm{d}K$$

- Relations canoniques de commutation :

$$[a^*(f), a^*(g)] = [a(f), a(g)] = 0$$
$$[a(f), a^*(g)] = (f, g)$$

Espace de Fock (1)

- Espace de Hilbert pour un photon : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$
- Espace de Fock symétrique pour le champ de photons :

$$\mathcal{F}_s = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} S_n \mathrm{L}^2((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)^n) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_s^n$$

où S_n est l'opérateur de symétrisation

- Opérateurs de création et d'annihilation pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$:

$$(a^*(f)\Phi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(K_i)\Phi^{(n-1)}(K_1, \cdots, \hat{K}_i, \cdots, K_n)$$

$$(a(f)\Phi)^{(n)}(K_1, \cdots, K_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \bar{f}(K)\Phi^{(n+1)}(K, K_1, \cdots, K_n)\mathrm{d}K$$

- Relations canoniques de commutation :

$$[a^*(f), a^*(g)] = [a(f), a(g)] = 0$$
$$[a(f), a^*(g)] = (f, g)$$

Espace de Fock (2)

- Notations "physiques" :

$$a(f)=\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2}\bar{f}(K)a(K)\mathrm{d}K,\quad a^*(f)=\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2}f(K)a^*(K)\mathrm{d}K$$

- Soit b un opérateur de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2)$. La seconde quantification de b est l'opérateur de $\mathcal{F}_s$ défini par :

$$\mathrm{d}\Gamma(b)|_{\mathcal{F}_s^n}=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes b\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}$$

$$\mathrm{d}\Gamma(b)\Omega=0$$

où $\Omega=(1,0,0,\cdots)$ est le vecteur du vide de photons

- Exemples :

  * Opérateur du nombre de photons : $\mathcal{N}_{\mathrm{ph}}=\mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1})$
  * Impulsion du champ de photons libre : $P_{\mathrm{ph}}=\mathrm{d}\Gamma(k)$
  * Energie du champ de photons libre : $H_{\mathrm{ph}}=\mathrm{d}\Gamma(|k|)$

Espace de Fock (2)

- Notations "physiques" :

$$a(f) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \bar{f}(K) a(K) \mathrm{d}K, \quad a^*(f) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} f(K) a^*(K) \mathrm{d}K$$

- Soit b un opérateur de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$. La seconde quantification de b est l'opérateur de $\mathcal{F}_s$ défini par :

$$\mathrm{d}\Gamma(b)|_{\mathcal{F}_s^n} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes b \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$$

$$\mathrm{d}\Gamma(b)\Omega = 0$$

où $\Omega = (1, 0, 0, \cdots)$ est le vecteur du vide de photons

- Exemples :
  - $*$ Opérateur du nombre de photons : $\mathcal{N}_{\mathrm{ph}} = \mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1})$
  - $*$ Impulsion du champ de photons libre : $P_{\mathrm{ph}} = \mathrm{d}\Gamma(k)$
  - $*$ Energie du champ de photons libre : $H_{\mathrm{ph}} = \mathrm{d}\Gamma(|k|)$

Espace de Fock (2)

- Notations "physiques" :

$$a(f) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \bar{f}(K) a(K) \mathrm{d}K, \quad a^*(f) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} f(K) a^*(K) \mathrm{d}K$$

- Soit b un opérateur de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$. La seconde quantification de b est l'opérateur de $\mathcal{F}_s$ défini par :

$$\mathrm{d}\Gamma(b)|_{\mathcal{F}_s^n} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes b \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$$

$$\mathrm{d}\Gamma(b)\Omega = 0$$

où $\Omega = (1, 0, 0, \cdots)$ est le vecteur du vide de photons

- Exemples :

  $*$ Opérateur du nombre de photons : $\mathcal{N}_{\mathrm{ph}} = \mathrm{d}\Gamma(\mathbb{1})$

  $*$ Impulsion du champ de photons libre : $P_{\mathrm{ph}} = \mathrm{d}\Gamma(k)$

  $*$ Energie du champ de photons libre : $H_{\mathrm{ph}} = \mathrm{d}\Gamma(|k|)$

Le Hamiltonien H_α

- Espace de Hilbert pour l'électron et le champ de photons :

$$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}) \otimes \mathcal{F}_s \simeq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}; \mathcal{F}_s) = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \mathcal{F}_s \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}$$

- Hamiltonien de Pauli-Fierz agissant dans $\mathcal{H}$:

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}(p_{\mathrm{el}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A)^2 + H_{\mathrm{ph}}$$

où $A = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} A(x_{\mathrm{el}}) \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}$ et

$$A(x_{\mathrm{el}}) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \frac{\kappa^\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}}} \varepsilon_\lambda(k) \left(a^*(K) e^{-ik\cdot x_{\mathrm{el}}} + a(K) e^{ik\cdot x_{\mathrm{el}}} \right) \mathrm{d}K$$

$$H_{\mathrm{ph}} = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} |k| a^*(K) a(K) \mathrm{d}K$$

Le Hamiltonien H_α

- Espace de Hilbert pour l'électron et le champ de photons :

$$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}) \otimes \mathcal{F}_s \simeq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}; \mathcal{F}_s) = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \mathcal{F}_s \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}$$

- Hamiltonien de Pauli-Fierz agissant dans $\mathcal{H}$:

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}(p_{\mathrm{el}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A)^2 + H_{\mathrm{ph}}$$

où $A = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} A(x_{\mathrm{el}})\mathrm{d}x_{\mathrm{el}}$ et

$$A(x_{\mathrm{el}}) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \frac{\kappa^\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}}} \varepsilon_\lambda(k) \left(a^*(K) e^{-ik\cdot x_{\mathrm{el}}} + a(K) e^{ik\cdot x_{\mathrm{el}}} \right) \mathrm{d}K$$

$$H_{\mathrm{ph}} = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} |k| a^*(K) a(K) \mathrm{d}K$$

Le Hamiltonien H_α

- Espace de Hilbert pour l'électron et le champ de photons :

$$\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}) \otimes \mathcal{F}_s \simeq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}; \mathcal{F}_s) = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \mathcal{F}_s \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}$$

- Hamiltonien de Pauli-Fierz agissant dans $\mathcal{H}$:

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}(p_{\mathrm{el}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A)^2 + H_{\mathrm{ph}}$$

où $A = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} A(x_{\mathrm{el}}) \mathrm{d}x_{\mathrm{el}}$ et

$$A(x_{\mathrm{el}}) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} \frac{\kappa^\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}}} \varepsilon_\lambda(k) \left(a^*(K) e^{-ik\cdot x_{\mathrm{el}}} + a(K) e^{ik\cdot x_{\mathrm{el}}} \right) \mathrm{d}K$$

$$H_{\mathrm{ph}} = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2} |k| a^*(K) a(K) \mathrm{d}K$$

Le Hamiltonien réduit $H_\alpha(P)$

- H_α commute avec l'opérateur d'impulsion totale $P_{\mathrm{tot}} = p_{\mathrm{el}} + P_{\mathrm{ph}}$:

$$[H_\alpha, P_{\mathrm{tot}}] = 0$$

On en déduit

Proposition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$H_\alpha \simeq \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_\alpha(P) \mathrm{d}P \quad \text{dans} \quad \mathcal{H} \simeq \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \mathcal{F}_s \mathrm{d}P,$$

où le Hamiltonien réduit $H_\alpha(P)$ est donné par :

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}} \big(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A(0)\big)^2 + H_{\mathrm{ph}}$$

De plus $D(H_\alpha(P)) = D(\frac{1}{2m_{\mathrm{el}}} P_{\mathrm{ph}}^2 + H_{\mathrm{ph}})$ pour tout $P \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Le Hamiltonien réduit $H_\alpha(P)$

- H_α commute avec l'opérateur d'impulsion totale $P_{\mathrm{tot}} = p_{\mathrm{el}} + P_{\mathrm{ph}}$:

$$[H_\alpha, P_{\mathrm{tot}}] = 0$$

On en déduit

Proposition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$H_\alpha \simeq \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_\alpha(P) \mathrm{d}P \quad \text{dans} \quad \mathcal{H} \simeq \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \mathcal{F}_s \mathrm{d}P,$$

où le Hamiltonien réduit $H_\alpha(P)$ est donné par :

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}} \left(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A(0) \right)^2 + H_{\mathrm{ph}}$$

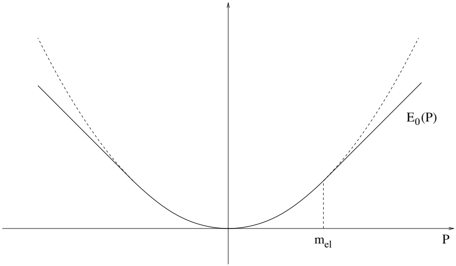
De plus $D(H_\alpha(P)) = D(\frac{1}{2m_{\mathrm{el}}} P_{\mathrm{ph}}^2 + H_{\mathrm{ph}})$ pour tout $P \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Spectre de $H_0(P)$

- $H_0(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}\left(P - P_{\mathrm{ph}}\right)^2 + H_{\mathrm{ph}}$

$$\Rightarrow \sigma(H_0(P)) = \begin{cases} [\frac{P^2}{2m_{\mathrm{el}}}, +\infty[& \text{si } |P| \leq m_{\mathrm{el}} \\ [|P| - \frac{m_{\mathrm{el}}}{2}, +\infty[& \text{si } |P| \geq m_{\mathrm{el}} \end{cases}$$

et $\sigma_{\mathrm{pp}}(H_0(P)) = \left\{ \frac{P^2}{2m_{\mathrm{el}}} \right\}$ pour tout $P \in \mathbb{R}^3$



Partie II

Spectre de $H_\alpha(P)$

(pour $|P| \leq p_c < m_{\mathrm{el}}$)

Energie fondamentale

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}\left(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A(0)\right)^2 + H_{\mathrm{ph}}, \quad E_\alpha(P) = \inf \sigma(H_\alpha(P))$$

Proposition

Symétrie par rapport aux rotations $\Rightarrow E_\alpha(P) = E_\alpha(|P|)$

Proposition ([Bach-Chen-Fröhlich-Sigal'07], [Chen'08], [Chen-Fröhlich-Pizzo'09], [Fröhlich-Pizzo'10])

Soit α fixé suffisamment petit. Alors $P \mapsto E_\alpha(P)$ est 2 fois dérivable sur $\{P, |P| \leq p_c\}$

Remarque

La masse renormalisée de l'électron peut être définie de la façon suivante :

$$m_{\mathrm{ren}} = \frac{1}{(\partial^2_{|P|} E_\alpha)(0)} \quad \text{où} \quad \partial_{|P|} = \frac{P}{|P|} \cdot \nabla_P$$

Energie fondamentale

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}\left(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A(0)\right)^2 + H_{\mathrm{ph}}, \quad E_\alpha(P) = \inf \sigma(H_\alpha(P))$$

Proposition

Symétrie par rapport aux rotations $\Rightarrow E_\alpha(P) = E_\alpha(|P|)$

Proposition ([Bach-Chen-Fröhlich-Sigal'07], [Chen'08], [Chen-Fröhlich-Pizzo'09], [Fröhlich-Pizzo'10])

Soit α fixé suffisamment petit. Alors $P \mapsto E_\alpha(P)$ est 2 fois dérivable sur $\{P, |P| \leq p_c\}$

Remarque

La masse renormalisée de l'électron peut être définie de la façon suivante :

$$m_{\mathrm{ren}} = \frac{1}{(\partial^2_{|P|} E_\alpha)(0)} \quad \text{où} \quad \partial_{|P|} = \frac{P}{|P|} \cdot \nabla_P$$

Energie fondamentale

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}\left(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A(0)\right)^2 + H_{\mathrm{ph}}, \quad E_\alpha(P) = \inf \sigma(H_\alpha(P))$$

Proposition

Symétrie par rapport aux rotations $\Rightarrow E_\alpha(P) = E_\alpha(|P|)$

Proposition ([Bach-Chen-Fröhlich-Sigal'07], [Chen'08], [Chen-Fröhlich-Pizzo'09], [Fröhlich-Pizzo'10])

Soit α fixé suffisamment petit. Alors $P \mapsto E_\alpha(P)$ est 2 fois dérivable sur $\{P, |P| \leq p_c\}$

Remarque

La masse renormalisée de l'électron peut être définie de la façon suivante :

$$m_{\mathrm{ren}} = \frac{1}{(\partial^2_{|P|} E_\alpha)(0)} \quad \text{où} \quad \partial_{|P|} = \frac{P}{|P|} \cdot \nabla_P$$

Existence d'états fondamentaux

Théorème ([Chen-Fröhlich'07], [Chen'08], [Chen-Fröhlich-Pizzo'09])

Soit α fixé suffisamment petit. Pour tout $|P| \leq p_c$,

$$E_\alpha(P) \text{ est une valeur propre} \Leftrightarrow \nabla E_\alpha(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$$

Pour $P \neq 0$, un état fondamental existe dans une représentation non-Fock

Résultats du même type

- [Hasler-Herbst'08] : pour α quelconque, $\nabla E_\alpha(P) \neq 0 \Rightarrow H_\alpha(P)$ n'a pas d'état fondamental
- [Amour-F-Grébert-Guillot'09] : résultats similaires pour un électron habillé interagissant avec un champ électromagnétique classique

Existence d'états fondamentaux

Théorème ([Chen-Fröhlich'07], [Chen'08], [Chen-Fröhlich-Pizzo'09])

Soit α fixé suffisamment petit. Pour tout $|P| \leq p_c$,

$$E_\alpha(P) \text{ est une valeur propre} \Leftrightarrow \nabla E_\alpha(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$$

Pour $P \neq 0$, un état fondamental existe dans une représentation non-Fock

Résultats du même type

- [Hasler-Herbst'08] : pour α quelconque, $\nabla E_\alpha(P) \neq 0 \Rightarrow H_\alpha(P)$ n'a pas d'état fondamental
- [Amour-F-Grébert-Guillot'09] : résultats similaires pour un électron habillé interagissant avec un champ électromagnétique classique

Opérateur conjugué

Régularité par rapport à un opérateur conjugué

- H opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$
- B opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ (opérateur conjugué)
- On dit que $H \in \mathrm{C}^n(B)$ si $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H), \forall \phi \in \mathcal{H}$,

$$s \mapsto e^{isB} R_z e^{-isB} \phi \text{ est de classe } \mathrm{C}^n(\mathbb{R}), \quad R_z = [H - z]^{-1}$$

- Remarque : $H \in \mathrm{C}^1(B)$ ssi $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$, $R_z D(B) \subset D(B)$, et $\forall \phi \in D(B) \cap D(H)$,

$$|(B\phi, H\phi) - (H\phi, B\phi)| \leq \mathrm{C}(\|H\phi\|^2 + \|\phi\|^2)$$

Principe d'absorption limite

Inégalité de Mourre

Soit I un intervalle ouvert borné, $\mathrm{I} \subset \sigma(H)$. Inégalité de Mourre (stricte) :

$$\mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H)[H, iB]\mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H) \geq c_0 \mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H), \quad c_0 > 0$$

Principe d'absorption limite ([Mourre'81], [Perry-Sigal-Simon'81], [Amrein-Boutet de Monvel-Georgescu'96],...)

Supposons $H \in \mathrm{C}^2(B)$ et une inégalité de Mourre stricte satisfaite. Alors

$$\sup_{\lambda \in J} \left\| \langle B \rangle^{-s} [H - \lambda - i0]^{-1} \langle B \rangle^{-s} \right\| < \infty$$

pour tout intervalle fermé $J \subset \mathrm{I}$, et $s > 1/2$

Spectre absolument continu

Si un principe d'absorption limite est satisfait sur un intervalle $J \subset \sigma(H)$, le spectre de H dans J est purement absolument continu

Principe d'absorption limite

Inégalité de Mourre

Soit I un intervalle ouvert borné, $\mathrm{I} \subset \sigma(H)$. Inégalité de Mourre (stricte) :

$$\mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H)[H, iB]\mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H) \geq c_0 \mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H), \quad c_0 > 0$$

Principe d'absorption limite ([Mourre'81], [Perry-Sigal-Simon'81], [Amrein-Boutet de Monvel-Georgescu'96],...)

Supposons $H \in \mathrm{C}^2(B)$ et une inégalité de Mourre stricte satisfaite. Alors

$$\sup_{\lambda \in J} \left\| \langle B \rangle^{-s} [H - \lambda - i0]^{-1} \langle B \rangle^{-s} \right\| < \infty$$

pour tout intervalle fermé $J \subset \mathrm{I}$, et $s > 1/2$

Spectre absolument continu

Si un principe d'absorption limite est satisfait sur un intervalle $J \subset \sigma(H)$, le spectre de H dans J est purement absolument continu

Principe d'absorption limite

Inégalité de Mourre

Soit I un intervalle ouvert borné, $\mathrm{I} \subset \sigma(H)$. Inégalité de Mourre (stricte) :

$$\mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H)[H, iB]\mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H) \geq c_0 \mathbb{1}_{\mathrm{I}}(H), \quad c_0 > 0$$

Principe d'absorption limite ([Mourre'81], [Perry-Sigal-Simon'81], [Amrein-Boutet de Monvel-Georgescu'96],. . .)

Supposons $H \in \mathrm{C}^2(B)$ et une inégalité de Mourre stricte satisfaite. Alors

$$\sup_{\lambda \in J} \left\| \langle B \rangle^{-s} [H - \lambda - i0]^{-1} \langle B \rangle^{-s} \right\| < \infty$$

pour tout intervalle fermé $J \subset \mathrm{I}$, et $s > 1/2$

Spectre absolument continu

Si un principe d'absorption limite est satisfait sur un intervalle $J \subset \sigma(H)$, le spectre de H dans J est purement absolument continu

Suffisamment “loin” de l'énergie fondamentale (1)

Opérateur conjugué : $B = \mathrm{d}\Gamma(b), \quad b = \frac{i}{2}(k \cdot \nabla_k + \nabla_k \cdot k)$

(=Générateur des dilatations dans l'espace de Fock)

Théorème ([Chen-F-Fröhlich-Sigal'09])

Il existe $\alpha_c > 0$, $\mathrm{C}_0 > 0$ t.q. pour tous $|P| \leq p_c$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $\sigma \geq \mathrm{C}_0 \alpha^{\frac{1}{2}}$,

$$\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P))[H_\alpha(P), iB]\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)) \geq \frac{\sigma}{2}\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)), \quad J_\sigma^> = E_\alpha(P) + [\sigma, 2\sigma]$$

Eléments de preuve

- $[H_{\mathrm{ph}}, iB] = H_{\mathrm{ph}}, \quad [P_{\mathrm{ph}}, iB] = P_{\mathrm{ph}}$
- $\left\|\alpha^{\frac{1}{2}} A(0)[H_{\mathrm{ph}} + 1]^{-1/2}\right\| \leq \mathrm{C}\alpha^{\frac{1}{2}}, \quad \left\|\alpha^{\frac{1}{2}}[A(0), iB][H_{\mathrm{ph}} + 1]^{-1/2}\right\| \leq \mathrm{C}\alpha^{\frac{1}{2}}$
- $\left|E_\alpha(P) - \frac{P^2}{2m_{\mathrm{el}}}\right| \leq \mathrm{C}\alpha$

Suffisamment "loin" de l'énergie fondamentale (1)

Opérateur conjugué : $B = \mathrm{d}\Gamma(b), \quad b = \frac{i}{2}(k \cdot \nabla_k + \nabla_k \cdot k)$
(=Générateur des dilatations dans l'espace de Fock)

Théorème ([Chen-F-Fröhlich-Sigal'09])

Il existe $\alpha_c > 0$, $\mathrm{C}_0 > 0$ t.q. pour tous $|P| \leq p_c$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $\sigma \geq \mathrm{C}_0 \alpha^{\frac{1}{2}}$,

$$\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P))[H_\alpha(P), iB]\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)) \geq \frac{\sigma}{2}\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)), \quad J_\sigma^> = E_\alpha(P)+[\sigma, 2\sigma]$$

Eléments de preuve

- $[H_{\mathrm{ph}}, iB] = H_{\mathrm{ph}}, \quad [P_{\mathrm{ph}}, iB] = P_{\mathrm{ph}}$
- $\left\|\alpha^{\frac{1}{2}} A(0)[H_{\mathrm{ph}} + 1]^{-1/2}\right\| \leq \mathrm{C}\alpha^{\frac{1}{2}}, \quad \left\|\alpha^{\frac{1}{2}}[A(0), iB][H_{\mathrm{ph}} + 1]^{-1/2}\right\| \leq \mathrm{C}\alpha^{\frac{1}{2}}$
- $|E_\alpha(P) - \frac{P^2}{2m_{\mathrm{el}}}| \leq \mathrm{C}\alpha$

Suffisamment "loin" de l'énergie fondamentale (2)

"Preuve"

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P))[H_\alpha(P), iB]\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)) \\
&= \mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P))[H_0(P), iB]\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)) + O(\alpha^{\frac{1}{2}}) \\
&\geq \mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P))\Big(H_0(P) - \frac{P^2}{2m_{\mathrm{el}}}\Big)\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)) + O(\alpha^{\frac{1}{2}}) \\
&= \mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P))\big(H_\alpha(P) - E_\alpha(P)\big)\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)) + O(\alpha^{\frac{1}{2}}) \\
&\geq \sigma\mathbb{1}_{J_\sigma^>}(H_\alpha(P)) - \mathrm{C}\alpha^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Corollaire

$\sigma(H_\alpha(P))$ est purement absolument continu sur $[E_\alpha(P) + \mathrm{C}_0\alpha^{\frac{1}{2}}, +\infty[$

Suffisamment "loin" de l'énergie fondamentale (2)

"Preuve"

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P))[H_\alpha(P), iB]\mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P)) \\
&= \mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P))[H_0(P), iB]\mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P)) + O(\alpha^{\frac{1}{2}}) \\
&\geq \mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P))\Big(H_0(P) - \frac{P^2}{2m_{\mathrm{el}}}\Big)\mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P)) + O(\alpha^{\frac{1}{2}}) \\
&= \mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P))\big(H_\alpha(P) - E_\alpha(P)\big)\mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P)) + O(\alpha^{\frac{1}{2}}) \\
&\geq \sigma\mathbb{1}_{J_\sigma^{\geq}}(H_\alpha(P)) - \mathrm{C}\alpha^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Corollaire

$\sigma(H_\alpha(P))$ est purement absolument continu sur $[E_\alpha(P) + \mathrm{C}_0\alpha^{\frac{1}{2}}, +\infty[$

"Près" de l'énergie fondamentale : introduction d'une troncature infrarouge

- Hamiltonien avec troncature infrarouge

$$H_{\alpha,\sigma}(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}\left(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A_\sigma(0)\right)^2 + H_{\mathrm{ph}} \quad \text{où}$$

$$A_\sigma(0) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2} \frac{\kappa^\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{|k|\geq\sigma}(k) \varepsilon_\lambda(k)\left(a^*(K) + a(K)\right) dK$$

- Photons d'énergie $\geq \sigma$: $\mathcal{F}_\sigma = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} S_n \mathrm{L}^2(\{K, |k| \geq \sigma\}^n)$
- Hamiltonien restreint aux photons d'énergie $\geq \sigma$: $K_{\alpha,\sigma}(P) = H_{\alpha,\sigma}(P)|_{\mathcal{F}_\sigma}$

Proposition

Il existe $\alpha_c > 0$ et $\rho > 0$ t.q. pour tous $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$ et $0 < \sigma \leq \Lambda$,

$$\sigma(K_{\alpha,\sigma}(P)) \subset \{E_{\alpha,\sigma}(P)\} \cup [E_{\alpha,\sigma}(P) + \rho\sigma, +\infty[$$

De plus $E_{\alpha,\sigma}(P) = \inf \sigma(H_{\alpha,\sigma}(P))$ est une valeur propre simple à la fois de $K_{\alpha,\sigma}(P)$ et de $H_{\alpha,\sigma}(P)$

"Près" de l'énergie fondamentale : introduction d'une troncature infrarouge

- Hamiltonien avec troncature infrarouge

$$H_{\alpha,\sigma}(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}\left(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A_\sigma(0)\right)^2 + H_{\mathrm{ph}} \quad \text{où}$$

$$A_\sigma(0) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2} \frac{\kappa^\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{|k|\geq\sigma}(k)\varepsilon_\lambda(k)\left(a^*(K) + a(K)\right) dK$$

- Photons d'énergie $\geq \sigma$: $\mathcal{F}_\sigma = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} S_n \mathrm{L}^2(\{K, |k| \geq \sigma\}^n)$
- Hamiltonien restreint aux photons d'énergie $\geq \sigma$: $K_{\alpha,\sigma}(P) = H_{\alpha,\sigma}(P)|_{\mathcal{F}_\sigma}$

Proposition

Il existe $\alpha_c > 0$ et $\rho > 0$ t.q. pour tous $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$ et $0 < \sigma \leq \Lambda$,

$$\sigma(K_{\alpha,\sigma}(P)) \subset \{E_{\alpha,\sigma}(P)\} \cup [E_{\alpha,\sigma}(P) + \rho\sigma, +\infty[$$

De plus $E_{\alpha,\sigma}(P) = \inf \sigma(H_{\alpha,\sigma}(P))$ est une valeur propre simple à la fois de $K_{\alpha,\sigma}(P)$ et de $H_{\alpha,\sigma}(P)$

"Près" de l'énergie fondamentale : introduction d'une troncature infrarouge

- Hamiltonien avec troncature infrarouge

$$H_{\alpha,\sigma}(P) = \frac{1}{2m_{\mathrm{el}}}\left(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A_\sigma(0)\right)^2 + H_{\mathrm{ph}} \quad \text{où}$$

$$A_\sigma(0) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2} \frac{\kappa^\Lambda(k)}{|k|^{\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{|k|\geq\sigma}(k)\varepsilon_\lambda(k)\left(a^*(K) + a(K)\right) dK$$

- Photons d'énergie $\geq \sigma$: $\mathcal{F}_\sigma = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} S_n \mathrm{L}^2(\{K, |k| \geq \sigma\}^n)$
- Hamiltonien restreint aux photons d'énergie $\geq \sigma$: $K_{\alpha,\sigma}(P) = H_{\alpha,\sigma}(P)|_{\mathcal{F}_\sigma}$

Proposition

Il existe $\alpha_c > 0$ et $\rho > 0$ t.q. pour tous $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$ et $0 < \sigma \leq \Lambda$,

$$\sigma(K_{\alpha,\sigma}(P)) \subset \{E_{\alpha,\sigma}(P)\} \cup [E_{\alpha,\sigma}(P) + \rho\sigma, +\infty[$$

De plus $E_{\alpha,\sigma}(P) = \inf \sigma(H_{\alpha,\sigma}(P))$ est une valeur propre simple à la fois de $K_{\alpha,\sigma}(P)$ et de $H_{\alpha,\sigma}(P)$

Hamiltonien avec troncature infrarouge

- Photons d'énergie $\leq \sigma$: $\mathcal{F}^\sigma = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n\geq 1} S_n \mathrm{L}^2(\{K, |k| \leq \sigma\}^n)$
- Isomorphisme unitaire $\mathcal{U}_\sigma : \mathcal{F}_s \to \mathcal{F}_\sigma \otimes \mathcal{F}^\sigma$:

$$\mathcal{U}_\sigma H_{\alpha,\sigma}(P) \mathcal{U}_\sigma^* = K_{\alpha,\sigma}(P) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \Big(\frac{1}{2m_{\mathrm{el}}} P_{\mathrm{ph}}^2 + H_{\mathrm{ph}}\Big) - \nabla K_{\alpha,\sigma}(P) \otimes P_{\mathrm{ph}}$$

$$\text{où} \quad \nabla K_{\alpha,\sigma}(P) = \frac{1}{m_{\mathrm{el}}} \big(P - P_{\mathrm{ph}} - \alpha^{\frac{1}{2}} A_\sigma(0)\big)$$

Utilisation de l'application Feshbach-Schur

Application Feshbach-Schur (lisse)

- H, T opérateurs fermés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $D(H) = D(T)$, $W = H - T$
- $\chi, \bar{\chi}$ opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ t.q. $\chi^2 + \bar{\chi}^2 = \mathbb{1}$, $[\chi, \bar{\chi}] = [\chi, T] = [\bar{\chi}, T] = 0$, et χW, $W\chi$ sont bornés
- $T - \lambda$ et $T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}$ sont inversibles (en tant qu'opérateurs de $D(T) \cap \mathrm{Ran}\bar{\chi}$ dans $\mathrm{Ran}\bar{\chi}$)
- Application Feshbach-Schur :

$$F_\chi(H - \lambda) = T - \lambda + \chi W \chi - \chi W \bar{\chi}[T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi} W \chi$$

Proposition ([Bach-Chen-Fröhlich-Sigal'03], [Griesemer-Hasler'08])

Sous les hypothèses précédentes, $\lambda \in \sigma(H) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(F_\chi(H - \lambda))$, et sinon

$$[H - \lambda]^{-1} = Q_\chi(H - \lambda) F_\chi(H - \lambda)^{-1} Q_\chi^\#(H - \lambda) + \bar{\chi}[T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}$$

où $Q_\chi(H - \lambda) = \chi - \bar{\chi}[T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi} W \chi$

$$Q_\chi^\#(H - \lambda) = \chi - \chi W \bar{\chi}[T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}$$

Utilisation de l'application Feshbach-Schur

Application Feshbach-Schur (lisse)

- H, T opérateurs fermés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $D(H) = D(T)$, $W = H - T$
- $\chi, \bar{\chi}$ opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ t.q. $\chi^2 + \bar{\chi}^2 = \mathbb{1}$, $[\chi, \bar{\chi}] = [\chi, T] = [\bar{\chi}, T] = 0$, et χW, $W\chi$ sont bornés
- $T - \lambda$ et $T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}$ sont inversibles (en tant qu'opérateurs de $D(T) \cap \mathrm{Ran}\bar{\chi}$ dans $\mathrm{Ran}\bar{\chi}$)
- Application Feshbach-Schur :

$$F_\chi(H - \lambda) = T - \lambda + \chi W \chi - \chi W \bar{\chi} [T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi} W \chi$$

Proposition ([Bach-Chen-Fröhlich-Sigal'03], [Griesemer-Hasler'08])

Sous les hypothèses précédentes, $\lambda \in \sigma(H) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(F_\chi(H - \lambda))$, et sinon

$$[H - \lambda]^{-1} = Q_\chi(H - \lambda) F_\chi(H - \lambda)^{-1} Q_\chi^\#(H - \lambda) + \bar{\chi}[T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}$$

où $Q_\chi(H - \lambda) = \chi - \bar{\chi}[T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi} W \chi$

$$Q_\chi^\#(H - \lambda) = \chi - \chi W \bar{\chi} [T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}$$

Application Feshbach-Schur et principe d'absorption limite

Proposition ([Fröhlich-Griesemer-Sigal'09])

Soit J un intervalle fermé. Supposons que B est un opérateur auto-adjoint satisfaisant

$$[G_\lambda, B] \quad \text{est borné}$$

où G_λ est l'un des opérateurs χ, $\bar{\chi}$, χW, $W\chi$ ou $\bar{\chi}[T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi}$. Alors :

$$\sup_{\lambda \in J} \left\| \langle B \rangle^{-s} [F_\chi(H - \lambda) - i0]^{-1} \langle B \rangle^{-s} \right\| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{\lambda \in J} \left\| \langle B \rangle^{-s} [H - \lambda - i0]^{-1} \langle B \rangle^{-s} \right\| < \infty$$

$\Rightarrow$ Le spectre de H dans J est purement absolument continu (pour $J \subset \sigma(H)$)

Application Feshbach-Schur pour le modèle considéré

- Hamiltonien avec troncature infrarouge :

$$\mathcal{U}_\sigma H_{\alpha,\sigma}(P)\mathcal{U}_\sigma^* = K_{\alpha,\sigma}(P) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \left(\frac{1}{2m_{\mathrm{el}}} P_{\mathrm{ph}}^2 + H_{\mathrm{ph}}\right) - \nabla K_{\alpha,\sigma}(P) \otimes P_{\mathrm{ph}}$$

- Soit $\Pi = \mathbb{1}_{\{E_{\alpha,\sigma}(P)\}}(K_{\alpha,\sigma}(P))$. On définit :

$$\chi = \Pi \otimes \kappa^{\rho\sigma}(H_{\mathrm{ph}})$$

$$H = \mathcal{U}_\sigma H_\alpha(P)\mathcal{U}_\sigma^*$$

$$T = K_{\alpha,\sigma}(P) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \left(\frac{1}{2m_{\mathrm{el}}} P_{\mathrm{ph}}^2 + H_{\mathrm{ph}}\right) - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P) \otimes P_{\mathrm{ph}}$$

$$W = -\alpha^{1/2} \nabla K_{\alpha,\sigma}(P) \otimes A^\sigma(0) + \alpha^{1/2} \mathbb{1} \otimes \left(A^\sigma(0) \cdot P_{\mathrm{ph}}\right) + \frac{\alpha}{2} \mathbb{1} \otimes (A^\sigma(0))^2 - (\nabla K_{\alpha,\sigma}(P) - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P)) \otimes P_{\mathrm{ph}},$$

$$B^\sigma = \mathbb{1} \otimes \mathrm{d}\Gamma(b^\sigma), \quad b^\sigma = \frac{i}{2} \kappa^\sigma(|k|)(k \cdot \nabla_k + \nabla_k \cdot k)\kappa^\sigma(|k|)$$

Application Feshbach-Schur pour le modèle considéré

- Hamiltonien avec troncature infrarouge :

$$\mathcal{U}_\sigma H_{\alpha,\sigma}(P)\mathcal{U}_\sigma^* = K_{\alpha,\sigma}(P)\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes(\frac{1}{2m_{\rm el}}P_{\rm ph}^2 + H_{\rm ph}) - \nabla K_{\alpha,\sigma}(P)\otimes P_{\rm ph}$$

- Soit $\Pi = \mathbb{1}_{\{E_{\alpha,\sigma}(P)\}}(K_{\alpha,\sigma}(P))$. On définit :

$$\chi = \Pi \otimes \kappa^{\rho\sigma}(H_{\rm ph})$$

$$H = \mathcal{U}_\sigma H_\alpha(P)\mathcal{U}_\sigma^*$$

$$T = K_{\alpha,\sigma}(P)\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes(\frac{1}{2m_{\rm el}}P_{\rm ph}^2 + H_{\rm ph}) - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P)\otimes P_{\rm ph}$$

$$W = -\alpha^{1/2}\nabla K_{\alpha,\sigma}(P)\otimes A^\sigma(0) + \alpha^{1/2}\mathbb{1}\otimes\left(A^\sigma(0)\cdot P_{\rm ph}\right) + \frac{\alpha}{2}\mathbb{1}\otimes(A^\sigma(0))^2 - (\nabla K_{\alpha,\sigma}(P) - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P))\otimes P_{\rm ph}),$$

$$B^\sigma = \mathbb{1}\otimes \mathrm{d}\Gamma(b^\sigma), \quad b^\sigma = \frac{i}{2}\kappa^\sigma(|k|)(k\cdot\nabla_k + \nabla_k\cdot k)\kappa^\sigma(|k|)$$

Estimée de Mourre pour l'opérateur de Feshbach-Schur (1)

Théorème ([Chen-F-Fröhlich-Sigal'09])

Soit

$$F(\lambda) = F_\chi(H-\lambda)|_{\mathrm{Ran}(\Pi)\otimes\mathbb{1}}$$

Pour tout $C_0' > 0$, il existe $\alpha_c > 0$ t.q. pour tous $|P| \leq p_c$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $0 < \sigma \leq C_0'\alpha^{\frac{1}{2}}$ et $\lambda \in J_\sigma^< = E_\alpha(P) + [\beta_1\sigma, \beta_2\sigma]$,

$$\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda))[F(\lambda), iB^\sigma]\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda)) \geq c_0\sigma\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda))$$

avec $c_0 > 0$ et $\Delta_\sigma = [-\beta_3\sigma, \beta_3\sigma]$

Corollaire ([Chen-F-Fröhlich-Sigal'09])

Avec les hypothèses et notations précédentes, le spectre de $H_\alpha(P)$ dans $J_\sigma^<$ est purement absolument continu

Estimée de Mourre pour l'opérateur de Feshbach-Schur (1)

Théorème ([Chen-F-Fröhlich-Sigal'09])

Soit

$$F(\lambda) = F_\chi(H-\lambda)|_{\mathrm{Ran}(\Pi)\otimes\mathbb{1}}$$

Pour tout $C_0' > 0$, il existe $\alpha_c > 0$ t.q. pour tous $|P| \leq p_c$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $0 < \sigma \leq C_0'\alpha^{\frac{1}{2}}$ et $\lambda \in J_\sigma^< = E_\alpha(P) + [\beta_1\sigma, \beta_2\sigma]$,

$$\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda))[F(\lambda), iB^\sigma]\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda)) \geq c_0\sigma\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda))$$

avec $c_0 > 0$ et $\Delta_\sigma = [-\beta_3\sigma, \beta_3\sigma]$

Corollaire ([Chen-F-Fröhlich-Sigal'09])

Avec les hypothèses et notations précédentes, le spectre de $H_\alpha(P)$ dans $J_\sigma^<$ est purement absolument continu

Estimée de Mourre pour l'opérateur de Feshbach-Schur (2)

$$\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda))[F(\lambda), iB^\sigma]\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda)) \geq \mathrm{c}_0\sigma\mathbb{1}_{\Delta_\sigma}(F(\lambda))$$

Eléments de preuve

- On écrit $F(\lambda) = F_0(\lambda) + W_1(\lambda) + W_2(\lambda)$ avec

$$F_0(\lambda) = E_{\alpha,\sigma}(P) - \lambda + \mathbb{1} \otimes (\frac{1}{2}P_{\mathrm{ph}}^2 + H_{\mathrm{ph}}) - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P) \otimes P_{\mathrm{ph}}$$

$$W_1(\lambda) = \chi W \chi$$

$$W_2(\lambda) = -\chi W \bar{\chi}[T - \lambda + \bar{\chi} W \bar{\chi}]^{-1} \bar{\chi} W \chi$$

- Pour $j \in \{1, 2\}$, $\|W_j(\lambda)\| = O(\alpha^{\frac{1}{2}}\sigma)$ et $\|[W_j(\lambda), iB^\sigma]\| = O(\alpha^{\frac{1}{2}}\sigma)$ (utilise le fait que $(\nabla K_{\alpha,\sigma}(P) - \nabla E_{\alpha,\sigma}(P))\Pi$ est "petit" : formule de Feynman-Hellman + argument dû à [Amour-F-Grébert-Guillot'09])
- $\|f_{\Delta_\sigma}(F(\lambda)) - f_{\Delta_\sigma}(F_0(\lambda))\| = O(\alpha^{\frac{1}{2}})$ (Point précédent + calcul fonctionnel)
- $f_{\Delta_\sigma}(F_0(\lambda))[F_0(\lambda), iB^\sigma]f_{\Delta_\sigma}(F_0(\lambda)) \geq \mathrm{c}_0'\sigma f_{\Delta_\sigma}(F_0(\lambda))^2$

Conclusion (1)

Spectre de $H_\alpha(P)$

- Si $P = 0$:

$$\sigma_{\rm pp}(H_\alpha(0)) = \{E_\alpha(0)\}, \quad \sigma_{\rm ac}(H_\alpha(0)) = [E_\alpha(0), +\infty[, \quad \sigma_{\rm sc}(H_\alpha(0)) = \emptyset$$

- Si $P \neq 0$ (et $|P| \leq p_c < m_{\rm el}$) :

$$\sigma_{\rm pp}(H_\alpha(P)) = \emptyset, \quad \sigma_{\rm ac}(H_\alpha(P)) = [E_\alpha(P), +\infty[, \quad \sigma_{\rm sc}(H_\alpha(P)) = \emptyset$$

Principe d'absorption limite

Il existe $\alpha_c > 0$ t.q. pour tout $|P| \leq p_c$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $s > 1/2$, et pour tout $J \subset (E_\alpha(P), \infty)$,

$$\sup_{\mathrm{Re}(z)\in J, \mathrm{Im}(z)\neq 0} \left\| (\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k \rangle) + 1)^{-s} \left[H_\alpha(P) - z \right]^{-1} (\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k \rangle) + 1)^{-s} \right\| \leq \mathrm{C},$$

où C est une constante dépendant de J et s. De plus l'application

$$J \ni \lambda \mapsto (\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k \rangle) + 1)^{-s} \left[H_\alpha(P) - \lambda \pm \mathrm{i}0 \right]^{-1} (\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k \rangle) + 1)^{-s} \in B(\mathcal{H})$$

est Hölder continue d'ordre $s - 1/2$

Conclusion (1)

Spectre de $H_\alpha(P)$

- Si $P = 0$:

$$\sigma_{\mathrm{pp}}(H_\alpha(0)) = \{E_\alpha(0)\}, \quad \sigma_{\mathrm{ac}}(H_\alpha(0)) = [E_\alpha(0), +\infty[, \quad \sigma_{\mathrm{sc}}(H_\alpha(0)) = \emptyset$$

- Si $P \neq 0$ (et $|P| \leq p_c < m_{\mathrm{el}}$) :

$$\sigma_{\mathrm{pp}}(H_\alpha(P)) = \emptyset, \quad \sigma_{\mathrm{ac}}(H_\alpha(P)) = [E_\alpha(P), +\infty[, \quad \sigma_{\mathrm{sc}}(H_\alpha(P)) = \emptyset$$

Principe d'absorption limite

Il existe $\alpha_c > 0$ t.q. pour tout $|P| \leq p_c$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$, $s > 1/2$, et pour tout $J \subset (E_\alpha(P), \infty)$,

$$\sup_{\mathrm{Re}(z) \in J, \mathrm{Im}(z) \neq 0} \left\| (\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k \rangle) + 1)^{-s} \left[H_\alpha(P) - z \right]^{-1} (\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k \rangle) + 1)^{-s} \right\| \leq \mathrm{C},$$

où C est une constante dépendant de J et s. De plus l'application

$$J \ni \lambda \mapsto (\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k \rangle) + 1)^{-s} \left[H_\alpha(P) - \lambda \pm \mathrm{i}0 \right]^{-1} (\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k \rangle) + 1)^{-s} \in B(\mathcal{H})$$

est Hölder continue d'ordre $s - 1/2$

Conclusion (2)

Estimations de propagation

Soient $\mathcal{S} := \{P \in \mathbb{R}^3, |P| < p_c\}$ et $\Phi = \int_{\mathcal{S}}^{\oplus} \Phi(P) \mathrm{d}P$. On suppose qu'il existe $s > 1/2$ t.q. $\|(\mathrm{d}\Gamma(\langle i\nabla_k\rangle) + 1)^s \Phi(P)\| < \infty$, pour tout $P \in \mathcal{S}$. Soit

$$f \in C_0^\infty(\{(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}, \lambda > E_\alpha(P)\})$$

Alors

$$\|(\mathrm{d}\Gamma(\langle \mathrm{i}\nabla_k - x_{\mathrm{el}}\rangle) + 1)^{-s} e^{-itH_\alpha} f(H_\alpha, \cdot) U^* \Phi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}P; \mathcal{F}_s)} \leq \frac{\mathrm{C}}{t^{(s - \frac{1}{2})}}$$

Quelques références

- L. Amour, J. Faupin, B. Grébert and J.-C. Guillot, On the infrared problem for the dressed non-relativistic electron in a magnetic field, Contemp. Math., 500, 1–24, (2009)
- V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich and I.M. Sigal, The renormalized electron mass in non-relativisitc QED, J. Funct. Anal., 243, 426–535, (2007)
- T. Chen, Infrared renormalization in non-relativistic QED and scaling criticality, J. Funct. Anal., 254, 2555–2647, (2008)
- T. Chen, J. Fröhlich and A. Pizzo, Infraparticle scattering states in non-relativistic QED, II. Mass-shell properties, J. Math. Phys., 50, 012103, (2009)
- T. Chen, J. Faupin, J. Fröhlich and I.M. Sigal, Local decay in non-relativistic QED, Preprint
- J. Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A, 19, 1–103, (1973)
- J. Fröhlich, M. Griesemer and I.M. Sigal, Spectral theory for the standard model of non-relativistic QED, Comm. Math. Phys., 283, 613–646, (2008)
- J. Fröhlich, M. Griesemer and I.M. Sigal, Spectral renormalization group and local decay in the standard model of non-relativistic QED, Preprint
- J. Fröhlich and A. Pizzo, Renormalized electron mass in non-relativistic QED, Comm. Math. Phys., 294, 439–470, (2010)
- D. Hasler and I. Herbst, Absence of Ground States for a Class of Translation Invariant Models of Non-relativistic QED, Comm. Math. Phys., 279, (2008), 769–787
- A. Pizzo, One-particle (improper) states in Nelson's massless model, Ann. Henri Poincaré, 4, 439–486, (2003)