FIBRÉS VECTORIELS STABLES PAR RAPPORT À UNE POLARISATION MOBILE

MATEI TOMA

Résumé. Nous revoyons les définitions classiques de la stabilité des fibrés vectoriels et nous étudions leur extension au cas des polarisations données par des courbes mobiles.

Soit X une variété complexe projective lisse. Un fibré vectoriel complexe topologique sur X peut admettre plusieures structures holomorphes. On ne peut pas en général organiser l'ensemble de ces structures en un espace de modules. On se restreint alors souvent au sous-ensemble de structures *stables* (ou *semi-stables*) par rapport à une *polarisation* fixée sur X. D'autre part la stabilité de certains fibrés, notamment du fibré tangent T_X, peut avoir des conséquences importantes sur les propriétés géométriques de la variété X. Ce sont là les raisons principales pour l'étude de cette notion.

Pour les propriétés des fibrés stables et pour la construction des espaces de modules nous renvoyons le lecteur aux monographies [HL], [Kob], [LT], ainsi qu'à l'article [La] pour une exposition des développements plus récents. Dans cette note nous revoyons les définitions classiques de la stabilité des fibrés vectoriels et nous étudions leur extension au cas des *polarisations mobiles.*

1. Le cas des courbes

Nous considérons dans ce paragraphe le cas où $\dim X = 1$.

Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X. Ses invariants topologiques sont son rang $\mathrm{rang}\, E$ et son degré $\deg E := \int_X c_1(E)$, où $c_1(E)$ est la classe de Chern de E. Le fibré E s'appelle *stable* si pour tout sous-fibré holomorphe F tel que $0 < \mathrm{rang}\, F < \mathrm{rang}\, E$ on a

$$\frac{\deg F}{\mathrm{rang}\, F} < \frac{\deg E}{\mathrm{rang}\, E}.$$

Le quotient $\mu(E) = \frac{\deg E}{\mathrm{rang}\, E}$ s'appelle la *pente* de E. Si on remplace l'inégalité stricte des pentes ci-dessus par une inégalité faible on obtient la définition de la *semi-stabilité*. Le fibré E s'appelle *polystable* s'il admet une décomposition $E = E_1 \oplus ... \oplus E_s$ avec E_1, ..., E_s fibrés stables et $\mu(E_1) = ... = \mu(E_s) = \mu(E)$. Dans ce cas E sera semi-stable.

Notons qu'il existe des espaces de modules quasi-projectifs pour les fibrés stables de rang et de degré fixés. Ces espaces se compactifient en ajoutant à la frontière des classes de *S-équivalence* de fibrés semi-stables.

Date: 10 décembre 2008.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 32G13, 14D20.

Key words and phrases. Géométrie Complexe, Fibrés Vectoriels Stables, Courbes Mobiles.

En [NaSe65] M. S. Narasimhan et C. S. Seshadri démontrent le résultat suivant qui traduit la stabilité d'un fibré en termes de géométrie differentielle.

Théorème 1.1. Un fibré vectoriel holomorphe E sur X est polystable si et seulement s'il admet une métrique hermitienne h, telle que la courbure de sa connexion hermitienne soit de la forme $\Omega = \alpha \mathrm{Id}_E \in \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{E}ndE)$, où α est une $(1,1)$-forme sur X.

2. Dimension supérieure

Soit maintenant $n = \dim X > 1$ et E un fibré vectoriel holomorphe sur X. Pour la définition de la stabilité dans ce cas on peut impliquer d'autre invariants topologiques du fibré E comme $c_2(E)$, $c_3(E)$, ... On va se contenter dans cette note de parler que de la stabilité au sens de Mumford et Takemoto, qui ne prend en compte que le rang et la première classe de Chern de E. Ensuite pour définir le degré de E il faut avoir fixé une *polarisation* de X. On choisit d'habitude un diviseur très ample H de X et on définit le *degré et la pente de E par rapport à H* par

$$\deg_H E := c_1(E)H^{n-1}, \quad \mu_H(E) := \frac{\deg_H E}{\operatorname{rang} E}.$$

Ces définitions s'étendent immédiatement aux faisceaux cohérents sur X. On dira que E est *stable* par rapport à H si pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}$ de E tel que $0 < \operatorname{rang} \mathcal{F} < \operatorname{rang} E$ on a

$$\mu_H(\mathcal{F}) < \mu_H(E).$$

La semi-stabilité et la polystabilité sont définies par analogie au cas des courbes.

Soit m un entier strictement positif. Si C désigne une courbe lisse intersection complète de diviseurs dans $|mH|$, alors $\deg_H E = \deg E|_C$ et on a le résultat important suivant dû à V.B. Mehta et A. Ramanathan, [MeRa84].

Théorème 2.2. Un fibré vectoriel holomorphe E sur X est stable par rapport à H si et seulement si $E|_C$ reste stable sur C, où C est une courbe intersection complète générale de diviseurs de $|mH|$ et $m >> 0$.

Notons encore qu'il existe des espaces de modules quasi-projectifs de fibrés stables de rang et classes de Chern fixés.

Pour pouvoir ennoncer la généralisation du théorème de Narasimhan et Seshadri en dimension supérieure à 1 on a besoin d'une définition supplémentaire. Soit ω la forme de Kähler d'une métrique hermitienne sur X et h une métrique hermitienne sur E. On dit que h est une *métrique d'Hermite-Einstein* sur E par rapport à ω si la forme de courbure $\Omega \in \mathcal{A}^{1,1}(\mathcal{E}ndE)$ de sa connexion hermitienne satisfait à la condition :

$$\Omega \wedge \omega^{n-1} = c\omega^n \mathrm{Id}_E,$$

pour une constante réelle c convenable.

Soit maintenant ω la forme de Kähler associée à la polarisation H sur X. On a alors le théorème suivant dû à S.K. Donaldson, [Do85], et K. Uhlenbeck et S.T. Yau, [UYau85].

Théorème 2.3. Un fibré vectoriel holomorphe sur X est polystable par rapport à H si et seulement s'il admet une métrique d'Hermite-Einstein par rapport à ω.

3. Polarisations mobiles

On peut remplacer dans la définition du degré d'un fibré vectoriel le produit H^{n-1} par la classe de cohomologie d'une courbe quelconque C sur X en posant simplement

$$\deg_C E := c_1(E)[C].$$

Dans ce cas on dira que le degré a été considéré par rapport à la "polarisation" $[C]$. Pour que les propriétés usuelles des fibrés stables restent vraies dans ce cadre il faut imposer des restrictions à la courbe C. Dans [CaPe] F. Campana et Th. Peternell proposent des *polarisations mobiles* : une courbe réduite et irréductible C sur X s'appelle *courbe mobile* si C est un membre d'une famille analytique de courbes qui recouvre X.

D'autre part on a une notion de degré par rapport à une métrique hermitienne fixée sur X. D'après un résultat de P. Gauduchon, toute métrique hermitienne admet un représentant dans sa classe conforme dont la forme de Kähler associée ω a la propriété $dd^c\omega = 0$, [Gau84]. Ces métriques s'appellent métriques *standard* ou *de Gauduchon*. Soit alors ω la forme de Kähler d'une métrique de Gauduchon, h une métrique hermitienne sur un fibré vectoriel holomorphe E et $c_1(E,h)$ la première forme de Chern. On pose

$$\deg_\omega E = \int_X c_1(E,h) \wedge \omega^{n-1}.$$

Ce nombre est indépendant du choix de la métrique h puisque la forme de Chern $c_1(E,h)$ n'en dépend que modulo une forme dd^c-exacte.

Dans ce paragraphe on examine le lien entre ces deux généralisations de la notion de degré sur une variété projective X. Nous commençons du coté des courbes mobiles.

Le cône convexe $\overline{ME(X)}$ dans $N_1(X) := (H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X) \cap H^{2n-2}(X,\mathbb{Z})/\mathrm{Tors}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par les courbes mobiles a été étudié par S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun et Th. Peternell dans [BDPP]. Ils démontrent que les cônes suivants dans $N_1(X)$ coïncident :

(1) le cône $\overline{ME(X)}$ des courbes mobiles,
(2) le cône $\mathcal{M}_{NS} := \mathcal{M} \cap N_1$,
où $\mathcal{M} \subset H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$ est l'adhérence du cône convexe engendré par les classes de cohomologie de courants de la forme $\nu_*(\tilde\omega_1 \wedge ... \wedge \tilde\omega_{n-1})$ pour des formes de Kähler $\tilde\omega_1$, ..., $\tilde\omega_{n-1}$ sur une modification $\nu : \tilde X \to X$ de X,
(3) le cône fermé $\overline{SME(X)}$ des courbes fortement mobiles,
où $SME(X)$ est le cône convexe engendré par les courbes $C = \nu_*(\tilde A_1 \cap ... \cap \tilde A_{n-1})$ qui apparaissent comme des images d'intersections complètes de diviseurs amples $\tilde A_1$, ..., $\tilde A_{n-1}$ sur des modifications $\nu : \tilde X \to X$,
(4) le cône fermé $\overline{ME_{nef}(X)}$ des courbes à fibré normal nef,
(5) le cône dual $(\mathcal{E}_{NS})^\vee$ du cône $\mathcal{E}_{NS}$ des diviseurs pseudo-effectifs sur X.

Notation : On denote par $\mathcal{D}'^{p,q}$ l'espace de courants de bidegré (p,q) (et bidimension $(n-p, n-q)$) sur X. Soit

$$V_{\mathrm{d}} = V_{\mathrm{d}}(X) := \{T \in \mathcal{D}'^{1,1}_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{d}T = 0\}/\mathrm{dd}^c\mathcal{D}'^{0,0}_{\mathbb{R}},$$

$$V_{\mathrm{dd}^c} = V_{\mathrm{dd}^c}(X) := \{T \in \mathcal{D}'^{1,1}_{\mathbb{R}} \mid \mathrm{dd}^cT = 0\}/\{\bar\partial S + \partial \bar S \mid S \in \mathcal{D}'^{1,0}\},$$

V_{d}^{+}, $V_{\mathrm{dd}^c}^{+}$ les cônes engendrés par les courants positifs dans V_{d} et V_{dd^c} respectivement et $V_{\mathrm{d},NS}^{+}$, $V_{\mathrm{dd}^c,NS}^{+}$ leurs intersections avec $NS_{\mathbb{R}}(X) := (H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{Z})/\mathrm{Tors}\,) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Démontrons d'abord le

Lemme 3.4. L'application naturelle $j : V_{\mathrm{d}} \to V_{\mathrm{dd}^c}$ induit une bijection des cônes positifs

$$V_{\mathrm{d},NS}^{+} \to V_{\mathrm{dd}^c,NS}^{+}$$

Démonstration. On sait que dans le cas des variétés kählériennes lisses, l'application j, qui associe à la classe $\{T\}_{\mathrm{d}} \in V_{\mathrm{d}}$ d'un courant d-fermé de bidegré $(1,1)$ sa classe $\{T\}_{\mathrm{dd}^c} \in V_{\mathrm{dd}^c}$, est bien-définie et bijective.

L'inclusion $j(V_{\mathrm{d}}^{+}) \subset V_{\mathrm{dd}^c}^{+}$ étant évidente, considérons un courant T positif, dd^c-fermé avec $\{T\}_{\mathrm{dd}^c} \in V_{\mathrm{dd}^c,NS}$. Soit $\eta := j^{-1}(\{T\}_{\mathrm{dd}^c}) \in V_{\mathrm{d}}$. Nous montrerons que $\eta \in V_{\mathrm{d}}^{+}$.

D'après le théorème principal de [BDPP] (Théorème 2.2), il suffit de vérifier que pour toute modification $\nu : \tilde{X} \to X$ et formes de Kähler $\tilde{\omega}_1$, ...,$\tilde{\omega}_{n-1}$ sur $\tilde{X}$ on a

$$\eta\nu_*([\tilde{\omega}_1 \wedge ... \wedge \tilde{\omega}_{n-1}]) \geq 0.$$

Or,

$$\eta\nu_*([\tilde{\omega}_1 \wedge ... \wedge \tilde{\omega}_{n-1}]) = \nu^*(\eta)[\tilde{\omega}_1 \wedge ... \wedge \tilde{\omega}_{n-1}] = \nu^*(\{T\}_{\mathrm{dd}^c})[\tilde{\omega}_1 \wedge ... \wedge \tilde{\omega}_{n-1}]$$

et d'après le Théorème 3 de [AlBa95] $\nu^*(\{T\}_{\mathrm{dd}^c}) \in V_{\mathrm{dd}^c}^{+}(\tilde{X})$, d'où l'inégalité désirée. □

Une métrique hermitienne sur X s'appelle *métrique semi-kählérienne* si sa forme de Kähler ω vérifie la condition $\mathrm{d}(\omega^{n-1}) = 0$.

Proposition 3.5. Pour toute classe α à l'intérieur du cône mobile $\overline{ME(X)}$ il existe une métrique semi-kählérienne avec forme de Kähler associée ω, telle que

$$\deg_{\alpha} E = \deg_{\omega} E$$

pour tout fibré vectoriel E sur X.

En particulier, on peut munir tout fibré vectoriel stable par rapport à α d'une métrique d'Hermite-Einstein par rapport à ω.

Démonstration. Soit α à l'intérieur du cône mobile. On denote par $\mathcal{D}'^{1,1}_{+}$ le cône des courants positifs dans l'espace $\mathcal{D}'^{1,1}$ des courants de bidegré $(1,1)$ sur X. On fixe une forme de Kähler σ et on pose $\mathcal{D}'^{1,1}_{+,\sigma} := \{T \in \mathcal{D}'^{1,1}_{+} \mid \int_X T \wedge \sigma^{n-1} = 1\}$. Cet ensemble est compact pour la topologie faible sur $\mathcal{D}'^{1,1}$, v. [D] III.1.23. Soient $\beta_1, ..., \beta_k \in H_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X)$ tels que $V_{\mathrm{dd}^c,NS} = \{t \in V_{\mathrm{dd}^c} \mid t\beta_1 = 0, ..., t\beta_k = 0\}$ et posons $W := \{T \in \mathcal{D}'^{1,1} \mid \mathrm{dd}^c T = 0,\ \{T\}_{\mathrm{dd}^c}\alpha = 0,\ \{T\}_{\mathrm{dd}^c}\beta_1 = 0, ..., \{T\}_{\mathrm{dd}^c}\beta_k = 0\}$. Remarquons que W et $\mathcal{D}'^{1,1}_{+,\sigma}$ sont disjoints. En effet, si $T \in \mathcal{D}'^{1,1}_{+,\sigma}$ est dd^c-fermé et $\{T\} \in V_{\mathrm{dd}^c,NS}^{+}$, alors d'après le Lemme il existe un courant positif d-fermé $S \in \mathcal{D}'^{1,1}_{+}$ tel que $\{T\}_{\mathrm{dd}^c} = j(\{S\}_{\mathrm{d}})$ et en particulier

$$\{T\}_{\mathrm{dd}^c}\alpha = \{S\}_{\mathrm{d}}\alpha > 0.$$

Le théorème de Hahn-Banach entraîne alors l'existence d'une fonctionelle sur $\mathcal{D}'^{1,1}$, qui s'annule sur W et reste strictement positive sur $\mathcal{D}'^{1,1}_{+,\sigma}$. Cette fonctionnelle est donnée donc par une $(n-1,n-1)$-forme réelle u sur X. Cette forme est strictement positive sur X puisque la fonctionnelle l'est sur $\mathcal{D}'^{1,1}_{+,\sigma}$. L'annulation sur W implique

que u est aussi d-fermée. Vues comme fonctionnelles sur $NS_{\mathbb{R}}(X)$, $[u]$ et α ont le même noyau, donc elles coïncident à une constante multiplicative près.

Il suffit maintenant d'extraire une racine $(n-1)$-ième positive ω de u. Remarquons d'abord que

$$(1), \qquad (i \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j)^{n-1} = (n-1)! i^{(n-1)^2} \sum_{1\leq i,j\leq n} (-1)^{i+j} c_{ji} \widehat{\mathrm{d}z_i} \wedge \widehat{\mathrm{d}\bar{z}_j},$$

où on a noté par c_{ij} le cofacteur de a_{ij} dans la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $\widehat{\mathrm{d}z_i} := \mathrm{d}z_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}z_{i-1} \wedge \mathrm{d}z_{i+1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}z_n$, $\widehat{\mathrm{d}\bar{z}_j} := \mathrm{d}\bar{z}_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{j-1} \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{j+1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}\bar{z}_n$. La relation ${}^tCA = \det(A) I_n$ pour la matrice des cofacteurs $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ implique

$$A = \sqrt[n-1]{\det(C)}\, {}^tC^{-1}$$

lorsque A est définie positive. De plus, pour une matrice définie positive C donnée, on obtient une solution unique définie positive A de l'équation (1).

Le Théorème 3 à été étendu dans [LiYau87] au cas des métriques de Gauduchon. La seconde assertion de la Proposition en résulte. □

Le fait que ω ci-dessus est semi-kählérienne permet d'appliquer [LT] Corollary 5.3.9 pour obtenir le

Corollaire 3.6. Soit α à l'intérieur du cône mobile $\overline{ME(X)}$. Alors la partie lisse de l'espace de modules des fibrés vectoriels stables par rapport à α admet une métrique kählérienne naturelle.

Une seconde application s'appuye sur le fait élémentaire que le produit tensoriel de métriques d'Hermite-Einstein reste une métrique d'Hermite-Einstein.

Corollaire 3.7. Si $\alpha \in \overline{ME(X)}$ et $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sont des faisceaux cohérents sans torsion semi-stables par rapport à α, alors $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})/\mathrm{Tors}$ reste semi-stable par rapport à α.

Voir [CaPe] Appendice pour la démonstration.

Le fait fondamental qui se trouve derrière les corrollaires ci-dessus est la généralisation aux métriques de Gauduchon dûe à J. Li et S.T. Yau de la corréspondance de Kobayashi-Hitchin (Théorème 3) entre la stabilité et l'existence des métriques d'Hermite-Einstein.

On se demande si le Théorème 2 admet lui-aussi une généralisation au cas des polarisations mobiles. Remarquons que pour une variété X de dimension $\dim X > 2$ le cône des courbes mobiles peut être strictement plus large que le cône engendré par les courbes intersections complètes, [DPS96] Exemple 4.8.

Références

[AlBa95] Alessandrini, L., Bassanelli, G. : Modifications of compact balanced manifolds, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320(1995), 1517–1522*

[BDPP] Boucksom S., Demailly J.-P., Păun M., Peternell Th. : The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension, *arXiv :math/0405285*

[CaPe] Campana F., Peternell Th. (with an appendix by Matei Toma) : Geometric stability of the cotangent bundle and the universal cover of a projective manifold, *arXiv :math/0405093*

[D] Demailly J.P. : Complex analytic and algebraic geometry, http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼demailly/books.html

[DPS96] Demailly J.-P., Peternell Th., Schneider M. : Holomorphic line bundles with partially vanishing cohomology, *Conf. in honor of F. Hirzebruch, Israel Mathematical Conference Proceedings Vol. 9 (1996) 165-198*

[Do85] Donaldson, S. K. Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, *Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 1-26*

[Gau84] Gauduchon, P. Sur la 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte, *Math. Ann. 267 (1984), 495–518*

[HL] Huybrechts, D. ; Lehn, M. The geometry of moduli spaces of sheaves, *Vieweg, Braunschweig, 1997*

[Kob] Kobayashi, S. Differential geometry of complex vector bundles, *Princeton University Press, Princeton, NJ ; Iwanami Shoten, Tokyo, 1987*

[La] Langer, A. Moduli spaces of sheaves and principal G-bundles, *Proceedings of AMS Summer Institute at Seattle in 2005*

[LiYau87] Li J., Yau S.-T. Hermitian-Yang-Mills connection on non-Kähler manifolds, *Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986), 560–573, Adv. Ser. Math. Phys., 1, World Sci. Publishing, Singapore, 1987*

[LT] Lübke, M., Teleman, A. The Kobayashi-Hitchin correspondence, *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995*

[MeRa84] Mehta, V. B., Ramanathan, A. Restriction of stable sheaves and representations of the fundamental group, *Invent. Math. 77 (1984), 163–172*

[NaSe65] Narasimhan M. S., Seshadri C. S. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Math. 82 (1965), 540–567*

[UYau85] Uhlenbeck, K, Yau, S.-T. On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, *Frontiers of the mathematical sciences : 1985 (New York, 1985). Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), no. S, suppl., S257–S293*

Matei Toma : Institut de Mathématiques Elie Cartan, Nancy-Université, B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France

E-mail address: toma@iecn.u-nancy.fr

URL: http ://www.iecn.u-nancy.fr/∼toma/