Exercice 5

On procède en deux étapes.

1ère étape : on montre que $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = +\infty$.

Soit $M>0$. Comme $\sum a_n$ diverge, il existe N tel que $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n \geq 2M$.

La fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$ étant continue, il existe $\delta>0$ tel que

$\forall x \in]1-\delta, \delta[$, $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n \geq M$.

Or les a_n sont positifs. Donc $\forall x \in]1-\delta, \delta[$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq M$.

Comme M est quelconque on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty$.

2ème étape : on montre que $\sum a_n x^n \sim \sum b_n x^n$ quand $x \to 1^-$.

Comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, il existe (ε_n) tel que $b_n = a_n(1+\varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Soient $\varepsilon>0$ puis $N\in\mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon \ \forall n \geq N$.

On pose $g(x) = \sum b_n x^n$, $f(x) = \sum a_n x^n$

Alors $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n x^n + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n (1+\varepsilon_n) x^n$

$$g(x) - f(x) = \sum_{n=0}^{N} (b_n - a_n) x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n x^n a_n$$

Comme $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon \ \forall n \geq N+1$, $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n x^n a_n \leq \varepsilon \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \leq \varepsilon \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \varepsilon f(x)$

car les a_n sont positifs.

Par le début de la somme $\left|\sum\limits_{n=0}^{N} (b_n - a_n) x^n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{N} (a_n + |b_n|) = M_0$.

D'après la première étape, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in]1-\delta_\varepsilon, 1[$, $f(x) > \dfrac{M_0}{\varepsilon}$

si bien que pour $x \in]1-\delta_\varepsilon, 1[$, $|g(x) - f(x)| \leq M_0 + \varepsilon f(x) < 2\varepsilon f(x)$.

Exercice 6.

Soit f une fonction holomorphe ; f peut être vue comme une fonction en 2 variables réelles : $f(x,y)$ " = " $f(x+iy)$.

Si $f = P + iQ$, alors les équations de Cauchy Riemann disent que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Si f est à valeurs réelles, alors $Q = 0$, ainsi $\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}$; P est constante, f est constante.

Exercice 7.

On écrit $s = \sigma + i\tau$ $\quad \sum_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\sigma}$ qui converge si $\sigma > 1$.

La suite (S_N) avec $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$ est uniformément sur tout compact de $\mathrm{Re}\, s > 1$

Donc $S(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Ex 8 $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ pour $z \in \mathbb{C}$

Si $z = x + iy$, $\cos z = \dfrac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$, $|\cos z| \leq \mathrm{ch}\, y \leq e^{|y|}$

Soit $K \subset \mathbb{C}$ compact. Il existe R tel que $K \subset \overline{D}(0,R)$ où $\overline{D}(0,R) = \{z : |z| \leq R\}$

Puis pour tout $z \in K$, $\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nz}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nR}}{n!} = \exp(e^R) < +\infty$.

La série de fonction holomorphes de terme général $\frac{\cos nz}{n!}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Cette série est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Ex 9.

Soit $F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2tz) \frac{dt}{t}$.

On applique le théorème d'holomorphie d'une fonction définie par une intégrale

Thm

Soit $f : U \times E \to \mathbb{C}$ où U ouvert de $\mathbb{C}$, E un ensemble mesurable

- $\forall z \in U$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable
- pour presque tout $x \in E$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur U.
- Il existe $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall z \in U$, $|f(z,x)| \leq \varphi(x)$ p.p.

Alors $F : z \mapsto \int_E f(z,x)\, d\mu(x)$ est holomorphe, $\forall z \in U$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)$ est intégrable et $F'(z) = \int_E \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\, d\mu(x)$.

On applique cela à $f(z,t) = e^{-t^2} \sin(2tz) \frac{dt}{t}$ pour montrer que F est holomorphe sur $D(0,R)$ $\forall R > 0$.

Les 2 premières conditions sont faciles à vérifier.

Pour $t \geq 1$, et $|z| \leq R$
$$\left|\frac{e^{-t^2} \sin 2tz}{|t|}\right| = \left|\frac{e^{-t^2+it2z} - e^{-t^2-2itz}}{2it}\right| \leq \frac{e^{-t^2+2tR}}{|t|}$$

Pour $t \in]0,1[$, $\frac{\sin 2tz}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2tz)^{2n+1}}{t(2n+1)!}$

puis $\left|\frac{\sin 2tz}{t}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|2z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^{2|z|} \leq e^{2R}$

On peut donc majorer $f(z,t)$ par $e^{2R} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) + e^{-t^2+2tR} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$ qui est intégrable.

On en déduit que F est holomorphe et $F'(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} f(z,t)\, dt$

Donc $F'(z) = \int_0^\infty 2t\, e^{-t^2} \frac{\cos(2tz)\,dt}{t} = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2tz)\,dt.$

Par parité, $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\cos(2tz)\,dt = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2tz)\,dt$

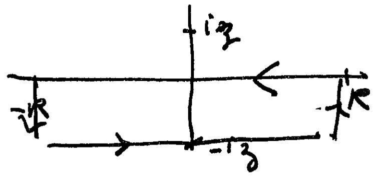
Donc $F'(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\cos(2tz)\,dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\frac{(e^{2itz}+e^{-2itz})}{2}\,dt.$

$= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-t^2}\frac{(e^{2itz}+e^{-2itz})}{2}\,dt.$ (ne sert pas tout de suite)

Mais $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2+2itz}\,dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-(t-iz)^2-z^2}\,dz = e^{-z^2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R-iz}^{R-iz} e^{-u^2}\,du$

*On suppose maintenant que $z\in\mathbb{R}$

D'après le théorème des résidus sur le contour



(si $z>0$),

$$\int_{-R-iz}^{R-iz} e^{-u^2}\,du = \int_{-R}^{R} e^{-u^2}\,du \pm \int_{-R}^{-R-iz} e^{-u^2}\,du \pm \int_{R}^{R-iz} e^{-u^2}\,du$$

Mais $\left|\int_R^{R-iz} e^{-u^2}\,du\right| \ll_z e^{-R^2}$ et $\left|\int_{-R}^{-R-iz} e^{-u^2}\,du\right| \ll e^{-R^2}$

Puis $\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$

On procède de la même façon pour l'intégrale $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2-2itz}\,dt$

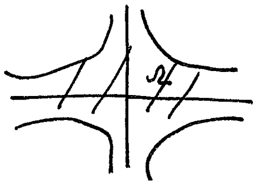
Finalement en reprenant tous ces calculs, on obtient bien

$F'(z) = e^{-z^2}\sqrt{\pi}$ pour $z\in\mathbb{R}$.

Par prolongement analytique on en déduit que $F'(z) = e^{-z^2}\sqrt{\pi}$ pour $z\in\mathbb{C}$.

Ex 10.

$\Omega = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : |xy| < 1 \}$



Rappel

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, où U est un ouvert simplement connexe.
Si f ne s'annule pas sur U, alors il existe une détermination holomorphe de $\log f$ sur U.

Ici Ω est un ouvert étoilé en 0, Ω est donc simplement connexe.
Comme f ne s'annule pas sur Ω il existe une détermination holomorphe du logarithme de f : $z \mapsto \log f$.
Soit $g = \exp \frac{1}{2} \log f$. Alors g est holomorphe sur Ω et $g^2 = f$.

Ex 10 bis.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Supposons qu'il existe f continue de $C \to C$ telle que $f^k(z) = z$ $\forall z \in C$ où $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$.
Cela revient à dire qu'il existe $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue
$\theta \mapsto f(e^{i\theta})$ avec $f(e^{i\theta})^k = e^{i\theta}$

Soit $h : \theta \mapsto e^{-i\theta/k} f(e^{i\theta})$

Alors $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $h(\theta)^k = e^{-i\theta} f^k(e^{i\theta}) = 1$. La fonction h est à valeurs dans $\{ e^{2i\pi l/k}, 0 \leq l < k \} = \mathbb{U}_k$

Comme $\mathbb{R}$ est connexe et h est continue, $h(\mathbb{R})$ est un connexe contenu dans $\mathbb{U}_k$.
Cela veut dire que h est constante. Il existe $l \in \{0, .., k-1\}$ tel que
$f(e^{i\theta}) = e^{i\theta/k + 2i\pi l/k}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$
Mais pour $\theta = 0$, $f(1) = e^{2i\pi l/k} = f(e^{2i\pi}) = e^{2i\pi/k + 2i\pi l/k}$ ce qui est impossible.

Ex 11

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} \quad \text{pour } z \neq 0.$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \text{pour } \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

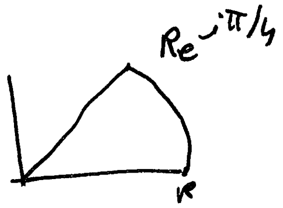
Par le produit, on obtient :

$$\frac{e^{1/z}}{z-1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \times \frac{1}{z^{k+\ell}} \quad \text{pour } |z| < 1$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \left(\sum_{k+\ell=n} \frac{1}{k!} \right).$$

Ex 12.

On considère le contour S_R suggéré par l'énoncé



La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ est entière donc $\int_{S_R} e^{-z^2} dz = 0$.

. Sur la branche horizontale, $\int_0^R e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

. Sur l'arc de cercle, $\int_\gamma e^{-z^2} dz = \int_0^{\pi/4} i R e^{i\theta} e^{-R^2 e^{2i\theta}} d\theta = A_R$.

$\left| e^{-R^2 e^{2i\theta}} \right| = e^{-R^2 \cos 2\theta}$. Le hic est que si $\theta \in [0, \pi/4]$, 2θ parcourt $[0, \pi/2]$ et ainsi $\cos 2\theta$ peut être nul.

On coupe l'intégrale en $\int_0^\alpha \cdots + \int_\alpha^{\pi/4} \cdots$

Tout d'abord, $\left| \int_\alpha^{\pi/4} i R e^{i\theta} e^{-R^2 e^{2i\theta}} d\theta \right| \leqslant R\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Puis $\left| \int_0^\alpha i R e^{i\theta} e^{-R^2 e^{2i\theta}} d\theta \right| \ll R e^{-R^2 \cos 2\alpha}$

En prenant $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{R^{3/2}}$, la $1^{\text{ère}}$ intégrale est inférieure à $1/\sqrt{R}$, et la $2^{\text{ème}}$ est majorée par $R \exp\left(-R^2 \sin \frac{2}{R^{3/2}}\right) = R \exp\left(-2R^{1/2}(1+o(1))\right)$

Suite de l'exercice 12.

On en déduit que $A_R \ll \frac{1}{\sqrt{R}} + R e^{-\frac{3\sqrt{R}}{2}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

Il reste à évaluer l'intégrale sur $\nearrow$

$$B_R = \int_{\nearrow} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{i\pi/4} e^{-r^2 e^{i\pi/2}} dr = \int_0^R e^{i\pi/4} e^{-ir^2} dr$$

Mais $e^{-ir^2} = \cos r^2 - i \sin r^2$

Donc en faisant tendre R vers $+\infty$, on en déduit que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{i\pi/4}\Big[\underbrace{\int_0^{+\infty} \cos(r^2)}_{I} - i \underbrace{\int_0^{\infty} \sin(r^2)\,dr}_{J}\Big]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(I+J) + \frac{\sqrt{2}}{2}(I-J)\,i$$

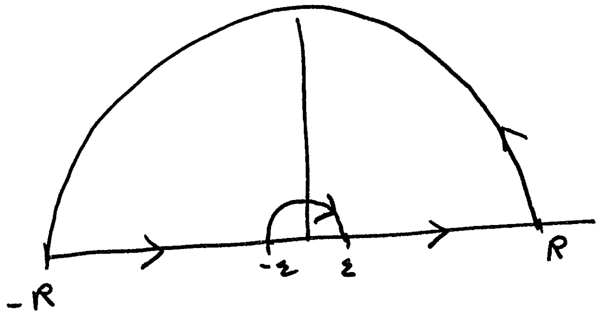
Donc $\frac{(I+J)\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(I-J) = 0$

$I = J$, $2I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Finalement, $\int_0^{+\infty} (\cos(t))^2 dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice 13 $\qquad I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

On considère le contour suggéré par l'énoncé



Soit γ ce contour

$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

où γ_0 est le demi-cercle de rayon ε, γ_2 le demi-cercle de rayon R et γ_1, γ_3 sont les 2 segments horizontaux

Comme $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$.

Soit $I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$; $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ (si elle existe !)

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{-iz}}{z}\,dz$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} I_1 + I_3 = \int_0^{\infty} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z}\,dz = 2i \int_0^{+\infty} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z}\,dz = 2i\, I.$$

$$I_0 = \int_{\gamma_0} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\int_0^{\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta$$ avec le paramétrage $z = \varepsilon e^{i\theta}$

$$= -i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta = -i \int_0^{\pi} (1 + O(\varepsilon))\,d\theta = -i\pi + O(\varepsilon)$$

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_0 = -i\pi$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta} e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\,d\theta \; ; \; |I_2| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\alpha} \cdots + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \cdots + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \cdots$$

$$\leq 2\alpha + \pi e^{-R\sin\alpha}$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{R}} + \pi e^{-\sqrt{R} + O(1/\sqrt{R})}$$ en choisissant $\alpha = \frac{1}{\sqrt{R}}$

Donc $\lim\limits_{R \to +\infty} I_2 = 0$. Ainsi $2iI - i\pi = 0$, $\boxed{I = \frac{\pi}{2}}$