Séries entières - fonctions holomorphes.

Ex 1

* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k=1$, le rayon de convergence est 1 d'après la règle de d'Alembert.

* Pour $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^k=\left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^k=\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^k$

Comme k est fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^k=1$, le rayon de convergence est 1.

* $u_n=e^{-n^\alpha}(n!)^\beta$ $\quad\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-(n+1)^\alpha}}{e^{-n^\alpha}}\times\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^\beta=(n+1)^\beta e^{n^\alpha-(n+1)^\alpha}$

$$e^{n^\alpha-(n+1)^\alpha}=e^{n^\alpha(1-(1+1/n)^\alpha)}=e^{-\alpha n^{\alpha-1}+O(n^{\alpha-2})}$$

Si $\alpha>1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n^\alpha-(n+1)^\alpha}(n+1)^\beta=0$, le rayon de convergence vaut $+\infty$.

Si $\alpha=1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=(n+1)^\beta e^{-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}+\infty & \text{si } \beta>0\\ e^{-1} & \text{si } \beta=0\\ 0 & \text{si } \beta<0\end{cases}$

Si $\alpha<1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^\alpha-(n+1)^\alpha}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}+\infty & \text{si } \beta>0\\ 1 & \text{si } \beta=0\\ 0 & \text{si } \beta<0\end{cases}$

Conclusion le rayon de convergence R de $\sum_n e^{-n^\alpha}(n!)^\beta$ prend les valeurs suivantes:

- Si $\alpha>1, \beta\in\mathbb{R}$ $\quad R=+\infty$
- $\alpha=1$ $\quad R=\begin{cases}0 & \text{si } \beta>0\\ e^{-1} & \text{si } \beta=0\\ +\infty & \text{si } \beta<0\end{cases}$
- $\alpha<1$, $\quad R=\begin{cases}0 & \text{si } \beta>0\\ 1 & \text{si } \beta=0\\ +\infty & \text{si } \beta<0\end{cases}$

* D'après la formule d'Hadamard le rayon de converge de $\sum_n u_n z^n$ vérifie $\frac{1}{R}=\overline{\lim}|u_n|^{1/n}$. Pour $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$, cette limite vaut 1, donc $R=1$.

Exercice 2 de la feuille sur les séries entières.

On note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$

Alors $R = \sup\{r \geq 0 : \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$

* rayon de convergence de la série $\sum a_n^2 z^n$

Soit R_1 ce rayon.

$|a_n^2 r^n| = \left(|a_n|(\sqrt{r})^n\right)^2$

Si $\sqrt{r} < R$, la suite $(|a_n|(\sqrt{r})^n)_n$ est bornée et ainsi la suite $(|a_n|^2 r)_n$ l'est aussi. Cela prouve que $R_1 \geq R^2$

Si $r > R^2$, la suite $(a_n^2 r^n)_n$ n'est pas bornée vu que $(a_n(\sqrt{r})^n)$ ne l'est pas. On en déduit que $R_1 \leq R^2$

Finalement $R_1 = R^2$.

* rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n+1} = z\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n} = z\sum_{n\geq 0} a_n (z^2)^n$

Si $|z^2| < R$, la série converge et si $|z^2| > R$, la série diverge

le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n+1}$ est $\sqrt{R}$

* rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+|a_n|} z^n$. Soit R_3 ce rayon de convergence.

Pour tout n, $\left|\frac{a_n}{1+|a_n|}\right| \leq \min(1, |a_n|)$.

Comme $\sum z^n$ est de rayon de convergence 1, on en déduit que $R' \geq \max(1, R)$.

. Si $R > 1$, la ~~suite~~ série $\sum |a_n|$ converge, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Ainsi pour n assez grand, $|a_n| \leq 1/2$, si on note $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$,

$|a_n| = |b_n|(1+|a_n|) \leq \frac{3}{2}|b_n|$. ~~Si $\sum b_n/3$~~ Si $(b_n r^n)$ est bornée $(a_n r^n)$ aussi

on en déduit que $R_3 = R$

Si $R \leq 1$.

$\frac{|a_n| r^n}{1+|a_n|} \geq \begin{cases} \frac{|a_n| r^n}{2} & \text{si } |a_n| \leq 1 \\ \frac{r^n}{2} & \text{si } |a_n| \geq 1 \end{cases}$, Or les suites $\left(\frac{|a_n| r^n}{2}\right)$ et $\left(\frac{r^n}{2}\right)$ ne sont pas bornées quand $r > 1$. Donc $R_3 \leq 1$. Conclusion $R_3 = 1$ si $R \leq 1$

Ex 3

Développement en série entière dans le disque unité de $f_p(z) = \frac{1}{(z-1)^p}$

pour $p=1$, $f_1(z) = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pour $|z|<1$.

pour $p \geq 2$ on peut utiliser plusieurs méthods.

1ère méthode : avec la formule générale

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \alpha(\alpha-1)\frac{z^2}{2} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} z^n \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{(z-1)^p} = \frac{(-1)^p}{(1-z)^p} = (-1)^p\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-(n-1))(-z)^n}{n!}\right)$$

$$= (-1)^p\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+(n-1))!}{n!(p-1)!} z^n\right) = (-1)^p\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{p+n-1}{p-1} z^n\right)$$

2ème méthode

$$f_p(z) = \frac{(-1)^p}{(1-z)^p} = (-1)^p\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)^p = (-1)^p \sum_{k_1,\dots,k_p \in \mathbb{N}} z^{k_1+\dots+k_p}$$

$$= (-1)^p \sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell \Bigg(\sum_{\substack{k_1+\dots+k_p=\ell \\ k_i \in \mathbb{N}}} 1\Bigg) = (-1)^p \sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell \binom{p+\ell-1}{p-1}$$

Exercice 4 de la feuille sur les séries entières.

Suite de Fibonacci $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrons par récurrence sur n que $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ et $a_n \leq 2^{n-1} \; \forall n \geq 1$.

Pour $n=0$, $a_0 = 1 \geq 0$ pour $n = 1$, $0 \leq a_1 = 1 = 2^0$

Pour $n = 2$, $a_2 = a_0 + a_1 = 2 = 2^{2-1}$

La propriété est vérifiée pour $n = 1, 2$.

On suppose que pour tout $k \leq n$, avec $n \geq 2$ donné, $0 \leq a_k \leq 2^{k-1}$.

Alors $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \geq 0$ car a_n et a_{n-1} sont positifs

et $a_{n+1} \leq 2^{n-1} + 2^{n-2}$ par hypothèse de récurrence (on rappelle que $n \geq 2$)

$$2^{n-1} + 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2} \leq 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n$$

On en déduit que $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ et $a_n \leq 2^{n-1} \; \forall n \geq 1$.

Attention : comme la récurrence se fait sur deux rangs, lors de l'initialisation il faut traiter les cas $n = 1$, $n = 2$

On en déduit que $\sum_{n \geq 0} |a_n z^n| \leq 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} |z|^n$

Cette série $\sum 2^{n-1} |z|^n$ converge pour $|z| < 1/2$ (et diverge pour $|z| > 1/2$)

$\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur à $1/2$, donc strictement positif.

(2) Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ et R le rayon de convergence.

Pour $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Pour $z \neq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{z} \left(f(z) - 1 \right)$

et $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^{n+2} = \frac{1}{z^2} \left(f(z) - z - 1 \right)$

On en déduit que $\frac{1}{z^2} \left(f(z) - z - 1 \right) = \frac{1}{z} \left(f(z) - 1 \right) + f(z)$ puis

en regroupant, $f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$ pour $0 < |z| < R$.

Suite de l'exercice 4.

Pour $z=0$, $f(0)=1$, la formule est valable $f(z)=\dfrac{1}{1-z-z^2}$

(3) Pour calculer a_n, il suffit de déterminer le développement en série entière de f.

On commence par calculer les zéros de z^2+z-1.

$$\Delta=5,\quad z^2+z-1=(z-z_1)(z-z_2)$$

avec $z_1=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$

$$\frac{-1}{z^2+z-1}=\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}=\frac{-1}{\sqrt5}\left(\frac{1}{z+\frac12-\frac{\sqrt5}{2}}-\frac{1}{z+\frac12+\frac{\sqrt5}{2}}\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt5}\left[\frac{1}{\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)\left(1-\frac{z}{\frac{\sqrt5-1}{2}}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(1+\frac{z}{\frac{1+\sqrt5}{2}}\right)}\right]$$

Alors pour $|z|\leqslant\dfrac{\sqrt5-1}{2}$, on a

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{-n-1}z^n+\frac{1}{\sqrt5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{-n-1}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{-n-1}+(-1)^n\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{-n-1}\right]$$

On obtient $a_n=\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\left(\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)^{-n-1}+(-1)^n\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^{-n-1}\right)$