Feuille 5 : $\Psi(x,y) \ll x e^{-u/2}$.

1. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{x}{n} \geq \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq x \\ 0 & \text{si } n > x \end{cases}$

2. $$\Psi(x,y) = \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} 1 = \sum_{\substack{n \leq x^{3/4} \\ P^+(n) \leq y}} 1 + \sum_{\substack{x^{3/4} < n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} 1.$$

On majore la 1ère somme en oubliant la condition $P^+(n) \leq y$: $\sum_{\substack{n \leq x^{3/4} \\ P^+(n) \leq y}} 1 \leq x^{3/4}$

Dans la 2ème somme, si $n > x^{3/4}$, $\left(\frac{n}{x^{3/4}}\right)^\alpha > 1$ et si $x^{3/4} < n \leq x$,

$\frac{3}{4} \leq \frac{\log n}{\log x} \leq 1$.

On en déduit que $\Psi(x,y) \ll x^{3/4} + \sum_{\substack{x^{3/4} < n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} \left(\frac{n}{x^{3/4}}\right)^\alpha \frac{\log n}{\log x}$.

3. Si $\alpha = \frac{2}{3 \log y}$, $\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)^\alpha = \exp\left(-\frac{3\alpha}{4} \log x\right) = \exp\left(-\frac{\log x}{2 \log u}\right) = e^{-u/2}$.

Pour montrer que $\sum_{\substack{x^{3/4} < n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} \left(\frac{n}{\cancel{x}^{3/4}}\right)^\alpha \frac{\log n}{\log x} \ll e^{-u/2}$, il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{\log x} \sum_{\substack{x^{3/4} < n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} n^\alpha \log n \ll e^{-u/2}.$$

Il reste maintenant à montrer que $x^{3/4} \ll e^{-u/2} x$ pour x et y convenables.

Cette inégalité est vérifiée si $e^{u/2} \ll x^{1/4}$, c'est-à-dire si $y \geq e^2$.

Quand $y \leq e^2$, $\Psi(x,y) \leq \Psi(x,7)$ (car $e^2 \leq 10$)

les entiers comptés dans $\Psi(x,7)$ sont de la forme $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta \leq x$.

Ainsi $\alpha \leq \frac{\log x}{\log 2}$, $\beta \leq \frac{\log x}{\log 3}$, $\gamma \leq \frac{\log x}{\log 5}$, $\delta \leq \frac{\log x}{\log 7}$.

On en déduit que $\Psi(x,y) \leq (\log x)^4$ si $y < 11$,

tandis que $x e^{-u/2} \geqslant x \exp - \frac{\log x}{2 \log 2} = x^{1 - \frac{1}{2\log 2}}$ si $2 \leq y < 11$

Donc pour montrer que $\Psi(x,y) \ll x e^{-u/2}$, il suffit de montrer que $S(x) \ll x \log x$

4. On a $S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ p^+(n) \leq y}} n^\alpha \log n$.

On profite de l'additivité de la fonction log : $\log n = \sum_{\substack{p, \alpha \\ p^{\alpha} \| n}} \log p^k$. On reporte cela

dans $S(x)$ en séparant les $k=1$ des $k \geqslant 2$:

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ p^+(n) \leq y}} n^\alpha \sum_{p \| n} \log p + \sum_{\substack{n \leq x \\ p^+(n) \leq y}} n^\alpha \sum_{\substack{p^k \| n \\ k \geqslant 2}} \log p^k = S_1(x) + S_2(x).$$

5. [illegible] $p^+(n) \leq y$

Dans S_1, si p est un diviseur d'un entier $n \leq x$ t.q $P^+(n) \leq y$, alors $p \leq y$ et

n est de la forme mp avec $P^+(m) \leq y$.

Si $p \| n$, alors $(m,p) = 1$, condition que l'on oublie pour majorer S_1 :

$$S_1 \leq \sum_{\substack{m \leq x \\ P^+(m) \leq y}} m^\alpha \sum_{\substack{pm \leq x \\ p \leq y}} p^\alpha \log p \leqslant \sum_{\substack{m \leq x \\ P^+(m) \leq y}} m^\alpha \sum_{\substack{p \leq x/m \\ p \leq y}} \log p$$

car $p^\alpha = \exp \frac{2 \cdot \log p}{3 \log y} \leq e^{2/3}$

si $p \leq y$.

La somme sur p est $O\left(\frac{x}{m}\right)$ d'après le théorème des nombres premiers.

On en déduit que $S_1(x) \ll x \sum_{p^+(m) \leq y} \frac{1}{m^{1-\alpha}}$.

6.

$$S_2(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ p^+(n) \leq y}} n^\alpha \sum_{\substack{p^k \| n \\ k \geq 2}} \log p^k$$

On échange les ordres de sommation et on écrit $n = mp^k$

$$S_2(x) = \sum_{\substack{p \leq y \\ k \geq 2}} k \log p \sum_{\substack{m \leq x/p^k \\ p^+(m) \leq y}} (mp^k)^\alpha$$

On applique la méthode de Rankin : $1_{m \leq x/p^k} \leq \left(\frac{x}{mp^k}\right)^1$

$$S_2(x) \leq \sum_{\substack{p \leq y \\ k \geq 2}} k p^\alpha \log p \sum_{p^+(m) \leq y} m^\alpha \left(\frac{x}{mp^k}\right) =$$

$$\leq \sum_{p^+(m) \leq y} x \frac{1}{m^{1-\alpha}} \sum_{2 \leq p \leq y} \log p \sum_{k \geq 2} \frac{k}{(p^k)^{1-\alpha}}$$

Or pour $0 < a < 1$, $\sum_{k \geq 2} \frac{k}{a^k} = O\left(\frac{1}{a^2}\right)$, donc

$$S_2(x) \ll x \sum_{p^+(m) \leq y} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \sum_{p \geq 2} \frac{\log p}{p^{2(1-\alpha)}}$$

Or $\frac{1}{p^{2(1-\alpha)}} \leq \frac{1}{p^{4/3}}$ quand $y \geq 11$ et ainsi $\sum_{p \geq 2} \frac{\log p}{p^{2(1-\alpha)}} = O(1)$.

On en déduit que $S_2(x) \ll x \sum_{p^+(m) \leq y} \frac{1}{m^{1-\alpha}}$.

7. D'après la formule de Mertens, $\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$

On en déduit que $\prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \gg \frac{1}{\log y} \gg \frac{1}{\log x}$

8. D'après les questions précédentes (question 5 et 6),

$$S(x) \ll x \sum_{p^+(m) \leq y} \frac{1}{m^{1-\alpha}}$$

En utilisant la question 7, $\frac{S(x)}{\log x} \ll \frac{x}{\log x} \sum_{p^+(m) \leq y} \frac{1}{m^{1-\alpha}}$

$$\ll x \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \times \sum_{p^+(m) \leq y} \frac{1}{m^{1-\alpha}}.$$

La somme sur les entiers friables peut s'écrire également sous la forme d'un produit eulérien :

$$\sum_{p^+(m) \leq y} \frac{1}{m^{1-\alpha}} = \prod_{p \leq y} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k(1-\alpha)}} \right) = \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p^{1-\alpha}}\right)^{-1}$$

Ainsi $\frac{S(x)}{\log x} \ll x \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{1-\alpha}}\right)^{-1}$

Quand $p \to \infty$, $\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{1-\alpha}}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p^{1-\alpha}} + O\left(\frac{1}{p^{2(1-\alpha)}}\right)\right)$

$$= \left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{2(1-\alpha)}}\right)\right)$$

$$= \left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p}\right)\left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p}\right)^{-1}\left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{2(1-\alpha)}}\right)\right)$$

$$= \left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{p^{2(1-\alpha)}}\right)\right)$$

Comme $\prod_p \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{2(1-\alpha)}}\right)\right) = O(1)$,

$$\frac{S(x)}{\log x} \ll x \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p}\right) \ll x \exp\left(\sum_{p \leq y} \frac{p^\alpha - 1}{p}\right)$$

Mais $p^\alpha - 1 = \exp(\alpha \log p) - 1 = \alpha \log p + O(\alpha^2 \log^2 p) = O(\alpha \log p)$ quand $2 \leq p \leq y$

puis $\sum_{p \leq y} \alpha \frac{\log p}{p} = O(\alpha y) = O(1)$ Donc $S(x) \ll x \log x$.

Cela termine la preuve du théorème 1 d'après la question 3.