M2 MFA Recherche 2021-2022

Feuille 5, La méthode de Rankin pour les entiers friables

On note $P^+(n)$ le plus grand facteur premier de n avec la convention $P^+(1) = 1$.

Un entier naturel n est dit y-friable si $P^+(n) \leq y$. Soient

$$S(x, y) = \{n \leq x : P^+(n) \leq y\} \text{ et } \Psi(x, y) = |S(x, y)|.$$

Le rapport

$$u = \frac{\log x}{\log y}$$

interviendra souvent dans les estimations de $\Psi(x, y)$ que nous verrons.

Le but de cette feuille est de montrer la majoration

Théorème I. *On a pour $x \geq y \geq 2$:*

$$\Psi(x, y) \ll x\mathrm{e}^{-u/2}.$$

La preuve repose sur une méthode simple et très efficace appelée la méthode de Rankin.

1. Montrer que pour tout $\sigma > 0$, l'indicatrice des entiers $n \leq x$ est majorée par $(x/n)^\sigma$. La méthode de Rankin consiste à utiliser cette astuce.
   Soit $\alpha > 0$ à choisir.
2. En utilisant une variante de la méthode de Rankin, montrer l'inégalité :

$$\Psi(x, y) \leq x^{3/4} + \sum_{\substack{x^{3/4} < n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} \left(\frac{n}{x^{3/4}}\right)^\alpha \frac{\log n}{\log x}.$$

   On choisit $\alpha = 2/(3 \log y)$.
3. En déduire que pour montrer le Théorème I, il suffit de montrer l'inégalité $S(x) \ll x \log x$, où on a posé

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} n^\alpha \log n.$$

4. Montrer que $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$ avec

$$S_1(x) = \sum_{\substack{n \le x \\ P^+(n) \le y}} n^\alpha \sum_{p \| n} \log p, \quad S_2(x) = \sum_{\substack{n \le x \\ P^+(n) \le y}} n^\alpha \sum_{p^k \| n, k \ge 2} \log p^k,$$

   où $p^\ell \| n$ signifie que p^ℓ divise n mais que $p^{\ell+1}$ ne divise pas n.
5. Montrer que $S_1(x) \ll xL(x)$ avec

$$L(x) = \sum_{P^+(m) \le y} \frac{1}{m^{1-\alpha}}$$

6. Montrer une majoration identique pour $S_2(x)$: $S_2(x) \ll xL(x)$. On pourra de nouveau utiliser la méthode de Rankin pour majorer l'indicatrice des entiers m inférieurs à x/p^k.
7. Montrer que pour $y \le x$

$$\frac{1}{\log x} \ll \prod_{p \le y} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

   (On pourra utiliser la formule de Mertens.)
8. Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{S(x)}{\log x} &\ll x \prod_{p \le y} \Big(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p}\Big) \\ &\ll x \exp O\big(\sum_{p \le y} \alpha \frac{\log p}{p}\Big) \ll x. \end{aligned}$$

9. Terminer la preuve du Théorème I.