Séries de Dirichlet

Exercice 1.

Soit σ_c la plus grande des abscisses de convergence de $\sum \frac{a_n}{n^s}$ et $\sum \frac{b_n}{n^s}$.

Supposons que les coefficients (a_n), (b_n) ne soient pas les même et soit $n_0 = \min\{n \geqslant 1 : a_n \neq b_n\}$.

Pour $\sigma > \sigma_c$, on a alors $0 = \frac{a_{n_0} - b_{n_0}}{n_0^s} + \sum_{m=n_0+1}^{\infty} \frac{a_m - b_m}{m^s}$

On multiplie par n_0^s : $0 = a_{n_0} - b_{n_0} + \sum_{m=n_0+1}^{\infty} (a_m - b_m) \times \left(\frac{n_0}{m}\right)^s$.

On a vu en cours que les séries étaient absolument convergentes si $\sigma > \sigma_c + 1$.

Ainsi pour tout $\sigma \geqslant \sigma_c + 2$, $\left| \sum_{m=n_0+1}^{\infty} (a_m - b_m) \left(\frac{n_0}{m}\right)^s \right| \leqslant \sum_{m=n_0+1}^{\infty} (|a_m| + |b_m|) \left(\frac{n_0}{m}\right)^{\sigma_c+2}$

$< +\infty$.

En appliquant le théorème de convergence dominée, $\lim_{\sigma \to +\infty} \sum_{m=n_0+1}^{\infty} (a_m - b_m) \left(\frac{n_0}{m}\right)^s = 0$

Cela entraîne que $a_{n_0} - b_{n_0} = 0$ contrairement à ce que l'on avait supposé.

Donc $a_n = b_n \; \forall n \geqslant 1$.

Exercice 2.

Soient ε et $\delta > 0$ donnés.

Comme la série converge absolument dans le domaine $\sigma \geqslant \sigma_c + 1 + \varepsilon$, pour tout $\sigma \geqslant \sigma_c + 1 + \varepsilon$, $F(s) \ll_\varepsilon 1$. On suppose désormais que σ est compris entre $\sigma_c + \varepsilon$ et $\sigma_c + 1 + \varepsilon$.

Dans cette bande, on ne peut plus borner F uniformément et le but de cet exercice est de montrer que l'on peut contrôler la croissance de $|F|$ en fonction de τ.

Soit M un paramètre à préciser.

$$F(s) = \sum_{n=1}^{M} \frac{a_n}{n^s} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Comme la série $\sum \frac{a_n}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}$ converge, les $\frac{a_n}{n^{\sigma_c+1}}$ sont bornés.

$$\sum_{n=1}^{M}\frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{M}\frac{a_n}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}\times\frac{1}{n^{s-\sigma_c-\varepsilon}} \ll_\varepsilon \sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^{\sigma-\sigma_c-\varepsilon}} \ll_\varepsilon M^{1-\sigma+\sigma_c+\varepsilon}.$$

Pour le 2ème terme, on fait une sommation d'Abel (ou une sommation par parties) :

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \lim_{U\to\infty}\sum_{n=M+1}^{U}\frac{a_n}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}\times\frac{1}{n^{s-\sigma_c-\varepsilon}}$$

et
$$\sum_{n=M+1}^{U} \frac{a_n}{n^s} = \left(\sum_{n=M+1}^{U} \frac{a_n}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}\right)\times\frac{1}{U^{s-\sigma_c-\varepsilon}} + (s-\sigma_c-\varepsilon)\int_{(M+1)^-}^{U}\left(\sum_{M<n\le u}\frac{a_n}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}\right)\frac{du}{u^{1+s-\sigma_c-\varepsilon}}$$

On calcule l'intégrale et on fait tendre U vers $+\infty$

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \ll \frac{|s|}{M^{\sigma-\sigma_c-\varepsilon}} \ll \frac{|\tau|}{M^{\sigma-\sigma_c-\varepsilon}}$$

En prenant $M = |\tau|$ (lorsque $|\tau|$ est "grand"), on obtient

$$F(s) \ll |\tau|^{1-\sigma+\sigma_c+\varepsilon} \ll_{\varepsilon,\delta} |\tau|^{1-\delta+\varepsilon} \quad \text{si } \sigma \geqslant \sigma_c+\delta.$$

Exercice 3

1. Soit N_0 tel que $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq N_0$.

Pour $\sigma > \sigma_0$, on a $F(s) = \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{a_n}{n^s} + \sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$

La première somme est une somme finie de fonctions entières, c'est donc une fonction entière. L'abscisse σ_c est une singularité de F si et seulement si c'est une singularité de $\sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ qui est une série de Dirichlet dont tous les coefficients sont positifs.

On peut donc supposer que $a_n \geq 0 \quad \forall n$.

2. Pour $\sigma > \sigma_c$ on a $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_c}} \times \frac{1}{n^{s-\sigma_c}}$.

L'abscisse de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_n}{n^s}$ avec $a'_n = \frac{a_n}{n^{\sigma_c}}$ est 0.

σ_c est une singularité de F si et seulement si 0 est une singularité de $\sum_{n\geq 1} \frac{a'_n}{n^s}$.

3. Comme l'abscisse de convergence de F est nulle, $s \mapsto F(s)$ est holomorphe au voisinage de 1 elle admet donc un développement en série entière que l'on note $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s-1)^k$ avec $|s-1| < r$ pour un $r>0$ convenable. Les coefficients c_k vérifient $c_k = \frac{1}{k!} F^{(k)}(1)$

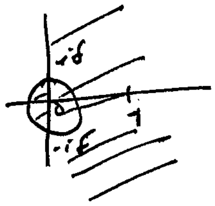
mais $F^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-\ln n)^k}{n^s}$ pour $\sigma > 0$.

En particulier, $F^{(k)}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(-\ln n)^k}{n}$ et $c_k = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(-\ln n)^k}{n}$.

Si 0 n'est pas une singularité de F il existe $\delta > 0$ tel que F soit prolongeable en une fonction holomorphe sur $\{\sigma > 0\} \cup \{s : |s| < \delta\}$.

le rayon de convergence de $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k (s-1)^k$ est la distance de 1 à la singularité de F qui est la plus proche à de 1.

les points de $\mathbb{C}$ les plus proches de 1 et en dehors de $\{|z|<\delta\}\cup\{\sigma>1\}$ sont $i\delta$ et $-i\delta$



le rayon de convergence de $\sum_k c_k (s-1)^k$ est supérieur à $\sqrt{1+\delta^2}$

Ainsi $$F(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(s-1)^k(-1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(\log n)^k}{n} \quad \text{pour } |s-1|<\sqrt{1+\delta^2}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(1-s)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(\log n)^k}{n}$$

Pour σ réel, $-\sqrt{1+\delta^2}+1<\sigma<1$, on a

$$F(\sigma) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(1-\sigma)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(\log n)^k}{n}$$

Comme les a_n sont positifs, cette série est à terme positifs, on peut donc échanger les ordres de sommation :

$$F(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(1-\sigma)^k}{k!}(\log n)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \exp((1-\sigma)\log n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}$$ cette série converge en particulier pour $\sigma = \frac{-\sqrt{1+\delta^2}+1}{2} < 0$

ce qui contredit l'hypothèse $\sigma_c = 0$.

Exercice 4.

C'est une conséquence de la formule de Perron vue en cours.

Pour $c > 0$ $$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds - \delta(y) \right| \leqslant \frac{y^c}{\pi T |\log y|}$$

avec $$\delta(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < y < 1 \\ 1/2 \text{ si } y = 1 \\ 1 \text{ si } y > 1 \end{cases}$$

Lorsque x n'est pas entier, $\sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n \geqslant 1} a_n \delta\left(\frac{x}{n}\right)$.

En appliquant la formule de Perron ci-dessus avec $y = x/n$, on obtient

$$\sum_{n \leq x} a_n = \sum_n \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} a_n \frac{x^s}{n^s} \frac{ds}{s} + O\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{|a_n| x^c}{T |\log(x/n)|} \right).$$

Lorsque $c > \sigma_a$, l'abscisse de convergence absolue et $\sigma > 0$, on peut intervertir la somme et l'intégrale :

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s F(s)}{s} ds + O\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{|a_n| x^c}{T |\log(x/n)|} \right).$$

On obtient la 2ème formule en faisant tendre T vers $+\infty$.