M2 MFA Recherche 2021-2022

Feuille 4, Séries de Dirichlet

Exercice 1. *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres complexes et* σ_0 *un réel tels que*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}=\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n^s}\qquad \forall\sigma>\sigma_0,$$

avec la notation $s=\sigma+i\tau$. *Montrer que* $a_n=b_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2. *Soit* $F(s)=\sum_{n\geq 1}a_n n^{-s}$ *une série de Dirichlet d'abscisse de convergence* σ_c. *Montrer que pour tous* δ,ε *fixés tels que* $0<\varepsilon<\delta<1$, *on a pour tout* $s=\sigma+i\tau$ *avec* $\sigma\geq\sigma_c+\delta$:

$$F(s)\ll_{\delta,\varepsilon}\tau^{1-\delta+\varepsilon}.$$

Exercice 3. *Soit* $F(s)=\sum_{n\geq 1}a_n n^{-s}$ *une série de Dirichlet d'abscisse de convergence* σ_c. *Le but de cet exercice est de montrer le Théorème de Landau suivant : si tous les* a_n *sont positifs pour* n *assez grand, alors* σ_c *est une singularité de* $F(s)$.

1. *Montrer qu'il suffit de montrer le Théorème de Landau dans le cas où* $a_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
2. *Montrer que l'on peut se ramener au cas où* $\sigma_c=0$.
3. *Montrer que si* $F(s)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(s-1)^k$ *est le développement en série entière de* F *au voisinage de* 1, *alors*

$$c_k=\frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-\log n)^k n^{-1}.$$

4. *Montrer que si* σ_c *n'est pas une singularité de* F, *alors le rayon de convergence de la série entière* $\sum_k c_k z^k$ *est strictement supérieur à* 1 *et arriver à une contradiction avec l'hypothèse* $\sigma_c=0$.

Exercice 4. *(Formule de Perron) Soit* $F(s)=\sum_{n\geq 1}a_n n^{-s}$ *une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue finie* σ_a. *Montrer que pour* $c>\max(0,\sigma_a)$ $T>0$, *et* $x\geq 1$ *non entier, on a les formules*

$$\sum_{n\leq x}a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}F(s)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}\,s+O\Big(x^c\sum_{n\geq 1}\frac{|a_n|}{n^c(1+T|\log(x/n)|}\Big),$$

$$\sum_{n\leq x}a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}\,s.$$