Formules de Mertens

Exercice 1.

1) Comme $t \mapsto \log t$ est croissante, pour $n \geq 2$ on a l'encadrement

$$\int_{n-1}^{n} \log t \, dt \leq \log n \leq \int_{n}^{n+1} \log t \, dt$$

On somme sur $n \leq x$:

$$\sum_{2 \leq n \leq x} \int_{n-1}^{n} \log t \, dt \leq \sum_{n \leq x} \log n \leq \sum_{2 \leq n \leq x} \int_{n}^{n+1} \log t \, dt$$

Quand x est entier :

$$\int_{1}^{x} \log t \, dt \leq \sum_{n \leq x} \log n \leq \int_{2}^{x+1} \log t \, dt$$

On calcule
$$x \log x - x + 1 \leq \sum_{n \leq x} \log n \leq (x+1) \log(x+1) - (x+1) - 2\log 2 + 2$$
$$\leq (x+1) \log(x+1) - x.$$

On en déduit que $T(x) = x \log x - x + O(\log x)$ pour $x \in \mathbb{R}, x \geq 2$.

2. Pour $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $\log n = \alpha_1 \log p_1 + \cdots + \alpha_r \log p_r = \sum$

$$= \sum_{p} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ p^k \| !}} \log p = \sum_{\substack{p, k \\ p^k | n}} \log p$$

$$= \sum_{d | n} \Lambda(d).$$

On reporte dans $T(x)$:

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \sum_{n \leq x} \sum_{d | n} \Lambda(d) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \sum_{md \leq x} 1$$

$$= \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.$$

3. D'après les 2 questions précédents,

$$\sum_{d\leq x} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = T(x) = x\log x - x + O(\log x)$$

On isole les $d = p$ premiers.

$$\sum_{d\leq x} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = \sum_{p\leq x} \log p \left\lfloor \frac{x}{\cancel{d}\,p} \right\rfloor + \sum_{\substack{p^k\leq x \\ k\geq 2}} \log p \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor$$

le 2ème terme est négligeable:

$$\sum_{\substack{p^k\leq x \\ k\geq 2}} \log p \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \leq x \sum_{p\leq x} \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^k}$$

$$\leq x \sum_{p\leq \sqrt{x}} \frac{1}{p^2} \times \frac{1}{1-1/p} \ll x.$$

Tandis que $\displaystyle\sum_{p\leq x} \log p \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = x \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} + O\Big(\sum_{p\leq x} \log p\Big)$

$$= x \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} + O(x) \text{ d'après les estimations}$$

de Tchebychev

On en déduit la 1ère formule de Mertens :

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

En étant plus soigneux dans les calculs, on peut montrer que le $O(1)$ est compris entre $1 - \ln(4)$ et $\ln(4)$

(cf. G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres théorème I.1.8.
(ITAN)

$A \simeq 0{,}26149\ldots$

Exercice 2.

1) On effectue une sommation d'Abel :

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p\leq x} \frac{1}{\log p} \times \frac{\log p}{p} = \frac{S(x)}{\log x} - \frac{S(2^-)}{\log 2} + \int_2^x \frac{S(t)\,dt}{t(\log t)^2}$$

$$= \frac{S(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{S(t)\,dt}{t(\log t)^2}$$

2) On applique la formule de Mertens vue à l'exercice 1 :

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \frac{\log x + O(1)}{\log x} + \int_2^x \frac{\log t + R(t)}{t(\log t)^2}\,dt \text{, où on a écrit}$$

$S(t) = \log t + R(t)$.

D'après l'exercice 1, $R(t) = O(1)$ et ainsi $\int_2^\infty \frac{R(t)}{t(\log t)^2}\,dt$ converge

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x - \log\log 2 + 1 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t(\log t)^2}\,dt + \int_x^{+\infty} \frac{R(t)\,dt}{t(\log t)^2}$$

$$= \log\log x + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \text{ avec } A = 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)\,dt}{t(\log t)^2}.$$

Exercice 3.

1. $-\log\left(1-\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} = O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ quand p tend vers $+\infty$,

la série $\sum_p \left(\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - \frac{1}{p}\right)$ est donc convergente.

2. $B = \sum_{p\leq x} \log\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - \sum_{p\leq x} 1/p + \sum_{p>x}\left(\log\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - 1/p\right)$

En développant en série entière $-\ln(1-1/p)$ puis en majorant par une série géométrique, on montre que la somme sur $\sum_{p>x}$ est majorée par

$$\sum_{p>x} \log\left(\frac{1}{1-1/p}\right) - 1/p = \sum_{p>x}\sum_{k\geq 2} \frac{1}{kp^k}$$

On majore les $1/k$ par $1/2$

$$\leq \sum_{p>x} \frac{1}{2p(p-1)} \leq \sum_{n>x} \frac{1}{2n(n-1)} = \frac{1}{2(\lceil x\rceil-1)}$$

où $\lceil x\rceil$ est le plus petit entier supérieur à x.

En isolant la somme $\sum_{p\leq x} 1/p$, on obtient la formule annoncée dans la question 2 : $\sum_{p\leq x} 1/p = -\sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right) - B + \frac{\theta}{2(x-1)}$.

3. D'après la question 2 et l'exercice 2,

$$\sum_{p\leq x}\log(1-1/p) = -\sum_{p\leq x} 1/p - B + \frac{\theta}{2(x-1)}$$

avec $\theta=\theta(x)\in\,]0,1[$

$$= -\log\log x - C + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

avec $C = B + 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt = A+B$

$C=\gamma$ (théorème 1.1.12 du livre G. Tenenbaum IATAN