M2 MFA Recherche 2021-2022

Feuille 3, les formules de Mertens

Dans cette feuille nous établissons plusieurs formules de Mertens. La référence est toujours le chapitre 1 du livre de Gérald Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. La lettre p désigne toujours un nombre premier. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

Exercice 1. *Pour $x \geq 2$, on considère la fonction*

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n.$$

1. *En comparant $T(x)$ avec des intégrales, montrer l'encadrement*

$$x \log x - x \leq T(x) \leq \sum_{n \leq x} \log n \leq (x+1)\log(x+1) - x.$$

   En déduire une forme faible de la formule de Stirling

$$T(x) = x \log x - x + O(\log x).$$

2. *On rappelle que Λ est la fonction de Von Mangoldt. Montrer la deuxième formule pour $T(x)$:*

$$T(x) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.$$

3. *En déduire le premier théorème de Mertens :*
   Théorème I. *Pour $x \geq 2$,*

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Exercice 2. *(La somme des inverses des nombres premiers.) Soit $S(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}$.*

1. *Montrer que*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{S(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{S(t)}{t(\log t)^2} \, \mathrm{d}\, t.$$

2. *Montrer qu'il existe une constante A telle que pour $x \geq 2$ on ait*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + A + O((\log x)^{-1}.$$

Exercice 3. *(Formule de Mertens)*

1. *Montrer que la série sur les nombres premiers*

$$B := \sum_p \Big(\log\big(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\big) - \frac{1}{p}\Big)$$

converge.

2. *Montrer que pour $x \geq 2$, il existe $\theta = \theta(x) \in]0,1[$ tel que*

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = -\sum_{p\leq x} \log\Big(1-\frac{1}{p}\Big) - B + \frac{\theta}{2(x-1)}.$$

3. *Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour $x \geq 2$, on ait*

$$\prod_{p\leq x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \frac{e^{-C}}{\log x}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big).$$

La constante C de l'exercice 3, est en fait égale à γ, la constante d'Euler,

$$\gamma = \lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \frac{1}{n} - \log x = 0,577...$$

La formule de Mertens est ainsi

$$\prod_{p\leq x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log x}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big) \qquad (x \geq 2).$$