Exercice 1

1) Si n est pair et supérieur à 4, alors $\prod_{p\leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p \leq 4^{(n-1)} \leq 4^n$

par hypothèse de récurrence.

2) On suppose que $n = 2m+1$

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!} = \frac{(m+2)\times \cdots \times (2m+1)}{m!}$$

Ainsi $(m+2)\times \cdots \times (2m+1) = m! \binom{2m+1}{m}$

Si $p \in]m+1, 2m+1]$ est premier, alors $p \mid (m+2)\times \cdots \times (2m+1)$ et est premier avec $m!$. Cela entraîne que $p \mid \binom{2m+1}{m}$

Comme les premiers de $]m+1, 2m+1]$ sont deux à deux premiers entre eux, on en déduit que $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

On montre maintenant que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.

$$4^m = (1+1)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k}$$ d'après la formule du binôme.

Mais en particulier, $4^m \geq \binom{2m}{m-1} + \binom{2m}{m} = \binom{2m+1}{m}$ d'après la formule du triangle de Pascal.

3) En appliquant l'hypothèse de récurrence et la question précédente,

$$\prod_{p\leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m} p \prod_{m+1 \leq p \leq 2m+1} p \leq 4^m \times 4^m = 4^{2m} \leq 4^{2m+1}$$

La formule (1) est vérifiée au rang $n=2m+1$.

Pour terminer la preuve de (1) il reste à traiter le cas $n=2$ et $n=1$

$$\prod_{p\leq 2} p = 2 \leq 4^2 = 16. \qquad \prod_{p\leq 1} p = 1 \leq 4.$$

Donc $\forall n\geq 1$, $\prod_{p\leq n} p \leq 4^n$.

4. Comme pour tout $1\leq t\leq n$, $\prod_{t<p\leq n} p \leq \prod_{p\leq n} p \leq 4^n$

puis $\prod_{t<p\leq n} p \geq \prod_{t<p\leq n} t = t^{\#\{t<p\leq n\}} = t^{\pi(n)-\pi(t)}$

Donc $t^{\pi(n)-\pi(t)} \leq 4^n$ pour tout $1\leq t\leq n$.

5) En prenant les logarithmes, on trouve $(\pi(n)-\pi(t))\log t \leq n\log 4$

c'est-à-dire $\pi(n) \leq \frac{n\log 4}{\log t} + \pi(t) \leq \frac{n\log 4}{\log t} + t$

En choisissant $t = \frac{n}{(\log n)^2}$; $\frac{n\log 4}{\log t} = \frac{n\log 4}{\log n}\left(\frac{1}{1-\frac{2\log\log n}{\log n}}\right)$

On obtient $\pi(n) \leq \frac{n}{\log n}\left(\frac{\log 4}{1-\frac{2\log\log n}{\log n}} + \frac{1}{\log n}\right)$

Il reste ensuite à vérifier que $\frac{\log 4}{1-\frac{2\log\log n}{\log n}} + \frac{1}{\log n} \leq \log 4 + 8\frac{\log\log n}{\log n}$ pour $n\geq 4$ par n assez grand

On peut montrer que cette inégalité est vérifiée pour $n \geqslant 36$ en étudiant les variations de $h(n) = \log 4 \left(1 - \frac{1}{1 - 2\frac{\log\log n}{\log n}}\right) + \frac{8\log\log n - 1}{\log n}$

puis on vérifie avec patience la majoration pour $n \leqslant 35$.

Exercice 2.

1. On utilise la formule du binôme pour développer $(1-x)^{n-m}$ puis on calcule

$$I(m,n) = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{m-1+k}\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}$$

Quand $k \in \{0,..,n-m\}$, $m+k \in \{m,...,n\}$; $I(m,n)$ est une somme de rationnels dont les dénominateurs sont compris entre m et n.

$I(m,n)$ est un rationnel de dénominateur divisant $\text{ppcm}(m,..,n)$ donc divisant d_n.

2. On reprend l'expression initiale de $I(m,n)$ sous forme intégrale.
Pour $y \in [0,1]$,

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} y^{m-1} I(m,n) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} y^{m-1} \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{m=1}^{n} (yx)^{m-1}(1-x)^{n-m}\binom{n-1}{m-1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(yx + (1-x)\right)^{n-1} dx$$ Cette intégrale vaut 1 si $y=1$ ou si $n=1$.

Si $y \neq 1$ et $n \neq 1$, cette intégrale vaut $\left[\frac{(yx+(1-x))^n}{n(y-1)}\right]_0^1 = \frac{y^n - 1}{n(y-1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y^k = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} y^{m-1}$

3 D'après la question 2,

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} y^{m-1} I(m,n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} y^{m-1} \qquad \forall y \in [0,1]$$

En identifiant les coefficients en y^{m-1}, on a $\binom{n-1}{m-1} I(m,n) = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq m \leq n$.

Puis $n \binom{n-1}{m-1} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = \binom{n}{m} \times m$

Donc $I(m,n) = \frac{1}{m\binom{n}{m}} \qquad \forall\ 1 \leq m \leq n$.

Comme $I(m,n)$ est un rationnel de dénominateur divisant d_n, cela entraîne que $m\binom{n}{m}$ divise d_n.

4. D'après 3), $n\binom{2n}{n}$ divise d_{2n}. Comme $d_{2n} \mid d_{2n+1}$, $n\binom{2n}{n} \mid d_{2n+1}$.

Puis $(2n+1)\binom{2n}{n} = \frac{(2n+1)!}{n!\,n!} = \binom{2n+1}{n+1} \times n+1$ qui divise d_{2n+1} d'après (3).

5. D'après 4), n et $2n+1$ divisent l'entier $d_{2n+1} / \binom{2n}{n}$.

Comme n et $2n+1$ sont premiers entre eux, $n(2n+1)$ divise $d_{2n+1} / \binom{2n}{n}$.

On en déduit que $n(2n+1)\binom{2n}{n} \mid d_{2n+1}$. En particulier $d_{2n+1} \geqslant n(2n+1)\binom{2n}{n}$

Or $\binom{2n}{n}$ est le plus grand coefficient binomial parmi les $\binom{2n}{j}$, $0 \leq j \leq 2n$

Ainsi $(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} = (1+1)^{2n} = 4^n$.

Cela prouve que $d_{2n+1} \geqslant n\,4^n$.

6. Si n est impair, $n=2\ell+1$, $d_n = d_{2\ell+1} \geqslant \ell 4^\ell = \ell 2^{2\ell}$ d'après (5)

$\geqslant 2^{2\ell+1}$ si $\ell \geqslant 2$

Donc si n est impair et supérieur à 5, l'inégalité est vérifiée.

Si n est pair, $n=2\ell$, alors $d_{2\ell} = \text{ppcm}(1,\dots,2\ell-1,2\ell)$

$= \text{ppcm}(1,\dots,2\ell-1)$ si $\ell \leq 2\ell-1$, i.e. $\ell \geqslant 1$

$= d_{2\ell-1}$

$d_{2\ell-1} = d_{2(\ell-1)+1} \geqslant (\ell-1)4^{\ell-1} = (\ell-1)2^{2\ell-2}$

puis $\ell-1 \geqslant 4$ pour $\ell \geqslant 5$, $d_n = d_{2\ell} \geqslant 2^n$ pour $n \geqslant 10$.

En rassemblant les cas pairs et impairs, on a bien montré que $d_n \geqslant 2^n$ pour $n \geqslant 9$

Puis $d_8 = [1,2,3,4,5,6,7] = 4\times 3\times 5\times 7 = 420 \geqslant 2^8 = 256$; $d_n \geqslant 2^n$ pour $n \geqslant 7$.

mais $d_6 = 60 < 2^6 = 64$

7) Pour $n \geqslant 10$,

$d_n = \text{ppcm}(1,\dots,n) = \text{ppcm}\{p^k : p \leq n \text{ et } p^k \leq n\}$

Par p donné, $p^k \leq n$ par $k \leq \dfrac{\log n}{\log p}$

$$d_n = \prod_{p\leq n} p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor}$$

On prend les logarithmes, $\log d_n = \sum_{p\leq n} \left\lfloor \dfrac{\log n}{\log p} \right\rfloor \log p \leqslant \log n \sum_{p\leq n} 1 = \log n \cdot \pi(n)$.

Donc $\pi(n) \geqslant \dfrac{\ln(d_n)}{\log(n)} \geqslant \dfrac{n\log 2}{\log n}$ pour $n \geqslant 9$.