M2 MFA Recherche 2021-2022

Feuille 2, estimations de Tchébychev

Le but de ces deux d'exercices est de démontrer un encadrement simple de $\pi(x)$. La référence est le chapitre 1 du livre de Gérald Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.

Théorème I. *Pour $x \geq 4$, on a*

$$\frac{x \ln 2}{\ln x} \leq \pi(x) \leq \Big(\ln 4 + \frac{8 \ln \ln x}{\ln x}\Big) \frac{x}{\ln x}.$$

Exercice 1. *Dans cet exercice on va montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n. \tag{1}$$

On en déduira ensuite la majoration annoncée au Théorème I. On suppose que (1) *est vérifiée jusqu'à un rang $n-1$ avec ≥ 3.*

1. *Montrer que si n est pair alors* (1) *est vraie au rang n.*
2. *Montrer que si $n = 2m+1$ alors*
$$\Big(\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p\Big) \Big| \binom{2m+1}{m} \leq 4^m.$$
3. *En déduire que* (1) *est vérifiée au rang n dans le cas où n est impair.*
4. *Montrer que Pour $1 < t \leq n$,*
$$t^{\pi(n) - \pi(t)} \leq \prod_{t < p \leq n} p \leq 4^n.$$
5. *En déduire la majoration annoncée en prenant les logarithmes et en choisissant $t = n/(\log n)^2$.*

Exercice 2. *Soit d_n le ppcm de $1, 2, \ldots, n$. Dans cet exercice nous montrons la minoration suivante due à Nair : pour $n \geq 7$, $d_n \geq 2^n$. On en déduira la minoration du Théorème I.*

L'idée centrale de la preuve est de considérer pour $1 \leq m \leq n$, l'intégrale

$$I(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-m} \, \mathrm{d}\, x.$$

1. *Montrer que $I(m, n)$ est un rationnel de dénominateur divisant d_n.*
2. *Montrer que pour tout $y \in [0, 1]$,*

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} y^{m-1} I(m, n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} y^{m-1}.$$

3. *Montrer que pour $1 \leq m \leq n$*

$$I(m, n) = \frac{1}{m\binom{n}{m}},$$

   puis que $m\binom{n}{m}$ divise d_n.
4. *Montrer que $n\binom{2n}{n}$ et $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divisent d_{2n+1}.*
5. *Montrer que $d_{2n+1} \geq n4^n$ pour $n \geq 1$.*
6. *Montrer que $d_n \geq 2^n$ pour $n \geq 9$. (On pourra ensuite caluler d_7 et d_8.)*
7. *Montrer que $\pi(n) \geq \ln(d_n)/\ln(n)$ et en déduire la minoration annoncée au Théorème I*