Exercice 1.

1. Soit σ une subdivision de $[a,b]$ σ : $\underset{a_0}{\overset{\shortparallel}{a}} < a_1 < \dots < a_n = b$.

$$V(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f'(t)\,dt \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f'(t)|dt \leq \int_a^b |f'(t)|\,dt.$$

Donc f est à variation bornée et $V(f) \leq \int_a^b |f'(t)|\,dt$

Montrons que $V(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt$.

Soit σ : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$.

D'après la formule des accroissements finis, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\xi_k \in]a_{k-1}, a_k[$ tel que $f(a_k) - f(a_{k-1}) = f'(\xi_k)$

$V(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |f'(\xi_k)|\,|a_k - a_{k-1}|$. On reconnait une somme de Riemann.

Comme f' est continue, $V(f,\sigma)$ tend vers $\int_a^b |f'(t)|\,dt$ quand le pas des subdivisions tend vers 0. Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ une subdivision de σ de $[a,b]$ telle que $V(f,\sigma) \geq \int_a^b |f'(t)|\,dt - \varepsilon$. On en déduit que $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt$.

2. On suppose que f est lipschitzienne de rapport $\lambda \geq 0$.
Soit σ une subdivision de $[a,b]$. Alors $V(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})| \leq \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1}$

$$\leq \lambda (b-a).$$

Donc f est à variation borné sur $[a,b]$ et $V(f) \leq \lambda(b-a)$.

3. Si f est croissante, alors pour tout subdivision σ de $[a,b]$, $V(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) - f(a_{k-1}) = f(b) - f(a)$

Donc f est à variation bornée et $V(f) = f(b) - f(a)$.

De même si f est décroissante, f est à variation bornée, $V(f) = f(a) - f(b)$.

4. Soit σ une subdivision de $[a,b]$.

Alors $V(f+g,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |(f+g)(a_k) - (f+g)(a_{k-1})|$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})| + |g(a_k) - g(a_{k-1})|$$

$$\leq V(f,\sigma) + V(g,\sigma) \leq V(f) + V(g)$$

Comme σ est une subdivision quelconque de $[a,b]$, $V(f+g,\sigma) \leq V(f)+V(g)$.

5. Soit σ une subdivision de $[a,b]$

$$V_{[a,b]}(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})|$$

Soit k_0 tel que $a_{k_0} = c$. Quitte à rajouter c dans la subdivision σ, on peut supposer qu'un tel entier c existe.

$$V_{[a,b]}(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{k_0} |f(a_k) - f(a_{k-1})| + \sum_{k=k_0+1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1})|$$

$$\leq V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$$

Puis $V_{[a,b]}(f) \leq V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$.

On vérifie maintenant qu'il y a égalité. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des subdivisions σ_1 de $[a,c]$ et σ_2 de $[c,b]$ telles que $V_{[a,c]}(f,\sigma_1) \geq V_{[a,c]}(f) - \varepsilon/2$ et $V_{[c,b]}(f,\sigma_2) \geq V_{[c,b]}(f) - \varepsilon/2$. (Dans le cas où f est à variation bornée)

Soit σ la subdivision de $[a,b]$, obtenue en prenant la réunion de σ_1 avec σ_2.

Alors $V(f,\sigma) = V_{[a,c]}(f,\sigma_1) + V_{[c,b]}(f,\sigma_2) \geq V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) - \varepsilon$.

Si $V_{[a,c]}(f)$ ou $V_{[c,b]}(f)$ est infini alors $V(f)$ est infini également.

Si σ_1 est une subdivision de $[a,c]$ telle que $V_{[a,c]}(f) \geq M$, alors σ_1 union une subdivision σ_2 de $[c,b]$ forme une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $V_{[a,b]}(f,\sigma) \geq V_{[a,c]}(f,\sigma_1) \geq M$.

6. D'après les questions 3 et 4, si f est la somme de 2 fonctions monotones sur $[a,b]$, alors f est à variation bornée

Réciproquement, supposons que f soit à variation bornée.
Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = V_{[a,x]}(f)$.
Si $y > x$, alors d'après la question 5, $g(y) = V_{[x,y]}(f) + g(x)$.
On en déduit que g est croissante.
Soit $h = f - g$. Comme $V_{[x,y]}(f) \geqslant |f(x) - f(y)| \geqslant f(y) - f(x)$,
$g(y) \geqslant g(x) + f(y) - f(x)$, c'est-à-dire $f(x) - g(x) \geqslant f(y) - g(y)$.
h est décroissante et $f = h + g$ est la somme de 2 fonctions monotones.

Exercice 2.

1. On utilise le thm d'holomorphie d'une fonction définie par une intégrale.

Thm - Soit (X, μ) un espace mesuré. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.
Soit $f : X \times U \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes.
(i) $\forall z \in U$ $x \mapsto f(x, z)$ est mesurable
(ii) pour presque tout $x \in X$, $z \mapsto f(x,z)$ est holomorphe sur U
(iii) $\forall K$ compact $\subset U$, il existe une fonction g_K intégrable sur X telle que pour presque tout $x \in X$, $\forall z \in K$, $|f(x,z)| \leq |g_K(x)|$.

Alors $F : z \mapsto \int_X f(x,z)\, d\mu(x)$ est holomorphe sur U
et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\, d\mu(x)$.

- Si K est un compact de $\mathbb{C}$, alors $\forall x \in [1, +\infty[$, $\forall s \in K$,

$$|e^{-x} x^{s-1}| \leqslant e^{-x} x^{\sigma_K - 1} \quad \text{avec } \sigma_K = \max_{s \in K} \operatorname{Re} s$$

Puis $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{\sigma_K - 1}\, dx < +\infty$

La condition (iii) est bien vérifiée. Les deux autres conditions sont claires.
Donc Γ_2 est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2. On commence par travailler dans le $\frac{1}{2}$ plan $\operatorname{Re} s > 0$.
Pour $\operatorname{Re} s > 0$, $e^{-x} x^{s-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+s-1}}{k!}$

On vérifie alors que l'on peut permuter $\int$ et Σ avec les théorèmes de Fubini.

En appliquant le théorème de Fubini Tonelli, on montre que $\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+z-1} \right| dx < +\infty$

et ainsi, avec le théorème de Fubini

$$\int_0^1 x^{z-1} e^{-x} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{k+z-1} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+z)}.$$

pour $\operatorname{Re} z > 0$.

On vérifie ensuite que $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples aux entiers négatifs.

- pour tout n, $z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $-n$.

- Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe N_K tel que $K \subset \overline{D(0, N_K)}$ (où $D(0,r)$ est le disque de centre 0 et de rayon r).

De plus pour $n \geq N_K + 1$, $\frac{1}{|z+n|} \leq 1 \quad \forall z \in K$

et ainsi $\left| \sum_{n=N_K+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)} \right| \leq \sum_{n=N_K+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < +\infty \quad \forall z \in K.$

On a ainsi une convergence uniforme sur K de $\sum_{n \geq N_K} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}$.

D'après les théorèmes de série de fonctions ~~Kdo~~ méromorphe, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

On termine en appliquant le théorème de prolongement analytique pour Γ_1 puis pour Γ.