M2 MFA Recherche 2021-2022

**Exercices sur la fonction $\Gamma$ et sur les fonctions à variation bornée**

**Exercice 1.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En reprenant la notation $V(f,\sigma)$ vue en cours, on définit*

$$V_{[a,b]}(f) = V(f) := \sup_{\sigma} V(f,\sigma),$$

*où le sup porte sur toutes les subdivision $\sigma$ du segment $[a,b]$.*

1. *Montrer que si $f$ est $C^1$ sur $[a,b]$, alors $f$ est à variation bornée et que*
$$V(f) = \int_a^b |f'(t)| \,\mathrm{d}\, t.$$
2. *Montrer que si $f$ est lipschtzienne alors $f$ est à variation bornée.*
3. *Montrer que si $f$ est monotone alors $f$ est à variation bornée.*
4. *Montrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur $[a,b]$, alors*
$$V(f+g) \leq V(f) + V(g).$$
5. *Montrer que si $c \in [a,b]$, alors $V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$.*
6. *Montrer que $f$ est à variation bornée sur $[a,b]$ si et seulement si $f$ est somme de deux fonctions monotones sur $[a,b]$. (Indication pour le sens direct : on pourra considérer la fonction $g$ définie par $g(x) = V_{[a,x]}(f)$).*

**Exercice 2.** *On rappelle que la fonction $\Gamma$ est définie sur $\Re es > 0$ par*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \,\mathrm{d}\, x.$$

*On définit deux fonctions associées :*

$$\Gamma_1(s) = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} \,\mathrm{d}\, x, \quad \Gamma_2(s) = \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \,\mathrm{d}\, x.$$

1. *Montrer que la fonction $\Gamma_2$ est entière, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$.*
2. *Montrer que pour $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$,*
$$\Gamma_1(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{s+m}.$$
3. *En déduire que $\Gamma$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ entier avec comme pôles les élements de $-\mathbb{N}$, le résidus en $-m$ pour $m \in \mathbb{N}$ vallant $(-1)^m/m!$.*