

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1990/06-1990/12.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

Une classe de fibrés vectoriels holomorphes sur les 2-tores complexes

Matei TOMA

Résumé — On prouve le résultat suivant : « Tout fibré vectoriel topologique E sur un tore complexe deux-dimensionnel X ayant $c_1(E) \in \text{NS}(X)$ et $\Delta(E) = 0$ admet une structure holomorphe ». Ici

$$\Delta(E) = \frac{1}{r}(c_2(E) - \frac{r-1}{2r}c_1(E)^2)$$

où $r = \text{rang } E$. On obtient ainsi des exemples de fibrés vectoriels holomorphes dont les classes de Chern n'appartiennent pas au domaine couvert par les méthodes de [1] et [3].

A class of holomorphic vector bundles on two-dimensional tori

Abstract — One proves the following result: "Every topological vector bundle E on a two-dimensional complex torus X having $c_1(E) \in \text{NS}(X)$ and $\Delta(E) = 0$ has a holomorphic structure". Here

$$\Delta(E) = \frac{1}{r}(c_2(E) - \frac{r-1}{2r}c_1(E)^2)$$

where $r = \text{rank } E$. In this way one obtains examples of holomorphic vector bundles whose Chern classes are outside the range covered by the methods of [1] and [3].

1. Le résultat principal de cette Note est la proposition suivante.

PROPOSITION. — Tout fibré vectoriel topologique (complexe) E sur un tore complexe deux-dimensionnel X ayant $c_1(E) \in \text{NS}(X)$ et $\Delta(E) = 0$ admet une structure de fibré vectoriel holomorphe.

On a noté

$$\Delta(E) = \frac{1}{r}(c_2(E) - \frac{r-1}{2r}c_1(E)^2)$$

où r est le rang de E .

Les fibrés vectoriels holomorphes en question sont construits en prenant des images directes des fibrés, holomorphes en droites par des recouvrements non ramifiés $X' \rightarrow X$. Le point principal de la démonstration est le lemme suivant :

LEMME. — Soit X un tore complexe 2-dimensionnel, $a \in \text{NS}(X)$ et p un nombre premier avec $p \mid (1/2)a^2$. Il existe alors un recouvrement non ramifié $q: X' \rightarrow X$ de degré p et un élément $a' \in \text{NS}(X')$ ainsi que

$$pa' = q^*(a).$$

La démonstration du lemme, assez longue, utilise la structure concrète du groupe de Néron-Severi de X donnée par le théorème d'Appell-Humbert.

2. Soit X une surface \mathbb{C} -analytique compacte non algébrique. C'est un problème ouvert celui de décider quels sont les fibrés vectoriels topologiques qui admettent une structure de fibré vectoriel holomorphe. On a déterminé quels sont les fibrés vectoriels topologiques admettant des structures holomorphes filtrables. On rappelle qu'un fibré vectoriel holomorphe E est par définition filtrable s'il existe une filtration $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_r = E$ par des sous-modules cohérents F_i de rang i . E est par définition réductible s'il existe un

Note présentée par Henri CARTAN.

sous-module cohérent F de E avec $0 < \text{rang } F < \text{rang } E$. Il existe des fibrés non filtrables et même irréductibles sur des surfaces non algébriques mais dans tous les exemples connus ces fibrés admettaient aussi des structures holomorphes filtrables sur leur type topologique sous-jacent (cf. [1], [3]).

La proposition ci-dessus permet d'obtenir des exemples de fibrés vectoriels topologiques admettant seulement des structures holomorphes non filtrables ou même irréductibles. Il résulte que dans certains cas la classe des fibrés vectoriels topologiques admettant des structures holomorphes est strictement plus large que celle des fibrés vectoriels topologiques qui admettent des structures holomorphes filtrables. Plus précisément on a :

COROLLAIRE 1. — Soient X un 2-tore non algébrique, r un entier positif et $a \in \text{NS}(X)$ satisfaisant $r \mid (1/2)a^2$ et $r^2 \nmid (1/2)a^2$.

Alors il existe un fibré vectoriel topologique E sur X de rang r , $c_1(E) = a$ et $\Delta(E) = 0$ admettant des structures holomorphes mais pas de structure holomorphe filtrable.

COROLLAIRE 2. — Soient X un 2-tore et r un entier positif. On suppose que $\text{NS}(X)$ est cyclique engendré par a et $a^2 = -2r$. Alors il existe un fibré vectoriel topologique E sur X de rang r , $c_1(E) = a$ et $\Delta(E) = 0$ qui admet des structures holomorphes mais pas de structure holomorphe réductible.

La remarque suivante montre que les hypothèses des corollaires peuvent être effectivement remplies.

Remarque. — Pour tout entier positif n il existe des 2-tores non algébriques X avec $\text{NS}(X)$ cyclique engendré par a et $a^2 = -2n$.

Pour la preuve on utilise [2] Lemma 2.1 et [3] Appendix.

Details des démonstrations paraîtront ailleurs (voir toutefois [4]).

Note remise le 18 juin 1990, acceptée le 25 juin 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. BĂNICĂ et J. LE POTIER, Sur l'existence des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces non algébriques, *J. reine angew. Math.*, 378, 1987, p. 1-31.
- [2] V. BRINZĂNESCU et P. FLONDOR, Holomorphic 2-vector bundles on non-algebraic 2-tori, *J. reine angew. Math.*, 363, 1985, p. 47-58.
- [3] G. ELENCAWJG et O. FORSTER, Vector bundles on manifolds without divisors and a theorem on deformations, *Ann. Inst. Fourier*, 32.4, 1982, p. 25-51.
- [4] M. TOMA, *A class of holomorphic vector bundles on two-dimensional tori*, Preprint I.N.C.R.E.S.T., 1990.

Département de Mathématiques, I.N.C.R.E.S.T., Bd. Păcii 220,
79622 Bucarest, Roumanie.