Géométrie analytique/*Analytic Geometry*

Une classe de fibrés vectoriels holomorphes sur les 2-tores complexes

Matei TOMA

Résumé – On prouve le résultat suivant : « Tout fibré vectoriel topologique E sur un tore complexe deux-dimensionnel X ayant $c_1(\mathrm{E}) \in \mathrm{NS}(\mathrm{X})$ et $\Delta(\mathrm{E})=0$ admet une structure holomorphe ». Ici

$$\Delta(\mathrm{E})=\frac{1}{r}\left(c_2(\mathrm{E})-\frac{r-1}{2r}c_1(\mathrm{E})^2\right)$$

où $r=\operatorname{rang}\mathrm{E}$. On obtient ainsi des exemples de fibrés vectoriels holomorphes dont les classes de Chern n'appartiennent pas au domaine couvert par les méthodes de [1] et [3].

A class of holomorphic vector bundles an two-dimensional tori

Abstract – *One proves the following result: "Every topological vector bundle* E *on a two-dimensional complex torus* X *having* $c_1(\mathrm{E}) \in \mathrm{NS}(\mathrm{X})$ *and* $\Delta(\mathrm{E})=0$ *has a holomorphic structure". Here*

$$\Delta(\mathrm{E})=\frac{1}{r}\left(c_2(\mathrm{E})-\frac{r-1}{2r}c_1(\mathrm{E})^2\right)$$

where $r=\operatorname{rank}\mathrm{E}$. *In this way one obtains examples of holomorphic vector bundles whose Chern classes are outside the range covered by the methods of* [1] *and* [3].

1. Le résultat principal de cette Note est la proposition suivante.

PROPOSITION. – Tout fibré vectoriel topologique (complexe) E sur un tore complexe deux-dimensionel X ayant $c_1(\mathrm{E}) \in \mathrm{NS}(\mathrm{X})$ et $\Delta(\mathrm{E})=0$ admet une structure de fibré vectoriel holomorphe.

On a noté

$$\Delta(\mathrm{E})=\frac{1}{r}\left(c_2(\mathrm{E})-\frac{r-1}{2r}c_1(\mathrm{E})^2\right)$$

où r est le rang de E.

Les fibrés vectoriels holomorphes en question sont construits en prenant des images directes des fibrés, holomorphes en droites par des recouvrements non ramifiés $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$. Le point principal de la démonstration est le lemme suivant :

LEMME. – *Soit* X *un tore complexe 2-dimensionel,* $a \in \mathrm{NS}(\mathrm{X})$ *et* p *un nombre premier avec* $p \mid (1/2)a^2$. *Il existe alors un recouvrement non ramifié* $q:\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *de degré* p *et un élément* $a' \in \mathrm{NS}(\mathrm{X}')$ *ainsi que*

$$pa' = q^*(a).$$

La démonstration du lemme, assez longue, utilise la structure concrète du groupe de Néron-Severi de X donnée par le théorème d'Appell-Humbert.

2. Soit X une surface **C**-analytique compacte non algébrique. C'est un problème ouvert celui de décider quels sont les fibrés vectoriels topologiques qui admettent une structure de fibré vectoriel holomorphe. On a déterminé quels sont les fibrés vectoriels topologiques admettant des structures holomorphes filtrables. On rappelle qu'un fibré vectoriel holomorphe E est par définition filtrable s'il existe une filtration $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2 \subset \ldots \subset \mathrm{F}_r = \mathrm{E}$ par des sous-modules cohérents F_i de rang i. E est par définition réductible s'il existe un

Note présentée par Henri CARTAN.

0764-4442/90/03110257 $ 2.00

sous-module cohérent F de E avec $0 < \operatorname{rang} F < \operatorname{rang} E$. Il existe des fibrés non filtrables et même irréductibles sur des surfaces non algébriques mais dans tous les exemples connus ces fibrés admettaient aussi des structures holomorphes filtrables sur leur type topologique sous-jacent (*cf.* [1], [3]).

La proposition ci-dessus permet d'obtenir des exemples de fibrés vectoriels topologiques admettant seulement des structures holomorphes non filtrables ou même irréductibles. Il résulte que dans certains cas la classe des fibrés vectoriels topologiques admettant des structures holomorphes est strictement plus large que celle des fibrés vectoriels topologiques qui admettent des structures holomorphes filtrables. Plus précisément on a :

COROLLAIRE 1. — *Soient* X *un 2-tore non algébrique, r un entier positif et* $a \in \mathrm{NS}(\mathrm{X})$ *satisfaisant* $r \mid (1/2) a^2$ *et* $r^2 \nmid (1/2) a^2$.

Alors il existe un fibré vectoriel topologique E *sur* X *de rang r,* $c_1(\mathrm{E}) = a$ *et* $\Delta(\mathrm{E}) = 0$ *admettant des structures holomorphes mais pas de structure holomorphe filtrable.*

COROLLAIRE 2. — *Soient* X *un 2-tore et r un entier positif. On suppose que* NS (X) *est cyclique engendré par a et* $a^2 = -2r$. *Alors il existe un fibré vectoriel topologique* E *sur* X *de rang r,* $c_1(\mathrm{E}) = a$ *et* $\Delta(\mathrm{E}) = 0$ *qui admet des structures holomorphes mais pas de structure holomorphe réductible.*

La remarque suivante montre que les hypothèses des corollaires peuvent être effectivement remplies.

Remarque. — Pour tout entier positif n il existe des 2-tores non algébriques X avec NS (X) cyclique engendré par a et $a^2 = -2n$.

Pour la preuve on utilise [2] Lemma 2.1 et [3] Appendix.

Details des démonstrations paraîtront ailleurs (*voir* toutefois [4]).

Note remise le 18 juin 1990, acceptée le 25 juin 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. BĂNICĂ et J. LE POTIER, Sur l'existence des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces non algébriques, *J. reine angew. Math.*, 378, 1987, p. 1-31.

[2] V. BRINZĂNESCU et P. FLONDOR, Holomorphic 2-vector bundles on non-algebraic 2-tori, *J. reine angew. Math.*, 363, 1985, p. 47-58.

[3] G. ELENCWAJG et O. FORSTER, Vector bundles on manifolds without divisors and a theorem on deformations, *Ann. Inst. Fourier*, 32.4, 1982, p. 25-51.

[4] M. TOMA, *A class of holomorphic vector bundles on two-dimensional tori*, Preprint I.N.C.R.E.S.T., 1990.

Département de Mathématiques, I.N.C.R.E.S.T., Bd. Pacii 220,
79622 *Bucarest, Roumanie.*