TD sur les suites, séries de fonctions et sur les séries de Fourier.

Ex 1.1

Pour $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} =: f(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1$, la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Ex 1.2.

. Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est bornée sur cet intervalle.
Soit $M = \|f\|_\infty$. Alors $\left|\mathbb{1}_{[0,x]}(t) f_n(t)\right| \le M \quad \forall x \in [0,1]$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x f(t^n)\,dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} f(t^n)\,dt = f(0)\,x.$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction $g : x \longmapsto f(0)\,x$.

. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $[0,1]$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, x' \in [0,1]$ avec $|x - x'| < \eta$, $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

$$\left|\int_0^x f(t^n) - x f(0)\right| = \left|\int_0^x \left(f(t^n) - f(0)\right) dt\right|$$
$$\le \int_0^{1-\varepsilon/2M} |f(t^n) - f(0)|\,dt + \int_{1-\varepsilon/2M}^1 2M\,dt$$

le 2ème terme du membre de droite est inférieur à ε.

Pour $0 \le t \le 1 - \frac{\varepsilon}{2M}$, $0 \le t^n \le \left(1 - \frac{\varepsilon}{2M}\right)^n$. Il existe alors N_η tel que $\forall n \ge N_\eta$, $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2M}\right)^n < \eta$.

Alors pour $n \ge N_\eta$ $\int_0^{1-\varepsilon/2M} |f(t^n) - f(0)|\,dt < \varepsilon$

Donc $\|f_n - g\|_\infty < 2\varepsilon \quad \forall n \ge N_\eta$. La convergence de (f_n) vers g est uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3.

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Pour n assez grand, $\left|\frac{x}{n}\right| < 1/2$ et ainsi $f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$

$$= \exp\left(x + O_x\left(\frac{x^2}{n}\right)\right) \text{ quand } n \to \infty$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(x + O_x\left(\frac{x^2}{n}\right)\right) = e^x$

La suite (f_n) converge simplement vers $x \mapsto e^x$.

Montrons que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

1ère méthode

Soit $A > 0$. On vérifie que $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$ uniformément sur $[-A, A]$.

Soit $g_n(x) = f_n(x) - e^x$

Alors $g_n'(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} - e^x$. On remarque que g_n' ressemble à g_n

Soit x_0 tel que $g_n'(x_0) = 0$, c'est-à-dire tel que $\left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^{n-1} = e^{x_0}$

$$g_n(x_0) = \left|\left(1 + \frac{x_0}{n}\right)\left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^{n-1} - e^{x_0}\right| = \left|\left(1 + \frac{x_0}{n}\right) - 1\right| e^{x_0}$$

$$= \frac{|x_0|}{n} e^{x_0} \leq \frac{Ae^A}{n}$$

Alors $\|g_n\|_\infty \leq \max\left(\frac{Ae^A}{n}, \left|\left(1 + \frac{A}{n}\right)^n - e^A\right|, \left|\left(1 - \frac{A}{n}\right)^n - e^{-A}\right|\right)$

2ème méthode

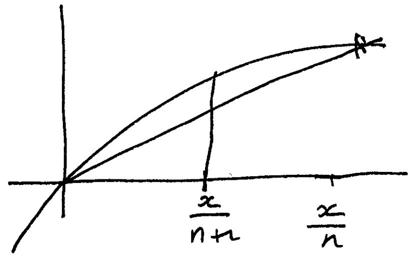
Avec l'exercice 5.

Soit $f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$ pour $\left|\frac{x}{n}\right| < 1/2$.

Pour simplifier on va résoudre seulement le cas $x \geq 0$.

Soit $g(t) = \ln(1 + t)$; g est concave

Exercice 3, suite de la 2ème méthode.



$\frac{x}{n+1} \in [0, \frac{x}{n}]$ (quand x est positif)

$$\frac{x}{n+1} = \frac{x}{n} \times \frac{n}{n+1} + 0\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Ainsi, $g\left(\frac{x}{n+1}\right) \geqslant \frac{n}{n+1} g\left(\frac{x}{n}\right)$, c'est-à-dire

$$(n+1) \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \geqslant n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

puis $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$

On applique le théorème de Dini (cf exercice 5) à la suite $e^x - f_n(x)$.

3ème méthode.

On applique la formule de Taylor Lagrange sur $[-A, A]$ (et $n > 2A$).

Soit $h(u) = \ln(1+u)$ pour $u > -1$; h est C^∞ sur $]-1, +\infty[$.

$h'(u) = \frac{1}{1+u}$, $h''(u) = -\frac{1}{1+u^2}$ et $h(u) = h(0) + uh'(0) + \frac{u^2}{2} h''(\theta u)$

pour un $\theta \in]0,1[$

Ainsi $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} \times \frac{(-1)}{\left(1 + \theta \frac{x}{n}\right)^2}$

puis $$\left| n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x \right| \leq \frac{x^2}{2n} \times \frac{1}{\min\limits_{\theta \in]0,1[} \left(1 + \frac{\theta x}{n}\right)^2}$$

$$\leq \frac{2x^2}{n} \leq \frac{2A^2}{n}$$

On peut terminer en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction exponentielle

$|f_n(x) - e^x| = |e^{g_n(x)} - e^x|$ où on a noté $g_n(x) = n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, $g(x) = x$

$\leqslant \|g_n - g\|_\infty \max e^v$ (v compris entre x et $g_n(x)$) $\leqslant \|g_n - g\|_\infty e^{3A}$ pour n assez grand $n > 100A+1$

La suite (f_n) converge donc uniformément vers $x \mapsto e^x$ sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Ex4. $a>0$, $f_n(x) = \dfrac{a^n x}{1+na^n x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Si $a=1$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si $0<a<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si $a>1$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{a^n |x|}{na^n |x|^2} = \dfrac{1}{n|x|}$ si $x \neq 0$

et $f_n(0)=0$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dans tous les cas, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

On étudie la convergence uniforme.

. Si $a>1$, on peut deviner qu'il y a un problème en 0.

$$f_n(a^{-n}) = \frac{a^n(a^{-n})}{1+na^n a^{-2n}} = \frac{1}{1+na^{-n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{car } n\left(\frac{1}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La convergence n'est pas uniforme.

. Si $a<1$, $|f_n(x)| \leq \left(a^n|x|, \dfrac{1}{n|x|}\right) \leq \begin{cases} a^n & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1/n & \text{si } |x|>1 \end{cases}$

$$|f_n(x)| \leq \min\left(a^n, \frac{1}{n}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La suite (f_n) converge uniformément vers 0.

. Si $a=1$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$; $f_n'(x) = \dfrac{1+nx^2-2x^2n}{(1+nx^2)^2} = 1-nx^2$

$$\left|f_n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+1} = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{n}},$$ la convergence est uniforme.

Exercice 5

a) Soit $\varepsilon>0$. Comme (f_n) converge simplement vers f, pour tout $x\in[0,1]$, il existe $N_x\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N_x$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

La suite (f_n) étant décroissante, $f_n(t)\geq f(t)$ $\forall t$ et ainsi

$\forall n\geq N_x$ $\quad f_n(x)-f(x)=|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Comme f et f_{N_x} sont continues, il existe r_x tel que $\forall t\in]x-r_x,x+r_x[$, on ait $|f_{N_x}(t)-f_{N_x}(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$ et $|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$.

Puis pour tout $t\in]x-r_x,x+r_x[$, on a

$$|f_{N_x}(t)-f(t)|<|f_{N_x}(t)-f_{N_x}(x)|+|f_{N_x}(x)-f(x)|+|f(x)-f(t)|<\varepsilon$$

En particulier, $\forall t\in]x-r_x,x+r_x[$, $0\leq f_{N_x}(t)-f(t)<\varepsilon$.

b) Comme $[0,1]$ est compact et $[0,1]=\bigcup_{x\in[0,1]}\left(]x-r_x,x+r_x[\cap[0,1]\right)$, il existe $x_1,\dots,x_n\in[0,1]$ tels que $[0,1]=\bigcup_{i=1}^{n}V_{x_i}$ avec $V_x=]x-r_x,x+r_x[\cap[0,1]$

Soient $N_{x_1},\dots,N_{x_n}$ les entiers de la question a) associés aux x_i.

Prenons $N=\max_{1\leq i\leq n}N_{x_i}$.

Alors $\forall t\in[0,1]$, $0\leq f_N(t)-f(t)\leq\varepsilon$

En effet si $t\in[0,1]$, alors $\exists i$ t.q $t\in V_{x_i}$ puis $0\leq f_N(t)-f(t)\leq f_{N_{x_i}}(t)-f(t)\leq\varepsilon$.

Comme la suite (f_n) est décroissante, $\forall t\in[0,1]$, $\forall n\geq N$, $0\leq f_n(t)-f(t)\leq\varepsilon$.

Cela prouve que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

1.2. Série de fonctions

Exercice 6.

a) $u_n(x) = x^{\alpha} e^{-nx^2}$ sur $[0,+\infty[$ avec $\alpha>0$ donné.

Si $x\neq 0$, $e^{-nx^2} = (e^{-x^2})^n$ est un terme d'une série géométrique de raison e^{-x^2}

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x^{\alpha}}{1-e^{-x^2}} & \text{si } x>0. \end{cases} = S_{\alpha}(x)$$

La série $\sum u_n$ converge simplement vers la fonction $S_{\alpha}(x)$.

On étudie ensuite la convergence normale ou uniforme.

Si $\alpha \geq 1$, u_n est dérivable sur $[0,+\infty[$

$u_n'(x) = x^{\alpha-1} e^{-nx^2}(\alpha - 2x^2 n)$

	0		$\sqrt{\alpha/2n}$		
u_n'		$+$	0	$-$	
u_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\|u_n\|_{\infty} = u_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/2} e^{-n\alpha/2n} = \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\alpha/2} e^{-\alpha/2}$$

Si $\alpha>2$, $\alpha/2>1$, $\sum \|u_n\|_{\infty} < +\infty$, la série est normalement convergente.

Si $0<\alpha<2$, $\|u_n\|_{\infty} \geq u_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^{1/2}}{2n}$, $\sum \|u_n\|_{\infty}$ diverge,

la série $\sum u_n$ n'est pas normalement convergente. Est-elle uniformément convergente dans cette zone ?

Pour x proche de 0, $S_{\alpha}(x) = \dfrac{x^{\alpha}}{1-(1-x^2+O(x^4))} = \dfrac{x^{\alpha-2}}{1+O(x^2)}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha=2 \\ +\infty & \text{si } \alpha<2 \end{cases}$$

, la fonction S_{α} n'est pas continue en 0 quand $0<\alpha<2$.

$\sum u_n$ ne converge pas uniformément vers S_{α}.

Exercice 6 suite du a>.

Conclusion du a>. $\sum_n v_n$ converge normalement (donc uniformément) vers S_α quand $\alpha > 2$.

Si $\alpha < 2$, la convergence n'est ni normale, ni uniforme.

b> $u_n(x) = n x e^{-nx^2}$ sur $[0,+\infty[$.

On remarque que $u_n(x) = v_n'(x)$ avec $v_n(x) = -\frac{1}{2} e^{-nx^2}$.

En faisant comme au a>, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-e^{-x^2}} & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad =: h(x)$$

Si $\sum u_n$ était uniformément convergente sur $[0,+\infty[$ vers une fonction g, alors la fonction h serait dérivable de dérivée g. Or h n'est pas dérivable (car pas continue) en 0, la convergence de $\sum u_n$ n'est pas uniforme.

Par contre pour $x=0$, $\sum u_n(x) = 0$ et pour $x>0$, $e^{-nx^2} \leq 1/n^3$ pour n assez grand, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ converge.

Exercice 7.

a> Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{e^{i2^n x}}{n!} \right| = \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge vers e.

La série de fonctions définissant f est normalement convergente donc simplement convergente ; la fonction f est bien définie.

b> Soit $u_n(x) = \frac{e^{i2^n x}}{n!}$, u_n est de classe C^∞, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_n'(x) = i 2^n u_n(x)$, puis $u_n^{(k)}(x) = (i 2^n)^k u_n(x)$.

puis $\|u_n^{(k)}\|_\infty = \frac{2^{kn}}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n^{(k)}\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^k)^n}{n!} = e^{(2^k)}$

Exercice 7 suite.

En appliquant alors le théorème de dérivations de ~~fonction~~ série de fonctions avec convergence uniforme on montre que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ puis que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (i2^n)^k \frac{e^{i2^n x}}{n!}$$

En $x=0$, on obtient $f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i2^n)^k}{n!} = i^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^k)^n}{n!}$

$$= i^k e^{2^k}$$

c) $\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k\geq 0} \frac{i^k e^{(2^k)}}{k!} x^k = \sum v_k x^k$ par définition.

Puis $\left|\frac{v_{k+1}}{v_k}\right| = \frac{e^{(2^{k+1})}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{(e^{2^k})} = \frac{e^{2^k}}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

D'après la règle d'Alembert, le rayon de convergence est nul.

Exercice 8.

. Soit $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ pour $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

* Si $x\geq 0$, $\left|\frac{e^{-nx}}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+1}$ converge ; on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ converge.

* si $x<0$, alors pour n assez grand, $e^{-nx}\geq n^2$, $u_n(x)\geq \frac{1}{2}$, la série diverge

. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ qui est bien définie pour $x\geq 0$ d'après la question précédente.

La série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ et les u_n sont continues, donc f est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8 suite.

- Pour $x \geq 0$, $u_n'(x) = \dfrac{-n e^{-nx}}{n^2+1}$

Soit $a > 0$. Alors $|u_n'(x)| \leq \dfrac{n e^{-na}}{n^2+1}$ $\forall x \geq a$.

Or $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n e^{-na}}{n^2+1}$ est convergente. La série $\sum u_n'$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. On en déduit que f est dérivable sur $[a, +\infty[$.

Comme $a > 0$ est quelconque, f est dérivable sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$.

(En 0, $\sum u_n'(0) = \sum_n -\dfrac{n}{n^2+1}$ qui diverge.

Exercice 9.

$u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Transformation d'Abel, $u_n(x) = (-1)^n b_n(x)$ avec $b_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$.

On pose alors $A(N) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n$ (avec $A(0) = 0$)

Ainsi $|A(N)| \leq 1$.

L'astuce de la transformation d'Abel consiste à remplacer $(-1)^n$ par $A(n) - A(n-1)$:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x) = \sum_{n=1}^{N} (A(n) - A(n-1))\, b_n(x) = \sum_{n=1}^{N} A(n)\, b_n(x) - \sum_{n=1}^{N} A(n-1) b_n(x).$$

On rassemble les $A(n)$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n(x) = \sum_{n=1}^{N-1} A(n) (b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A(N)\, b_N(x) - \underbrace{A(0)\, b_1(x)}_{0}.$$

Puis $|b_n(x) - b_{n+1}(x)| = \left| \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n+1+x} \right| \leq \dfrac{1}{(n+x)(n+1+x)}$.

On en déduit $\left| \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} \dfrac{2}{(n+x)(n+1+x)} + 2 < \infty$

La série est convergente sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 9 suite.

Pour $\alpha>-1$, $\left|\sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-\alpha)(n+1-\alpha)} < \infty$

La série est uniformément convergente sur $[\alpha, +\infty[$ $\forall \alpha>-1$ donc

$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est continue sur $]-1,+\infty[= \bigcup_{\alpha>-1} [\alpha, +\infty[$.

· les fonctions u_n sont dérivables sur $]-1,+\infty[$, et même C^∞.

$u_n'(x) = -\frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$, $u_n''(x) = \frac{2(-1)^n}{(n+x)^3}$, ..., $u_n^{(k)}(x) = (-1)^k \times \frac{k!}{(n+x)^{k+1}}$

En appliquant par récurrence le théorème de dérivation de séries fonctions avec des dérivées uniformément convergentes sur tout compact, on montre que f est C^∞ sur $]-1,+\infty[$ (Vu que $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact de $]-1,+\infty[$.

Exercice 10.

Soit $a>1$. Alors $\forall s \geqslant a$, $|f(s)| \leqslant \sum \frac{1}{n^a}$.

La série $\sum \frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$ donc f est définie continue sur $[a,+\infty[$. Comme $a>1$ est quelconque, f est continue sur $]1,+\infty[= \bigcup_{a>1}]a,+\infty[$

Puis pour les dérivées successives, $u_n(s) = \exp(-s\ln(n))$ et ainsi,

$u_n'(s) = -\frac{\ln(n)}{n^s}$, ..., $u_n^{(k)}(s) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^s}$

$\sum_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}(s)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>1$, f est C^∞.

L'exercice 13.

Existe-t-il $f \in L_{2\pi}(\mathbb{C})$ dont la série de Fourier est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n+1}}$?

Si une telle fonction existait alors $\|f\|_2 = +\infty$ vu que d'après la formule de Parseval, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$.

Il n'existe donc pas de $f \in L_{2\pi}(\mathbb{C})$ de carré intégrable dont la série de Fourier est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n+1}}$.

Mais existe-t-il un $f \in L_{2\pi}(\mathbb{C}) \setminus L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ avec une telle série de Fourier ?

On considère $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n+1}}$ pour $x \in]0, 2\pi[$.

En utilisant le théorème d'Abel, on montre que cette série est uniformément convergente sur tout compact de $]0, 2\pi[$.

En effet, $\frac{e^{inx}}{\sqrt{n+1}} = a_n b_n$ avec $a_n = e^{inx}$

Puis pour $1+M \leq N$ entiers, $\sum_{n=M+1}^{N} e^{inx} = e^{i(M+1)x}\left(\frac{1-e^{i(N-M)x}}{1-e^{ix}}\right) = A(M,N)$

$= A(N)$ si $M = 0$

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} e^{inx}\right| = \left|\frac{\sin\frac{(N-M)x}{2}}{\sin x/2}\right| \leq \frac{1}{|\sin x/2|}.$$

Si C est un compact de $]0, 2\pi[$, il existe $a > 0$ tel que $C \subset [a, 2\pi - a]$.

Dans ce cas $|A(M,N)| \leq \frac{1}{|\sin(a/2)|}$. La série converge uniformément sur $[a, 2\pi - a]$, d'après le critère d'Abel sur la convergence uniforme

La fonction $S(x)$ est donc continue sur $]0, 2\pi[$.

Posons $S(0) = 0$

On vérifie maintenant si $x \mapsto S(x)$ est intégrable sur $[0, 2\pi[$.
On pourra alors en déduire que $S \in L_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Comme S est continue sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ (avec $0 < a < 2\pi/2$),
$\int_a^{2\pi - a} |S(x)|\, dx < +\infty$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{N_x} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n+1}} + \sum_{N_x+1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n+1}}$$ où N_x est un paramètre à choisir

le premier terme est $O(\sqrt{N_x})$.

Pour le second, en faisant une sommation d'Abel, on montre que

$$\sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n+1}} \ll \frac{1}{\sqrt{N_x}} \times \frac{1}{|\sin \pi x/2|} \ll \frac{1}{\sqrt{N_x}\, \|x\|}$$ où $\|x\|$ est la distance de x à $\mathbb{Z}$: $\|x\| = \min_{k \in \mathbb{Z}} (|x-k|)$ $\ll \frac{1}{\sqrt{N_x}\, x}$ pour $x \in [0, 1/2[$.

$|S(x)| \ll \sqrt{N_x} + \frac{1}{\sqrt{N_x} \times x}$ En prenant $N_x = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ où $\lfloor * \rfloor$ est la partie entière,

on obtient $|S(x)| \ll \frac{1}{\sqrt{x}}$ puis $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \ll \sqrt{a}$

On en déduit que $\int_0^{2\pi} |S(x)|\, dx < +\infty$.

Il reste à vérifier si $c_n(S) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$c_n(S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi - a} S(x) e^{-inx}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^a S(x) e^{-inx}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi - a}^{2\pi} S(x) e^{-inx}\, dx$$

D'après le calcul précédent, les 2 dernières intégrales sont des $O(\sqrt{a})$. Pour la $1^{ère}$ on peut intervertir $\int$ et Σ car il y a convergence uniforme.

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi - a} S(x) e^{-inx}\, dx = \frac{2\pi - 2a}{2\pi \sqrt{n+1}} + -\sum_{\substack{k \neq n \\ k \geq 0}} \frac{e^{i(k-n)a} - e^{-i(k-n)a}}{i(k-n)\sqrt{n+1}}$$ En utilisant le théorème de convergence dominée (vu que $x \mapsto S(x)$ est intégrable) on vérifie que en faisant tendre a vers 0 que $c_n(S) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

lemme de Riemann Lebesgue. Ex 14

Soit $f \in L_{2\pi}(\mathbb{C})$. On montre que $\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0$.

* cas où $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ ~~on~~ Comme f est périodique de période 2π, on peut supposer que $[a,b] \subset [0,2\pi]$.

$$c_n(f) = \int_{0}^{2\pi} e^{-int} f(t) \frac{dt}{2\pi} = \int_a^b e^{-int} \frac{dt}{2\pi} = \left[\frac{-e^{-int}}{i2\pi n} \right]_a^b = \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2\pi i n}$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0$ car $|c_n(f)| \leq \frac{1}{\pi n}$

* cas où f est en escalier. $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{[a_i, b_i]}$

Alors $c_n(f) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_n(\mathbb{1}_{[a_i, b_i]})$ $\lim_{n \to +\infty} c_n(f) = 0$.

* Cas général. Si f est localement intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g_ε en escalier tel que $\int_a^b |f(t) - g_\varepsilon(t)| dt < \varepsilon$.

Il existe ensuite N_ε tel que $|c_n(g_\varepsilon)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

Alors $\forall n \geq N_\varepsilon$, $|c_n(f)| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(t) e^{-int} dt \right|$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b |f(t) - g(t)| dt + |c_n(g)|$$

$$\leq 2\varepsilon.$$

Ex 15.

Soit f continue par morceaux 2π-périodique et il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tel que $S_N(f)$ converge simplement vers g quand $N \to +\infty$

Rappel : théorème de Fejér.

si $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\left(S_0(f) + \dots + S_{n-1}(f)\right)$

si f est continue par morceaux alors $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n(f) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Montrons que si $S_N(f)$ converge vers g simplement, alors $\sigma_n(f)$ converge vers g également.

Soit $x \in [0, 2\pi]$ et soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N_{\varepsilon,x}$ tel que $\forall N \geq N_{\varepsilon,x}$, $|S_N(f)(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Pour $N > N_{\varepsilon,x}$, $|\sigma_N(f)(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) - g(x)\right|$

$$= \frac{1}{N}\left| \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) - g(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_{\varepsilon,x}} |S_n(f) - g(x)| + \frac{1}{N} \sum_{k=N_{\varepsilon,x}+1}^{N} |S_n(f)(x) - g(x)|$$

le $2^{\text{ème}}$ terme est inférieur à ε.

le 1^{er} est majoré par $\frac{1}{N} N_{\varepsilon,x} \times \max_{0 \leq n \leq N_x} \| S_n(f) - g\|_\infty$ qui est

bien majoré par ε quand N est assez grand.

Exercice 16.

f est périodique de période 2π.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x+2\pi) = f\left(\frac{T(x+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = \tilde{f}(x)$.

On en déduit que $\tilde{f}$ est 2π-périodique

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t)e^{-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)e^{-int}\,dt$$

On pose $u = \frac{Tx}{2\pi}$ si bien que $t = \frac{2\pi u}{T}$ et $dt = \frac{2\pi}{T}du$

$$c_n(\tilde{f}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,e^{-in\frac{2\pi u}{T}}\,du = c_n(f)$$

$$S_N(\tilde{f})(x) = \sum c_n(f)e^{inx}$$

L'identité de Parseval $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\tilde{f})|^2 = \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(t)|^2\frac{dt}{2\pi}$

Mais $\int_0^{2\pi} |\tilde{f}(t)|^2\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)\right|^2 dx = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2du$.

On a ainsi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2du$.

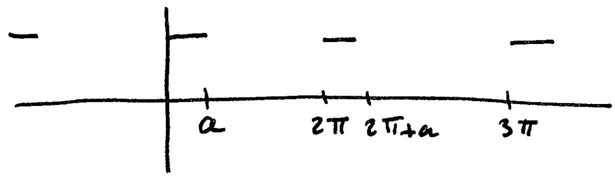
Comme f est continue, $\tilde{f}$ l'est également. On peut appliquer le théorème de Féjer à $\tilde{f}$: $\tilde{f}$ est limite de sa somme de Cesaro.

$$\cancel{\lim}\ \tilde{f}(x) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} S_k(\tilde{f})(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{|\ell|\leq k} c_n(f)e^{-inx}.$$

Exercice 17

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{si } x \in]a, 2\pi[\end{cases}$$

f est periodique de periode 2π.



$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^a dt = \frac{a}{2\pi}.$$

Pour $n \neq 0$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^a = \frac{1-e^{-ina}}{2i\pi n}$$

Comme f est de carré intégrable, la formule de Parseval s'applique :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \,;$$

$$\frac{a}{2\pi} = \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{|1-e^{-ina}|}{4\pi^2 n^2}.$$

Pour en déduire $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, on peut appliquer cette formule avec $a = \pi$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{(1-(-1)^n)^2}{4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\equiv 1\,(2)}} \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\pi^2 n^2} \qquad (*)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Mais $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$

On obtient $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

On reporte cela dans $(*)$ $\displaystyle\frac{1}{4} = \frac{3}{2\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Comme f est C^1 par morceaux, on peut appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\frac{a}{2\pi} + \sum_{n\neq 0} \frac{(1-e^{-ina})}{2i\pi n} e^{inx} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } a < x < 2\pi \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \text{ ou } a \end{cases}$$

Ex 18

Cas où f est paire.

Dans ce cas, en notant $S_N(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin(nx)$,

les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

Puis pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2\pi}\cos(nx)\,dx$. On intègre par partie pour enlever le "x"

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx = \left[\frac{\cos(nx)}{\pi^2 n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}.$$

Pour $n=0$, $a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}$

La formule de Parseval est alors

$$\frac{1}{2\pi}\times 2\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4\pi^2}\,dx = \frac{1}{4} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}\right)^2$$

$$\frac{1}{4\pi^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \sum_{k\geq 0}\frac{4}{\pi^4(2k+1)^4}$$

Cas où f est impaire : cette fois-ci les $a_n(f)$ sont nuls et les b_n valent pour $n \geq 1$:

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi^2}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx}_{=0}$$

$$= \frac{-\pi}{\pi^2 n}\cos(n\pi) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n}$$

puis Parseval : $\frac{1}{2\pi}\times 2\int_0^{\pi}\frac{x^2}{4\pi^2}\,dx = \frac{1}{4} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\pi^2 n^2}$

les théorèmes de Dirichlet s'appliquent sans difficulté car f est C^1 par morceaux (à compléter tout seul).

Ex 19.

f est 2π-périodique et est définie presque partout par

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t \in]-\pi, \alpha[\\ b & \text{si } t \in]\alpha, \pi[\end{cases}$$

f est C^1 par morceaux, on peut appliquer le théorème de Dirichlet et la formule de Parseval.

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\alpha} a\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi} b\,dt$$

$$= \frac{a(\alpha+\pi)+b(\pi-\alpha)}{2\pi}$$

Pour $n \neq 0$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\alpha} ae^{-int}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi} be^{-int}\,dt$

$$c_n(f) = \left[\frac{-ae^{-int}}{2\pi in}\right]_{-\pi}^{\alpha} + \left[\frac{-be^{-int}}{2\pi in}\right]_{\alpha}^{\pi} = \frac{-ae^{-in\alpha} + (-1)^n a - b(-1)^n + be^{-in\alpha}}{2i\pi n}$$

$$= \frac{(-1)^n(a+b) + e^{-in\alpha}(b-a)}{2i\pi n}$$

D'après le théorème de Dirichlet,

$$\frac{a(\alpha+\pi)+b(\pi-\alpha)}{2\pi} + \sum_{n\neq 0} e^{inx}\left(\frac{(-1)^n(a+b)+e^{-in\alpha}(b-a)}{2i\pi n}\right) = \begin{cases} a & \text{si } t\in]-\pi,\alpha[\\ b & \text{si } t \in]\alpha,\pi[\\ \frac{a+b}{2} & \text{si } t = -\pi \text{ ou } \alpha \end{cases}$$

puis on prolonge par périodicité.

La formule de Parseval donne :

$$\left(\frac{a+b}{2} + \frac{\alpha(a-b)}{2\pi}\right)^2 + \sum_{n\neq 0}\left|\frac{(-1)^n(a+b)+e^{-in\alpha}(b-a)}{2i\pi n}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\alpha} a^2\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi} b^2\,dt$$

$$= \frac{a^2(\alpha+\pi)+b^2(\pi-\alpha)}{2\pi}$$

Ex 20

$f(x)= \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ par $x \in]-\pi, \pi[$

f est paire, continue et C^1 par morceaux. Le théorème de Dirichlet s'applique.

La série de Fourier de f est de la forme $S_n(f)(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos(nx)$

avec $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{12} = 0.$

Pour $n \geq 1$, on effectue deux intégrations par parties pour calculer $a_n(f)$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right) \frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{\sin(nx)}{2n} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \times 0 + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{2n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{2n^2} dx}_{= 0}$$

$$= -\frac{2(-1)^n \times \pi}{\pi n^2}$$

Comme f est continue et C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge vers f: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De plus, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^2}$ converge uniformément car son terme général est majoré par $\frac{2}{n^2}$.

(Le théorème de Dirichlet dit également que $S_N(f)$ converge uniformément vers f si f est continue et C^1 par morceaux).

Pour $x=0$, $f(0) = \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}$

Exercice 21.

1. $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0.$

$$c_n(f'') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[f'(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\,in\,e^{-int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\,in\,e^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(in)^2 e^{-int}\,dt$$

$$= -n^2 c_n(f).$$

2. Comme f est C^2, on peut appliquer la formule de Parseval à f et f'' :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f'')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f''(t)|^2\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

D'après la question 1), $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f'')|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4 |c_n(f)|$

Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2(n^4-1) \leq 0.$

Comme $c_0(f)=0$, cette série est à termes positifs donc $|c_n|^2(n^4-1)=0\ \forall |n|\geq 1$.
Cela entraîne que $c_n(f) = 0\ \forall\ |n|\geq 2$.

3. Comme f est C^2, elle coïncide avec sa série de Fourier

$f(x) = c_{-1}(f)e^{-inx} + c_1(f)e^{inx}$. Mais $c_{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{it}\,dt = \overline{c_1(f)}$, car f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $r = |c_1|$, et α tel que $c_1(f) = re^{i\alpha}$. Alors $c_{-1}(f) = re^{-i\alpha}$, puis

$$f(x) = re^{-i(\alpha+nx)} + re^{i(\alpha+nx)} = 2r\cos(\alpha+nx) \quad \forall x$$