Ce théorème indique que la convergence d'une série de Dirichlet a lieu dans un demi-plan et qu'il en est de même pour la convergence absolue.

Définition 2.3.6. *Soit $F(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet.*

1. *On appelle abscisse de convergence et on note σ_c :*
$$\sigma_c := \inf\{\sigma \in \mathbb{R}, \sum_{n\geq 1} a_n n^{-\sigma} \text{ converge}\}.$$
2. *On appelle abscisse de convergence absolue et on note σ_a :*
$$\sigma_a := \inf\{\sigma \in \mathbb{R}, \sum_{n\geq 1} |a_n| n^{-\sigma} \text{ converge}\}.$$

Proposition 2.3.7. *Soit $F(s) := \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c et d'abscisse de convergence absolue σ_a. On a alors $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$.*

Preuve. L'inégalité $\sigma_c \leq \sigma_a$ est claire. Si $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-\sigma_c-\varepsilon}$ converge, alors la suite $(a_n n^{-\sigma_c-\varepsilon})$ est bornée. On en déduite que $\sum_{n\geq 1} |a_n| n^{-\sigma_c-\varepsilon} n^{-1-\varepsilon}$ converge si bien que $\sigma_{\leq}\sigma_c + 1 + 2\varepsilon$. Il reste à faire tendre ε vers 0.

Exemple. La série de Dirichlet $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$ a une abscisse de convergence $\sigma_c = 0$ et une abscisse de convergence absolue égale à 1.

2.4 La formule de Perron

Il s'agit de la formule pour $c > 0$, $y > 0$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s} \,\mathrm{d}\, s = \delta(y) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad y = 1 \\ 1 & \text{si} \quad y > 1 \end{cases}$$

Ici nous démontrerons le cas $y \neq 1$ sous une forme quantitative.

Lemme 2.4.1. *Soient $c > 0$, $T > 0$, $y > 0$ et $y \neq 1$. On a l'inégalité*

$$\Big| \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} \,\mathrm{d}\, s - \delta(y) \Big| \leq \frac{y^c}{\pi T \log y}.$$

(Pour $y = 1$, le membre de gauche se calcule directement et vaut $1/2 + O(c/T)$.)

Preuve. On commence par traiter le cas $0 < y < 1$. La fonction $y \mapsto y^s/s$ tend vers 0 lorsque σ tend vers $+\infty$ uniformément en t.

Notons $I(y, T)$ l'intégrale du Lemme 2.4.1. En intégrant sur un rectangle dont le bord droit tend vers l'infini, on a :

$$I(y, T) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{c+iT}^{+\infty+iT} \frac{y^s}{s} \,\mathrm{d}\, s + \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{+\infty-iT} \frac{y^s}{s}.$$

Or
$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{c+iT}^{+\infty+iT}\frac{y^s}{s}\,\mathrm{d}\,s\right| < \frac{1}{2\pi T}\int_c^\infty y^\sigma\,\mathrm{d}\,\sigma = \frac{y^c}{2\pi T|\log y|},$$
et on a une majoration similaire de l'autre intégrale. Cela prouve la formule annoncée pour $0 < y < 1$. Pour $y > 1$ on procède de la même façon, mis à part que l'on prend un rectangle dont le bord gauche tend vers une partie réelle vallant $-\infty$:
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty+iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\,\mathrm{d}\,s < \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^c y^\sigma\,\mathrm{d}\,\sigma = \frac{y^c}{2\pi T|\log y|}.$$
Le contour d'intégration contient alors le pôle $s = 0$ dont le résidus est $1 = \delta(y)$.
Remarque. On a également pour $y \neq 1$ la majoration $|I(y,T) - \delta(y)| < y^c$. On vérifie cela dans le cas $0 < y < 1$ en remplaçant la ligne verticale d'intégration par un arc de cercle à droite de centre 0. Son rayon est $R = \sqrt{c^2+T^2}$. Sur cet arc de cercle $|y^s| \leq y^c$ puisque $0 < y < 1$ et $|s| = R$:
$$|I(y,T)| \leq \frac{1}{2\pi}\pi R\frac{y^c}{R} < y^c.$$
Pour $y > 1$, on prend un arc de cercle à gauche et on a une majoration similaire de $|I(y,T) - \delta(y)|$.

2.5 Équation fonctionnelle de ζ.

Rappelons que pour le moment ζ est définie sur le demi-plan $\Re es > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$.

Théorème 2.5.1. *La fonction ζ peut être prolongée analytiquement sur $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe, avec un seul pôle qui est un pôle simple en $s = 1$ et de résidu 1. On a les deux écritures sur le demi-plan $\Re es > 0$:*
$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} t^{-s-1}\{t\}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{s-1} + s\int_1^{+\infty} t^{-s-1}(1-\{t\})\,\mathrm{d}\,t.$$
Pour $\sigma > -1$, on a :
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{t-[t]-1/2}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}\,t.$$

Preuve. Nous montrons en fait seulement le prolongement à $\Re es > -1$, l'extension à $\mathbb{C}$ entier sera faite au théorème suivant. On commence par une transformation d'Abel (1.2.1). Pour $\sigma = \Re es > 1$, on a
$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = \int_{1-\varepsilon}^{N+\varepsilon}\frac{1}{n^s}\,\mathrm{d}\,[x] = \frac{[N+\varepsilon]}{(N+\varepsilon)^s} - \frac{[1-\varepsilon]}{(1-\varepsilon)^s} + s\int_{1-\varepsilon}^{N+\varepsilon}\frac{[x]}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

On fait tendre ε vers 0 et N vers $+\infty$:

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

Soit $\eta(x) = x - [x] - 1/2$. Cette fonction η est 1-périodique, bornée, de moyenne nulle, ainsi pour tout A, B, $\int_A^B \eta(x)\,\mathrm{d}\,x = O(1)$. Plus précisément, on a pour $x > 1$ (on rappelle que $\{x\} = x - [x]$) :

$$\int_1^x \eta(u)\,\mathrm{d}\,u = \int_1^{1+\{x\}} \eta(u)\,\mathrm{d}\,u = \int_0^{\{x\}} (u - 1/2)\,\mathrm{d}\,u = \frac{\{x\}^2 - \{x\}}{2}.$$

On insère cette fonction η :

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{x - \frac{1}{2} - \eta(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^s} - \frac{s}{2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{x^{s+1}} - s\int_1^\infty \frac{\eta(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

En intégrant en arrive à

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{\eta(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}\,x. \tag{2.5.1}$$

Cette dernière intégrale converge pour $\sigma > -1$. On peut le voir en faisant un intégration par parties qui donne un terme en $\approx \int_1^\infty \left(\frac{\int_1^x \eta(u)\,\mathrm{d}\,u}{x^{s+2}}\right)\mathrm{d}\,x$. On en déduit un prolongement de ζ sur le demi plan $\Re e s > -1$ en une fonction méromorphe avec un pôle simple de résidu 1 en $s = 1$.
Pour obtenir la formule annoncée dans le théorème, il suffit de faire le calcul avec la fonction $\{x\} = x - [x]$ à la place de η.
Remarque. En faisant $s = 0$ dans (2.5.1), on obtient $\zeta(0) = -1/2$.

On peut écrire (2.5.1) sous une forme plus compacte dans la bande $-1 < \sigma < 0$ en

$$\zeta(s) = -s\int_0^\infty \eta(x) x^{-s-1}\,\mathrm{d}\,x. \tag{2.5.2}$$

On peut continuer en développant η en série de Fourier :

$$\eta(x) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}.$$

Vérifions que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}, N\in\mathbb{N}^*} \left|\sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}\right| < +\infty. \tag{2.5.3}$$

Par périodicité on peut se ramener au cas où $x \in [0, 1[$. Pour $x = 0$, la série est nulle, on suppose désormais que $x \in]0, 1[$. Soit $A(x, N) = \sum_{n=1}^N \sin(2\pi n x)$.

En utilisant le fait que $A(x,N) = \Im m\Big(\sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{2i\pi x}\Big)$ et en calculant cette série géométrique, on vérifie que

$$A(x,N) = \frac{\sin((N+1)\pi x)\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \ll \frac{1}{\|x\|},$$

avec $\|x\| = \min_{k\in\mathbb{Z}} |x-k|$.
Ainsi en faisant une sommation d'Abel, on montre que $A(x,N) \lll \frac{1}{\|x\|} \ll 1$ pour tout $x \in [1/100, 99/100]$. Pour $\|x\| < 1/100$, on traite séparément la somme sur les premiers entiers. Soit N_0 un paramètre à préciser :

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}\Big| &\ll \Big|\sum_{n=1}^{\min(N_0,N)} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}\Big| + \Big|\sum_{n=\min(N_0,N)+1}^{N} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}\Big| \\ &\ll N_0\|x\| + 1/(N_0\|x\|) \ll 1,\end{aligned}$$

en prenant par exemple $N_0 = [2/\|x\|]$.
En insérant ce développement en série de Fourier dans (2.5.2) puis en intervertissant les sommes (ce qui est possible grâce par exemple au théorème de convergence dominée), on obtient dans la bande $-1 < \sigma < 0$

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{s}{\pi} \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^x \sin(2\pi nx) x^{-s-1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{s}{\pi} \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n^{s+1} \int_0^{nx} \sin(2\pi u) u^{-s-1}\,\mathrm{d}\,u \qquad \text{en faisant } u = nx \\ &= \frac{s}{\pi}\zeta(1-s) \int_0^{\infty} \sin(2\pi u) u^{-s-1}\,\mathrm{d}\,u = \zeta(1-s)\gamma(s),\end{aligned}$$

où γ est une intégrale impropre qui est convergente en 0 pour $\sigma < 1$ et en $+\infty$ pour $-1-\sigma < 0$ (faire une intégration par parties pour le vérifier). La fonction γ est donc bien définie dans la bande $-1 < \sigma < 1$.

Lemme 2.5.2. *La fonction γ a un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$. On a les relations suivantes*

$$\gamma(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\big(\frac{\pi s}{2}\big) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\big(\frac{1-s}{2}\big)}{\Gamma(s/2)}.$$

Commençons par admettre pour $-1 < \sigma < 1$ la formule

$$\Gamma(s)\sin\Big(\frac{\pi s}{2}\Big) = \int_0^{\infty} (\sin x) x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x. \tag{2.5.4}$$

Cela donne pour γ :

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \frac{s}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(2\pi u) u^{-s-1}\,\mathrm{d}\,u = \frac{s}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(x) x^{-s-1} (2\pi)^s\,\mathrm{d}\,s \\ &\frac{s}{\pi}(2\pi)^s \Gamma(-s)\sin(\pi s/2) = \Gamma(1-s) 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2).\end{aligned}$$

On applique ensuite la Proposition 1.3.5 puis la formule de Duplication de Legendre (Théorème 1.3.7) à $2z = 1 - s = 2(1-s)/2$:

$$\gamma(s) = \frac{2^s\pi^s\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})} = \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Cela montre les formules du Lemme 2.5.2 pour $-1 < \sigma < 1$. Elles entraînent un prolongement analytique de γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
Montrons maintenant (2.5.4).
Pour cela, il suffit de le vérifier pour s réel dans le segment $]0,1[$, et d'appliquer ensuite le principe du prolongement analytique. On part du membre de droite. Pour des problèmes de convergence, on commence par fixer $X, \varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^X (\sin x)x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2i}\Big[\int_\varepsilon^X \mathrm{e}^{ix}x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x - \int_0^X \mathrm{e}^{-ix}x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x\Big].$$

Pour faire apparaître la fonction Γ on fait les changements de variables $u = -ix$ dans la première intégrale, $u = ix$ dans la seconde :

$$\int_\varepsilon^X (\sin x)x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2i}\Big[\int_{-i\varepsilon}^{-iX} e^{-u}(i)^s u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u - \int_{i\varepsilon}^{iX} \mathrm{e}^{-u}(-i)^s u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u\Big].$$

On applique le théorème des résidus pour ramener les intégrales sur l'axe réel. Cela donne

$$\int_{i\varepsilon}^{iX} \mathrm{e}^{-u}(u)^{s-1}\,\mathrm{d}\,u = \int_\varepsilon^X \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u - \int_{C_\varepsilon^+} \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u + \int_{C_R^+} \mathrm{e}^{-u}(iu)^{s-1}\,\mathrm{d}\,u,$$
$$\int_{-i\varepsilon}^{-iX} \mathrm{e}^{-u}(u)^{s-1}\,\mathrm{d}\,u = \int_\varepsilon^X \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u + \int_{C_\varepsilon^-} \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u - \int_{C_R^-} \mathrm{e}^{-u}(iu)^{s-1}\,\mathrm{d}\,u,$$

où C_R^+ est le quart de cercle supérieur de rayon R, C_R^- le quart de cercle correspondant aux angles entre $-\pi/2$ et 0. En faisant des changements de variables adéquats, on remarque pour $r = \varepsilon, R$

$$\int_{C_r^+} \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u = i\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-r\mathrm{e}^{i\theta}}(r\mathrm{e}^{i\theta})^s\,\mathrm{d}\,\theta,\ \int_{C_r^-} \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u = i\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-r\mathrm{e}^{-i\theta}}(r\mathrm{e}^{-i\theta})^s\,\mathrm{d}\,\theta.$$

On regroupe ces différentes intégrales en notant I_r celles sur les arcs de cercle de rayon r :

$$\int_\varepsilon^X (\sin x)x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x = \sin\big(\frac{\pi s}{2}\big)\int_\varepsilon^R \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}\,u + I_R - I_\varepsilon.$$

puis on fait tendre X vers $+\infty$ et ε vers 0. Le premier terme tend alors vers $\Gamma(s)\sin(\pi s/2)$ conformément à ce qui est annoncé dans (2.5.4).
Pour l'intégrale I_R, on remarque pour $0 < s < 1$, $|\mathrm{e}^{-R\mathrm{e}^{\pm i\theta}}(R\mathrm{e}^{\pm i\theta})^s| = \mathrm{e}^{-R\cos\theta}R^s$. Cela nous incite à traiter à part les angles θ proches de $\pi/2$,

par exemple dans l'intervalle $[\pi/2 - 1/R^{\sigma'}, \pi/2]$ avec $\max(s, 1/2) < \sigma' < 1$. La contribution sur ces angles est $O(R^{s-\sigma'})$ qui tend bien vers 0 quand R tend vers $+\infty$. Pour les autres angles $\theta \in [0, \pi/2 - 1/R^{\sigma'}]$,

$$\cos\theta \geq \cos(\pi/2 - 1/R^{\sigma'}) = \sin(1/R^{\sigma'}) = R^{-\sigma'} + O(R^{-1}).$$

On en déduit la majoration

$$I_R \ll \mathrm{e}^{-R^{1-\sigma'}} R^s + R^{s-\sigma'},$$

et ainsi $\lim_{R\to+\infty} I_R = 0$.
Pour I_ε, on a simplement $I_\varepsilon \ll \varepsilon^s$ qui tend bien vers 0 quand ε tend vers 0 vu que $s > 0$. Cela termine la preuve du (2.5.4).
On revient à l'équation fonctionnelle pour ζ : $\zeta(s) = \zeta(1-s)\gamma(s)$. Cette équation a été établie pour $-1 < \sigma < 0$. Avant cela nous avions un prolongement analytique de ζ en une fonction méromorphe sur $\Re e s > -1$. Avec le prolongement méromorphe de γ sur $\mathbb{C}$ on obtient grâce au membre de droite un prolongement méromorphe de ζ sur $\mathbb{C}$ entier.
On a ainsi le théorème

Théorème 2.5.3. *Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, on a l'équation fonctionnelle :*

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

Soit $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Alors $\xi(s)$ est holomorphe sur $\Re e s > 0$ car ζ n'a qu'un pôle simple en $s = 1$. De plus On a ainsi $\xi(s) = \xi(1-s)$, on a une symétrie par rapport à $1/2$ et finalement la fonction ξ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.