2.6 Fonctions entières d'ordre fini

Définition 2.6.1. *Une fonction entière f est dite d'ordre fini s'il existe un réel α réel tel que*

$$f(s) = O(e^{|z|^\alpha}). \tag{2.6.1}$$

Le réel α est strictement positif sauf si f est constante. La borne inférieure de ces α est appelée **ordre** de f.

Lemme 2.6.2. *Une fonction entière vérifiant* (2.6.1) *et qui n'a pas de zéro est de la forme*

$$f(z) = e^{g(z)},$$

où g est un polynôme de degré inférieur à α.

Preuve. Comme f ne s'annule pas on peut définir la fonction entière $g(z) = \log(f(z))$. Elle admet le développement en série

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + ic_n) z^n.$$

La partie réelle de g vérifie pour $|z|$ assez grand

$$\Re e g(z) = \log|f(z)| \leq 2|z^\alpha|.$$

Pour $z = re^{2i\pi\theta} = r\mathrm{e}(\theta)$, avec $0 \leq \theta < 1$, on obtient :

$$\Re e g(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(2\pi n\theta) - c_n \sin(2\pi\theta)) r^n.$$

On multiplie par $\cos(2\pi m\theta)$ puis on intègre en θ :

$$b_m r^m = 2\int_0^1 \Re(g(r\mathrm{e}(\theta)))\cos(2\pi m\theta)\,\mathrm{d}\,\theta \qquad (m \geq 1).$$

On prend les modules et on utilise le fait que $b_0 = \int_0^1 \Re e(g(\mathrm{e}(\theta))\,\mathrm{d}\,\theta$. Cela nous permet de tenir compte des *petites valeurs* de $|f(z)|$. (Si $|f(z)|$ est petit alors $\log(|f(z)|)$ est négatif mais peut être grand en valeur absolue

$$\begin{aligned}|b_m|r^m &\leq 2\int_0^1 |\Re g(r\mathrm{e}(\theta))|\,\mathrm{d}\,\theta = 2\int_0^1 (|\Re e g(r\mathrm{e}(\theta))| + \Re g(r\mathrm{e}(\theta)))\,\mathrm{d}\,\theta - 2b_0 \\ &\leq 4\int_0^1 \max(0, \Re e(g(\mathrm{e}(\theta)))\,\mathrm{d}\,\theta - 2b_0 \ll r^\alpha.\end{aligned}$$

On fait tendre r vers l'infini. Cela entraîne que $b_m = 0$ si $m > \alpha$. On raisonne de la même facon pour montrer que $c_n = 0$ quand $n > \alpha$.
Remarque. Dans le calcul précédent, on a profité du fait que si $\Re e g(r\mathrm{e}(\theta)) \leq 0$ alors la fonction dans l'intégrale en θ est nulle et quand $\Re g(r\theta) > 0$, on peut majorer ce terme par $O(r^\alpha)$.

Proposition 2.6.3. (Formule de Jensen) *Soit f une fonction holomorphe sur $|z| < R'$ telle que $f(0) \neq 0$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les zéros de f comptés avec multiplicité à l'intérieur du disque de centre 0 et de rayon R avec $R < R'$. On suppose en outre que f ne s'annule pas sur le bord du disque de rayon R. On a alors l'égalité*

$$\int_0^1 \log|f(Re(\theta))| \,\mathrm{d}\,\theta - \log|f(0)| = \log \frac{R^n}{|z_1|\cdots|z_n|} = \int_0^R \frac{n(r)}{r} \,\mathrm{d}\,r,$$

où $n(r)$ désigne le nombre de zéros de f comptés avec multiplicité dans le disque fermé $|z| \leq r$.

Preuve On écrit $f(z) = g(z)(z - z_1)\cdots(z - z_n)$. On va montrer la première formule pour chacun des facteurs, c'est-à-dire

$$\int_0^1 \log|g(Re(\theta))| \,\mathrm{d}\,\theta = \log|g(0)|$$

$$\int_0^1 \log|Re(\theta) - z_i| \,\mathrm{d}\,\theta = \log R, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

On commence par g. Comme g ne s'annule pas on peut appliquer la formule de Cauchy à $\log g(z)$:

$$\log g(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} (\log g(z)) \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \int_0^1 \log g(Re(\theta)) \,\mathrm{d}\,\theta.$$

En prenant les parties réelles, on a

$$\log|g(0)| = \int_0^1 \log|g(Re(\theta))| \,\mathrm{d}\,\theta.$$

Pour les autres facteurs, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log|Re(\theta) - z_i| \,\mathrm{d}\,\theta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \log|z - z_i| \frac{\mathrm{d}\,z}{z} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \Big(\log|z| + \log|1 - \frac{z_i}{z}| \Big) \frac{\mathrm{d}\,z}{z} \\
&= \log R + \Re e \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \log\big(1 - \frac{z_i}{z}\big) \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \log R.
\end{aligned}$$

Dans l'avant dernière formule, on a pu échanger l'intégration et la partie réelle car f ne s'annule pas sur le cercle de rayon R. Pour le dernier calcul on peut utiliser le développement $\log(1 - z_i/z) = \sum_{k=1}^{\infty} (z_i/z)^k \frac{1}{k}$ puis en reportant, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} \log(1 - z_i/z) \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{|z|=R} \frac{z_i^k}{z^{k+1}} \,\mathrm{d}\,z = 0.$$

Pour avoir l'autre partie de la Proposition 2.6.3 on remarque

$$\begin{aligned}\log \frac{R^n}{|z_1|\cdots|z_n|} &= \log \frac{R}{|z_1|} + \cdots + \log \frac{R}{|z_n|} \\ &= \int_{|z_1|}^{R} \frac{\mathrm{d}\, r}{r} + \cdots + \int_{|z_n|}^{R} \frac{\mathrm{d}\, r}{r} = \int_0^R \frac{n(r)}{r}\,\mathrm{d}\, r.\end{aligned}$$

Corollaire 2.6.4. *Soit f une fonction entière d'ordre 1 telle que $f(0) \neq 0$. Le nombre $n(R)$ de zéros de f dans le disque de rayon $R \geq 1$ vérifie : $n(R) \ll R^{1+\varepsilon}$. Pour tout $\alpha > 1$, la somme sur les zéros de f, $\sum_\varrho |\varrho|^{-\alpha}$ converge.*

Preuve (Davenport, Multiplicative Number Theory, chapitre 11).
Pour $R > 0$,

$$\int_R^{2R} \frac{n(r)}{r}\,\mathrm{d}\, r \geq n(R) \int_R^{2R} \frac{\mathrm{d}\, r}{r} \geq n(R) \log 2.$$

Comme f est d'ordre 1, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\theta \in [0,1]$, $\log |f(R\mathrm{e}(\theta))| \leq R^{1+\varepsilon}$ pour R assez grand. En reportant cela dans la formule de Jensen donnée dans laProposition 2.6.3, on en déduit la majoration annoncée : $n(R) \ll R^{1+\varepsilon}$. De plus pour tout $\beta > \alpha$, on peut utiliser le formalisme de l'intégrale de Stieltjes pour évaluer la somme sur les zéros. Si on note $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ les différents zéros et $r_0 = 0, r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ les modules de ces zéros, $n(r)$ le nombre de zéros de module $\leq r$, on a pour $\beta > 1$:

$$\begin{aligned}\sum_n \frac{1}{|z_n|^\beta} &= \sum_n \frac{1}{r_n^\beta}(n(r_n) - n(r_n^-)) \\ &= \int_0^\infty t^{-\beta}\,\mathrm{d}\, n(t) \\ &= \beta \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\beta+1}}\,\mathrm{d}\, t < +\infty.\end{aligned}$$

Corollaire 2.6.5. *Une fonction entière d'ordre 1 telle que $f(0) \neq 0$ a la représentation suivante*

$$f(z) = a\mathrm{e}^{bz} \prod_\varrho \Big(1 - \frac{z}{\varrho}\Big)\mathrm{e}^{\frac{z}{\varrho}},$$

avec $a = f(0)$, $b = f'(0)/f(0)$, et le produit est selon les zéros ϱ de f avec leur multiplicité. Ce produit est absolument convergent. De plus, si la somme sur les zéros $\sum_\varrho |\varrho|^{-1}$ converge, il existe $C > 0$ tel que $|f(s)| \leq \exp(C|s|)$.

On commence par vérifier que le produit dans ce corollaire est absolument convergent. Notons le $P(z)$. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé,

$$\big(1 - \frac{z}{\varrho}\big)\mathrm{e}^{z/\varrho} = 1 - \frac{z^2}{\varrho^2} + O(|z^3\varrho^{-3}|),$$

quand $|\varrho|$ tend vers l'infini. On applique alors le Corollaire 2.6.4 en prenant $\alpha = 2$. On remarque également que le produit $P(z)$ converge uniformément dans tout compact ne contenant pas de zéro de f. On souhait appliquer le Lemme 2.6.2 à la fonction F définie par $f(z) = F(z)P(z)$ mais pour cela on doit vérifier que F est bien d'ordre fini.
Supposons que f n'ait pas de zéro dans la couronne $\big||z| - R\big| < R^{-2}$ avec $R \geq 2$. Ainsi, pour $|z| = R$, et tout zéro de f de module inférieur à $2R$, $|1 - \frac{z}{\varrho}| \geq \frac{1}{R^2|\varrho|}$, puis $|1 - \frac{z}{\varrho}|^{-1} \leq 2R^3$. Admettons provisoirement que pour z sur le cercle de rayon R, et $|\varrho| \geq 2R$ on ait l'inégalité :

$$|\Big(1 - \frac{z}{\varrho}\Big)^{-1} \mathrm{e}^{-\frac{z}{\varrho}}| \leq \exp\Big(\frac{R^2}{|\varrho|^2}\Big). \tag{2.6.2}$$

En reprenant la fonction $n(R)$ du Corollaire 2.6.4, on a pour $|z| = R$:

$$\begin{aligned} |P(z)^{-1}| &\leq (2R^3)^{n(2R)} \exp\Big(\sum_{|\varrho|\leq 2R} \frac{R}{|\varrho|} + \sum_{|\varrho|>2R} \frac{R^2}{|\varrho|^2}\Big) \\ &\leq (2R)^{3n(2R)} \exp\Big(\sum_{\varrho} \frac{3R^2}{|\varrho|(|\varrho| + R)}\Big) \ll \exp(R^{1+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Par le principe du maximum, cette majoration est valable pour tout $|z| \leq R$. En prenant R assez grand, on en déduit que $f(z)P(z)^{-1}$ est une fonction sans zéro et d'ordre au plus 1, elle est donc de la forme $\mathrm{e}^{A(z)}$ où A est un polynôme de degré au plus 1.
Il reste deux points à vérifier pour terminer la preuve de la première partie du Corollaire 2.6.5. Tout d'abord l'existence de couronnes de rayon R arbitrairement grand et d'épaisseur supérieure à $2/R^2$ sur lesquelles f ne s'annule pas.
Supposons qu'il existe $X \geq 2$ tel que pour tout $X < R < 2X$, chaque couronne de rayon R et d'épaisseur $2/R^2$ ait un zéro de f. On aurait alors $\gg X/X^{-2} = X^3$, zéros de f entre X et $2X$, ce qui contredirait le Corollaire 2.6.4 .
Le 2ème point à démontrer est la majoration (2.6.2) : pour $|z| = R$ et $|\varrho| \geq 2R$,

$$\Big|\Big(1 - \frac{z}{\varrho}\Big)^{-1} \mathrm{e}^{-z/\varrho}\Big| \leq \exp\Big(\frac{R^2}{|\varrho|^2}\Big).$$

Cela revient à montrer que pour ξ tel que $|\xi| \leq 1/2$, on a :

$$|(1 - \xi)^{-1} \mathrm{e}^{-\xi}| \leq \exp(|\xi|^2),$$

ou encore que

$$\exp(-|\xi|^2) \leq |(1 - \xi)\mathrm{e}^{\xi}|. \tag{2.6.3}$$

On commence par minorer le membre de droite de (2.6.3) en utilisant un développement en série entière

$$\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \xi^n \Big(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\Big) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^n}{(n-2)!n}. \tag{2.6.4}$$

En prenant les modules, on a

$$|\mathrm{e}^{\xi}(1-\xi)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\xi|^n}{(n-2)!n} = \mathrm{e}^{|\xi|}(1-|\xi|),$$

avec le même calcul. Il suffit donc de montrer que le membre de droite de la ligne ci-dessus est $\geq \mathrm{e}^{-|\xi|^2}$. Soit $\alpha = |\xi|$. On a alors $0 \leq \alpha \leq 1/2$. En prenant les logarithmes, on étudie le signe de $h(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + \ln(1-\alpha)$ sur $[0, 1/2]$. On dérive : $h'(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{-\alpha(2\alpha-1)}{1-\alpha}$ qui est positif entre 0 et 1/2. Comme $h(0) = 0$, h est bien positive sur $[0, 1/2]$.

Supposons maintenant que la somme des inverses des zéros de f converge. On utilise l'inégalité $|(1-z)\mathrm{e}^z| \leq \mathrm{e}^{2|z|}$ valide pour tout $z \in \mathbb{C}$. (On peut la vérifier à partir du développement en série entière (2.6.4), ou encore en remarquant : $|(1-z)\mathrm{e}^z| \leq (1+|z|)\mathrm{e}^{\Re e z} \leq \mathrm{e}^{2|z|}$).

En utilisant la forme obtenue ci-dessus pour f, on a alors

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |a|\mathrm{e}^{|bz|} \prod_{\varrho} \Big| \Big(1 - \frac{z}{\varrho}\Big) \mathrm{e}^{\frac{z}{\varrho}} \Big| \\ &\ll \mathrm{e}^{|b||z|} \exp\Big(\sum_{\varrho} \frac{2|z|}{|\varrho|} \Big) < \mathrm{e}^{C|z|}, \end{aligned}$$

pour une constante $C > 0$ assez grande.