2.10 Région sans zéro pour ζ

.

Remarques. 1. La fonction ζ'/ζ admet pour seuls pôles sur $\sigma > 0$, les zéros de ζ et $s = 1$.
2. À partir des formules de convolutions $\log = \Lambda * \mathbf{1}$ et $\mu * \mathbf{1} = \mathrm{e}$, on remarque que $\Lambda = \mu * \log$ et ainsi pour $\sigma > 1$:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s},\ \zeta'(s) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^s},\ -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

L'objectif de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant sur la région sans zéro de ζ

Théorème 2.10.1. *Il existe une constante c telle que la fonction ζ n'ait pas de zéro dans le domaine*

$$\sigma > 1 - \frac{1}{35\log(|t| + c)}.$$

Preuve. On part de l'inégalité $3 + 4\cos\varphi + \cos(2\varphi) = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geq 0$. Rappelons que pour $\sigma > 1$, $\zeta'/\zeta(s) = -\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$. On applique cette formule avec $s = \sigma$, $\sigma + it$, $\sigma + 2it$

$$\begin{aligned}\Re e\Big(- 3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it)\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Re e\Big(2\frac{\Lambda(n)}{n^{-\sigma}} + 4\frac{\Lambda(n)}{n^{-\sigma-it}} + \frac{\Lambda(n)}{n^{-\sigma-2it}}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}(3 + 4\cos(-t\log n) + \cos(-2t\log n)) \geq 0\end{aligned} \tag{2.10.1}$$

Rappelons la formule

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} - \sum_{\varrho} \Big(\frac{1}{s-\varrho} - \frac{1}{\varrho}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s/2 + 1) - \frac{\log\pi}{2} - B,$$

avec $-B = 1 + \gamma/2 - \log(2\sqrt{\pi})$ et ainsi $-B - \frac{\log\pi}{2} = -0,5.... < 0$. Pour $1 < \sigma < 2$, $3/2 < 1 + \sigma/2 < 2$, $\Gamma'(\sigma/2 + 1)/\Gamma(\sigma/2 + 1) = O(1)$. De plus, $\Re e(-1/\varrho - 1/(\sigma - \varrho)) < 0$ donc

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma - 1} + O(1). \tag{2.10.2}$$

On rappelle aussi la formule de Stirling sous la forme

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log s + O(|s^{-1}|),\ |s| \to +\infty,\ |\arg s| \leq \theta < \pi.$$

On a pour $1 \le \sigma \le 2$ et $t \ge 2$,

$$\Re e \log(s/2+1) = \log\sqrt{(\sigma/2+1)^2 + t^2/4} = \log t + O(1),$$

d'où pour $1 \le \sigma \le 2$ et $t \ge 2$,

$$-\Re e \frac{\zeta'}{\zeta}(s) < \frac{\log t}{2} - \sum_{\varrho} \Re e\Big(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\Big) + O(1).$$

De plus,

$$\Re e \frac{1}{s-\varrho} = \frac{\sigma-\beta}{|s-\varrho|^2}, \ \Re e \frac{1}{\varrho} = \frac{\beta}{|\varrho|^2}, \ \text{et ainsi } \Re e \frac{1}{s-\varrho} + \Re e \frac{1}{\varrho} \ge 0.$$

En appliquant cela à $s = \sigma + 2it$ et en omettant la somme sur ϱ, on trouve :

$$-\Re e \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) < \frac{\log t}{2} + O(1).$$

Pour $s = \sigma + it$, on choisit un t qui coïncide avec l'ordonnée γ d'un zéro $\beta + i\gamma$ et dans la somme sur ϱ, on conserve seulement le terme $1/(s-\varrho)$ correspondant à ce zéro :

$$-\Re e \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) < \frac{\log t}{2} - \frac{1}{\sigma - \beta} + O(1).$$

En remplaçant dans (2.10.1), on obtient

$$\frac{3}{\sigma-1} + \frac{5}{2}\log t - \frac{4}{\sigma-\beta} + O(1) \ge 0.$$

On prend $\sigma = 1 + \delta/\log|t|$ avec $\delta > 0$. Alors

$$\beta < 1 + \frac{\delta}{\log t} - \frac{4}{(3/\delta + 5/2)\log t + O(1)},$$

et en prenant $\delta = 1/5$, on a le résultat pour $t \ge 2$. Pour $|t| \le 2$, on sait déjà qu'il n'y a pas de zéro, cela termina la preuve du Théorème 2.10.1.
Remarque. La région sans zéro a été amélioré par Littlewood en 1922 puis indépendemment par Vinogradov et Korobov en 1958 :

$$\sigma \ge 1 - \frac{C}{(\log t)^{2/3}(\log\log t)^{1/3}}.$$

2.11 Formules explicites

Rappelons que $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$ est la première fonction de Tchébychef.

Théorème 2.11.1. *Pour $2 \leq T \leq x$, on a la formule*

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O\Big(\frac{x}{T}(\log x)(\log Tx)\Big).$$

Preuve. On applique la formule de Perron (Lemme 2.4.1 avec $y = x/n$, et on suppose que x est un demi-entier (pour contrôler $(\log(x/n))^{-1}$, en profitant également de la remarque qui suit la preuve du lemme

$$\Big|\frac{-1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT} x^s \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{\mathrm{d}\,s}{s} - \psi(x)\Big| \ll \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \min\Big(\log T, \frac{1}{T\log(x/n)}\Big)\Big(\frac{x}{n}\Big)^c.$$

Nous prenons $c = 1+1/\log x$. Pour majorer le membre de droite, on découpe la somme sur n en trois parties. La première porte sur les n tels que $|n-x| \leq x/T$, la seconde sur les $x/T < |n-x| \leq x/2$ et la dernière sur les $|n-x| > x/2$. Dans la première somme $(x/n) \ll 1$, dans la deuxième, on utilise la minoration $|\log(x/n)| = |\log x - \log n \gg |x-n|/x \gg |x-n|/n$ tandis que dans la dernière partie, $|\log(x/n)| \gg 1$. On arrive aux majorations

$$\begin{aligned}&\sum_{|n-x|\leq x/T} \Lambda(n)\log T + \frac{x}{T}\sum_{\frac{x}{T}<|n-x|\leq\frac{x}{2}} \frac{\Lambda(n)}{|n-x|} + \frac{x^c}{T}\sum_{|n-x|>x/2}\frac{\Lambda(n)}{n^c|\log(x/n)|}\\ &\ll \frac{x}{T}\log x\log T + \frac{x^c\log x}{T(c-1)} \ll \frac{x}{T}(\log x)(\log Tx).\end{aligned}$$

On déforme le contour vers la gauche jusqu'à l'abscisse -1. On récupère les résidus et les intégrales sur chacun des trois segments (rappelons l'expression de ζ'/ζ du Corollaire 2.7.5 pour le résidu en 1) :

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT} x^s\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{\mathrm{d}\,s}{s} &= x - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0)\\ &\quad + O\Big(\frac{1}{x}\int_0^T \Big|\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it)\Big|\frac{\mathrm{d}\,t}{t+1} + \frac{1}{T}\int_{-1}^{c}\Big|\frac{\zeta'}{\zeta}(\alpha+iT)\Big|x^\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha\Big).\end{aligned}$$

D'après le Corollaire 2.9.5, pour $-1 \leq \sigma \leq 2$ et T assez grand et qui n'est pas l'ordonnée d'un zéro de ζ,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|\gamma-T|<1}\frac{1}{s-\varrho} + O(\log T).$$

On a vu également que $N(T+1)-N(T) \ll \log T$. On en déduit que $\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it) = O(\log T)$, la première intégrale est un $O(x^{-1}(\log T)^2)$. Pour la deuxième intégrale, on ne peut plus garantir que $|s-\varrho| \geq 1$, cependant comme $N(T+$

$1) - N(T) \ll \log T$, quitte à modifier T de $O(1)$ au plus on peut s'assurer que tous les zéros vérifie $|\gamma - T| \gg (\log T)^{-1}$. Dans ce cas on a

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\alpha + iT) = O\Big(\sum_{(\log T)^{-1} \ll |T-\gamma| \ll 1} \frac{1}{T-\gamma} \Big) = O(\log^2 T),$$

et la 2ème intégrale est en $O(xT^{-1} \log^2 T)$. Cela termine la preuve du Théorème 2.11.1

2.12 Le théorème des nombres premiers

Lemme 2.12.1. *Il existe $c_1 > 0$ telle que l'on ait pour tout $x \geq 2$*

$$\sum_{|\gamma|<T} \Big| \frac{x^\varrho}{\varrho} \Big| \ll x (\log T)^2 \exp\Big(- c_1 \frac{\log x}{\log T} \Big).$$

Preuve. D'après le Théorème 2.10.1 sur la région sans zéro de ζ, si $\varrho = \beta + i\gamma$ est un zéro non trivial avec $|\gamma| < T$ et T assez grand, alors

$$\beta < 1 - \frac{c_1}{\log T},$$

où $c_1 > 0$ est une constante absolue. On en déduit que

$$|x^\varrho| = x^\beta < x \exp\Big(- c_2 \frac{\log x}{\log T} \Big).$$

De plus, $|\varrho| \geq \gamma$, pour $\gamma > 0$, ce qui nous amène à estimer $\sum_{0<\gamma<T} 1/\gamma$. En notant maintenant $N(T)$ le nombre de zéros dans la bande critique d'ordonnée entre 0 et t, on a

$$\sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{\gamma} = \int_0^T t^{-1} \,\mathrm{d}\, N(t) = \frac{N(t)}{t} + \int_0^T t^{-2} N(t) \,\mathrm{d}\, t,$$

et comme $N(t) \ll t \log t$ pour t assez grand, on obtient

$$\sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{\gamma} \ll (\log T)^2.$$

Théorème 2.12.2. *Pour $x \geq 2$,*

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(x \exp(-c_2 \sqrt{\log x}).$$

Preuve. Grâce à la formule explicite (Théorème 2.11.1), on a

$$\psi(x) - x \ll \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho} + \frac{x}{T} \log x \log(Tx).$$

On applique alors le Lemme 2.12.1 en prenant T tel que $T = \exp\big((\sqrt{\log x})/7\big)$ et on obtient le Théorème 2.11.1.

Théorème 2.12.3.

$$\theta(x) := \sum_{p\le x} \log p = x + O(x\exp(-c_2\sqrt{\log x}).$$

Preuve. On a

$$0 \le \psi(x) - \theta(x) = \sum_{\substack{p^m\le x\\ m\ge 2}} \log p \le \log x \sum_{m\ge 2} \pi(x^{1/m}) = O(\sqrt{x}(\log x)^2).$$

Théorème 2.12.4. *Pour $x \ge 2$,*

$$\pi(x) = \mathrm{li} x + O(x\exp(-c_3\sqrt{\log x})),$$

avec $\mathrm{li} x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}\, t}{\log t}$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{p\le x} \frac{\log p}{\log p} = \int_{2^-}^x \frac{\mathrm{d}\,\theta(t)}{\log t}\\ &= \int_{2^-}^x \frac{\mathrm{d}\, t}{\log t} + \int_{2^-}^x \frac{\mathrm{d}\,(\theta(t)-t)}{\log t}\\ &= \mathrm{li}(x) + \frac{\theta(x)-x}{\log x} + O(1) + \int_{2^-}^x \frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}\,\mathrm{d}\, t.\end{aligned}$$

On peut couper la dernière intégrale en $x^{1/4}$ par exemple. La contribution des $t < x^{1/4}$, est $O(x^{1/4}$ et pour $x^{1/4} < t < x$, $\log t \gg \log x$. On obtient alors le résultat.

Théorème 2.12.5. *Si tous les zéros de ζ vérifient $\beta \le \theta$ où $\frac{1}{2} \le \theta < 1$, alors*

$$\psi(x) = x + O(x^\theta \log^2 x),\ \ \pi(x) = \mathrm{li} x + O(x^\theta \log^2 x).$$

Remarque. L'hypothèse de Riemann correspond à $\theta = 1/2$.
Preuve. C'est la même que celle du Théorème 2.12.2 avec $|x^\varrho| \le x^\theta$. On choisit alors $T = x^{1-\theta}$.

Théorème 2.12.6. *S'il existe $\alpha \in [1/2, 1[$ tel que $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$ alors tous les zéros de ζ vérifient $\beta \le \alpha$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned}-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \int_{1^-}^\infty \frac{d\psi(x)}{x^s} = \int_{1^-}^\infty \frac{\mathrm{d}\, x}{x^s} + \int_{1^-}^\infty \frac{\mathrm{d}\,(\psi(x)-x)}{x^s}\\ &= \frac{1}{s-1} + s\int_1^\infty (\psi(x)-x)x^{-s-1}\,\mathrm{d}\, x,\end{aligned}$$

et si $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$, l'intégrale représente une fonction holomorphe sur $\sigma > \alpha$ (et $s \ne 1$), donc ζ ne peut pas avoir de zéro dans ce demi-plan.

Chapitre 3

Les entiers friables

On note $P^+(n)$ le plus grand facteur premier de n avec la convention $P^+(1) = 1$.
Un entier naturel n est dit y-friable si $P^+(n) \leq y$. Soient

$$S(x,y) = \{n \leq x : P^+(n) \leq y\} \text{ et } \Psi(x,y) = |S(x,y).$$

Le rapport

$$u = \frac{\log x}{\log y}$$

interviendra souvent dans les estimations de $\Psi(x,y)$ que nous verrons.

3.1 La méthode de Rankin

Théorème 3.1.1. *On a pour $x \geq y \geq 2$:*

$$\Psi(x,y) \ll x\mathrm{e}^{-u/2}.$$

La preuve repose sur une méthode simple et très efficace appelée la méthode de Rankin. Pour $\sigma > 0$, on majore l'indicatrice des entiers $n \leq x$ par $(x/n)^\sigma$.
En fait on applique une variante un peu plus compliquée.
Soit $\alpha > 0$ à choisir.

$$\begin{aligned}\Psi(x,y) &\leq \Psi(x, x^{3/4}) + \sum_{\substack{x^{3/4}<n\leq x \\ P^+(n)\leq y}} 1 \\ &\leq x^{3/4} + \sum_{\substack{x^{3/4}<n\leq x \\ P^+(n)\leq y}} \big(\frac{n}{x^{3/4}}\big)^\alpha \frac{\log n}{\log x}.\end{aligned}$$

En prenant $\alpha = 2/(3\log y)$, on obtient $x^{-3\alpha/4} = \mathrm{e}^{-u/2}$.

Pour montrer le Théorème 3.1.1, il suffit de montrer que $S(x) \ll x \log x$, où on a posé

$$S(x) = \sum_{\substack{n \le x \\ P^{=}(n) \le y}} n^\alpha \log n.$$

On profite de l'additivité du log :

$$\log n = \sum_{p^k \| n} \log p^k = \sum_{p \| n} \log p + \sum_{p^k \| n,\ k \ge 2} \log p^k.$$

On coupe alors la somme $S(x)$ en $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$ où $S_1(x)$ correspond à la contribution des $p\|n$, $S_2(x)$ à celle des $p^k\|n$ avec $k \ge 2$. On majore $S_1(x)$ en remplaçant n par mp et en oubliant la condition $(m, p) = 1$ et en profitant du fait que $p^\alpha = O(1)$ si $p \le y$. On applique ensuite le Théorème des nombres premiers sous la forme $\sum_{p \le x/m} \log p \ll x/m$ quand $m \le x$:

$$\begin{aligned} S_1(x) &\le \sum_{\substack{m \le x \\ P^+(m) \le y}} m^\alpha \sum_{p \le \min(y, \frac{x}{m})} p^\alpha \log p \\ &\ll \sum_{\substack{m \le x \\ P^+(m) \le y}} m^\alpha \frac{x}{m} = xL(x), \end{aligned}$$

par définition.
Pour $S_2(x)$ on intervertit les sommations en m et p, k et on majore l'indicatrice des entiers m inférieurs à x/p^ν par $x/(mp^\nu)$:

$$S_2(x) = \sum_{p \le y,\ \nu \ge 2} \log(p^\nu) p^{\nu\alpha} \sum_{\substack{m \le x/p^\nu \\ P^+(m) \le y}} m^\alpha \Big(\frac{x}{p^\nu m}\Big).$$

Pour majorer les sommes sur m indépendamment des p, on remplace la condition $m \le x/p^\nu$ par $m \le x$:

$$S_2(x) \le xL(x) \sum_{p \le x} \log p \sum_{k \ge 2} \frac{k}{p^{k(1-\alpha)}}.$$

Rappelons que pour $0 < a < a_0 < 1$, $\sum_{k \ge 2} ka^k \ll_{a_0} a_2$. Pour nous, $p^{\alpha - 1} < p^{-1/3}$ pour $y \ge 3$ et ainsi

$$S_2(x) \ll xL(x) \sum_{p \le y} \frac{\log p}{p^{2(1-\alpha)}} \ll xL(x).$$

Nous en déduisons la majoration

$$\frac{S(x)}{\log x} \ll \frac{x}{\log x} \sum_{P^+(n) \le y} \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

D'après la formule de Mertens, pour $y \leq x$,

$$\frac{1}{\log x} \ll \prod_{p \leq x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \ll \prod_{p \leq y} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{S(x)}{\log x} &\ll x \prod_{p \leq y} \Big(1 - \frac{1}{p^{1-\alpha}} + O\Big(\frac{1}{p^{2(1-\alpha)}}\Big)\Big) \\
&\ll x \prod_{p \leq y} \Big(1 + \frac{p^\alpha - 1}{p}\Big) \\
&\ll x \exp\Big(\sum_{p \leq y} \frac{p^\alpha - 1}{p}\Big) \ll x \exp O\big(\sum_{p \leq y} \alpha \frac{\log p}{p}\Big) \ll x.
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve du Théorème 3.1.1.

3.2 La méthode géométrique

Quand y est petit, plus petit qu'une puissance de x, le Théorème 3.1.1 n'est pas pertinent.
Si $n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$ est un entier compté dans $\Psi(x, y)$ alors les entiers k vérifient l'inégalité

$$\sum_{i=1}^r k_i \log(p_i) \leq \log x.$$

Soit $L = \pi(y)$; $\Psi(x, y)$ est alors le nombre de L-uplets d'entiers naturels $(k_1, \dots, k_L) \in \mathbb{N}^L$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^L k_i \log p_i \leq \log x,$$

où ici p_i est le i ème nombre premier.
Le problème revient donc à compter des points à coordonnées entières dans $\mathbb{R}^L$.
Soit $\{a_j\}_{j \geq 1}$ une suite de réels positifs. On considère les ensembles

$$N_L(z) = |\{(k_1, \dots, k_L) \in \mathbb{N}^L : \sum_{j=1}^L k_j a_j \leq z\}|.$$

Théorème 3.2.1. *Pour $L \geq 1$, $z \geq 0$, on a*

$$\frac{z^L}{L!} \prod_{j=1}^L \frac{1}{a_j} < N_L(z) \leq \frac{(z + \sum_{j=1}^L a_j)^L}{L!} \prod_{j=1}^L \frac{1}{a_j}.$$

On admet ce théorème. On trouvera un preuve dans le livre "Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres", de G. Tenenbaum. Avec le choix $L = \pi(y)$, $z = \log x$, $a_j = \log p_j$, le terme $\frac{z^L}{L!}\prod_{j=1}^{L}\frac{1}{a_j}$ devient $\frac{1}{\pi(y)!}\prod_{p\leq y}((\log p)/(\log y))$ et

$$\begin{aligned}(z+\sum_{j=1}^{L} a_j)^L &= (\log x)^{\pi(y)}\Big(1+\frac{\theta(y)}{\log x}\Big)^{\pi y}\\ &= (\log x)^{\pi(y)}\exp\Big(\pi(y)\log\big(1+O\big(\frac{y}{\log x}\big)\big)\Big)\\ &= (\log x)^{\pi(y)}\Big(1+O\Big(\frac{y^2}{(\log x)(\log y)}\Big)\Big),\end{aligned}$$

lorsque $y^2 = O(\log x\log y)$. On en déduit le corollaire

Corollaire 3.2.2. (Ennola, 1969). *Pour* $2\leq y\leq\sqrt{\log x\log y}$, *on a uniformément*

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\pi(y)!}\prod_{p\leq y}\Big(\frac{\log x}{\log p}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{y^2}{\log x\log y}\Big)\Big).$$

3.3 Équations fonctionnelle et fonction de Dickman

Théorème 3.3.1. *Pour* $x\geq 1$, $y\geq 1$,

$$\Psi(x,y) = 1+\sum_{p\leq y}\Psi(x/p,p).$$

Preuve. Si $n\geq 2$ est un entier compté dans $\Psi(x,y)$ et $p = P^+(n)$. Alors $n = mp$ avec $P^+(m)\leq p\leq y$. En mettant l'entier 1 à part on arrive à

$$\begin{aligned}\Psi(x,y) &= 1+\sum_{p\leq y}\sum_{\substack{mp\leq x\\ P^+(m)\leq p}} 1\\ &= 1+\sum_{p\leq y}\Psi(x/p,p).\end{aligned}$$

Cette équation est pratique pour évaluer la différence $\Psi(x,z)-\Psi(x,y)$

Corollaire 3.3.2. (Identité de Buchstab). *Pour* $x\geq 1$, $z\geq y\geq 1$, *on a*

$$\Psi(x,y) = \Psi(x,z) - \sum_{y<p\leq z}\Psi(x/p,p). \tag{3.3.1}$$

Grâce à cette identité, on va pouvoir évaluer de proche en proche $\Psi(x,y)$. Tout d'abord, $\Psi(x,y) = \lfloor x\rfloor$ si $y\geq x$, c'est-à-dire $u\leq 1$ avec toujours

$u = \log x/\log y$. Puis, si $x \geq y \geq \sqrt{x}$, alors $x/p \leq p$ et en appliquant l'identité de Buchstabl avec $z = x$, on a :

$$\Psi(x, y) = \lfloor x \rfloor - \sum_{y<p\leq x} \lfloor x/p \rfloor \sim x(1 - \log u)$$

d'après le théorème des nombres premiers.
En injectant cette formule dans (3.3.1) avec $z = \sqrt{x}$ on obtient une estimation valide pour $x^{1/3}$ et ainsi de suite.
Nous allons montrer le théorème suivant

Théorème 3.3.3. *On a uniformémment pour* $x \geq y \geq 2$

$$\Psi(x, y) = x\varrho(u) + O\Big(\frac{x}{\log y}\Big),$$

où ϱ *est la fonction de Dickman. Cette fonction est définie par* $\varrho(u) = 1$ *pour* $0 \leq u \leq 1$, *elle est continue en* $u = 1$, *dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et est solution de l'équation différentielle aux différences :*

$$u\varrho'(u) + \varrho(u - 1) = 0 \qquad (u > 1). \tag{3.3.2}$$

Avant de démontrer le Théorème 3.3.3 nous donnons quelques propriétés de la fonction de Dickman

Théorème 3.3.4. *La fonction* ϱ *de Dickman vérifie les propriétés suivantes*

1. $u\varrho(u) = \int_{u-1}^{u} \varrho(v) \,\mathrm{d}\, v \qquad (u \geq 1)$
2. $\varrho(u) > 0 \qquad (u \geq 0)$
3. $\varrho'(u) < 0 \qquad (u > 1)$
4. $\varrho(u) \leq 1/\Gamma(u + 1) \qquad (u \geq 0)$.

Preuve. 1. Pour $u > 1$, la dérivée du membre de gauche est $\varrho(u) + u\varrho'(u)$ qui est d'après l'équation différentielle, égal à $\varrho(u) - \varrho(u - 1)$, c'est-à-dire la dérivée du membre de droite. Pour $u = 1$, les membres de gauche et de droite vallent tous les deux 1. 2. Soit $\tau = \inf\{u \geq 0 : \varrho(u) = 0\}$. Si τ est fini alors $\tau > 1$ car ϱ est continue et vaut 1 sur le segment $[0, 1]$. En appliquant (1), on a

$$0 = \varrho(\tau) = \int_{\tau-1}^{\tau} \varrho(v) \,\mathrm{d}\, v.$$

Mais le membre de droite est strictement positif par définition de τ et en utilisant la continuité de ϱ. Donc τ n'est pas fini.
3. Ce point découle du point 2 et de (3.3.2) : pour $u > 1$, $\varrho'(u) = -\varrho(u - 1)/u < 0$.
4. On démontre cette assertion par récurrence sur $k := [u]$. Pour $k = 0$, c'est-à-dire pour $u \in [0, 1[$, $\varrho(u) = 1$. La fonction Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$, avec $\Gamma''(v) = \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1} (\log t)^2 \,\mathrm{d}\, t \geq 0$. Cette fonction est donc convexe. Comme

$\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$, $\Gamma(v) \leq 1$ pour tout $v \in [1,2]$. Ainsi, (4) est vérifié pour $k = 0$.
On suppose que (4) est vérifiée jusqu'au rang $k-1$ avec $k \geq 1$. On applique les points 1 et 3 puis l'hypothèse de récurrence :

$$\varrho(u) = \frac{1}{u}\int_{u-1}^{u} \varrho(v)\,\mathrm{d}\,v \leq \frac{\varrho(u-1)}{u} \leq \frac{1}{u\Gamma(u)} = \frac{1}{\Gamma(u+1)}.$$

Preuve du Théorème 3.3.3. D'après le Théorème 3.3.4 et la formule de Stirling, ϱ décroit très vite, $\varrho(u) \ll \mathrm{e}^{-u(\ln u/2)}$, si $u > 2\log\log y$, le terme d'erreur annoncé dans le Théorème 3.3.3 est d'un ordre supérieur au terme principal, et le théorème est alors une conséquence du Théorème 3.1.1. On suppose maintenant que $u \leq 2\log\log y$.
On introduit la quantité $\Delta(x,y)$ définie par

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u) + \frac{x\Delta(x,y)}{\log y}.$$

On a vu qu'en appliquant l'identité de Buchstab, pour $1 \leq u \leq 2$:

$$\Psi(x,y) = [x] - \sum_{y<p\leq x}\left[\frac{x}{p}\right] = x(1-\ln u) + O(\pi(x)) = x\varrho(u) + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big).$$

Pour $k \leq 1 + 2\log\log y$, on considère

$$\Delta_k(y) = 1 + \sup\{|\Delta(X,Y)| : y \leq Y \leq X \leq Y^k\}.$$

Nous montrons par récurrence sur $k \leq 1+2\ln\ln y$ que $\Delta_k(y)$ est finie et uniformément bornée. (Rappelons que nous pouvons supposer que $u \leq 2\ln\ln y$).
On suppose que $\Delta_k(y) < \infty$ pour $k \geq 2$ donné. Soient X, Y tels que $Y \geq y$, $Y^2 < X \leq Y^{k+1}$. En appliquant l'identité de Buchstab avec $z = \sqrt{X}$ et en notant $U = (\log X)/\log Y$, on obtient

$$\begin{aligned}\Psi(X,Y) &= \Psi(X,\sqrt{X}) - \sum_{Y<p\leq\sqrt{X}} \Psi(X/p,p)\\ &= X\varrho(2) - \sum_{Y<p\leq\sqrt{X}} \frac{X}{p}\varrho\Big(\frac{\log(X/p)}{\log p}\Big) + \frac{2X\Delta(X,\sqrt{X})}{\log X} - \sum_{Y<p\leq\sqrt{X}} \frac{X\Delta(X/p,p)}{p\ln p}.\end{aligned}$$

Notons T_1 les termes attendus, c'est-à-dire sans les Δ :

$$T_1 = X\varrho(2) - \sum_{Y<p\leq\sqrt{X}} \frac{X}{p}\varrho\Big(\frac{\log(x/p)}{p}\Big).$$

En utilisant l'intégrale de Stieltjes puis une sommation par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
T_1 &= X\varrho(2) - X\int_Y^{\sqrt{X}} \varrho\Big(\frac{\log(X/T)}{\log t}\Big)\,\mathrm{d}\Big(\sum_{Y<p\le t}\frac{1}{p}\Big)\\
&= X\varrho(2) - \Big[X\varrho\Big(\frac{\log(X/T)}{\log t}\Big)\sum_{Y<p\le t}\frac{1}{p}\Big]_Y^X\\
&\quad + X\int_Y^{\sqrt{X}}\Big(\sum_{Y<p\le t}\frac{1}{p}\Big)\varrho'\Big(\frac{\log X}{\log t}-1\Big)\frac{(-1)\log X}{\log t}\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}$$

L'intégrale ci-dessus a une expression plus simple si on fait le changement de variables $t = X^{1/v}$:

$$T_1 = X\varrho(2) - X\varrho(1)L(1/2) + \int_2^U L(v)\varrho'(v-1)\,\mathrm{d}\,v,$$

où on rappelle que $\varrho(1) = 1$ et $-L(v)$ correspond à la somme des inverses des premiers dans $[Y, X^{1/v}]$:

$$L(v) = -\sum_{Y<p<X^{1/v}}\frac{1}{p} = \log(v/U) + O(\mathrm{e}^{-c_0\sqrt{\log Y}}),$$

pour une constante $c_0 > 0$ absolue d'après le théorème des nombres premiers. (En fait en appliquant le résultat de Korobov-Vinogradov, on remarque que $c_0 = 1$ est admissible). On insère cette estimation de $L(v)$ dans T_1, puis on refait une intégration par parties et dans la dernière ligne on profite de l'équation fonctionnelle vérifiée par ϱ :

$$\begin{aligned}
T_1 &= X\varrho(2) - XL(\sqrt{X}) - X\int_2^U \varrho'(v-1)\ln(v/U)\,\mathrm{d}\,v + O\Big(\int_2^U |\varrho'(v-1)|\mathrm{e}^{-c_0\sqrt{\ln(Y)}}\,\mathrm{d}\,v\Big)\\
&= X\varrho(2) - XL(1/2) - X[\varrho(v-1)\ln(v/U)]_2^U + \int_2^U \frac{\varrho(v-1)}{v}\,\mathrm{d}\,v + O(X\mathrm{e}^{-c_0\ln(Y)})\\
&= X\varrho(2) + X[\varrho(v)]_2^U + O(X\mathrm{e}^{-cO\sqrt{\ln(Y)}}) = X\varrho(U) + O(X\mathrm{e}^{-cO\sqrt{\ln(Y)}}).
\end{aligned}$$

En reportant cela dans (3.3), on obtient pour $\Psi(X,Y)$:

$$\Psi(X,Y) = X\varrho(U) + O(X\mathrm{e}^{-c_0\ln(Y)}) + \frac{X}{\ln(Y)}\Big(\frac{2\ln(Y)}{\ln(X)}\Delta(X,\sqrt{X}) - \ln Y\sum_{Y<p\le X}\frac{\Delta(X/p,p)}{p\ln p}\Big).$$

Il est temps d'introduire les quantités $\Delta_k(y)$. Tout d'abord, il est clair que $|\Delta(X,\sqrt{X})| \le (\Delta_k(y) - 1)$. Si $Y^2 \le X \le Y^{k+1}$ et $Y < p \le \sqrt{X}$, alors $Y < p < X/p < p^k$. On est dans la zone où s'évalue le sup dans la définition de $\Delta_k(y)$ et ainsi $|\Delta(X/p,p)| \le \Delta_k(y) - 1$ pour tout $Y < p \le \sqrt{X}$. On parvient enfin à une première majoration de $|\Delta(X,Y)|$:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{X\Delta(X,Y)}{\ln Y}\Big| &= \Big|\Psi(X,Y) - X\varrho(U)\Big| \\ &\leq O(Xe^{-c_0\sqrt{\ln Y}}) + (\Delta_k(y)-1)\frac{X}{\ln Y}\Big(\frac{2}{U} + \ln(Y)\sum_{Y<p\leq\sqrt{X}}\frac{1}{p\ln p}\Big).\end{aligned}$$

Admettons provisoirement que la somme sur les nombres premiers ci-dessus vérifie :

$$\sum_{Y<p\leq\sqrt{X}}\frac{1}{p\ln p} = \frac{1}{\ln Y} - \frac{1}{\ln\sqrt{X}} + O(\mathrm{e}^{-c_1\log\sqrt{Y}}),$$

avec $c_1 > 0$ absolue. On a alors

$$\frac{2}{U} + \ln(Y)\sum_{Y<p\leq\sqrt{X}}\frac{1}{p\ln p} = 1 + O(\mathrm{e}^{-c_1\log\sqrt{Y}}).$$

Puis pour $0 < c_2 < \min(c_0, c_1)/2$,

$$1 + \Delta(X,Y) \leq 1 + \mathrm{e}^{-c_2\sqrt{\ln Y}} + \Delta_k(y) - 1 \leq \Delta_k(y)(1 + O(\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{\ln Y}}).$$

On prend ensuite le maximum sur les X, Y avec $y \leq Y \leq X \leq Y^{k+1}$ (et $Y^2 < X$) :

$$\Delta_{k+1}(y) \leq \Delta_k(y)(1 + C\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{\ln y}}),$$

pour un $C > 0$ convenable. En itérant cette inégalité, on obtient :

$$\Delta_{[3\log\log y]} \leq (1 + C\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{\ln y}})^{2\log\log y} \ll 1.$$

Ce qui termine la preuve du Théorème 3.3.3.
Il reste à démontrer la formule 3.3. La preuve est analogue à celle du Théorème des nombres premiers pour passer de $\psi(x)$ à $\pi(x)$.
On utilise les intégrales de Stieltjes puis on fait une sommation par partie, en faisant intervenir $\theta(x) - x$, où θ est la fonction de Tchébychev, afin de facilement contrôler les termes d'erreurs :

$$\begin{aligned}\sum_{X<p\leq\sqrt{X}}\frac{1}{p\ln p} &= \sum_{X<p\leq\sqrt{X}}\frac{\log p}{p(\ln p)^2} \\ &= \int_Y^{\sqrt{X}}\frac{\mathrm{d}\,\theta(t)}{t(\ln t)^2} \\ &= \int_Y^{\sqrt{X}}\frac{\mathrm{d}\,t}{t(\ln t)^2} + \int_Y^{\sqrt{X}}\frac{d(\theta(t)-t}{t(\log^2)} \\ &= -\Big[\frac{1}{\log t}\Big]_Y^{\sqrt{X}} + \Big[\frac{\theta(t)-t}{t(\log t)^2}\Big]_Y^{\sqrt{X}} - \int_Y^{\sqrt{X}}(\theta(t)-T)h'(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{\ln Y} - \frac{2}{\ln X} + O(\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln Y}},\end{aligned}$$

où pour alléger l'écriture on a noté $h(t) = 1/(t \log^2 t)$. Par ailleurs on a utilisé le théorème des nombres premiers pour majorer $|\theta(t) - t|$ pour $Y \leq t \leq \sqrt{X}$.

3.4 Pour aller plus loin

De Bruijn, Alladi puis Smida ont déterminé le comportement asymptotique de la fonction de Dickman. En particulier, quand $u \to +\infty$, on a

$$\varrho(u) = \exp\Big(- u\Big(\log u + \log\log(u+2) + O\Big(\frac{\log\log(u+2)}{\log(u+2)}\Big)\Big)\Big).$$

En 1986 Hidebrand a montré l'équivalence $\Psi(x,y) \sim x\varrho(u)$ dans un domaine très vaste. Pour $y \geq 2$, $1 \leq u \leq (\log y)^{3/5-\varepsilon}$,

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\Big(1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big).$$

De plus il a montré que toute amélioration de la condition $u \leq (\log y)^{3/5-\varepsilon}$ était équivalente à une amélioration de la région sans zéro de la fonction ζ.

Quelques références

G. Tenenbaum : Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, 5ème édition, Dunod, (2022). Le chapitre 3 du cours est une toute petite partie du chapitre III. 5 de ce livre.

A. Hildebrand et G. Tenenbaum, Integers without large prime factors, J. Théorie des nombres de Bordeaux 5, (1993), 411-484

C. Dartyge. Entiers friables : un tour d'horizon. Gazette des Mathématiciens, Société Mathéma- tique de France, 2018, pp.29-39.
https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01647043/file/FriablesV6.pdf

Les deux dernières références sont des articles de synthèse sur les entiers friables et leurs applications.