Chapitre 2

La fonction ζ de Riemann

2.1 Les nombres premiers

On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Dans tout ce cours la lettre p désignera un nombre premier.
Euclide (3ème siècle avant J. C.) a démontré qu'il y avait une infinité de nombres premiers, autrement dit que $\pi(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. L'idée de la preuve est de considérer les facteurs premiers des entiers $N := n! + 1$.
Ératosthène (2ème siècle avant J. C.) a donné une méthode judicieuse pour obtenir la liste des nombres premiers inférieurs à un entier x donné. Cette méthode porte le nom de crible d'Ératosthène et consiste à rayer les multiples de 2, puis les multiples de 3, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait rayé les multiples d'un numbre premier inférieur à $[\sqrt{x}]$.
Une question naturelle est alors de déterminer l'ordre de grandeur de $\pi(x)$.
Gauss (1777-1855) a énoncé la conjecture suivante :

$$\pi(x) \sim \mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}\,t}{\log t}.$$

Tchébychev (1821-1894) a obtenu une série d'avancées sur ce problème. En 1852, il a démontré l'encadrement

$$(0,92...)\frac{x}{\log x} < \pi(x) < (1,105...)\frac{x}{\log x}.$$

Mertens (1840-1927) a obtenu plusieurs formules asymptotiques désormais couramment utilisées en théorie analytique des nombres comme par exemple :

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + A + O((\log x)^{-1}.$$

Introduisons maintenant la fonction ζ de Riemann :

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \qquad (\Re e s > 1).$$

Euler (1707-1783) a montré que pour tout réel $s > 1$, on a la formule :

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

établissant ainsi un lien entre les nombres premiers et la fonction ζ.
On verra dans ce cours que cette série admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$. La célèbre hypothèse de Riemann (1860) énonce alors que tous les zéros *non triviaux* de ζ sont sur la droite *critique*, la droite d'équation $\Re es = 1/2$.
Nous verrons au travers de formules dites explicites le lien entre les ces zéros de ζ et $\pi(x)$.
Hadamard et de la Vallée Poussin on montré indépendamment le célèbre théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \sim \mathrm{li}(x) \qquad x \to +\infty,$$

plus précisément :

$$\pi(x) = \mathrm{li} x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x})),$$

pour un certain $c > 0$.
Le meilleur terme d'erreur est dû à Vinogradov et Korobov (1958) :

$$\pi(x) = \mathrm{li} x + O(x \exp(-c(\log x)^{3/5}/(\log\log x)^{1/5})),$$

alors que l'hypothèse de Riemann implique :

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x}\log x).$$

2.2 Fonctions arithmétiques

Une fonction arithmétique est une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$.
Exemples.
- On note $\mathbf{1}$ la fonction identiquement égale à 1, $\mathbf{1}(n) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}^*$;
- $\omega(n) =$ nombre de facteurs premiers distincts de n ; - $\omega(n) =$ le nombre de facteurs premiers distincts de n (dans certains chapitres on notera ν cette fonction) ;
- $\Omega(n) =$ nombre de facteurs premiers de n en tenant compte de la multiplicité par exemple pour $n = p_1^2 p_2^3$, $\omega(n) = 2$, $\Omega(n) = 5$.
-$\log n$
- la fonction de Von Mangoldt $\Lambda(n) = \log p$ si $n = p^r$, $\Lambda(n) = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier ;
- la fonction de Möbius :

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si} n = p_1 \cdots p_k, \text{ les } p_i \text{ étant distincts} \\ 0 & \text{s'il existe } p \text{ tel que } p^2 | n \end{cases}$$

- $\tau(n)$ ou $d(n)$ le nombre de diviseurs de n ;
- L'indicatrice d'Euler :

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{1\le k\le n \\ (k,n)=1}} 1.$$

?⟨fmul⟩? **Définition 2.2.1.** *Une fonction arithmétique f est multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous m, n premiers entre eux. Elle est complètement multiplicative si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.*

Exemples : $\mathbf{1}$, $n \mapsto n^s$ sont complètement multiplicatives, μ, τ, φ sont multiplicatives.

⟨IdEuler⟩ **Théorème 2.2.2. (Identité d'Euler)** *Soit f une fonction multiplicative telle que*

$$\sum_p \sum_{j\ge 1} |f(p^j)| < \infty$$

Alors la série $\sum_{n\ge 1} |f(n)|$ converge et on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} f(p^j)\Big) = \prod_p \Big(\sum_{j=0}^{\infty} f(p^j)\Big).$$

Preuve. la série $\sum_p \sum_{j\ge 1} |f(p^j)|$ étant convergente, le produit infini $\prod_p \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} |f(p^j)|\Big)$ converge aussi.
Comme f est multiplicative, on peut passer de la somme à un produit :

$$\prod_{p\le x} (1 + \sum_{j\ge 1} f(p^j)) = \sum_{\substack{n\ge 1 \\ p|n \Rightarrow p\le x}} f(n).$$

On applique cela à f pour montrer que la série de terme $f(n)$ est absolument convergente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} |f(n)| &\le \sum_{\substack{n\ge 1 \\ p|n\Rightarrow p\le x}} |f(n)| \\
&\le \prod_{p\le x} \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} |f(p^j)|\Big) \\
&\le \prod_{p=2}^{\infty} \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} |f(p^j)|\Big) < \infty.
\end{aligned}$$

Ensuite si $P^+(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n, on a pour $x > 0$:

$$\Big|\sum_{n\ge 1} f(n) - \prod_{p\le x} \Big(1 + \sum_{j\ge 1} f(p^j)\Big)\Big| = \Big|\sum_{P^+(n)>x} f(n)\Big| \le \sum_{n>x} |f(n)|,$$

qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

?⟨convolution⟩? **Définition 2.2.3.** *On appelle convolution (de Dirichlet) de deux fonctions arithmétiques f et g la fonction arithmétique notée $f * g$ définie par :*

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g\big(\frac{n}{d}\big) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2).$$

?⟨asscom⟩? **Proposition 2.2.4.** *La convolution est associative et commutative. Elle a comme comme élément neutre la fonction e définie par : $e(n) = 1$ si $n = 1$, $e(n) = 0$ sinon. De plus, si f_1, f_2, g_1, g_2 sont des fonctions arithmétiques et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :*

$$(\alpha f_1 + f_2) * (\beta g_1 + g_2) = (\alpha\beta)(f_1 * g_1) + \alpha f_1 * g_2 + \beta f_2 * g_1 + f_2 * g_2.$$

Démonstration. Si $f_1, \ldots, f_k$ sont des fonctions arithmétiques, on obtient quels que soient les parenthèses et l'ordre des facteurs

$$f_1 * \cdots * f_k(n) = \sum_{d_1 \cdots d_k = n} f_1(d_1) \cdots f_k(d_k).$$

De plus pour toute fonction arithmétique f,

$$f * e(n) = \sum_{d|n} f(d)\delta\big(\frac{n}{d}\big) = f(n).$$

Les autres propriétés sont évidentes.

⟨inv⟩ **Lemme 2.2.5.** *Une fonction arithmétique est inversible pour $*$ si et seulement si $f(1) \neq 0$.*

Démonstration. sens $\Rightarrow$: si f est inversible, il existe f^{-1} tel que $f * f^{-1} = e$. On a alors $f * f^{-1}(1) = e(1) = 1$.
sens $\Leftarrow$: on cherche g tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * g(n) = e(n)$.
Nous construisons g par recurrence sur n. Pour $n = 1$, $f * g(1) = f(1)g(1) = 1$. On suppose connus $g(k)$ pour $k = 1, \ldots, n-1$. On a alors

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g\Big(\frac{n}{d}\Big) = f(1)g(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)g\Big(\frac{n}{d}\Big) = 0.$$

Cela donne

$$f(1)g(n) = -\sum_{\substack{d|n \\ d>1}} f(d)g\Big(\frac{n}{d}\Big). \tag{2.2.1}$$ formumeinverse

?⟨mulmul⟩? **Lemme 2.2.6.** *Si f et g sont multiplicatives, alors $f * g$ est multiplicative.*

Démonstration. Soient m et n tels que $(m, n) = 1$. Les diviseurs de mn sont de la forme ab avec $a|m$ et $b|n$. On a ainsi

$$f * g(mn) = \sum_{d|mn} f(d)g(mn/d) = \sum_{a|m,b|n} f(ab)g(\frac{mn}{ab}).$$

Comme $(a, b) = 1 = (m/a, n/b)$ et que les fonctions f et g sont multiplicatives, on a :

$$f * g(mn) = \sum_{a|m} f(a)g(m/a) \sum_{b|n} f(b)g(n/b) = f * g(m)f * g(n).$$

?⟨invmul⟩? **Proposition 2.2.7.** *Si f est multiplicative, alors f est inversible et son inverse est une fonction multiplicative.*

Preuve. Comme f est multiplicative, $f(1) = 1 \neq 0$, f est inversible. Notons g son inverse. Nous allons montrer par récurrence sur N la propriété :

$$\forall m, n \geq 1, (mn \leq N \text{ et } (m, n) = 1) \Rightarrow g(mn) = g(m)g(n).$$

Comme $g(1) = 1$ cette propriété est vérifiée pour $N = 1$. Supposons la vraie pour $N-1$ et soient deux entiers m et n premiers entre eux tels que $mn = N$. On a vu dans la preuve du 2.2.5 que

$$g(mn) = -\sum_{\substack{a|m,\ b|n \\ ab<n}} f(mn/(ab))g(ab).$$

Les diviseurs a, b comptés dans cette somme ont leur produit $ab < N$. D'après l'hypothèse de récurrence et la multiplicativité de f, on a :

$$\begin{aligned} g(mn) &= -\sum_{a|m,\ b|n} f(m/a)f(n/b)g(a)g(b) + g(m)g(n) \\ &= f * g(m)f * g(n) + g(m)g(n) = g(m)g(n), \end{aligned}$$

car au moins un des termes $f * g(m)$ ou $f * g(n)$ est nul puisque $mn > 1$. Cela termine la récurrence.

Quel est l'inverse de convolution de $\mathbf{1}$? Notons h cet inverse. La formule (2.2.1) donnant la valeur de f^{-1} vaut lorsque $n = p^k$: $f^{-1}(p^k) = -\sum_{j=0}^{k-1} f(p^{k-j})f^{-1}(p^j)$ Pour $k = 1$ on obtient : $f(1)f^{-1}(p) + f^{-1}(1)f(p) = 0$, $f^{-1}(p) = -f(p)$.

Appliquons cela pour déterminer l'inverse de $\mathbf{1}$ Notons h cet inverse. On vient de voir que $h(p) = -1$, puis $h(p^2) = -\mathbf{1}(p^2) + h(p)\mathbf{1}(p) = 0$; puis on vérifie par récurrence sur k que $h(p^k) = 0$ pour tout $k \geq 2$; $1 + h(p) + h(p^2) + \cdots + h(p^k) = 0$; on trouve $h = \mu$.

?⟨inv1⟩? **Théorème 2.2.8.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{1} * \mu(n) = \delta(n)$.*

Ce résultat est à la base des méthodes de cribles.

D' autres identités fondamentales sont $\log = \Lambda * \mathbf{1}$ ou encore $\mu * \log = \lambda$, ou encore $\mathbf{1} * \mathbf{1} = \tau$.

2.3 Les séries de Dirichlet

Définition 2.3.1. *Une série de Dirichlet est une fonction de variable complexe de la forme* $F(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, *où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de nombres complexes. La fonction* F *est alors définie là où elle converge.*

Proposition 2.3.2. *Soient* f *et* g *deux fonctions arithmétiques. On a alors formellement :*

$$\Big(\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}\Big)\Big(\sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}\Big) = \Big(\sum_{n\geq 1} \frac{f * g(n)}{n^s}\Big).$$

Théorème 2.3.3. *Soit* f *une fonction multiplicative. On a :*

$$\sum_{n\geq 1} \Big|\frac{f(n)}{n^s}\Big| < +\infty \text{ si et seulement si } \sum_p \sum_{j\geq 1} \Big|\frac{f(p^j)}{p^{js}}\Big| < +\infty.$$

Lorsque ces séries convergent, on a le développement en produit eulérien :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \Big(1 + \sum_{j\geq 1} \frac{f(p^j)}{p^{js}}\Big).$$

Preuve. On applique l'identité d'Euler, c'est-à-dire le Théorème 2.2.2 à la fonction $n \mapsto f(n)n^{-s}$.

Corollaire 2.3.4. *Pour tout* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re e s > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - 1/p^s)^{-1}.$$

Preuve. D'après le théorème précédent appliqué à la fonction $f = \mathbf{1}$, on a pour $\Re e s > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_p \Big(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{p^{js}}\Big) = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)^{-1}.$$

Nous allons maintenant étudier le domaine de convergence d'un série de Dirichlet générale. Dans la suite nous écrirons $s = \sigma + i\tau$ où $\sigma = \Re e s$, $\tau = \Im m s$.

Théorème 2.3.5. *Soit* $F(s) := \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ *une série de Dirichlet.*

1. *Si la série converge en* $s_0 := \sigma_0 + i\tau_0$, *alors elle converge dans le demi-plan* $\sigma > \sigma_0$, *et la convergence est uniforme dans tout secteur angulaire*

$$S(\theta) = \{s \in \mathbb{C} : |\arg(s - s_0)| < \theta\} \text{ avec } \theta < \pi/2.$$

2. *Si la série converge absolument pour $s = s_0$, alors elle converge absolument et uniformément pour $\sigma \geq \sigma_0$.*
3. *$F(s)$ est une fonction holomorphe dans tout domaine (c'est-à-dire sous ensemble connexe et non vide de $\mathbb{C}$) ouvert de convergence, et on a dans un tel domaine*
$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n\geq 1} \frac{a_n (\log n)^k}{n^s}.$$

Preuve. 1. Comme $F(s) = \sum_{n\geq 1}(a_n n^{-s_0})n^{-(s-s_0)}$, quitte à poser $a'_n = a_n n^{-s_0}$ et $s' = s - s_0$, on peut supposer que $s_0 = 0$ ce qui revient à dire que $\sum a_n$ converge.
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tous entiers $M, N \geq n_0$, on ait
$$\Big| \sum_{M<n\leq N} a_n \Big| \leq \varepsilon.$$
En faisant une sommation d'Abel, pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > 0$, on obtient
$$\sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s} = N^{-s} \sum_{M<n\leq N} a_n + s \int_M^N \Big(\sum_{M<n\leq t} a_n \Big) \frac{\mathrm{d}\, t}{t^{s+1}}.$$
Comme M et N sont supérieurs à n_0,
$$\begin{aligned}\Big| \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s} \Big| &\leq N^{-\sigma}\varepsilon + |s|\varepsilon \int_M^\infty \frac{\mathrm{d}\, t}{t^{\sigma+1}} \\ &\leq \varepsilon\Big(N^{-\sigma} + \frac{|s|}{\sigma} M^{-\sigma}\Big) \\ &\leq \varepsilon\Big(1 + \frac{|s|}{\sigma}\Big).\end{aligned}$$
Si $s \in S(\theta)$ (avec $s_0 = 0$), alors $\sigma = \Re e s = \Re |s| \mathrm{e}^{i \arg(s)} = |s| \cos(\arg(s)) \geq |s| \cos\theta$ et ainsi
$$\Big| \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s} \Big| \leq \varepsilon\Big(1 + \frac{1}{\cos\theta}\Big).$$
D'après le critère de Cauchy uniforme, la série $\sum a_n n^{-s}$ converge uniformément dans $S(\theta)$.

Le point 2 découle de la majoration :
$$\Big| \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s} \Big| \leq \sum_{M<n\leq N} |a_n| n^{-\sigma}.$$
Il reste à vérifier le 3ème point. Soit K un compact inclus dans un domaine ouvert de convergence. Il existe alors $s_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]0, \pi/2[$ tel que $K \subset S(\theta)$. Sur K, F est alors limite uniforme des sommes partielles $\sum_{n=1}^N a_n^{-s}$. D'après un théorème de Weierstrass, F est holomorphe et ses dérivées sont les limites des dérivées des sommes partielles.