2.7 Produit infini pour $\xi(s)$

On rappelle la définition de ξ

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Proposition 2.7.1. *Il existe $C > 0$ telle que*

$$|\xi(s)| < \exp(C|s|\log|s|).$$

Corollaire 2.7.2. *La fonction $\xi(s)$ est d'ordre au plus* 1.

Preuve.
Comme ξ est entière sur $\mathbb{C}$, $|\xi(s)|$, $|1-s|\log|1-s|$, $|s|\log|s|$ sont bornés sur tout compact. On peut donc se restreindre à $|s| > T_0$ pour un T_0 fixé assez grand.
Dans cette zone, pour $\sigma < 1/2$, $0 < |1-s|\log|1-s| \leq 2|s|\log|s|$. De plus $\xi(s) = \xi(1-s)$, il suffit de majorer $|\xi(s)|$ pour $\sigma \geq 1/2$.
Tout d'abord, il existe $c_1 > 0$ telle que dans la région $\sigma \geq 1/2$, on ait :

$$|s(1-s)|\pi^{-s/2}| < \exp(c_1|s|).$$

En utilisant la formule de Stirling pour $-\pi/2 < \arg(s) < \pi/2$,

$$\Gamma(s/2) = \sqrt{\frac{4\pi}{s}}\Big(\frac{s}{2e}\Big)^{s/2}(1 + O(|s|^{-1})$$
$$|\Gamma(s/2)| < \exp(c_2|s|\log|s|).$$

Il reste à majorer $|\zeta(s)|$. Rappelons la formule (2.5.1) donnant pour $\sigma > -1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^{\infty} \frac{t - [t] - \frac{1}{2}}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}\,t.$$

L'intégrale est bornée quand $\sigma \geq 1/2$, il existe donc $c_3 > 0$ tel que $|\zeta(s)| < c_3|s|$ quand $|s| \geq T_0$.
Remarque. Lorsque σ tend vers $+\infty$, $\log\Gamma(\sigma) \sim \sigma\log\sigma$ et $\zeta(\sigma)$ tend vers 1 ; la majoration de la Proposition 2.7.1 est mis à part la constante optimale. En particulier $\xi(s)$ n'est pas majoré par $\exp(C|s|)$.

Théorème 2.7.3. *La fonction ξ admet une infinité de zéros, $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, tels que*

$$\sum_{n\geq 1} |\varrho_n|^{-1} = +\infty, \qquad \forall\varepsilon > 0,\ \sum_n |\varrho_n|^{-1-\varepsilon} < +\infty,$$

et le développement en produit infini

$$\xi(s) = \mathrm{e}^{Bs}\prod_{\varrho}(1 - s/\varrho)\mathrm{e}^{s/\varrho},$$

avec

$$B = -\frac{\gamma}{2} - 1 + \frac{\log(4\pi)}{2} = -0,02309508966121......$$

Comme ξ est d'ordre 1, mais n'est pas majoré par un terme de la forme $\exp(C|s|)$, la divergence de la première série, la convergence des autres séries et le développement en produit infini sont des conséquences des Corollaires 2.6.4 et 2.6.5. Il reste à montrer que le $a = \xi(0)$ issu du Corollaire 2.6.5 soit égal à 1 et à déterminer $B = \xi'(0)/\xi(0)$. Comme $\Gamma(s) \sim 1/s$ au voisinage de zéro et $\zeta(0) = -1/2$, on a bien $\xi(0) = 1$. La valeur de B sera déterminée ultérieurement.
Remarque Tous les zéros de $\xi(s)$ sont uniquement situés dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$. En effet, $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ n'a aucun zéro pour $\sigma > 1$ (cela se voit avec le produit Eulérien de ζ), puis l'équation fonctionnelle $\xi(1-s) = \xi(s)$ montre qu'il n'y a pas de zéro pour $\sigma < 0$.
Les zéros de ζ sont quasiment les mêmes ; ils sont ou bien situés dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$, ou bien sont les points qui compensent les pôles de $\Gamma(s/2)$, c'est-à-dire $-2, -4, -6, -8, \ldots$. Ces derniers sont appelés les zéros triviaux.

Corollaire 2.7.4. *Pour $\xi(s) \neq 0$, on a :*

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B + \sum_{\varrho} \Big(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \Big).$$

Preuve. C'est la dérivée logarithmique du produit infini.

Corollaire 2.7.5. *Pour $s \neq 1$ et $\zeta(s) \neq 0$, on a :*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} + \frac{\log \pi}{2} - \frac{\Gamma'(s/2+1)}{2\Gamma(s/2+1)} + \sum_{\varrho} \Big(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \Big).$$

Preuve. On écrit

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = 2(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2+1)\zeta(s).$$

On prend la dérivée logarithmique

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{\log \pi}{2} + \frac{\Gamma'(s/2+1)}{2\Gamma(s/2+1)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

On termine en comparant avec le Corollaire 2.7.4.
Remarque. Cette formule fait apparaître le pôle de ζ en $s = 1$ et les zéros non triviaux en $s = \varrho$. Les zéros triviaux de ζ sont dans le terme en Γ car en calculant la dériviée logarithmique de Γ à partir du produit de Weierstrass, on obtient

$$-\frac{\Gamma'(s/2+1)}{2\Gamma(s/2+1)} = \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \Big).$$

Lemme 2.7.6. *On a $B = -\gamma/2 - 1 + (\log 4\pi)/2$.*

En utilisant la relation $\xi(s) = \xi(1-s)$, on a :

$$B = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}.$$

L'autre formule de la dérivée logarithmique fournit

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} - \frac{\log \pi}{2} + \frac{\Gamma'(s/2+1)}{2\Gamma(s/2+1)},$$

et on peut faire tendre s vers 1. Or

$$+\frac{\Gamma'(1/2+1)}{2\Gamma(1/2+1)} = \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1+2n} - \frac{1}{2n}\Big) = \frac{\gamma}{2} - 1 + \log 2.$$

On obtient

$$B = \frac{\gamma - 2 + \log(4\pi)}{2} - \lim_{s\to 1}\Big(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\Big).$$

On a vu que pour $\sigma > 0$,

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - sI(s), \text{ avec } I(s) \int_1^{\infty} (x-[x])x^{-s-1}\,\mathrm{d}\,x$$

donc $(s-1)\zeta(s) = s(1-(s-1)I(s))$, puis en prenant la dérivée logarithmique

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s} + \frac{-I(s)-(s-1)I'(s)}{1-(s-1)I(s)} \to_{s\to 1} 1 - I(1).$$

Un dernier calcul

$$\begin{aligned}\int_1^N \frac{x-[x]}{x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \log N - \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} nx^{-2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \log N - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1} \\ &= 1 + \log N - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

On obtient $I(1) = 1-\gamma$ puis $B = -1 - \gamma/2 + (\log 4\pi)/2$.

Proposition 2.7.7. *On a en écrivant $\varrho = \beta + i\gamma$:*

$$B = -\sum_{\varrho}\frac{1}{\varrho} = -\sum_{\gamma>0}\frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2},$$

où la somme s'entend avec ϱ et $\bar{\varrho}$ pris simultanément.

Preuve. La convergence est assurée par le fait que l'on prenne ϱ et $\bar{\varrho}$ ensemble :

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\bar{\varrho}}=\frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2}\leq\frac{2}{|\varrho|^2}$$

car $|\beta|\leq 1$. La série sur les inverses des carrés des modules converge. On a

$$\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)}=B+\sum_{\varrho}\Big(\frac{1}{1-s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\Big)=-\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=-B-\sum_{\varrho}\Big(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\Big).$$

Mais si ϱ est un zéro, $1-\varrho$ l'est aussi donc les termes avec $1-s-\varrho$ et $s-\varrho$ se compensent.

Corollaire 2.7.8. *Tout zéro $\varrho=\beta+i\gamma$ vérifie $|\gamma|>6.5611$.*

Preuve. Quitte à changer ϱ en $1-\varrho=1-\beta-i\gamma$ on peut supposer que $1/2\leq\beta\leq 1$. On a

$$\frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2}\leq -B,$$

et ainsi

$$|\gamma|\geq\sqrt{-\frac{2\beta}{B}-\beta^2}\geq\sqrt{-\frac{1}{B}-\frac{1}{4}}>6.5611..$$

2.8 Le nombre de zéros de ζ

Une autre façon de vérifier que ζ n'a pas de zéro sur le segment $]0,1[$ est d'utiliser la formule

$$(1-2^{1-s})\zeta(s)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-s}$$

qui s'établit d'abord dans la région $\sigma>1$ en séparant les n pairs des n impairs puis par prolongement analytique sur $\sigma>0$. Pour $s=\sigma$ avec $\sigma\in]0,1[$ le membre de droite est positif, mais $1-2^{1-\sigma}<0$ donc $\zeta(\sigma)<0$.
Les zéros non triviaux sont situés dans la bande critique et de façon symétrique par rapport à $1/2$ (d'après l'équation fonctionnelle) ainsi que par rapport à l'axe des σ puisque $\zeta(\bar{s})=\bar{\zeta}(s)$.
Nous appelons $N(T)$ le nombre de zéros de ζ notés $\varrho=\beta+i\gamma$, $|\gamma|\leq T$, $0\leq\beta\leq 1$, comptés avec multiplicités.

Théorème 2.8.1. *Pour $T\geq 1$, $N(T)\ll T\log T$.*

D'après le Corollaire 2.7.5, la dérivée logarithmique de ζ est de la forme

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=B-\frac{1}{s-1}+\frac{\log\pi}{2}-\frac{\Gamma'(s/2+1)}{2\Gamma(s/2+1)}+\sum_{\varrho}\Big(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\Big).$$

On applique la formule de Stirling sous la forme

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O\Big(\frac{1}{|s|}\Big),$$

dans l'angle $|\arg s| \leq \pi - \varepsilon$. On obtient uniformément pour $|t| \geq 2$ et $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\varrho} \Big(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\Big) + O(\log|t|).$$

Si on prend $s = 2 + iT$ avec $T \geq 2$ on obtient

$$\sum_{\varrho} \Big(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\Big) \ll \log T.$$

Avec ces choix,

$$\Re e(s-\varrho)^{-1} = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4 + (T-\gamma)^2},$$

puisque $0 \leq \beta \leq 1$. On a aussi

$$\Re e\frac{1}{\varrho} = \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \geq 0,$$

et ainsi l'inégalité

$$\sum_{\varrho} \frac{1}{4 + (T-\gamma)^2} \ll \log T.$$

En restreignant la somme de gauche aux ϱ tels que $T < \gamma < T+1$ on a

$$N(T+1) - N(T) \ll \log T$$

puis en sommant cette majoration on trouve $N(T) \ll T \log T$.

Corollaire 2.8.2. *Pour tout $T \geq 1$,*

$$\sum_{|T-\gamma|\geq 1} \frac{1}{(T-\gamma)^2} = O(\log T).$$

Preuve. On a les inégalités

$$\sum_{|T-\gamma|\geq 1} \frac{1}{(T-\gamma)^2} \leq \sum_{\varrho} \frac{2}{1 + (T-\gamma)^2} = O(\log T).$$

2.9 Une formule asymptotique pour $N(T)$

On va admettre le théorème suivant (Titchmarsh, Theory of functions, 3.41)

Théorème 2.9.1. *Si f est holomorphe à l'intérieur et dans un voisinage d'un contour $\mathcal{C}$, non nulle sur $\mathcal{C}$, alors le nombre N de zéros de f à l'intérieur de $\mathcal{C}$ et comptés avec multiplicité, est donné par*

$$N = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2\pi}\Im m\int_{\mathbb{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z = \frac{\Delta_{\mathcal{C}}\arg f}{2\pi},$$

où $\Delta_{\mathcal{C}}$ est la variation le long de $\mathcal{C}$.

Proposition 2.9.2. *Si T n'est pas l'ordonnée d'un zéro de ζ, on a*

$$\pi N(T) = \Delta_{\mathcal{R}}\arg\xi,$$

où $\mathcal{R}$ est le rectangle de sommets $2, 2+iT, -1+iT, -1$, décrit dans le sens positif.

Preuve. Les zéros de ζ et de ξ coïncident dans cette région et ξ est entière.

Proposition 2.9.3. *Si T n'est pas l'ordonnée d'un zéro de ζ, on a*

$$\pi N(T) = 2\Delta_{\mathcal{L}}\arg\xi,$$

où $\mathcal{L}$ est la ligne brisée qui joint 2 à $2+iT$ puis à $1/2+iT$.

Preuve. Quand s parcourt la base du rectangle, $\arg(\xi(s))$ ne change pas car à cet endroit $\xi(s)$ est réel et non nul. Comme

$$\xi(\sigma+it) = \xi(1-\sigma-it) = \overline{\xi(1-\sigma+it)},$$

la variation de $\arg\xi(s)$ lorsque s va de $1/2+iT$ à $-1+iT$ puis -1 est égale à la variation de $\arg\xi(s)$ le long de $\mathcal{L}$.

Proposition 2.9.4. *Si T n'est pas l'ordonnée d'un zéro de ζ, on a :*

$$N(T) = \frac{T}{\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + \frac{7}{4} + S(T) + O(T^{-1}),$$

avec

$$\pi S(T) = 2\Delta_{\mathcal{L}}\arg(\zeta(s))$$

Preuve. On rappelle que $\xi(s)$ peut s'écrire sous la forme

$$\xi(s) = (s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2+1)\zeta(s).$$

La variation de ξ le long de $\mathcal{L}$ est égale à la somme des variations des arguments de chacun des facteurs. On a

$$\Delta_{\mathcal{L}}\arg(s-1) = \arg(iT-1/2) = \pi/2 + O(T^{-1})$$
$$\Delta\arg\pi^{-s/2} = \Delta_{\mathcal{L}}(-\frac{1}{2}t\log\pi) = -\frac{T}{2}\log\pi.$$

Pour la fonction Γ, on applique la formule de Stirling

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{L}} \arg\Gamma(s/2+1) &= \Im m \log\Gamma(5/4+iT/2)\\ &= \Im m[(3/4+iT/2)\log(5/4+iT/2) - iT/2 - 5/4 + \frac{\log 2\pi}{2} + O(T^{-1})\\ &= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{3\pi}{8} + O(T^{-1}).\end{aligned}$$

On en déduit la Proposition 2.9.4.

Corollaire 2.9.5. *Pour tout $-1 \leq \sigma \leq 2$, et t assez grand qui ne coïncide pas avec l'ordonnée d'un zéro de ζ, on a :*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho:|t-\gamma|<1} \frac{1}{s-\varrho} + O(\log t).$$

Preuve. On rappelle la formule

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} + \frac{\log\pi}{2} - \frac{\Gamma'(s/2+1)}{2\Gamma(s/2+1)} + \sum_{\varrho}\Big(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\Big),$$

que l'on applique en $s = \sigma + it$ et en $2 + it$. Pour t assez grand

$$\frac{1}{\sigma+it-1} = O(1),\ \frac{1}{2+it-1} = O(1),$$

et $\Gamma'(z)/\Gamma(z) = \log z + O(|z|^{-1})$, en soustrayant, on obtient

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(1) + \sum_{\varrho}\Big(\frac{1}{s-\varrho} - \frac{1}{2+it-\varrho}\Big). \tag{2.9.1}$$

Comme $\Im m(s-\varrho) = \Im(2+it-\varrho) = t-\gamma$, on a

$$\Big|\frac{1}{s-\varrho} - \frac{1}{2+it-\varrho}\Big| = \frac{2-\sigma}{|(s-\varrho)(2+it-\varrho)|} \leq \frac{3}{|\gamma-t|^2}.$$

On a donc

$$\sum_{|\gamma-t|\geq 1}\Big|\frac{1}{s-\varrho} - \frac{1}{2+it-\varrho}\Big| \leq \sum_{k\geq 1}\sum_{k\leq|\gamma-t|<k+1}\frac{3}{k^2} = O(\log t). \tag{2.9.2}$$

Ensuite il y a au plus $O(\log t)$ zéros tels que $|\gamma - t| < 1$. Comme $|2+it-\varrho| \geq 1$,

$$\sum_{|\gamma-t|<1}\frac{1}{2+it-\varrho} = O(\log t).$$

En reportant cela et (2.9.2) dans (2.9.1), on obtient la formule annoncée dans le Corollaire 2.9.5.

Nous sommes en mesure de terminer la preuve de la Proposition 2.9.4, c'est-à-dire démontrer le lemme suivant

Lemme 2.9.6. *On a* $S(T) = O(\log T)$.

On exprime $S(T)$ avec une intégrale

$$\pi S(T) = \int_2^{2+iT} \Im m \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \,\mathrm{d}\, s - \int_{1/2+iT}^{2+iT} \Im m \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \,\mathrm{d}\, s = O(1) - \int_{1/2+iT}^{2+iT} \Im m \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \,\mathrm{d}\, s,$$

Car

$$\begin{aligned}\int_2^{2+iT} \Im m \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \,\mathrm{d}\, s &= -\sum_2^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} \int_0^T \sin(-t \log n) \,\mathrm{d}\, t \\ &= \sum_2^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2} \frac{1 - \cos(T \log n)}{\log n} = O(1).\end{aligned}$$

Or

$$\Big| \int_{1/2+iT}^{2+iT} \Im m \frac{1}{s - \varrho} \,\mathrm{d}\, s \Big| = \Delta \arg(s - \varrho)| \leq \pi.$$

En utilisant le Corollaire 2.9.5 et le fait que le nombre de ϱ tels que $|t - \gamma| < 1$ est un $O(\log t)$ on termine la preuve du Lemme 2.9.6.
En reportant cela dans la Proposition 2.9.4 on obtient la formule asymptotique pour $N(T)$:

Théorème 2.9.7. *On a*

$$N(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + O(\log T).$$

Corollaire 2.9.8. *Si on note* γ_n *la* n *ème ordonnée positive par ordre croissant des zéros de* ζ, *on a* $\gamma \sim 2\pi n / \log n$, *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.