INTRODUCTION AUX EDP STOCHASTIQUES

Contents

Date: May 10, 2019.

1. Résumé

Durant ces quelques heures de cours, nous nous intéresserons à l'influence d'une *perturbation stochastique*, autrement dit d'un terme supplémentaire dirigé par un processus aléatoire (typiquement un mouvement brownien), sur plusieurs modèles d'équations différentielles classiques.

Le premier exemple à envisager est bien entendu celui de l'équation différentielle standard à un paramètre, qui donne alors naissance à l'*équation différentielle standard stochastique*

$$dY_t = b(t, Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, Y_t)\,\mathrm{d}W_t \ , \tag{1}$$

où $W : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ est un processus aléatoire, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lorsque W correspond à un mouvement brownien, l'équation (1) peut être interprétée, par le biais de la théorie d'Itô, sous sa forme intégrale

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s, Y_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, Y_s)\,\mathrm{d}W_s \ . \tag{2}$$

Au-delà du caractère naturel de sa définition, l'*intégrale d'Itô* $\int_0^t \sigma(s, Y_s)\,\mathrm{d}W_s$ jouit de propriétés stochastiques qui permettent facilement d'envisager la résolution du modèle (2). Nous rappellerons rapidement ce résultat d'existence et d'unicité, sous des hypothèses de régularité standards concernant les applications b, σ.

Nous nous intéresserons ensuite à des dynamiques différentielles plus sophistiquées car multi-paramétriques, et ferons ainsi le lien avec la *théorie des EDP stochastiques*.

Nous nous pencherons plus particulièrement sur l'étude de deux modèles significatifs: l'*équation de la chaleur stochastique* en dimension 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(u)\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \ , \quad t \in [0, T],\ x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

pour un certain processus stochastique $W : ([0, T] \times \mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}$, et l'*équation des ondes stochastique* en dimension 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u + \sigma(u)\frac{\partial^3 W}{\partial t \partial x_1 \partial x_2} \ , \quad t \in [0, T],\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

pour un certain processus stochastique $W : ([0, T] \times \mathbb{R}^2) \times \Omega \to \mathbb{R}$. Les deux modèles (3) et (4) nous permettront de nous familiariser avec les techniques les plus classiques de la théorie des EDP stochastiques.

Il s'agit a priori d'équations beaucoup plus difficiles à aborder que le modèle (1). Nous verrons dans un premier temps qu'il est à nouveau possible de réécrire naturellement ces équations sous une forme intégrale, en espace et en temps: c'est la formulation dite *mild*. Nous étudierons ensuite l'extension multi-paramétrique de la théorie d'Itô en présence d'un *champ brownien* W, qui correspond moralement à la version multi-paramétrique du mouvement brownien standard.

La combinaison de ces différentes constructions (et des contrôles associés) nous permettra non seulement de donner sens aux équations ci-dessus, mais aussi de résoudre ces équations (sous des hypothèses de régularité standards concernant les conditions initiales) et même de fournir des informations sur la régularité trajectorielle des solutions.

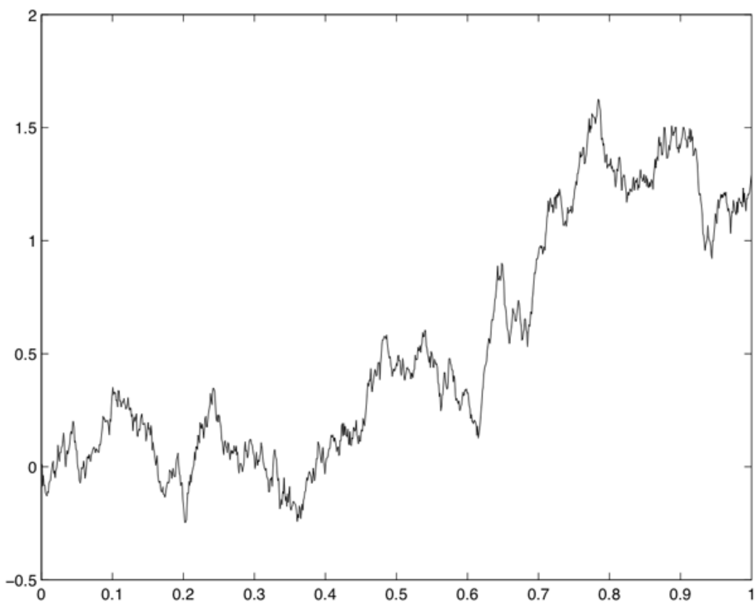
2. Pré-requis: le mouvement brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On appellera *processus stochastique* toute application $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \geq 0$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application mesurable (autrement dit X_t et une variable aléatoire).

Définition 2.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un processus stochastique $W : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ est appelé un* mouvement brownien *si:*
(i) $W_0(\omega) = 0$.
(ii) Pour tous $s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
(iii) Pour tous $s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est indépendante du processus $(W_u)_{0 \leq u \leq s}$, c'est-à-dire de toute variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu générée par $(W_u)_{0 \leq u \leq s}$.
(iv) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto W_t(\omega)$ est une fonction continue.

Remarque 2.2. De façon équivalente, on peut définir un mouvement brownien comme un processus gaussien (c'est-à-dire, toute combinaison linéaire $\lambda_1 W_{t_1} + \ldots + \lambda_n W_{t_n}$ est une variable gaussienne) continu ($t \mapsto W_t(\omega)$ est une fonction continue pour presque tout $\omega \in \Omega$), centré (c'est-à-dire $\mathbb{E}[W_t] = 0$ pour tout $t \geq 0$) et dont la fonction de covariance est donnée par

$$\mathbb{E}[W_s W_t] = \inf(s, t) .$$



3. Introduction: les équations différentielles stochastiques

3.1. **Généralités.** Quelques grandes idées à garder à l'esprit:

(1) *Équation différentielle stochastique*: un terme a priori très général. Littéralement:

- *différentielle* $\longrightarrow$ impliquant des dérivées
- *stochastique* $\longrightarrow$ impliquant des termes aléatoires.

(2) Il existe néanmoins des modèles d'équations de référence ("classiques"): l'objectif de ces quelques heures de cours est d'en donner un aperçu.

(3) Les techniques pour "traiter ces équations" peuvent être très différentes d'un type d'équation à l'autre.

Bien entendu, cette diversité des techniques est déjà présente pour les équations différentielles *déterministes* (= sans terme aléatoire): par exemple, on ne peut pas traiter l'équation de la chaleur $\partial_t y = \partial_x^2 y$ avec les mêmes techniques qu'une équation ordinaire $\partial_t y = f(y)$ (cf opérateur borné/non-borné, etc).

Remarque 3.1. Qu'entend-on par "traiter une équation (stochastique)"? En général:

- Interprétation de l'équation
- Résolution: existence (locale/globale/"temps d'explosion"), unicité de la solution. Équation localement/globalement "bien posée" (well-posed): équation qui admet une unique solution locale/globale (+ parfois: continuité vis-à-vis de la condition initiale).
- Propriétés "déterministes" de la solution: régularité, dépendance vis-à-vis de la condition initiale (ou d'autres paramètres), comportement asymptotique,...
- Propriétés "stochastiques" de la solution: semimartingale, processus de Markov, contrôle des moments, existence d'une densité...
- Approximation/simulation des solutions
- ...

3.2. **Quelques modèles de référence $\Rightarrow$ Plan du cours.**

Ces différents modèles auront une structure globale similaire:

"Equation différentielle déterministe classique + Perturbation stochastique".

Commençons par évoquer le modèle différentiel le plus standard de la théorie des processus stochastiques: l'EDO stochastique.

3.2.1. *L'équation différentielle ordinaire (EDO) stochastique.*

Le modèle général:

$$\frac{dY_t}{dt} = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t)\frac{dW_t}{dt} \ , \ Y_0 = a \ , \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et surtout W *est un processus stochastique*, c'est-à-dire

$$\boxed{W : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}, \text{ avec } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ un espace de probabilité.}}$$

Conséquence immédiate: la solution (potentielle) Y dépendra elle-même d'un aléa $\omega \in \Omega$. Ainsi, *moralement*, l'équation doit être comprise comme: pour tous $t \in [0,T]$ et $\omega \in \Omega$,

$$\frac{dY_t(\omega)}{dt} = b(t, Y_t(\omega)) + \sigma(t, Y_t(\omega))\frac{dW_t(\omega)}{dt} \ , \ Y_0(\omega) = a \ . \tag{6}$$

Modèle le plus classique, sur lequel nous nous concentrerons:

$$\boxed{W \text{ est un mouvement brownien.}}$$

Toutefois, l'interprétation directe (= à ω fixé) de (6) pose alors des difficultés: cf cours de calcul stochastique du 1er semestre ($\rightarrow$ voir rappel plus bas).

Les motivations derrière le modèle (5) (en présence d'un mouvement brownien) sont très nombreuses:

• SVT: croissance de population, climatologie,... Phénomènes de diffusion (déplacement de particules d'une zone hautement concentrée à une zone faiblement concentrée sous l'action de forces aléatoires)

• finance (modèle Black-Scholes,...)

• Lien avec certains modèles d'EDP *déterministes*.

Tournons nous à présent vers la présentation de modèles différentiels nettement moins standards, et qui donnent véritablement naissance à la théorie des EDP stochastiques.

3.2.2. *L'équation de la chaleur stochastique.*

Le modèle général:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \Delta_x Y + f(Y) + \sigma(Y)\dfrac{\partial^{d+1} W}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d} \ , \quad t \in [0,T], \, x \in D, \\ Y(0,.) = \Phi \ , \end{cases} \tag{7}$$

où D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\Delta_x Y := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}$, $f(Y)_t(x) := f(Y_t(x))$, $\sigma(Y)_t(x) := \sigma(Y_t(x))$ avec $f, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, et surtout

$$\boxed{W : ([0,T] \times D) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ est un } \textit{champ stochastique.}}$$

Modèle le plus classique $\rightarrow$ W est un *champ brownien*:

Définition 3.2. *Soit $C : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de covariance sur D, c'est-à-dire une fonction symétrique ($C(x,y) = C(y,x)$) et définie positive ($\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j C(x_i, x_j) \geq 0$). On appelle* champ brownien *(sur $[0,T] \times D$)* de covariance spatiale C *le processus gaussien $W : ([0,T] \times D) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ centré et de fonction de covariance donnée par la formule*

$$\mathbb{E}\big[W(s,x)W(t,y)\big] = \inf(s,t)\, C(x,y) \ , \quad s,t \in [0,T], \ x,y \in D \, .$$

Si $C(x,y) = \prod_{i=1}^d \inf(x_i, y_i)$ (pour $x_i, y_i \geq 0$), on parle de champ brownien espace-temps*; La dérivée (formelle, ou au sens des distributions) $\frac{\partial^{d+1} W}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d}$ est alors appelée* bruit blanc espace-temps*.*

Comme pour le mouvement brownien, l'existence d'un tel champ brownien est garantie par des théorèmes gaussiens très généraux (voir Proposition 5.3).

Possibles motivations derrière (7):

• Aléa "intrinsèque": évolution de la température d'une barre soumise à une multitude de forces aléatoires (immersion dans un liquide,...).

• Aléa "extrinsèque": quantification d'une incertitude liée (par exemple) à l'imprécision de la mesure (artéfact, parasite).

Extension possible du modèle (hors programme): *opérateurs paraboliques* plus généraux.

3.2.3. *L'équation des ondes stochastique.*

Le modèle général:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta_x Y + f(Y) + \sigma(Y)\dfrac{\partial^{d+1} W}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in D, \\ Y(0,.) = \Phi \ , \ \dfrac{\partial Y}{\partial t}(0,.) = \Psi \ , \end{cases} \tag{8}$$

où D est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\Delta_x Y := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}$, $f(Y)_t(x) := f(Y_t(x))$, $\sigma(Y)_t(x) := \sigma(Y_t(x))$ avec $f, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi, \Psi : D \to \mathbb{R}$, et $W : ([0,T] \times D) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un champ stochastique (typiquement, un champ brownien).

Possibles motivations derrière (8):

• Corde vibrante dans un milieu "aléatoire" (par ex, brin d'ADN).

• Neurophysiologie (cf livre Walsh [6]).

Extension possible du modèle (hors programme): *opérateurs hyperboliques* plus généraux.

3.2.4. *L'équation KPZ (hors programme).*

Le modèle général:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}, \\ Y(0,.) = \Phi \ , \end{cases} \tag{9}$$

où $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $W : ([0,T] \times \mathbb{R}) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un champ stochastique.

Possibles motivations derrière (9):

• Description de l'évolution de la frontière d'une surface (par ex, combustion d'une feuille de papier).

• Limite de plusieurs modèles discrets d'évolution aléatoire (par ex, frontière créée par des particulières en interaction).

Cas du champ brownien espace-temps:

• Manipulé depuis longtemps par les physiciens.

• Traitement mathématique rigoureux: Martin Hairer (2013) $\Rightarrow$ médaille Fields 2014.

3.3. **La difficulté essentielle.**

À ω fixé, le mouvement brownien n'est pas dérivable (cf cours de calcul stochastique 1er semestre). On dispose plus exactement du résultat suivant:

Proposition 3.3. *Soit $\{W_t,\, t \geq 0\}$ un mouvement brownien sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors:*
(i) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout $T > 0$ et pour tout $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$, la fonction $t \mapsto W_t(\omega)$ est γ-höldérienne sur $[0,T]$, c'est-à-dire $|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq c_{T,\gamma}(\omega)|t-s|^\gamma$ pour tous $0 \leq s < t \leq T$.
(ii) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto W_t(\omega)$ n'est dérivable en aucun point.

$\Longrightarrow$ Problème d'interprétation de la dérivée $\frac{dW_t}{dt}$ dans l'équation

$$\frac{dY_t}{dt} = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t) \frac{dW_t}{dt} \,.$$

$\Longrightarrow$ Besoin d'étendre le calcul différentiel classique ("de Lebesgue") à des fonctions (aléatoires) non dérivables.
$\Longrightarrow$ Recours à l'intégrale d'Itô.

Évidemment, même problème d'irrégularité pour les champs browniens (introduits dans la définition 3.2), et donc même difficulté d'interprétation des modèles d'EDP stochastiques (7), (8) et (9).
$\Longrightarrow$ Extension de la théorie d'Itô à des champs browniens.

3.4. **Brefs rappels relatifs à la théorie des martingales continues.**

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur cet espace (c'est-à-dire $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $s < t$).

On rappelle d'abord qu'une martingale continue (relativement à $(\mathcal{F}_t)$) est un processus stochastique $M : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ tel que:
(i) $M_t \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0,T]$;
(ii) M_t est intégrable, pour tout $t \in [0,T]$;
(iii) $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$;
(iv) pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto M_t(\omega)$ est continue sur $[0,T]$.

Exemple: un mouvement brownien $\{W_t,\, t \in [0,T]\}$ est une martingale continue relativement à la filtration $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s,\ 0 \leq s \leq t)$. En effet, pour $s < t$,

$$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\underbrace{W_t - W_s}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[\underbrace{W_s}_{\in \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s = W_s \,.$$

3.4.1. *Inégalité de Doob.*

Proposition 3.4 (Inégalité de Doob)**.** *Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue, alors pour tous $p \geq 1$, $T \geq 0$ et $\lambda > 0$, on a*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda^p} \cdot \mathbb{E}\big[|M_T|^p\big] \,.$$

3.4.2. *Variation quadratique.*

Proposition 3.5. *Si M et N sont deux martingales continues (relativement à $(\mathcal{F}_t)$) de carré intégrable (i.e., pour tout $t \in [0,T]$, $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[N_t^2] < \infty$), alors, pour tout $t \in [0,T]$ et toute subdivision $\Delta_T = \{0 < t_1 < \ldots < T\}$ de $[0,T]$ dont le pas $|\Delta_T|$ tend vers 0, la suite de processus*

$$\sum_i \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}\right)\left(N_{t_{i+1}\wedge t} - N_{t_i \wedge t}\right)$$

converge (en probabilité) quand $|\Delta_T| \to 0$. Sa limite est appelée le crochet *de M et N (au temps t), et est notée $\langle M, N\rangle_t$.*

Remarque 3.6. Le processus-crochet $(\langle M, N\rangle_t)_{t\in[0,T]}$ ainsi défini correspond également à l'unique processus continu, adapté, à variation bornée, qui s'annule en 0, tel que $MN - \langle M, N\rangle$ soit une martingale.

Quand $M = N$, on note plus simplement $\langle M\rangle := \langle M, M\rangle$ et on parle aussi (logiquement) de *variation quadratique* de M. Il s'agit alors d'un processus positif croissant.

Exercice 3.7. *Soit $\{W_t,\, t \geq 0\}$ un mouvement brownien sur un espace de probabilité donné. Montrer que, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ générée par W, on a $\langle W\rangle_t = t$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. On établit en fait la convergence de la variation quadratique de W (vers t) dans $L^2(\Omega)$. À cette fin, on écrit d'abord

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i \Big(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}\Big)^2 - t\Big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i \Big\{\Big(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}\Big)^2 - \Big((t_{i+1}\wedge t) - (t_i \wedge t)\Big)\Big\}\Big)^2\Big] \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{E}\Big[\Big\{\Big(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}\Big)^2 - \Big((t_{i+1}\wedge t) - (t_i \wedge t)\Big)\Big\} \\
&\qquad\qquad \Big\{\Big(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}\Big)^2 - \Big((t_{j+1}\wedge t) - (t_j \wedge t)\Big)\Big\}\Big] \\
&= \sum_{i,j} \Big\{\mathbb{E}\Big[\Big(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}\Big)^2\Big(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}\Big)^2\Big] \\
&\qquad\qquad - \Big((t_{i+1}\wedge t) - (t_i \wedge t)\Big)\Big((t_{j+1}\wedge t) - (t_j \wedge t)\Big)\Big\}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Or, pour $i \neq j$, on sait, d'après la définition 2.1, que les variables aléatoires $W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}$ et $W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}$ sont indépendantes, centrées, et de variances respectives $(t_{i+1}\wedge t) - (t_i \wedge t)$ et $(t_{j+1}\wedge t) - (t_j \wedge t)$, d'où

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}\Big)^2\Big(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}\Big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i\wedge t}\Big)^2\Big]\mathbb{E}\Big[\Big(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j\wedge t}\Big)^2\Big] \\
&= \Big((t_{i+1}\wedge t) - (t_i \wedge t)\Big)\Big((t_{j+1}\wedge t) - (t_j \wedge t)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à (10),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i \big(W_{t_{i+1}\wedge t}-W_{t_i\wedge t}\big)^2-t\Big)^2\Big]\\
&=\sum_i\Big\{\mathbb{E}\Big[\big(W_{t_{i+1}\wedge t}-W_{t_i\wedge t}\big)^4\Big]-\big((t_{i+1}\wedge t)-(t_i\wedge t)\big)^2\Big\}\\
&=2\sum_i\big((t_{i+1}\wedge t)-(t_i\wedge t)\big)^2\leq 2|\Delta|t\,,
\end{aligned}$$

ce qui fournit immédiatement le résultat de convergence désiré. □

3.4.3. *Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy.* Désormais munis de la définition du crochet $\langle M\rangle$, nous sommes en mesure d'énoncer le résultat classique suivant:

Théorème 3.8 (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy)**.** *Pour tout $p\geq 2$, il existe des constantes $c_p>0$ et $C_p>0$ telles que, pour tout $T>0$ et toute martingale continue M, de carré intégrable sur $[0,T]$, vérifiant $M_0=0$, on a*

$$c_p\,\mathbb{E}\Big[\langle M\rangle_T^{p/2}\Big]\leq \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{t\in[0,T]}|M_t|\Big)^p\Big]\leq C_p\,\mathbb{E}\Big[\langle M\rangle_T^{p/2}\Big]\,.$$

3.5. **Rappels: modification, indistinguabilité.**

Soient $\{X_a,\,a\in A\}$ et $\{Y_a,\,a\in A\}$ deux processus stochastiques indexés par un même ensemble A (quelconque) et définis sur un même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

On dit que Y est une *modification* de X si, pour tout $a\in\mathcal{A}$, il existe $\tilde\Omega_a\in\mathcal{F}$ tel que

$$\mathbb{P}(\tilde\Omega_a)=1\quad\text{et}\quad X_a(\omega)=Y_a(\omega)\ \text{ pour tout } \omega\in\tilde\Omega_a\,.$$

On dit que X et Y sont *indistinguables* l'un de l'autre s'il existe $\tilde\Omega\in\mathcal{F}$ tel que

$$\mathbb{P}(\tilde\Omega)=1\quad\text{et}\quad X_a(\omega)=Y_a(\omega)\ \text{ pour tout } \omega\in\tilde\Omega \text{ et tout } a\in\mathcal{A}\,.$$

Évidemment, si X et Y sont indistinguables, alors X et Y sont modifications l'un de l'autre. Réciproquement:

Proposition 3.9. *Dans le contexte ci-dessus, supposons que $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. Si Y est une modification de X, et si X et Y sont continus sur $\mathcal{A}$ (p.s.), alors X et Y sont indistinguables l'un de l'autre.*

Preuve. Soit $(\tilde\Omega_a)_{a\in\mathcal{A}}$ les événements (de probabilité 1) issus de la définition d'une modification, et $\bar\Omega$ un événement de probabilité 1 sur lequel les fonctions $t\mapsto X_t$ et $t\mapsto Y_t$ sont continues. Considérons alors l'événement $\tilde\Omega:=\bar\Omega\cap_{a\in\mathcal{A}\cap\mathbb{Q}^d}\tilde\Omega_a\in\mathcal{F}$, et notons d'abord que $\mathbb{P}(\tilde\Omega)=1$. Fixons ensuite $\omega\in\tilde\Omega$. On sait que $X_a(\omega)=Y_a(\omega)$ pour tout $a\in\mathcal{A}\in\mathbb{Q}^d$, et que les fonctions $t\mapsto X_t(\omega)$, $t\mapsto Y_t(\omega)$ sont continues: par densité de $\mathcal{A}\cap\mathbb{Q}^d$ dans $\mathcal{A}$, l'identité $X_a(\omega)=Y_a(\omega)$ s'étend immédiatement à tout $a\in\mathcal{A}$, ce qui correspond au résultat escompté. □

4. L'équation différentielle ordinaire stochastique

Revenons rapidement, dans cette section, sur l'étude (à un niveau relativement élémentaire) de l'équation uni-paramétrique

$$\frac{dY_t}{dt} = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t) \frac{dW_t}{dt} \ , \ Y_0 = a \in \mathbb{R} \ , \quad t \in [0, T] \, , \tag{11}$$

où $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $W : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *désigne un mouvement brownien*, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Comme nous l'avons évoqué dans la section précédente, une première étape consiste à fournir une interprétation raisonnable de l'équation. C'est en fait la *forme intégrale* de l'équation que l'on va chercher à interpréter, autrement dit le modèle

$$Y_t = a + \int_0^t b(s, Y_s) \, ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) \, dW_s \ , \quad t \in [0, T] \, . \tag{12}$$

L'interprétation de (12) va s'appuyer sur l'utilisation de l'intégrale d'Itô, dont nous souhaitons brièvement rappeler les grandes étapes de construction (en guise d'introduction à l'intégrale stochastique multi-paramétrique utilisée dans les sections suivantes):

4.1. **Rappels: mouvement brownien et intégrale d'Itô.**

4.1.1. *Objectif.* Donner sens à l'intégrale

$$\int_0^t H_u \, dW_u \ , \tag{13}$$

pour une classe de processus stochastiques $H : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ suffisamment large (afin de pouvoir ensuite envisager l'interprétation et la résolution de (12) au sein de cette classe).

Rappelons que la construction d'Itô de l'intégrale (13) s'appuie de façon essentielle sur les propriétés *stochastiques* du mouvement brownien W, qui vont permettre de surmonter le problème d'interprétation à ω fixé (cf la proposition 3.3).

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} = (\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ la filtration associée à W, autrement dit

$$\mathcal{F}_t := \sigma\text{-algèbre engendrée par } (W_s)_{0 \leq s \leq t} \ .$$

Grâce aux propriétés du mouvement brownien, on sait en particulier que pour tous $s \leq t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

4.1.2. *Construction de l'intégrale d'Itô (grandes idées).*

Étape 1: Définition pour un processus simple adapté.

Considérons d'abord l'ensemble $\mathcal{E}$ des processus *simples adaptés*, c'est-à-dire l'ensemble des processus $H : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme d'une somme finie

$$H_t := \sum_i X_i \, \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t) \ , \quad \text{où } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < T \ ,$$

et, pour tout i, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire bornée ($\sup_{\omega \in \Omega} |X_i(\omega)| < \infty$) et $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable.

Remarque: si $t \in [t_i, t_{i+1})$, $H_t = X_i \in \mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_t$ (donc H est effectivement *adapté*).

Dans une telle situation, on *pose* naturellement

$$\int_0^T H_u\, dW_u := \sum_i X_i\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \ . \tag{14}$$

Étape 2: Isométrie. On rappelle ensuite que l'extension (à venir) de la définition (14) va s'appuyer sur la propriété d'isométrie classique suivante:

Lemme 4.1. *Pour tout processus simple adapté H,*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u\, dW_u\Big)^2\Big] = \int_0^T \mathbb{E}[H_u^2]\, du \ ,$$

autrement dit l'application

$$H \longmapsto \int_0^T H_u\, dW_u$$

est une isométrie de $(\mathcal{E}, L^2([0,T]\times\Omega))$ dans $L^2(\Omega)$.

Preuve. Si $H_t = \sum_i X_i\, \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$ avec $X_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ et $\sup_{\omega\in\Omega} |X_i(\omega)| < \infty$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u\, dW_u\Big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\Big)^2\Big] \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_i X_j\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \ .
\end{aligned}$$

Or, pour $i<j$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\underbrace{X_i X_j\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}_{\in\mathcal{F}_{t_j}}\underbrace{(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})}_{\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_{t_j}}] \\
&\quad = \ \mathbb{E}[X_i X_j\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})]\mathbb{E}[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}] \ = \ 0 \ ,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u\, dW_u\Big)^2\Big] &= \sum_i \mathbb{E}[\underbrace{X_i^2}_{\in\mathcal{F}_{t_i}}\ \underbrace{(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2}_{\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_{t_i}}] \\
&= \sum_i \mathbb{E}[X_i^2]\mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] \\
&= \sum_i \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1}-t_i) \ = \ \int_0^T \mathbb{E}[H_u^2]\, du \ .
\end{aligned}$$

□

Étape 3: Argument de densité.

Lemme 4.2. *Étant donné un processus H adapté (= pour tout t, H_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable), continu p.p. (c'est-à-dire, p.s., la fonction $t\mapsto H_t$ est continue p.p.) et tel que*

$$\int_0^T \mathbb{E}[H_u^2]\, du \ < \ \infty \ , \tag{15}$$

il existe une suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ de processus simples adaptés telle que

$$\int_0^T \mathbb{E}[(H_u^{(n)} - H_u)^2]\, du \ \to \ 0 \ . \tag{16}$$

Remarque 4.3. Il s'avère que, par le biais d'arguments de mesurabilité sophistiqués (voir [1, Lemma 3.2.4]), ce résultat de densité reste vrai si l'on retire l'hypothèse de continuité (p.p.) du processus H, c'est-à-dire si l'on suppose uniquement H adapté et vérifiant (15). Comme nous n'aurons pas besoin d'une telle extension par la suite, nous nous en tiendrons à l'énoncé ci-dessus, dont nous pouvons aisément détailler la preuve.

Preuve. Dans un souci de clarté, notons

$$\mathcal{H} := \{H \text{ processus adapté, continu p.p. et dans } L^2([0,T]\times\Omega)\}\ ,$$

$$\mathcal{B} := \{H \text{ processus adapté, continu p.p. et dans } L^\infty([0,T]\times\Omega)\}\ ,$$

et rappelons que $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des processus simples adaptés.

Nous allons montrer successivement que, pour la norme de $L^2([0,T]\times\Omega)$, $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{B}$, ce qui fournira le résultat escompté.

Densité de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{H}$. Étant donné $H \in \mathcal{H}$, il suffit de considérer la suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ donnée pour tout $n \geq 1$ par

$$H_t^{(n)} := \left\{H_t \mathbf{1}_{\{|H_t|<n\}} + n\mathbf{1}_{\{H_t\geq n\}} - n\mathbf{1}_{\{H_t\leq -n\}}\right\}\ .$$

On a bien $H^{(n)} \in \mathcal{B}$, et comme $|H_t^{(n)}| \leq |H_t|$, nous sommes en mesure d'invoquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que $H^{(n)} \to H$ dans $L^2([0,T]\times\Omega)$.

Densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{B}$. Étant donnés $H \in \mathcal{B}$ et une suite de subdivisions $\Delta_n := \{0 < t_1^n < \ldots < T\}$ dont le pas $|\Delta_n|$ tend vers 0, on pose simplement

$$H_t^{(n)} := \sum_i H_{t_i^n}\, \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}\ .$$

Comme H est adapté et appartient à $L^\infty([0,T]\times\Omega)$, on a bien, pour tout $n \geq 1$, $H^{(n)} \in \mathcal{E}$. Par ailleurs, on peut vérifier que $H_t^{(n)} \to H_t$ en tout point de continuité t de H, donc presque partout. Nous sommes donc une nouvelle fois en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que

$$\|H^{(n)} - H\|^2_{L^2([0,T]\times\Omega)} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty\ .$$

□

4.1.3. *Définition de l'intégrale.*

Étant donné un processus $H : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ adapté, continu p.p. et vérifiant (15), nous savons désormais, grâce à l'étape 3 ci-dessus, qu'il existe une suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ de processus simples adaptés qui converge vers H au sens de (16). Par ailleurs, en faisant appel à la propriété d'isométrie établie à l'étape 2, nous pouvons immédiatement voir que la suite des intégrales stochastiques $\int_0^T H_u^{(n)}\, dW_u$ (définies à l'étape 1) est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Nous avons ainsi justifié la définition qui suit:

Définition 4.4. *Soit $H : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ un processus adapté, continu p.p. et tel que*

$$\int_0^T \mathbb{E}[H_u^2]\, du \;<\; \infty\ .$$

On appelle intégrale d'Itô de H contre W, et on note

$$\int_0^T H_u\, dW_u\ ,$$

la limite, dans $L^2(\Omega)$, de la suite $\int_0^T H_u^{(n)}\, dW_u$, pour toute suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ de processus simples adaptés telle que

$$\int_0^T \mathbb{E}\big[(H_u^{(n)}-H_u)^2\big]\, du \ \to\ 0\ . \tag{17}$$

4.1.4. *Quelques propriétés de l'intégrale d'Itô.*

On fixe un processus H adapté, continu p.p. et tel que $\int_0^T \mathbb{E}[H_u^2]\, du<\infty$. En particulier, l'intégrale d'Itô $\int_0^T H_s\, dW_s$ est bien définie via la définition 4.4.

(i) En tant que *variable aléatoire*:

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T H_u\, dW_u\Big]=0 \quad , \quad \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T H_u\, dW_u\Big)^2\Big]=\int_0^T \mathbb{E}[H_u^2]\, du\ .$$

En outre, on a:

Proposition 4.5. *Le processus*

$$\mathcal{J}_t := \int_0^t H_s\, dW_s \quad \Big(=\int_0^T H_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\, dW_s\Big)$$

admet une modification continue (encore notée $\mathcal{J}$), qui correspond à une martingale continue de variation quadratique

$$\langle \mathcal{J}\rangle_t=\int_0^t H_s^2\, ds\,. \tag{18}$$

Preuve. Soit $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ une suite de processus simples adaptés vérifiant (17), et notons $\mathcal{J}_t^{(n)} := \int_0^t H_s^{(n)}\, dW_s$ (définie explicitement par (14)).

*Étape 1 (**exercice**): à n fixé, $\mathcal{J}^{(n)}$ est une martingale continue de variation quadratique $\langle \mathcal{J}^{(n)}\rangle_t=\int_0^t (H_s^{(n)})^2\, ds$.*

En notant $H^{(n)}=\sum_i X_i^{(n)}\, \mathbf{1}_{[t_i^n,t_{i+1}^n[}$ (avec $X_i\in\mathcal{F}_{t_i}$ et $\sup_{\omega\in\Omega}|X_i(\omega)|<\infty$), on a par définition

$$\mathcal{J}_s^{(n)}=\sum_i X_i^{(n)}\big\{W_{t_{i+1}^n\wedge s}-W_{t_i^n\wedge s}\big\}\,.$$

À partir de cette écriture, il apparaît clairement que $\mathcal{J}_s^{(n)}\in\mathcal{F}_s$ et que $\mathcal{J}_s^{(n)}$ est intégrable, pour tout $s\in[0,T]$. Par ailleurs, la continuité (p.s) de $\mathcal{J}^{(n)}$ découle aisément de la continuité (p.s) de W. Ensuite, pour $s\leq t$ fixés, soit $k\leq \ell$ tels que

$t_k^n \leq s < t_{k+1}^n < \ldots < t_\ell^n \leq t < t_{\ell+1}^n$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\mathcal{J}_t^{(n)}\big|\mathcal{F}_s\big] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\} + \mathbb{E}\Big[X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=k+1}^{\ell} \mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n\wedge t} - W_{t_i^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\} + X_k^{(n)}\{W_s - W_{t_k^n}\} \\
&\qquad +\mathbb{E}\Big[X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n} - W_s\}\Big|\mathcal{F}_s\Big] + \sum_{i=k+1}^{\ell} \mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n\wedge t} - W_{t_i^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&= \mathcal{J}_s^{(n)} + \mathbb{E}\Big[X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n} - W_s\}\Big|\mathcal{F}_s\Big] + \sum_{i=k+1}^{\ell} \mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n\wedge t} - W_{t_i^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big].
\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}\Big[X_k^{(n)}\{W_{t_{k+1}^n} - W_s\}\Big|\mathcal{F}_s\Big] = X_k^{(n)}\,\mathbb{E}[W_{t_{k+1}^n} - W_s] = 0\,,$$

et de même, pour tout $k+1 \leq i \leq \ell$,

$$\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\{W_{t_{i+1}^n\wedge t} - W_{t_i^n}\}\Big|\mathcal{F}_s\Big] = \mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}\mathbb{E}\Big[W_{t_{i+1}^n\wedge t} - W_{t_i^n}\Big|\mathcal{F}_{t_i^n}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big] = 0\,.$$

À ce stade, nous avons donc établi que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{J}^{(n)}$ était une martingale continue.

Pour montrer que $\langle \mathcal{J}^{(n)}\rangle_t = \int_0^t (H_s^{(n)})^2\, ds$, appuyons-nous sur le critère énoncé dans la remarque 3.6. Observons tout d'abord que pour tout $t \in [0,T]$ et tout $s \in [0,t]$, $H_s^{(n)} \in \mathcal{F}_t$, donc $\int_0^t (H_s^{(n)})^2\, ds \in \mathcal{F}_t$ (en tant que limite d'applications $\mathcal{F}_t$-mesurables). Pour le deuxième point, il est facile de constater que la variation bornée de la fonction $t \mapsto \int_0^t (H_s^{(n)})^2\, ds$ est en fait explicitement donnée par l'intégrale $\int_0^T (H_s^{(n)})^2\, ds$. Cette variation bornée est en particulier finie (p.s). Enfin, pour établir que le processus $t \mapsto (\mathcal{J}_t^{(n)})^2 - \int_0^t (H_r^{(n)})^2\, dr$ est une martingale (ce qui achèvera la preuve de l'identité), fixons $s \leq t$ et écrivons d'abord

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&= \sum_i \mathbb{E}\Big[(X_i^{(n)})^2(W_{t_{i+1}^n\wedge t} - W_{t_i^n\wedge t})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\qquad + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}X_j^{(n)}(W_{t_{i+1}^n\wedge t} - W_{t_i^n\wedge t})(W_{t_{j+1}^n\wedge t} - W_{t_j^n\wedge t})\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&=: S_{s,t}^{(1)} + 2S_{s,t}^{(2)}\ .
\end{aligned} \tag{19}$$

Considérons ensuite, comme ci-dessus, les entiers $k \leq \ell$ tels que $t_k^n \leq s < t_{k+1}^n < \ldots < t_\ell^n \leq t < t_{\ell+1}^n$, de telle sorte que, d'une part,

$$\begin{aligned}
S_{s,t}^{(1)} = &\sum_{i\leq k-1} (X_i^{(n)})^2(W_{t_{i+1}^n\wedge s} - W_{t_i^n\wedge s})^2 + \mathbb{E}\Big[(X_k^{(n)})^2(W_{t_{k+1}^n\wedge t} - W_{t_k^n\wedge s})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big] \\
&\qquad + \sum_{i\geq k+1} \mathbb{E}\Big[(X_i^{(n)})^2(W_{t_{i+1}^n\wedge t} - W_{t_i^n\wedge t})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\ ,
\end{aligned} \tag{20}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[(X_k^{(n)})^2(W_{t_{k+1}^n\wedge t}-W_{t_k^n\wedge s})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&=(X_k^{(n)})^2\mathbb{E}\Big[(W_{t_{k+1}^n\wedge t}-W_s+W_s-W_{t_k^n\wedge s})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&=(X_k^{(n)})^2\Big\{\mathbb{E}\Big[(W_{t_{k+1}^n\wedge t}-W_s)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]+2(W_s-W_{t_k^n\wedge s})\mathbb{E}\Big[(W_{t_{k+1}^n\wedge t}-W_s)\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+(W_s-W_{t_k^n\wedge s})^2\Big\}\\
&=(X_k^{(n)})^2\Big\{|(t_{k+1}^n\wedge t)-s|+(W_s-W_{t_k^n\wedge s})^2\Big\}
\end{aligned}$$

et, pour tout $i\geq k+1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[(X_i^{(n)})^2(W_{t_{i+1}^n\wedge t}-W_{t_i^n\wedge t})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[(X_i^{(n)})^2(W_{t_{i+1}^n\wedge t}-W_{t_i^n\wedge t})^2\Big|\mathcal{F}_{t_i}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&=\mathbb{E}\Big[(X_i^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\mathbb{E}\Big[(W_{t_{i+1}^n\wedge t}-W_{t_i^n\wedge t})^2\Big]=\mathbb{E}\Big[(X_i^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]|(t_{i+1}^n\wedge t)-(t_i^n\wedge t)|\ ,
\end{aligned}$$

donc, en revenant à (20),

$$\begin{aligned}
S_{s,t}^{(1)}=\sum_i(X_i^{(n)})^2(W_{t_{i+1}^n\wedge s}-W_{t_i^n\wedge s})^2+(X_k^{(n)})^2|(t_{k+1}^n\wedge t)-s|\\
+\sum_{i\geq k+1}\mathbb{E}\Big[(X_i^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]|(t_{i+1}^n\wedge t)-(t_i^n\wedge t)|\ . \qquad (21)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
S_{s,t}^{(2)}&=\sum_{i<j}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}X_j^{(n)}(W_{t_{i+1}^n\wedge t}-W_{t_i^n\wedge t})(W_{t_{j+1}^n\wedge t}-W_{t_j^n\wedge t})\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&=\sum_{\substack{i<j\\ j\leq k}}\ldots+\sum_{\substack{i<j\\ j=k}}\ldots+\sum_{\substack{i<j\\ j\geq k+1}}\ldots=:S_{s,t}^{(2,1)}+S_{s,t}^{(2,2)}+S_{s,t}^{(2,3)}\ , \qquad (22)
\end{aligned}$$

avec

$$S_{s,t}^{(2,1)}=\sum_{i<j\leq k}X_i^{(n)}X_j^{(n)}(W_{t_{i+1}^n\wedge s}-W_{t_i^n\wedge s})(W_{t_{j+1}^n\wedge s}-W_{t_j^n\wedge s})\ ,$$

$$\begin{aligned}
S_{s,t}^{(2,2)}&=\sum_{i<k}X_i^{(n)}X_k^{(n)}(W_{t_{i+1}^n\wedge s}-W_{t_i^n\wedge s})\mathbb{E}\Big[(W_{t_{k+1}^n\wedge t}-W_{t_k^n\wedge s})\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&=\sum_{i<k}X_i^{(n)}X_k^{(n)}(W_{t_{i+1}^n\wedge s}-W_{t_i^n\wedge s})(W_s-W_{t_k^n\wedge s})\ ,
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
S_{s,t}^{(2,3)}&=\sum_{\substack{i<j\\ j\geq k+1}}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}X_j^{(n)}(W_{t_{i+1}^n\wedge t}-W_{t_i^n\wedge t})(W_{t_{j+1}^n\wedge t}-W_{t_j^n\wedge t})\Big|\mathcal{F}_{t_j}\Big]\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\
&=\sum_{\substack{i<j\\ j\geq k+1}}\mathbb{E}\Big[X_i^{(n)}X_j^{(n)}(W_{t_{i+1}^n\wedge t}-W_{t_i^n\wedge t})\Big|\mathcal{F}_s\Big]\mathbb{E}\Big[(W_{t_{j+1}^n\wedge t}-W_{t_j^n\wedge t})\Big]=0\ ,
\end{aligned}$$

donc, en revenant à (22),

$$S_{s,t}^{(2)}=\sum_{i<j}X_i^{(n)}X_j^{(n)}(W_{t_{i+1}^n\wedge s}-W_{t_i^n\wedge s})(W_{t_{j+1}^n\wedge s}-W_{t_j^n\wedge s})\ . \qquad (23)$$

En injectant (21) et (23) dans (19), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2 - \int_0^t (H_r^{(n)})^2\, dr \Big| \mathcal{F}_s\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2 \Big| \mathcal{F}_s\Big] - \sum_i \mathbb{E}\Big[(X_i^{(n)})^2 \Big| \mathcal{F}_s\Big]\, |(t_{i+1}^n \wedge t) - (t_i^n \wedge t)| \\
&= (\mathcal{J}_s^{(n)})^2 + (X_k^{(n)})^2 |(t_{k+1}^n \wedge t) - s| - \sum_{i \leq k} (X_i^{(n)})^2 |(t_{i+1}^n \wedge t) - (t_i^n \wedge t)| \\
&= (\mathcal{J}_s^{(n)})^2 - \sum_i (X_i^{(n)})^2 |(t_{i+1}^n \wedge s) - (t_i^n \wedge s)| = (\mathcal{J}_s^{(n)})^2 - \int_0^s (H_r^{(n)})^2\, dr\ ,
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la propriété de martingale visée.

Etape 2: $\mathcal{J}$ est continue. Pour tous $m, n \geq 1$, le processus $\mathcal{J}^{(m)} - \mathcal{J}^{(n)}$ est une martingale continue, et par conséquent, en utilisant successivement l'inégalité de Doob (Proposition 3.4) et l'isométrie d'Itô, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\sup_{t \in [0,T]} |\mathcal{J}_t^{(m)} - \mathcal{J}_t^{(n)}| > \varepsilon\Big) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\Big[|\mathcal{J}_T^{(m)} - \mathcal{J}_T^{(n)}|^2\Big] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \mathbb{E}\big[(H_u^{(m)} - H_u^{(n)})^2\big]\, du \overset{m,n \to \infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

A partir de cette observation, nous pouvons facilement construire une suite $(n_k)_{\geq 1}$ dans $\mathbb{N}$ croissante telle que pour tout $k \geq 1$ et tous $m, n \geq n_k$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t \in [0,T]} |\mathcal{J}_t^{(m)} - \mathcal{J}_t^{(n)}| > 2^{-k}\Big) \leq 2^{-k}\,.$$

En particulier, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t \in [0,T]} |\mathcal{J}_t^{(n_{k+1})} - \mathcal{J}_t^{(n_k)}| > 2^{-k}\Big) \leq 2^{-k}\,.$$

On sait alors, d'après le lemme de Borel-Cantelli, que, p.s, il existe $K \geq 1$ tel que pour tout $k \geq K$,

$$\sup_{t \in [0,T]} |\mathcal{J}_t^{(n_{k+1})} - \mathcal{J}_t^{(n_k)}| \leq 2^{-k}\,.$$

Cette dernière assertion nous garantit la convergence (p.s) de la sous-suite $(\mathcal{J}^{(n_k)})_{k \geq 1}$ dans l'espace $L^\infty([0,T])$. Sa limite, que nous noterons $\tilde{\mathcal{J}}$, est donc continue (p.s).

Pour montrer que $\tilde{\mathcal{J}}$ correspond à la modification continue de $\mathcal{J}$ recherchée, observons d'abord que, comme $\mathcal{J}_t^{(n_k)} \to \mathcal{J}_t$ dans $L^2(\Omega)$ à t fixé (par définition de $\mathcal{J}$), il existe une sous-suite $(\mathcal{J}_t^{(m_\ell(t))})_{\ell \geq 1}$ de $(\mathcal{J}_t^{(n_k)})_{k \geq 1}$ qui converge vers $\mathcal{J}_t$ p.s. En considérant un événement Ω_t de probabilité 1 sur lequel cette convergence a lieu, ainsi qu'un événement $\tilde{\Omega}$ de probabilité 1 sur lequel $\mathcal{J}^{(n_k)} \to \tilde{\mathcal{J}}$ uniformément, on a bien, par unicité de a limite, $\mathcal{J}_t(\omega) = \tilde{\mathcal{J}}_t(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega_t \cap \tilde{\Omega}$.

Etape 3: $\mathcal{J}$ est une martingale de variation quadratique donnée par (18). Observons tout d'abord que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $\mathcal{J}_t$ est (par définition) limite de $\mathcal{J}_t^{(n)}$ dans $L^2(\Omega)$, donc il existe une sous-suite $(\mathcal{J}_t^{(n_k)})_{k \geq 1}$ qui converge vers $\mathcal{J}_t$ p.s: les applications $\mathcal{J}_t^{(n_k)}$ étant $\mathcal{F}_t$-mesurables (cf étape 1), il en est de même pour $\mathcal{J}_t$.

Ensuite, pour montrer l'identité $\mathbb{E}[\mathcal{J}_t|\mathcal{F}_s] = \mathcal{J}_s$ pour tous $s \leq t$, il suffit de passer à la limite, dans $L^2(\Omega)$, dans la relation (obtenue à l'étape 1)

$$\mathbb{E}[\mathcal{J}_t^{(n)}|\mathcal{F}_s] = \mathcal{J}_s^{(n)}\,.$$

En effet, l'espérance conditionnelle étant une application contractante (relativement à toute norme $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$), on a

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}[\mathcal{J}_t^{(n)}|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\mathcal{J}_t|\mathcal{F}_s]\Big|^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}[\mathcal{J}_t^{(n)} - \mathcal{J}_t|\mathcal{F}_s]\Big|^2\Big] \leq \mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)} - \mathcal{J}_t\big|^2\Big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

De même, pour déduire (18), il suffit de passer à la limite, dans $L^1(\Omega)$, dans la relation (obtenue à l'étape 1)

$$\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2 - \int_0^t (H_r^{(n)})^2\,dr\Big|\mathcal{F}_s\Big] = (\mathcal{J}_s^{(n)})^2 - \int_0^s (H_r^{(n)})^2\,dr\,.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2\Big|\mathcal{F}_s\Big] - \mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\Big|\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\Big[(\mathcal{J}_t^{(n)})^2 - (\mathcal{J}_t)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big]\Big|\Big]\\
&\leq \mathbb{E}\Big[\big|(\mathcal{J}_t^{(n)})^2 - (\mathcal{J}_t)^2\big|\Big]\\
&\leq \mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)} + \mathcal{J}_t\big|\big|\mathcal{J}_t^{(n)} - \mathcal{J}_t\big|\Big] \leq \mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)} + \mathcal{J}_t\big|^2\Big]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)} - \mathcal{J}_t\big|^2\Big]^{\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Or on sait que $\mathcal{J}_t^{(n)} \to \mathcal{J}_t$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui garantit à la fois

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)} + \mathcal{J}_t\big|^2\Big] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\Big[\big|\mathcal{J}_t^{(n)} - \mathcal{J}_t\big|^2\Big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

□

(ii) En tant qu'*intégrale du temps*: si H est en outre un processus *borné* (c'est-à-dire $\sup_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega}|H_t(\omega)| < \infty$), alors, comme nous l'avons vu dans la preuve du lemme 4.2, et pour toute suite $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas $|\Delta_n|$ tend vers 0, la suite de processus simples adaptés

$$H_t^{(n)} := \sum_{(t_i)\in\Delta_n} H_{t_i}\,\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$$

vérifie la condition de convergence (17), et ainsi, dans ce cas, on a

$$\int_0^T H_u\,dW_u = \lim_{n\to\infty}\sum_{(t_i)\in\Delta_n} H_{t_i}\,(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad \text{dans } L^2(\Omega)\,.$$

En d'autres termes, dans les conditions décrites ci-dessus, l'intégrale d'Itô $\int_0^T H_u\,dW_u$ est limite des *sommes de Riemann* (de H contre W).

4.2. **Interprétation et résolution de l'équation.**

L'interprétation découle naturellement de la construction précédente:

Définition 4.6. *Étant donnés un mouvement brownien $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$, un réel a et deux applications $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on appelle solution (sur $[0,T]$)* au sens d'Itô *de l'équation*

$$dY_t = b(Y_t)\, dt + \sigma(Y_t)\, dW_t \ , \quad Y_0 = a \ , \quad t \in [0,T] \ ,$$

tout processus Y adapté, continu p.p., vérifiant, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_0^t \mathbb{E}\big[\sigma(Y_s)^2\big]\, ds \ < \ \infty \ ,$$

et

$$Y_t = a + \int_0^t b(Y_s)\, ds + \int_0^t \sigma(Y_s)\, dW_s \ ,$$

où l'intégrale (contre W) est comprise au sens d'Itô.

Le résultat le plus "standard" d'existence et d'unicité d'une solution est le suivant:

Théorème 4.7. *Soit W un mouvement brownien et $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications telles qu'il existe une constante $c_{b,\sigma} > 0$ pour laquelle*

$$|b(x)| + |\sigma(x)| \leq c_{b,\sigma}$$

et

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c_{b,\sigma}\, |x - y| \ , \tag{24}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Alors, pour toute condition initiale $a \in \mathbb{R}$, l'équation

$$dY_t = b(Y_t)\, dt + \sigma(Y_t)\, dW_t \ , \quad Y_0 = A \ , \ t \in [0,T] \,, \tag{25}$$

admet une unique solution (sur $[0,T]$) au sens d'Itô.

Remarque 4.8. Dans ce dernier énoncé, l'unicité doit être comprise *à indistinguabilité près*, autrement dit: si Y et $\tilde{Y}$ sont deux solutions (au sens d'Itô) de l'équation (25), alors Y et $\tilde{Y}$ sont indistinguables (cf section 3.5).

Remarque 4.9. Axes d'extension *potentiels* pour ce résultat d'existence et d'unicité:

• b et σ moins "réguliers": par ex non bornés, ou non Lipschitz, etc. Parfois: existence locale seulement (sur $[0, T_0(\omega)]$), non unicité, etc.

• on remplace la condition initale a (déterministe) par une variable aléatoire $A : \Omega \to \mathbb{R}$. Par exemple, si A est indépendante de W et si $\mathbb{E}[A^2] < \infty$, on peut utiliser les mêmes arguments que dans la preuve qui suit.

Preuve.

Exercice 4.10 (Existence)**.** *Soit $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ la suite de processus définie par le schéma d'itération de Picard: $Y_t^{(0)} := a$ et*

$$Y_t^{(n+1)} := a + \int_0^t b(Y_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(Y_s^{(n)})\, dW_s \ . \tag{26}$$

(i) Vérifier que cette suite est bien définie.

Montrons plus précisement, par récurrence sur $n \geq 0$, que $Y^{(n)}$ est bien défini, est adapté et est continu (p.s.). Pour $n = 0$, le résultat est trivial. Supposons cette propriété vraie pour un certain $n \geq 0$. On sait alors que $\sigma(Y^{(n)})$ est adapté (puisque

$Y^{(n)}$ l'est) et continu (puisque $Y^{(n)}$ et σ le sont). Par ailleurs, comme σ est bornée, il est clair que $\int_0^T \mathbb{E}[\sigma(Y_s^{(n)})^2]\, ds < \infty$. L'intégrale d'Itô $\int_0^t \sigma(Y_s^{(n)})\, dW_s$ est donc bien définie, ce qui garantit par là même la bonne définition de $Y^{(n+1)}$. Le fait que $Y_t^{(n+1)}$ soit $\mathcal{F}_t$-mesurable découle ensuite du fait que les intégrales $\int_0^t b(Y_s^{(n)})\, ds$ et $\int_0^t \sigma(Y_s^{(n)})\, dW_s$ sont toutes deux $\mathcal{F}_t$-mesurables, en tant que limites d'applications $\mathcal{F}_t$-mesurables (voir l'étape 3 de la preuve de la proposition 4.5). Enfin, la continuité de $Y^{(n+1)}$ est une conséquence de la proposition 4.5.

(ii) Montrer que

$$\mathbb{E}[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2] \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}[|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}|^2]\, ds \ , \tag{27}$$

pour une certaine constante $c_{b,\sigma,T} > 0$.

On a

$$Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} := \int_0^t [b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})]\, ds + \int_0^t [\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s^{(n-1)})]\, dW_s \ . \tag{28}$$

Or, d'une part, en utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition (24), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t [b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})]\, ds\Big|^2\Big] &\leq T \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s^{(n-1)})\big|^2\Big]\, ds \\ &\leq (c_{b,\sigma})^2 T \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}\big|^2\Big]\, ds \,.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant successivement l'isométrie d'Itô et la condition (24), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t [\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s^{(n-1)})]\, dW_s\Big|^2\Big] &= \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s^{(n-1)})\big|^2\Big]\, ds \\ &\leq (c_{b,\sigma})^2 \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}\big|^2\Big]\, ds \,.\end{aligned}$$

En revenant à (28), on déduit immédiatement l'estimation désirée:

$$\mathbb{E}[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2] \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}[|Y_s^{(n)} - Y_s^{(n-1)}|^2]\, ds \ ,$$

avec $c_{b,\sigma,T} := 2(c_{b,\sigma})^2(1+T)$.

(iii) En déduire que la suite $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ converge dans l'espace $L^\infty([0,T];L^2(\Omega))$, puis que sa limite correspond à une solution de l'équation.

En itérant l'inégalité (27), on obtient, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2] &\leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}[|Y_{s_n}^{(n)} - Y_{s_n}^{(n-1)}|^2]\, ds_n \\ &\leq (c_{b,\sigma,T})^2 \int_0^t \int_0^{s_n} \mathbb{E}[|Y_{s_{n-1}}^{(n-1)} - Y_{s_{n-1}}^{(n-2)}|^2]\, ds_{n-1}\, ds_n \\ &\leq \ldots \leq (c_{b,\sigma,T})^n \int_{0<s_1<\ldots<s_n<t} \mathbb{E}[|Y_{s_1}^{(1)} - Y_{s_1}^{(0)}|^2]\, ds_1 \cdots ds_n \ .\end{aligned}$$

Or nous disposons bien entendu de l'expression explicite

$$Y_{s_1}^{(1)} - Y_{s_1}^{(0)} = b(a)s_1 + \sigma(a)W_{s_1}$$

ce qui permet finalement d'affirmer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\big[|Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}|^2\big] \leq 2(c_{b,\sigma,T})^n (c_{b,\sigma})^2 (T^2+T) \int_{0<s_1<\ldots<s_n<T} ds_1 \cdots ds_n$$
$$\leq 2\frac{(c_{b,\sigma,T}\, T)^n}{n!}(c_{b,\sigma})^2(T^2+T)\ .$$

Cette inégalité montre (en particulier) que la suite de processus $(Y^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace (complet) $L^\infty([0,T];L^2(\Omega))$: cette suite converge donc dans l'espace en question. Notons Y sa limite.

En revenant à la relation (26) définissant la suite $Y^{(n)}$, on montre ensuite, avec les mêmes arguments qu'au point (ii), que

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \big[b(Y_s^{(n)}) - b(Y_s)\big]\, ds\Big|^2\Big] \leq (c_{b,\sigma})^2 T \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|Y_s^{(n)} - Y_s\big|^2\Big]\, ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

et de même

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \big[\sigma(Y_s^{(n)}) - \sigma(Y_s)\big]\, dW_s\Big|^2\Big] \leq (c_{b,\sigma})^2 \int_0^t \mathbb{E}\Big[\big|Y_s^{(n)} - Y_s\big|^2\Big]\, ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

On constate ainsi que le processus Y est bien solution de l'équation (25).

Exercice 4.11 (Unicité)**.** *Soit $Y,\tilde{Y}$ deux solutions de l'équation.*

(i) *Montrer qu'en posant $h_t := \sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}\big[|Y_s - \tilde{Y}_s|^2\big]$, on a*

$$h_t \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t h_s\, ds\ , \tag{29}$$

pour une certaine constante $c_{b,\sigma,T} > 0$.

Avec les mêmes arguments qu'au point (ii) ci-dessus, on obtient facilement, pour tout $t \in [0,T]$ et tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\big[|Y_t - \tilde{Y}_t|^2\big] \leq c_{b,\sigma,T} \int_0^t \mathbb{E}\big[|Y_s - \tilde{Y}_s|^2\big]\, ds \leq c_{b,\sigma,T}\int_0^t h_s\, ds\ .$$

L'inégalité (29) en découle immédiatement.

(ii) *En déduire que $h_T = 0$, puis, en utilisant la proposition 3.9, que Y et $\tilde{Y}$ sont indistinguables.*

En itérant (29), on obtient, pour tout $m \geq 1$,

$$0 \leq h_T \leq c_{b,\sigma,T}\int_0^T h_{s_m}\, ds_m$$
$$\leq (c_{b,\sigma,T})^2 \int_0^T \int_0^{s_{m-1}} h_{s_{m-1}}\, ds_{m-1}\, ds_m$$
$$\leq \ldots \leq (c_{b,\sigma,T})^m \int_{0<s_1<\ldots<s_m<T} h_{s_1}\, ds_1\cdots ds_m \leq \frac{(c_{b,\sigma,T}\, T)^m}{m!} h_T\ ,$$

et donc, en faisant tendre m vers l'infini, on obtient effectivement $h_T = 0$.

Ceci permet d'affirmer dans un premier temps que Y et $\tilde{Y}$ sont modifications l'un de l'autre (cf section 3.5). Or, grâce à la proposition 4.5, nous savons que ces deux processus sont continus (p.s). Nous sommes par conséquent en mesure d'invoquer la proposition 3.9 pour conclure: les processus Y et $\tilde{Y}$ sont bien indistinguables.

$\square$

4.3. **Propriétés de la solution.**

Soit Y solution de l'équation

$$dY_t = b(Y_t)\,dt + \sigma(Y_t)\,dW_t \ , \quad Y_0 = a \ , \ t \in [0,T] \, .$$

Les propriétés de Y peuvent être examinées sous de multiples angles. Citons (sans approfondir) quelques axes possibles:

4.3.1. *Propriétés "classiques".*

(i) *Régularité des trajectoires.* Pour presque tout ω et pour tout $\gamma < 1/2$, la fonction $t \mapsto Y_t(\omega)$ est γ-höldérienne. Autrement dit, la solution hérite de la régularité du mouvement brownien W.

(ii) *Schémas d'approximation numérique.* Par exemple, schéma d'Euler: on pose $t_i = t_i^n := \frac{iT}{n}$, puis on définit

$$Y^n_{t_{i+1}} := Y^n_{t_i} + b(Y^n_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + \sigma(Y^n_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \ .$$

On peut alors montrer que

$$\mathbb{E}\big[|Y_T^n - Y_T|^2\big]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c_{b,\sigma,T}}{\sqrt{n}} \ ,$$

pour une certaine constante $c_{b,\sigma,T} > 0$.

4.3.2. *Propriétés "stochastiques".*

(i) *Propriété de martingale.* Si $b \equiv 0$, on a $Y_t = a + \int_0^t \sigma(Y_s)\,dW_s$, donc, dans ce cas particulier, on sait, par la proposition 4.5, que Y est une martingale continue de variation quadratique $\langle Y \rangle_t = \int_0^t \sigma(Y_s)^2\,ds$. Dans le cas général, Y est une *semimartingale.*

(ii) *Propriété de Markov.* Pour tous $0 \leq s < t \leq T$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\big[f(Y_t)\big|(W_u)_{0\leq u\leq s}\big] = \mathbb{E}\big[f(Y_t)\big|W_s\big] \ .$$

(iii) *Régularité stochastique* (= régularité de $Y_t(\omega)$ vis-à-vis de $\omega \in \Omega$).
Par exemple: on sait que, *sous de bonnes hypothèses sur b et σ*, la loi de la variable aléatoire Y_t admet une densité régulière, pour tout $t \in [0,T]$.
On démontre ce type de résultat en utilisant la théorie du *calcul de Malliavin.*

(iv) *Mesure invariante.* On sait que, *sous de bonnes hypothèses sur b et σ*, l'équation admet une unique mesure invariante μ (c'est-à-dire, une mesure μ telle que si $Y_0 \sim \mu$, alors $Y_t \sim \mu$ pour tout $t \in [0,\infty[$), et pour toute condition initiale $A : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$Y_t \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mu \quad \text{en loi} \ .$$

5. L'équation de la chaleur stochastique

Nous nous concentrerons sur l'étude du modèle le plus standard, à savoir le modèle dirigé par le brownien espace-temps sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(u)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,.) = \Phi \ , \end{cases} \tag{30}$$

où $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $\sigma(u)_t(x) := \sigma(u_t(x))$ et $W : ([0,T]\times\mathbb{R})\times\Omega \to \mathbb{R}$ est un *champ brownien espace-temps* sur $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Pour une bonne définition de ce champ stochastique, procédons d'abord à quelques rappels généraux sur les *familles gaussiennes*.

Définition 5.1. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble quelconque. Une famille de variables aléatoires $\{X_a,\, a \in \mathcal{A}\}$ (à valeurs réelles) est dite gaussienne si pour tous $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$, $(X_{a_1}, \ldots, X_{a_k})$ est un vecteur gaussien, autrement dit si pour tous $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^k \lambda_i X_{a_i}$ est gaussienne.*

Terminologie (au moins dans ce cours):

- $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$: *vecteur gaussien*
- $\mathcal{A}$ intervalle de $\mathbb{R}$: *processus gaussien*
- $\mathcal{A}$ produit d'intervalles dans $\mathbb{R}^{d+1}$, $d \geq 1$: *champ gaussien.*

Définition 5.2. *Étant donné un ensemble $\mathcal{A}$ quelconque, on appelle fonction de covariance sur $\mathcal{A}$ toute fonction $C : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ symétrique (c'est-à-dire $C(x,y) = C(y,x)$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$) et définie positive (c'est-à-dire $\sum_{i,j=1}^k \alpha_i \alpha_j C(x_i, x_j) \geq 0$ pour tous $k \geq 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $x_i \in \mathcal{A}$).*

Proposition 5.3. *Étant données une fonction $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ et une fonction de covariance $C : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, il existe une unique famille gaussienne $\{X_a,\, a \in \mathcal{A}\}$ de moyenne m ($\mathbb{E}[X_a] = m(a)$) et de covariance C, c'est-à-dire*

$$\mathbb{E}\big[(X_{a_1} - \mathbb{E}[X_{a_1}])(X_{a_2} - \mathbb{E}[X_{a_2}])\big] = C(a_1, a_2) \ .$$

Remarque 5.4. La propriété d'unicité dans la proposition 5.3 est à comprendre comme une unicité *au sens des lois de dimension finie*, c'est-à-dire: si $\{X_a,\, a \in \mathcal{A}\}$ et $\{\widetilde{X}_a,\, a \in \mathcal{A}\}$ sont deux familles gaussiennes, définies respectivement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$, de même moyenne et de même covariance, alors pour tout $k \geq 1$, tous $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ et tout borélien B de $\mathbb{R}^k$, on aura

$$\mathbb{P}\big((X_{a_1}, \ldots, X_{a_k}) \in B\big) = \widetilde{\mathbb{P}}\big((\widetilde{X}_{a_1}, \ldots, \widetilde{X}_{a_k}) \in B\big) \, .$$

À partir de ce résultat général, nous pouvons immédiatement introduire le champ stochastique qui nous intéresse ici:

Définition 5.5. *Soit $T > 0$ et $d \geq 1$. On appelle* champ brownien espace-temps *(sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$) le champ gaussien $W : ([0,T] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ continu (= p.s., $(t,x) \mapsto W_t(x)$ est continue) centré et de covariance donnée par la formule*

$$\mathbb{E}\big[W_s(x)W_t(y)\big] = \inf(s,t) \prod_{i=1}^{d} R(x_i, y_i) \ , \qquad s,t \in [0,T], \ x,y \in \mathbb{R}^d \, , \tag{31}$$

où, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, $R(a,b)$ est donné par

$$R(a,b) := \frac{1}{2}\big\{|a| + |b| - |a-b|\big\} \ . \tag{32}$$

Remarque 5.6. Le fait de pouvoir "supposer" W continu est une conséquence du *critère de Kolmogorov (multiparamétrique).* Nous y reviendrons dans l'exercice 5.23.

Exercice 5.7. *Vérifier que pour tous $a,b \geq 0$, $R(a,b) = \inf(a,b)$, et plus généralement que, pour tous $a,b \in \mathbb{R}$,*

$$R(a,b) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,a]}(x)\mathbf{1}_{[0,b]}(x)\, dx \ , \tag{33}$$

avec la convention usuelle $\mathbf{1}_{[0,a]} := -\mathbf{1}_{[a,0]}$ si $a < 0$. En déduire que la formule $C((s,x),(t,y)) := \inf(s,t) \prod_{k=1}^{d} R(x^{(k)}, y^{(k)})$ définit bien une fonction de covariance sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Pour tous $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $(s_i, x_i) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, on a, en utilisant (33),

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j C((s_i,x_i),(s_j,x_j)) = \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j \inf(s_i,s_j) \prod_{k=1}^{d} R(x_i^{(k)}, x_j^{(k)}) \\
&= \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,s_i]}(t)\mathbf{1}_{[0,s_j]}(t)\, dt \Big) \prod_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,x_i^{(k)}]}(y)\mathbf{1}_{[0,x_j^{(k)}]}(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \Big(\sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{[0,s_i]}(t) \mathbf{1}_{[0,x_i^{(1)}]}(y^{(1)}) \cdots \mathbf{1}_{[0,x_i^{(d)}]}(y^{(d)}) \Big)^2 dt\, dy^{(1)} \cdots dy^{(d)} \ \geq \ 0 \ .
\end{aligned}$$

La fonction R définie par (32) correspond en fait à la covariance du *mouvement brownien sur* $\mathbb{R}$, que l'on peut construire (et à vrai dire définir) à partir de deux mouvements browniens indépendants $W^{(1)}, W^{(2)}$ classiques (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+$, cf la définition 2.1 ou la remarque 2.2), en posant, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$W(a) := \begin{cases} W^{(1)}(a) & \text{si } a \geq 0 \\ W^{(2)}(-a) & \text{si } a < 0 \end{cases} \ . \tag{34}$$

On peut en effet vérifier que pour un tel processus (gaussien), on a, *pour tous* $a,b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\big[W(a)\big] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big[W(a)W(b)\big] = R(a,b) \ .$$

5.1. **Heuristique: formulation mild de l'équation de la chaleur.**

Considérons pour l'instant une équation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(.,u) \ , \quad u_0(x) = \Phi(x) \ , \tag{35}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une *fonction bien définie* et la notation dans (35) signifie $f(.,u)_t(x) := f(t,x,u_t(x))$.

Comme dans le cas des EDO, on souhaiterait mettre l'équation sous une forme "intégrale" que l'on puisse ensuite étendre (*par le biais d'arguments stochastiques*) au cas où f est remplacée par la "distribution"

$$f(.,u) = \sigma(u) \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \ . \tag{36}$$

1ère idée (mauvaise): on intègre simplement l'équation en temps (à x fixé) pour obtenir

$$u_t(x) = u_0(x) + \int_0^t (\partial_x^2 u)_s(x)\, ds + \int_0^t f(s,x,u_s(x))\, ds \ .$$

Deux inconvénients majeurs apparaissent ici:

• L'opérateur $u \mapsto \partial_x^2 u$ est non borné (si $u \in \mathcal{W}^2$, alors $\partial_x^2 u \in L^2$), d'où des problèmes de stabilité pour résoudre l'équation sous cette forme.

• En vue de l'interprétation recherchée (quand $f(.,u)$ laissera place à $\sigma(u)\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}$), on souhaite faire apparaître une forme intégrale en temps, *mais aussi en espace*, pour compenser l'irrégularité du bruit $\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}$.

2ème idée (meilleure): s'appuyer sur la solution fondamentale de l'équation linéaire sous-jacente, soit l'équation de la chaleur standard

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \ , \quad t \in \mathbb{R}_+ \, , \, x \in \mathbb{R} \ . \tag{37}$$

– –

Rappel: par définition, la solution fondamentale de l'équation (37) (avec condition nulle en $t = 0$) est la distribution $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que, pour toute fonction-test $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la solution (au sens des distributions) de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varphi \ , \quad v(0,x) = 0 \ ,$$

est donnée par la convolution (espace-temps) $v := G * \varphi$.

– –

Cette solution fondamentale est en fait donnée ici par le noyau gaussien

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big) \mathbf{1}_{\{t>0\}} \ . \tag{38}$$

Observons plus simplement que cette fonction G satisfait $G_t(x) = 0$ pour tout $t \leq 0$,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{pour tous } t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

$$\text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\psi(y)\, dy \xrightarrow{t\to 0} \psi(x) \ , \tag{40}$$

pour toute fonction continue bornée $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Grâce à ces propriétés, nous pouvons établir le résultat suivant:

Proposition 5.8. *Si u est solution de (35) au sens classique (c'est-à-dire u est $\mathcal{C}^1$ en temps, $\mathcal{C}^2$ en espace, et satisfait (35) pour tout (t,x)), et si*

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| < \infty \quad , \quad \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\Big| < \infty \ , \tag{41}$$

alors u est aussi solution de l'équation suivante (appelée forme mild de (35)*): pour tous $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) f(s,y,u_s(y))\,ds\,dy \ . \tag{42}$$

La formulation (42) fait cette fois bien apparaître une intégrale en temps et en espace: *c'est cette formulation de l'équation que nous allons pouvoir étendre à la situation (36).*

Preuve de la proposition 5.8. On a, pour tous $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} G_\varepsilon(x-y)u_t(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} G_{t+\varepsilon}(x-y)\Phi(y)\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}} \big\{G_\varepsilon(x-y)u_t(y) - G_{t+\varepsilon}(x-y)u_0(y)\big\}\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_0^t \partial_s\big(G_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y)\big)\,ds\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_0^t \big\{\partial_s\big(G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\big)u_s(y)\\
&\qquad\qquad + G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\partial_s\big(u_s(y)\big)\big\}\,ds\,dy\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\int_0^t (\partial_s G)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y)\\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}}\int_0^t G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\partial_y^2\big(u_s(y)\big)\,ds\,dy\\
&\qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}}\int_0^t G_{t-s+\varepsilon}(x-y)f(s,y,u_s(y))\,ds\,dy \ .
\end{aligned} \tag{43}$$

Ensuite, en utilisant (41) et le fait que, pour tous $0 \le s \le t$ et $x,y \in \mathbb{R}$,

$$\partial_y\big(G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\big) \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \ , \quad G_{t-s+\varepsilon}(x-y) \overset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,$$

on déduit facilement

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_0^t G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\partial_y^2\big(u_s(y)\big)\,ds\,dy\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}} G_{t-s+\varepsilon}(x-y)\partial_y^2\big(u_s(y)\big)\,dy\,ds\\
&= \int_0^t\int_{\mathbb{R}} (\partial_y^2 G)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y)\,dy\,ds \ .
\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à (43) et en utilisant (39), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} G_\varepsilon(x-y)u_t(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} G_{t+\varepsilon}(x-y)\Phi(y)\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_0^t G_{t-s+\varepsilon}(x-y)f(s,y,u_s(y))\,ds\,dy \ .
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de faire tendre ε vers 0 et d'utiliser (40) pour obtenir (42).

□

5.2. **Intégration par rapport à un champ brownien espace-temps.**

En gardant la formulation (42) à l'esprit, et étant donné un champ brownien espace-temps W sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ (au sens de la définition 5.5), on cherche à donner sens à l'intégrale

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\, ds\, dx\ ,$$

pour une certaine classe de champs stochastiques $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ (la plus large possible).

À cette fin, inspirons nous de la construction d'Itô (cf Section 4.1.2). Considérons ici $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0} = (\mathcal{F}_s^W)_{s\geq 0}$ la filtration *en temps* associée à W, autrement dit

$$\mathcal{F}_s := \sigma\text{-algèbre engendrée par } \{W_r(x);\ \underline{0\leq r\leq s,\ x\in\mathbb{R}^d}\}\ .$$

Reprenons maintenant une à une les étapes de la section 4.1.2.

Étape 1: Définition pour un champ simple adapté.

Considérons d'abord l'espace $\mathcal{E}$ des *champs simples adaptés*, c'est-à-dire l'ensemble des champs $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ de la forme

$$H_s(x) := \sum_{i,j} \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\mathbf{1}_{A_j}(x)\, X_i^j \tag{44}$$

où la somme porte sur un nombre fini d'indices i,j, et où $0=t_0<t_1<\ldots<T$,

$$A_j := [a_1^{(1)}(j), a_2^{(1)}(j)[\times\ldots\times[a_1^{(d)}(j), a_2^{(d)}(j)[\quad \text{avec} \quad a_1^{(k)}(j) < a_2^{(k)}(j)\,,$$
$$A_{j_1}\cap A_{j_2} = \emptyset \quad \text{si } j_1\neq j_2\ ,$$

et enfin, pour tous i,j, $X_i^j : \Omega\to\mathbb{R}$ *est une variable aléatoire bornée et* $\mathcal{F}_{t_i}$*-mesurable.*

On pose alors

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\, ds\, dx\\ &\Big(= \sum_{i,j} X_i^j \Big\{ \int_{A_j} \frac{\partial^d W_{t_{i+1}}}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(x)\, dx - \int_{A_j} \frac{\partial^d W_{t_i}}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(x)\, dx\Big\}\Big)\\ &:= \sum_{i,j} X_i^j\{W_{t_{i+1}}(A_j) - W_{t_i}(A_j)\}\ ,\end{aligned} \tag{45}$$

où, pour tous $A := [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}]\times\ldots\times[a_1^{(d)}, a_2^{(d)}]$ et $s\in[0,T]$, on définit $W_s(A)$ par la formule

$$W_s(A) := \int_A \frac{\partial^d W_s}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(x)\, dx := \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\ldots+i_d} W_s(a_{i_1}^{(1)},\ldots,a_{i_d}^{(d)})\ . \tag{46}$$

Par exemple, pour $d=2$, on récupère l'incrément rectangulaire

$$W_s(A) := W_s(a_1^{(1)}, a_1^{(2)}) - W_s(a_1^{(1)}, a_2^{(2)}) - W_s(a_2^{(1)}, a_1^{(2)}) + W_s(a_2^{(1)}, a_2^{(2)})\,.$$

Soulignons dès à présent les quelques propriétés stochastiques suivantes pour la famille de variables aléatoires $W_s(A)$ (ces propriétés se révèleront par la suite essentielles):

Lemme 5.9. *Pour tous* $A := [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}] \times \ldots \times [a_1^{(d)}, a_2^{(d)}]$, $B := [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}] \times \ldots \times [b_1^{(d)}, b_2^{(d)}]$, *et* $0 \leq s \leq t$, *on a:*
(i) $\mathbb{E}[W_s(A)W_t(B)] = s\,\mu(A \cap B)$, *où* μ *désigne la mesure de Lebesgue dans* $\mathbb{R}^d$.
(ii) $W_t(A) - W_s(A) \sim W_{t-s}(A)$.
(iii) $W_t(A) - W_s(A)$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$. *En particulier,* $\{W_t(A),\, t \geq 0\}$ *est une martingale (centrée).*
(iv) Le crochet *de* $W(A)$ *et* $W(B)$ *est donné par* $\langle W(A), W(B)\rangle_t = t\,\mu(A \cap B)$.

Exercice 5.10. *Prouver les assertions du lemme 5.9.*
(i) En combinant (31) et (46), on déduit immédiatement

$$\mathbb{E}[W_s(A)W_t(B)] = s \prod_{k=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} R(a_i^{(k)}, b_j^{(k)}) \ ,$$

et l'on peut ensuite vérifier, à partir de la représentation (33), que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2} (-1)^{i+j} R(a_i^{(k)}, b_j^{(k)}) &= \int_{\mathbb{R}} \{\mathbf{1}_{[0,a_2^{(k)}]}(x) - \mathbf{1}_{[0,a_1^{(k)}]}(x)\}\{\mathbf{1}_{[0,b_2^{(k)}]}(x) - \mathbf{1}_{[0,b_1^{(k)}]}(x)\}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a_1^{(k)},a_2^{(k)}]}(x)\mathbf{1}_{[b_1^{(k)},b_2^{(k)}]}(x)\, dx \\ &= \mu([a_1^{(k)}, a_2^{(k)}] \cap [b_1^{(k)}, b_2^{(k)}]) \ .\end{aligned}$$

Remarquons en effet qu'avec la convention $\mathbf{1}_{[0,a]} := -\mathbf{1}_{[a,0]}$ *pour* $a < 0$ *(utilisée dans (33)), on a bien, pour tous* $a_1 < a_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{1}_{[0,a_2]} - \mathbf{1}_{[0,a_1]} = \mathbf{1}_{[a_1,a_2]}$ *p.p.*
(ii) Les deux variables aléatoires en question sont de lois gaussiennes centrées, et en utilisant (i), on constate immédiatement que

$$\mathbb{E}[(W_t(A) - W_s(A))^2] = (t-s)\mu(A) = \mathbb{E}[W_{t-s}(A)^2] \ .$$

(iii) En utilisant la terminologie de [4, Definition 0.6.2], *on sait que les espaces*

$$G_{1,(s,t)} := \overline{Span(W_t(A) - W_s(A))} \quad et \quad G_{2,s} := \overline{Span(W_r(x),\, 0 \leq r \leq s,\, x \in \mathbb{R}^d)}$$

sont deux sous-espaces fermés de l'espace gaussien

$$G := \overline{Span(W_r(x),\, 0 \leq r \leq T,\, x \in \mathbb{R}^d)} \ .$$

Ainsi, d'après [4, Proposition 0.6.3], *les tribus* $\sigma(G_{1,(s,t)})$ *et* $\sigma(G_{2,s})(= \mathcal{F}_s)$ *sont indépendantes si et seulement si les espaces* $G_{1,(s,t)}$ *et* $G_{2,s}$ *sont orthogonaux (dans* $L^2(\Omega)$*). Il s'agit donc de vérifier que pour tous* $0 \leq r \leq s$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}[(W_t(A) - W_s(A))W_r(x)] = 0 \ .$$

Et en effet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t(A)W_r(x)] &= \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\ldots+i_d}\mathbb{E}[W_t(a_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_d}^{(d)})W_r(x)] \\ &= r \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\ldots+i_d} \prod_{k=1}^{d} R(a_{i_k}^{(k)}, x^{(k)}) \\ &= \mathbb{E}[W_s(A)W_r(x)] \ .\end{aligned}$$

(iv) Posons

$$K_{s_1,s_2}(A,B) := W_{s_1,s_2}(A)W_{s_1,s_2}(B) - (s_2-s_1)\mu(A\cap B)\,,$$

en utilisant désormais la notation $f_{s_1,s_2} := f_{s_2} - f_{s_1}$ lorsque f est une fonction à un paramètre. On a alors, pour toute partition $\Delta := \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ de pas $|\Delta| := \sup_i |t_{i+1} - t_i|$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i (W_{t_{i+1}\wedge t}(A) - W_{t_i\wedge t}(A))(W_{t_{i+1}\wedge t}(B) - W_{t_i\wedge t}(B)) - t\mu(A\cap B)\Big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i K_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t}(A,B)\Big)^2\Big] = \sum_{i,j} \mathbb{E}\Big[K_{t_i\wedge t,t_{i+1}\wedge t}(A,B)K_{t_j\wedge t,t_{j+1}\wedge t}(A,B)\Big]\,.
\end{aligned} \tag{47}$$

En utilisant les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus, on vérifie ensuite facilement que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[(K_{s_1,s_2}(A,B))^2\Big] \\
&\leq 2\Big\{\mathbb{E}\Big[|W_{s_1,s_2}(A)W_{s_1,s_2}(B)|^2\Big] + (s_2-s_1)^2\mu(A\cap B)^2\Big\} \\
&\leq 2\Big\{\mathbb{E}\Big[|W_{s_1,s_2}(A)|^4\Big]^{1/2}\mathbb{E}\Big[|W_{s_1,s_2}(B)|^4\Big]^{1/2} + (s_2-s_1)^2\mu(A\cap B)^2\Big\} \\
&\leq 2\Big\{3(s_2-s_1)^2\mu(A)\mu(B) + (s_2-s_1)^2\mu(A\cap B)^2\Big\} \leq 8(s_2-s_1)^2\mu(A)\mu(B)\,,
\end{aligned}$$

tandis que pour $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4$,

$$\mathbb{E}[K_{s_1,s_2}(A,B)K_{s_3,s_4}(A,B)] = 0\,.$$

Pour obtenir cette dernière identité, on s'appuie en particulier sur le fait que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[W_{s_1,s_2}(A)_{s_1,s_2}W_{s_1,s_2}(B)W_{s_3,s_4}(A)W_{s_3,s_4}(B)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[W_{s_1,s_2}(A)W_{s_1,s_2}(B)W_{s_3,s_4}(A)W_{s_3,s_4}(B)|\mathcal{F}_{s_3}\Big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[W_{s_1,s_2}(A)W_{s_1,s_2}(B)\Big]\mathbb{E}\Big[W_{s_3,s_4}(A)W_{s_3,s_4}(B)\Big] \\
&= (s_2-s_1)(s_4-s_3)\mu(A\cap B)^2\,.
\end{aligned}$$

En revenant à (47), on déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_i (W_{t_{i+1}\wedge t}(A) - W_{t_i\wedge t}(A))(W_{t_{i+1}\wedge t}(B) - W_{t_i\wedge t}(B)) - t\mu(A\cap B)\Big)^2\Big] \\
&\leq 8\mu(A)\mu(B)\sum_i (t_{i+1}-t_i)^2 \leq 8\mu(A)\mu(B)|\Delta|\sum_i (t_{i+1}-t_i) \leq 8\mu(A)\mu(B)|\Delta|\,t\,,
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend évidemment vers 0 lorsque $|\Delta| \to 0$.

Étape 2: Isométrie. Comme dans le cas classique (uni-paramétrique), l'extension de la définition (45) va être rendue possible par une propriété d'isométrie:

Lemme 5.11. *Pour tout champ simple adapté H, on a*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\,\frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\,ds\,dx\Big)^2\Big] = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{E}[|H_s(x)|^2]\,ds\,dx\,,$$

autrement dit l'application

$$H \longmapsto \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x) \, \frac{\partial^{d+1} W}{\partial s \partial x_1 \cdots \partial x_d}(s,x) \, ds \, dx$$

est une isométrie de $(\mathcal{E}, L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega))$ *dans* $L^2(\Omega)$.

Preuve. Soit H de la forme (44). On a alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x) \, \frac{\partial^{d+1} W}{\partial s \partial x_1 \cdots \partial x_d}(s,x) \, ds \, dx\Big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i,j} X_i^j \, \{W_{t_{i+1}}(A_j) - W_{t_i}(A_j)\}\Big)^2\Big] \\
&= \sum_{i_1,i_2} \sum_{j_1,j_2} \mathbb{E}\Big[X_{i_1}^{j_1} X_{i_2}^{j_2} \, \{W_{t_{i_1+1}}(A_{j_1}) - W_{t_{i_1}}(A_{j_1})\}\{W_{t_{i_2+1}}(A_{j_2}) - W_{t_{i_2}}(A_{j_2})\}\Big] .
\end{aligned}$$

Pour $i_1 = i_2 = i$, on utilise les propriétés mises en évidence dans la lemme 5.9 pour affirmer successivement que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\underbrace{X_i^{j_1} X_i^{j_2}}_{\in \mathcal{F}_{t_i}} \, \underbrace{\{W_{t_{i+1}}(A_{j_1}) - W_{t_i}(A_{j_1})\}\{W_{t_{i+1}}(A_{j_2}) - W_{t_i}(A_{j_2})\}}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_i}}\Big] \\
&= \mathbb{E}\big[X_i^{j_1} X_i^{j_2}\big] \, \mathbb{E}\Big[\{W_{t_{i+1}}(A_{j_1}) - W_{t_i}(A_{j_1})\}\{W_{t_{i+1}}(A_{j_2}) - W_{t_i}(A_{j_2})\}\Big] \\
&= \mathbb{E}\big[X_i^{j_1} X_i^{j_2}\big](t-s)\mu(A_{j_1} \cap A_{j_2}) = \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}(t-s)\mu(A_{j_1})\mathbb{E}\big[(X_i^{j_1})^2\big] ,
\end{aligned}$$

tandis que, grâce à ces mêmes propriétés, on a, pour $i_1 < i_2$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\underbrace{X_{i_1}^{j_1} X_{i_2}^{j_2} \, \{W_{t_{i_1+1}}(A_{j_1}) - W_{t_{i_1}}(A_{j_1})\}}_{\in \mathcal{F}_{t_{i_2}}} \, \underbrace{\{W_{t_{i_2+1}}(A_{j_2}) - W_{t_{i_2}}(A_{j_2})\}}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_{i_2}}}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[X_{i_1}^{j_1} X_{i_2}^{j_2} \, \{W_{t_{i_1+1}}(A_{j_1}) - W_{t_{i_1}}(A_{j_1})\}\big]\mathbb{E}\big[W_{t_{i_2+1}}(A_{j_2}) - W_{t_{i_2}}(A_{j_2})\big] \;=\; 0 .
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons à présent nous tourner vers l'argument de densité qui clôt la procédure.

Étape 3: Argument de densité.

Lemme 5.12. *Soit* $H : ([0,T] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ *un champ stochastique tel que:*
(i) *pour tous* $t \in [0,T]$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$, $H_t(x)$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable ("H adapté");*
(ii) *p.s., la fonction* $(t,x) \mapsto H_t(x)$ *est continue presque partout ("H continu p.p.");*
(iii) *on a*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\big[\big|H_s(x)\big|^2\big] \, ds \, dx \;<\; \infty \,.$$

Alors il existe une suite $H^{(n)}$ *de champs simples adaptés telle que*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n)}(x) - H_s(x)\big|^2\big] \, ds \, dx \;\to\; 0 \,. \tag{48}$$

Preuve. Dans un souci de clarté, notons

$$\mathcal{H} := \{H \text{ champ adapté, continu p.p. et dans } L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega)\} ,$$

$$\mathcal{B} := \{H \text{ champ adapté, continu p.p., à support compact en } x, \text{ dans } L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega)\} ,$$

et rappelons que $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des champs simples adaptés.

Densité de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{H}$. Étant donné $H \in \mathcal{H}$, il suffit de considérer la suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ donnée pour tout $n \geq 1$ par

$$H_t^{(n)}(x) := \mathbf{1}_{\{|x|\leq n\}}\big\{H_t(x)\mathbf{1}_{\{|H_t(x)|<n\}} + n\mathbf{1}_{\{H_t(x)\geq n\}} - n\mathbf{1}_{\{H_t(x)\leq -n\}}\big\} .$$

On a bien $H^{(n)} \in \mathcal{B}$, et comme $|H_t^{(n)}| \leq |H_t|$, nous sommes en mesure d'invoquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que $H^{(n)}$ converge vers H dans $L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega)$.

Densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{B}$. Étant donné $H \in \mathcal{B}$, on pose simplement

$$H_t^{(n)}(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j_1,\ldots,j_d\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[t_i^n,t_{i+1}^n[}(t)\mathbf{1}_{[x_{j_1}^n,x_{j_1+1}^n[\times\ldots\times[x_{j_d}^n,x_{j_d+1}^n[}(x)H_{t_i^n}(x_{j_1}^n,\ldots,x_{j_d}^n) ,$$

où $t_i^n := \frac{iT}{n}$ et $x_j^n := \frac{j}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, $H^{(n)}$ définit clairement un champ simple adapté (car H est adapté, borné et à support compact en x), et la condition de continuité permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que $H^{(n)}$ converge vers H dans $L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega)$.

□

Il est clair que nous pouvons désormais reprendre mot pour mot les arguments du début de la section 4.1.3 pour obtenir la définition recherchée:

Définition 5.13. *Soit $H : ([0,T] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ un champ stochastique vérifiant les conditions (i)-(ii)-(iii) du lemme 5.12. On appelle intégrale d'Itô de H contre W, et on notera*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \dot{W}(ds\, dx) ,$$

la limite, dans $L^2(\Omega)$, de la suite

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s^{(n)}(x)\, \frac{\partial^{d+1}W}{\partial s\partial x_1\cdots\partial x_d}(s,x)\, ds\, dx ,$$

pour toute suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ de champs simples adaptés telle que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n)}(x) - H_s(x)\big|^2\big]\, ds\, dx \;\to\; 0 . \tag{49}$$

L'intégrale d'Itô vérifie en particulier la propriété d'isométrie fondamentale:

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \dot{W}(ds\, dx)\Big)^2\Big] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\big[\big|H_s(x)\big|^2\big]\, ds\, dx . \tag{50}$$

C'est cette interprétation de l'intégrale qui va nous permettre de donner sens à l'équation (3). Juste avant cela, soulignons rapidement l'une des principales propriétés "stochastiques" de l'intégrale: la propriété de martingale.

Proposition 5.14. *Pour tout champ $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (i)-(ii)-(iii) du lemme 5.12, le processus*

$$M_t := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \dot{W}(ds\, dx)$$

est une martingale continue (relativement à $\{\mathcal{F}_s\}$) de variation quadratique

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big|H_s(x)\big|^2\, ds\, dx\ .$$

Preuve. Il suffit de reprendre les arguments de la preuve de la proposition 4.5 (**vérifier les détails en exercice**). □

Corollaire 5.15 (Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy)**.** *Soit $t\geq 0$ fixé, et $H_{t,.} : ([0,t]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ un champ vérifiant les conditions (i)-(ii)-(iii) du lemme 5.12 (avec $T=t$). Pour tout $p\geq 2$, il existe une constante $c_p>0$ telle que*

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} H_{t,s}(x)\,\dot{W}(ds\,dx)\Big|^p\Big] \leq c_p\,\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\big|H_{t,s}(x)\big|^2\,ds\,dx\Big)^{p/2}\Big]\ .$$

Preuve. Par la proposition 5.14, nous savons que le processus

$$M_{t,.} : t'\in[0,t]\mapsto \int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}^d} H_{t,s}(x)\,\dot{W}(ds\,dx)$$

est une martingale continue de variation quadratique

$$\langle M_{t,.}\rangle_{t'} = \int_0^{t'}\int_{\mathbb{R}^d}\big|H_{t,s}(x)\big|^2\,ds\,dx\,.$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le théorème (général) de Burkholder-Davis-Gundy (théorème 3.8, avec $T=t$), ce qui donne

$$\mathbb{E}\big[\big|M_{t,t}\big|^p\big] \leq c_p\,\mathbb{E}\big[\big|\langle M_{t,.}\rangle_t\big|^{p/2}\big]\ .$$

Ceci correspond exactement au résultat souhaité. □

5.3. **Interprétation de l'équation.**

Rappelons que nous nous intéressons dans cette section au modèle dynamique

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma(u)\dfrac{\partial^2 W}{\partial t\partial x}\ , \quad t\in[0,T],\, x\in\mathbb{R},\\ u(0,.) = \Phi\ ,\end{cases} \tag{51}$$

où $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue, $\sigma(u)_t(x) := \sigma(u_t(x))$ et $W : ([0,T]\times\mathbb{R})\times\Omega\to\mathbb{R}$ est un champ brownien espace-temps sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.

En combinant les considérations heuristiques de la section 5.1 et les constructions de la section 5.2, nous sommes désormais en mesure de fournir une interprétation naturelle (et rigoureuse) de cette équation:

Définition 5.16. *On appelle solution (au sens mild) de l'équation (51) tout champ $u : ([0,T]\times\mathbb{R})\times\Omega\to\mathbb{R}$ adapté et continu tel que, pour tout $t\in[0,T]$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a*

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\mathbb{E}\Big[\big|G_{t-s}(x-y)\sigma(u_s(y))\big|^2\Big]\,ds\,dy\ <\ \infty \tag{52}$$

et

$$u_t(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma(u_s(y))\, \dot{W}(ds\, dy) \ , \qquad (53)$$

où la dernière intégrale est comprise au sens d'Itô, et où l'on rappelle que G *désigne le noyau gaussien*

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4t}\Big)\, \mathbf{1}_{\{t>0\}} \ .$$

5.4. **Résolution.**

On dispose du résultat général suivant:

Théorème 5.17. *Soit* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application telle qu'il existe une constante* $c_\sigma > 0$ *vérifiant*

$$|\sigma(x)| \leq c_\sigma \quad \textit{et} \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c_\sigma |x-y| \ , \qquad (54)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$*. Par ailleurs, soit* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, bornée et de carré intégrable. Alors l'équation (51) admet une unique solution* u *(au sens mild).*

Remarque 5.18. Dans ce dernier énoncé, l'unicité doit être comprise *à indistinguabilité près*, autrement dit: si u et v sont deux solutions de l'équation (51), alors u et v sont indistinguables, autrement dit il existe une événement $\tilde{\Omega}$ de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$ et tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $u_t(x)(\omega) = v_t(x)(\omega)$.

Comme dans le cas classique uni-paramétrique, la preuve de l'existence d'une telle solution va s'appuyer sur la considération d'un schéma itératif de type Picard. Afin de garantir la bonne définition de ce schéma, nous aurons besoin du résultat de stabilité suivant:

Lemme 5.19. *Étant donné un champ* $\{v_s(y),\, s \in [0,T], y \in \mathbb{R}\}$ *adapté, continu et borné (c'est-à-dire* $\sup_{(s,y,\omega)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega} |v_s(y)(\omega)| < \infty$*), on définit le champ* $\{w_t(x),\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ *par la formule*

$$w_t(x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y) v_s(y)\, \dot{W}(ds\, dy) \ .$$

Alors w *est bien défini,* w *est adapté et il existe une modification de ce champ (que nous noterons encore* w*) telle que, pour tout intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*, tout* $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ *et tout* $0 < \beta < \frac{1}{2}$*, on a p.s.*

$$\sup_{(s,x)\neq(t,y)\in[0,T]\times I} \frac{|w_t(y) - w_s(x)|}{|t-s|^\gamma + |y-x|^\beta} \ < \ \infty \ . \qquad (55)$$

En particulier, cette modification est (p.s.) continue.

Preuve. Pour garantir la bonne définition de w, il suffit de vérifier que les conditions (i)-(ii)-(iii) du lemme 5.12 sont effectivement satisfaites par le champ

$$(s,y) \longmapsto G_{t-s}(x-y) v_s(y) \mathbf{1}_{[0,t]}(s) \ .$$

La vérification des conditions (i)-(ii) est immédiate. Quant à la condition d'intégrabilité (iii), on a bien, en notant $M := \sup_{(s,y,\omega)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega} |v_s(y)(\omega)|$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\big|G_{t-s}(x-y)v_s(y)\big|^2\big]\, ds\, dy \\
&\leq M^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-s}(x-y)\big|^2\, ds\, dy \\
&\leq \frac{M^2}{4\pi} \int_0^t \frac{ds}{(t-s)} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\Big)\, dy \\
&\leq \frac{M^2}{4\pi} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \ < \ \infty\,. \qquad (56)
\end{aligned}$$

Ainsi, le champ w est bien défini. Par construction de l'intégrale stochastique, $w_t(x)$ correspond à une limite de variables aléatoires $\mathcal{F}_t$-mesurables: $w_t(x)$ est donc elle-même $\mathcal{F}_t$-mesurable, et par conséquent w est bien adapté.

La preuve du résultat de régularité (55) est plus compliquée, et fait appel au *critère de Kolmogorov* (dans sa version multi-paramétrique). Nous examinerons en détails ces arguments dans la section 5.5. □

Le traitement du terme impliquant la condition initiale Φ s'appuiera quant à lui sur le résultat intermédiaire suivant:

Lemme 5.20. *Étant donnée $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée et de carré intégrable, soit $\{\widetilde{w}_t(x),\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ la fonction définie par*

$$\widetilde{w}_0(x) = \Phi(x) \quad , \quad \widetilde{w}_t(x) := \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)\, dy \quad si \;\; t > 0\,.$$

Alors $\widetilde{w}$ est continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}$. En outre, pour tout $T_0 \in (0,T]$, on a

$$\sup_{(s,x)\neq(t,y)\in[T_0,T]\times\mathbb{R}} \frac{\big|\widetilde{w}_t(y) - \widetilde{w}_s(x)\big|}{|t-s| + |y-x|} \ < \ \infty\ . \qquad (57)$$

Preuve. Voir là encore la section 5.5. □

Preuve du théorème 5.17. La stratégie consiste naturellement à adapter les arguments de la preuve du cas uni-paramétrique (c'est-à-dire la preuve du théorème 4.7).

Existence. On s'appuie sur un procédé itératif de type “schéma de Picard”. On considère ainsi la suite de champs stochastiques $u^{(n)}$ définie par $u_t^{(0)}(x) := \Phi(x)$ et

$$u_t^{(n+1)}(x) := \int_{\mathbb{R}} G_t(x-y)\Phi(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma\big(u_s^{(n)}(y)\big)\, \dot{W}(ds\, dy)\ . \qquad (58)$$

La combinaison des lemmes 5.19 et 5.20 nous garantit que cette suite est bien définie au sein de la classe des champs adaptés et (p.s.) continus.

Posons alors

$$H_t^{(n)}(x) := u_t^{(n+1)}(x) - u_t^{(n)}(x)\ .$$

On a par définition

$$H_t^{(n)}(x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\big[\sigma\big(u_s^{(n)}(y)\big) - \sigma\big(u_s^{(n-1)}(y)\big)\big]\, \dot{W}(ds\, dy)\,,$$

et par conséquent, en utilisant successivement l'isométrie d'Itô (50) et la condition de régularité (54), on obtient

$$\mathbb{E}\big[\big|H_t^{(n)}(x)\big|^2\big] \leq c_\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)^2 \mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n-1)}(y)\big|^2\big]\, ds\, dy\,.$$

En posant $h_t^{(n)} := \sup_{0\leq s\leq t} \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n)}(x)\big|^2\big]$ et en reprenant les majorations menant à (56), on a donc

$$\mathbb{E}\big[\big|H_t^{(n)}(x)\big|^2\big] \leq c_\sigma^2 \int_0^t h_s^{(n-1)} \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)^2\, dy\, ds \leq c_1\, c_\sigma^2 \int_0^t \frac{h_s^{(n-1)}}{\sqrt{t-s}}\, ds\,,$$

pour une certaine constante $c_1 > 0$. En utilisant à présent l'inégalité de Hölder, on déduit

$$\mathbb{E}\big[\big|H_t^{(n)}(x)\big|^2\big] \leq c_1\, c_\sigma^2 \bigg(\int_0^t \frac{ds}{|t-s|^{3/4}}\, ds\bigg)^{2/3} \bigg(\int_0^t (h_s^{(n-1)})^3\, ds\bigg)^{1/3}$$

et ainsi

$$(h_t^{(n)})^3 \leq c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^6 \int_0^t (h_s^{(n-1)})^3\, ds\,,$$

pour une certaine constante $c_2 > 0$. En itérant le procédé, il vient

$$(h_t^{(n)})^3 \leq \Big(c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^6\Big)^n \int_{0\leq s_1<\ldots<s_n<t} (h_{s_1}^{(0)})^3\, ds_1 \ldots ds_n\ .$$

Or il est facile de constater (**exercice**) que

$$\mathbb{E}\big[|H_s^{(0)}(x)|^2\big] \leq c_3\big\{\|\Phi\|_\infty^2 + T^{1/2} c_\sigma^2\big\}\,,$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$, et où $\|\Phi\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi(x)|$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}(h_t^{(n)})^3 &\leq \Big(c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^6\Big)^n \Big(c_3\big\{\|\Phi\|_\infty^2 + T^{1/2}c_\sigma^2\big\}\Big)^3 \int_{0\leq s_1<\ldots<s_n<t} ds_1 \ldots ds_n \\ &\leq \frac{\Big(c_2\, T^{3/2}\, c_\sigma^6\Big)^n}{n!} \Big(c_3\big\{\|\Phi\|_\infty^2 + T^{1/2}c_\sigma^2\big\}\Big)^3\,,\end{aligned}$$

ce qui garantit la convergence $\sum_{n\geq 0} (h_T^{(n)})^{1/2} < \infty$, autrement dit la convergence

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big(\mathbb{E}\Big[\big|u_t^{(n+1)}(x) - u_t^{(n)}(x)\big|^2\Big]\Big)^{1/2} < \infty\ .$$

Par conséquent, la suite $(u^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}; L^2(\Omega))$: elle converge donc dans cet espace, vers une limite que nous noterons u.

En associant cette propriété de convergence à l'isométrie d'Itô (50), on montre aisément (**exercice**) que

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma\big(u_s^{(n)}(y)\big)\, \dot{W}(ds\, dy) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\sigma\big(u_s(y)\big)\, \dot{W}(ds\, dy) \quad \text{dans } L^2(\Omega)\,.\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de faire tendre n vers l'infini dans la relation (58) pour obtenir le résultat escompté: le champ u est bien solution de l'équation (51).

Unicité. Soient u, v deux solutions de l'équation (de même condition initiale Φ) et notons

$$H_t(x) := u_t(x) - v_t(x)\,.$$

On a par définition

$$H_t(x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)\big[\sigma(u_s(y)) - \sigma(v_s(y))\big]\, \dot{W}(ds\, dy)\,.$$

En utilisant successivement l'isométrie d'Itô (50) et la condition de régularité (54) (comme précédemment), on déduit

$$\mathbb{E}\big[\big|H_t(x)\big|^2\big] \leq c_\sigma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(x-y)^2 \mathbb{E}\big[\big|H_s(y)\big|^2\big]\, ds\, dy\,.$$

Par suite, si $h_t := \sup_{0\leq s\leq t} \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\big|H_s(x)\big|^2\big]$, on obtient, avec les mêmes arguments que ci-dessus,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\big|H_t(x)\big|^2\big] \\
&\leq c_\sigma^2 \int_0^t h_s \int_{\mathbb{R}} G_{t-s}(y)^2\, dy\, ds \\
&\leq c_1\, c_\sigma^2 \int_0^t \frac{h_s}{\sqrt{t-s}}\, ds \;\leq\; c_1\, c_\sigma^2 \Big(\int_0^t \frac{ds}{|t-s|^{3/4}} \Big)^{2/3} \Big(\int_0^t (h_s)^3\, ds \Big)^{1/3},
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
0 \leq h_t^3 &\leq c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^2 \int_0^t (h_s)^3\, ds \\
&\leq (c_2\, T^{1/2}\, c_\sigma^2)^m \int_{0<s_1<\cdots<s_m<t} (h_{s_1})^3\, ds_1 \ldots ds_m \\
&\leq \frac{(c_2\, T^{3/2}\, c_\sigma^2)^m}{m!} h_T^3\,.
\end{aligned}$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient $h_t = 0$, ce qui permet d'affirmer que pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\big(u_t(x) = v_t(x)\big) = 1\,.$$

Les champs u et v étant en outre continus, on en déduit qu'ils sont indistinguables l'un de l'autre (d'après le résultat de la proposition 3.9). $\square$

L'application des lemmes 5.19 et 5.20 à l'équation (53) (que nous venons de résoudre) conduit immédiatement au résultat de régularité trajectorielle suivant:

Corollaire 5.21. *Supposons les hypothèses du théorème 5.17 vérifiées, et notons* $\{u_t(x),\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ *la solution de l'équation (51).*

Alors il existe une modification continue de u *sur* $[0,T] \times \mathbb{R}$ *(que nous noterons encore* u*) telle que, pour tout* $T_0 \in (0,T]$ *et tout intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *borné, on a presque sûrement*

$$\sup_{(s,x)\neq(t,y)\in[T_0,T]\times I} \frac{|u_t(y) - u_s(x)|}{|t-s|^\gamma + |y-x|^\beta} \;<\; \infty\,, \tag{59}$$

pour tous $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ *et* $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

5.5. **Fin de la preuve des lemmes 5.19 et 5.20.**

La preuve du lemme 5.19 va nous donner l'occasion de mettre en œuvre un outil très puissant de l'analyse stochastique: le *critère de Kolmogorov*. L'énoncé de la version classique (c'est-à-dire uni-paramétrique) de ce résultat peut être trouvé dans [4, Theorem 1.8]. Nous nous appuierons ici sur l'extension multi-paramétrique suivante (empruntée à [2, Theorem 1.4.1]):

Lemme 5.22 (Critère de Kolmogorov multi-paramétrique)**.** *Soit $d \geq 1$, A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, et soit un champ stochastique*

$$\{X(x_0,\ldots,x_d),\, (x_0,\ldots,x_d) \in A\}\,.$$

Supposons que pour tout sous-ensemble compact I de A de la forme $I := [a_0,b_0] \times \ldots \times [a_d,b_d]$ (avec $a_i < b_i \in \mathbb{R}$), et pour tout $p \geq 2$, il existe une constante $c_{p,I}$ telle que pour tous $(x_0,\ldots,x_d),(y_0,\ldots,y_d) \in I$,

$$\mathbb{E}\Big[\big|X(y_0,y_1,\ldots,y_d) - X(x_0,x_1,\ldots,x_d)\big|^p\Big] \leq c_{p,I} \sum_{i=0}^{d} |y_i - x_i|^{\lambda_i p}\,,$$

pour certains coefficients $0 < \lambda_i < 1$.

Alors il existe une modification continue $\widetilde{X}$ de X sur A telle que pour tout $I := [a_0,b_0] \times \ldots \times [a_d,b_d] \subset A$ (avec $a_i < b_i \in \mathbb{R}$), on a (p.s.)

$$\sup_{(x_0,\ldots,x_d)\neq(y_0,\ldots,y_d)\in I} \frac{|\widetilde{X}(y_0,y_1,\ldots,y_d) - \widetilde{X}(x_0,x_1,\ldots,x_d)|}{|y_0-x_0|^{\gamma_0} + \cdots + |y_d - x_d|^{\gamma_d}} \;<\; \infty\,,$$

pour tous $0 < \gamma_i < \lambda_i$.

Exercice 5.23. *Utiliser le critère de Kolmogorov pour montrer l'existence d'une modification continue du champ brownien espace-temps, autrement dit pour montrer que si $W : ([0,T] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un champ gaussien centré et de fonction de covariance donnée par (31), alors il existe une modification continue de ce champ.*

Soit $I := [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_d,b_d]$ (avec $a_i < b_i \in \mathbb{R}$) et $(s,x),(t,y) \in [0,T] \times I$. Observons d'abord que, comme le champ W est gaussien, la variable $W_t(y) - W_s(x)$ est gaussienne, et par conséquent, pour tout $p \geq 2$,

$$\mathbb{E}\Big[\big|W_t(y) - W_s(x)\big|^p\Big] \leq c_p\, \mathbb{E}\Big[\big|W_t(y) - W_s(x)\big|^2\Big]^{\frac{p}{2}}\,, \tag{60}$$

pour une certaine constante $c_p > 0$ qui ne dépend que de p.

Ensuite, grâce à (31), on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\big|W_t(y) - W_s(x)\big|^2\Big]\\
&= \mathbb{E}[W_t(y)^2] - 2\mathbb{E}[W_t(y)W_s(x)] + \mathbb{E}[W_s(x)^2]\\
&= t\prod_{i=1}^{d} R(y_i,y_i) - 2s\prod_{i=1}^{d} R(x_i,y_i) + s\prod_{i=1}^{d} R(x_i,x_i)\\
&= (t-s)\prod_{i=1}^{d} R(y_i,y_i)\\
&\qquad + s\left\{\left[\prod_{i=1}^{d} R(y_i,y_i) - \prod_{i=1}^{d} R(x_i,y_i)\right] + \left[\prod_{i=1}^{d} R(x_i,x_i) - \prod_{i=1}^{d} R(x_i,y_i)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{61}$$

À ce stade, on a d'une part

$$(t-s)\prod_{i=1}^{d} R(y_i,y_i) = (t-s)\prod_{i=1}^{d} |y_i| \leq c_I\,|t-s| \ .$$

D'autre part, si par exemple $d=2$, on a

$$\begin{aligned} & R(y_1,y_1)R(y_2,y_2) - R(x_1,y_1)R(x_2,y_2) \\ & = \big[R(y_1,y_1) - R(x_1,y_1)\big]R(y_2,y_2) + R(x_1,y_1)\big[R(y_2,y_2) - R(x_2,y_2)\big] \ , \end{aligned}$$

avec

$$|R(y_i,y_i) - R(x_i,y_i)| = \left|\frac{1}{2}(|y_i| - |x_i|) + \frac{1}{2}|y_i - x_i|\right| \leq |y_i - x_i| \ .$$

En revenant à (61), on déduit aisément

$$\mathbb{E}\Big[\big|W_t(y) - W_s(x)\big|^2\Big] \leq c_I\big\{|t-s| + \sum_{i=1}^{d} |y_i - x_i|\big\} \ ,$$

et donc, par (60),

$$\mathbb{E}\Big[\big|W_t(y) - W_s(x)\big|^p\Big] \leq c_{p,I}\big\{|t-s|^{\frac{p}{2}} + \sum_{i=1}^{d} |y_i - x_i|^{\frac{p}{2}}\big\} \ .$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le critère de Kolmogorov (Lemme 5.22) pour garantir l'existence d'une modification de W (encore notée W) telle que, pour tout $I=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$, tout $0<\gamma<\frac{1}{2}$ et tous $0<\beta_i<\frac{1}{2}$ $(i=1,\ldots,d)$, on a (p.s.)

$$\sup_{(s,x)\neq(t,y)\in[0,T]\times I} \frac{|W_t(y) - W_s(x)|}{|t-s|^{\gamma} + |y_1 - x_1|^{\beta_1} + \ldots + |y_d - x_d|^{\beta_d}} \ < \ \infty \ .$$

Cette modification est en particulier continue (p.s.).

□

Fin de la preuve du lemme 5.19. Pour être en mesure d'appliquer le critère de Kolmogorov ci-dessus, il s'agit donc d'estimer le moment

$$\mathbb{E}\big[|w_t(y) - w_s(x)|^p\big] \ ,$$

pour tous $p\geq 2$ et $(t,y),(s,x)\in[0,T]\times I$, où I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ fixé.

Dans ce qui suit, nous noterons c_p (resp. $c_{p,\varepsilon}, c_{p,\varepsilon,T}, \ldots$) toute constante dépendant seulement du paramètre p (resp. $(p,\varepsilon),(p,\varepsilon,T),\ldots$). Notons par ailleurs

$$M := \sup_{(s,y,\omega)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega} |v_s(y)(\omega)| \ < \ \infty \, .$$

Nous nous appuierons sur la décomposition (immédiate): pour $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x, y \in I$,

$$\begin{aligned}
w_t(y) - w_s(x) &= \int_s^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-r}(y-z) v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz) \\
&\quad + \int_0^s \int_{\mathbb{R}} \big[G_{t-r}(y-z) - G_{s-r}(y-z)\big] v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz) \\
&\quad + \int_0^s \int_{\mathbb{R}} \big[G_{s-r}(y-z) - G_{s-r}(x-z)\big] v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz) \\
&=: \sum_{\ell=1}^{3} \mathcal{J}^{(\ell)}((s,x),(t,y)) \,. \qquad (62)
\end{aligned}$$

Estimation de $\mathcal{J}^{(1)}((s,x),(t,y))$. Appliquons ici l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, sous la forme présentée dans le corollaire 5.15. Grâce à ce dernier résultat, on sait en effet que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big| \int_s^t \int_{\mathbb{R}} G_{t-r}(y-z) v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz)\Big|^p\Big] \\
&\leq c_p\, \mathbb{E}\Big[\Big| \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-r}(y-z) v_r(z)\big|^2\, dr\, dz\Big|^{p/2}\Big] \\
&\leq c_p M^p \Big(\int_s^t \int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-r}(y-z)\big|^2\, dr\, dz\Big)^{p/2} \leq c_p M^p \Big(\int_s^t \frac{dr}{\sqrt{t-r}}\Big)^{p/2} ,
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{J}^{(1)}((s,x),(t,y))\Big|^p\Big] \leq c_{p,M}\, |t-s|^{p/4} \,. \qquad (63)$$

Estimation de $\mathcal{J}^{(2)}((s,x),(t,y))$. En utilisant le corollaire 5.15 (comme précédemment), on a d'abord

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big| \int_0^s \int_{\mathbb{R}} \big[G_{t-r}(y-z) - G_{s-r}(y-z)\big] v_r(z)\, \dot{W}(dr\, dz)\Big|^p\Big] \\
&\leq c_{p,M} \Big(\int_0^s \int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-r}(z) - G_{s-r}(z)\big|^2\, dr\, dz\Big)^{p/2} . \qquad (64)
\end{aligned}$$

Utilisons ensuite le théorème de Plancherel: en notant $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier en espace ($\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath \xi x} f(x)\, dx$), on a, pour tout $r \in (0,s)$ et tout $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \big|G_{t-r}(z) - G_{s-r}(z)\big|^2\, dz \\
&= c \int_{\mathbb{R}} \big|\mathcal{F}(G_{t-r})(\xi) - \mathcal{F}(G_{s-r})(\xi)\big|^2\, d\xi \\
&= c \int_{\mathbb{R}} \big|e^{-\xi^2 (t-r)} - e^{-\xi^2 (s-r)}\big|^2\, d\xi \\
&= c \int_{\mathbb{R}} \big|e^{-\xi^2 (s-r)}\big|^2 \big|e^{-\xi^2 (t-s)} - 1\big|^2\, d\xi \\
&\leq c\, |t-s|^{\frac{1}{2} - 2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \big|e^{-\xi^2 (s-r)}\big|^2 |\xi|^{1-4\varepsilon}\, d\xi \leq c_\varepsilon\, \frac{|t-s|^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}}{|s-r|^{1-2\varepsilon}} \,.
\end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à (64), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{J}^{(2)}((s,x),(t,y))\Big|^p\Big] &\leq c_{p,M,\varepsilon}\,|t-s|^{(\frac14-\varepsilon)p}\Big(\int_0^s \frac{dr}{|s-r|^{1-2\varepsilon}}\Big)^{p/2}\\ &\leq c_{p,M,\varepsilon}|t-s|^{(\frac14-\varepsilon)p}s^{\varepsilon p}\,,\end{aligned}$$

et donc, finalement,

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{J}^{(2)}((s,x),(t,y))\Big|^p\Big] \leq c_{p,M,\varepsilon,T}|t-s|^{(\frac14-\varepsilon)p}\,, \tag{65}$$

pour tout $\varepsilon\in(0,\frac14)$.

Estimation de $\mathcal{J}^{(3)}((s,x),(t,y))$. À nouveau, commençons par écrire

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^s\int_{\mathbb{R}}[G_{s-r}(y-z)-G_{s-r}(x-z)]v_r(z)\,\dot W(dr\,dz)\Big|^p\Big]\\ &\leq c_{p,M}\Big(\int_0^s\int_{\mathbb{R}}\big|G_{s-r}(y-z)-G_{s-r}(x-z)\big|^2\,dr\,dz\Big)^{p/2}.\end{aligned} \tag{66}$$

Ensuite, par le théorème de Plancherel, on a, pour tout $\varepsilon\in(0,\frac12)$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\big|G_{s-r}(y-z)-G_{s-r}(x-z)\big|^2\,dz\\ &=c\int_{\mathbb{R}}\big|e^{\imath\xi y}-e^{\imath\xi x}\big|^2\big|e^{-\xi^2(s-r)}\big|^2\,d\xi\\ &\leq c\,|y-x|^{1-2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}|\xi|^{1-2\varepsilon}e^{-2\xi^2(s-r)}\,d\xi\leq c_\varepsilon\,\frac{|y-x|^{1-2\varepsilon}}{|s-r|^{1-\varepsilon}}\,,\end{aligned}$$

d'où, en revenant à (66),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\mathcal{J}^{(3)}((s,x),(t,y))\Big|^p\Big] &\leq c_{p,M,\varepsilon}|y-x|^{(\frac12-\varepsilon)p}\Big(\int_0^s\frac{dr}{|s-r|^{1-\varepsilon}}\Big)^{p/2}\\ &\leq c_{p,M,\varepsilon,T}|y-x|^{(\frac12-\varepsilon)p}\,.\end{aligned} \tag{67}$$

Conclusion. En mettant bout à bout les bornes (63), (65) et (67) (tout en gardant la décomposition (62) à l'esprit), on obtient, pour tous $p\geq1$, $\varepsilon\in(0,\frac14)$ et $(t,y),(s,x)\in[0,T]\times I$,

$$\mathbb{E}\Big[\big|u_t(y)-u_s(x)\big|^p\Big]\leq c_{p,M,\Phi,T,\varepsilon}\Big\{|t-s|^{p(\frac14-\varepsilon)}+|y-x|^{p(\frac12-\varepsilon)}\Big\}.$$

Le résultat escompté découle à présent immédiatement du critère de Kolmogorov multi-paramétrique (lemme 5.22). □

Preuve du lemme 5.20. Établissons d'abord (57), pour tout $T_0\in(0,T]$ fixé. À cette fin, écrivons naturellement

$$\widetilde{w}_t(y)-\widetilde{w}_s(x)=\int_{\mathbb{R}}\big[G_t(y-z)-G_s(x-z)\big]\Phi(z)\,dz\,,$$

puis

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}} [G_t(y-z)-G_s(x-z)]\,\Phi(z)\,dz\Big| \\
&\leq \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\Big(\int_{\mathbb{R}} \big|G_t(y-z)-G_s(x-z)\big|^2\,dz\Big)^{1/2} \\
&\leq \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R})}\bigg[\Big(\int_{\mathbb{R}} \big|G_t(z)-G_s(z)\big|^2\,dz\Big)^{1/2}+\Big(\int_{\mathbb{R}} \big|G_s(y-z)-G_s(x-z)\big|^2\,dz\Big)^{1/2}\bigg]. \qquad (68)
\end{aligned}$$

Pour la première intégrale, on utilise les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 5.19 (voir l'estimation de $\mathcal{J}^{(2)}$) pour affirmer que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big|G_t(z)-G_s(z)\big|^2\,dz &= c\int_{\mathbb{R}} |e^{-\xi^2 s}|^2|e^{-\xi^2(t-s)}-1|^2\,d\xi \\
&\leq c\,|t-s|^2\int_{\mathbb{R}} |e^{-\xi^2 s}|^2|\xi|^4\,d\xi \leq c\,\frac{|t-s|^2}{s^{5/2}} \leq c\,T_0^{-5/2}|t-s|^2\,.
\end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, on utilise là encore les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 5.19 (voir l'estimation de $\mathcal{J}^{(3)}$) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big|G_s(y-z)-G_s(x-z)\big|^2\,dz &= c\int_{\mathbb{R}} \big|e^{\imath\xi y}-e^{\imath\xi x}\big|^2|e^{-\xi^2 s}|^2\,d\xi \\
&\leq c\,|y-x|^2\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 e^{-2\xi^2 s}\,d\xi \leq c\,\frac{|y-x|^2}{s^{3/2}} \leq c\,T_0^{-3/2}|y-x|^2\,.
\end{aligned}$$

En revenant à (68), on a ainsi montré le résultat escompté, à savoir: pour tout $T_0\in(0,T]$ et tous $(s,x),(t,y)\in(T_0,T]\times\mathbb{R}$,

$$\big|\widetilde{w}_t(y)-\widetilde{w}_s(x)\big| \leq c_{\Phi,T_0}\big\{|t-s|+|y-x|\big\}\,.$$

Ce résultat garantit en particulier la continuité de $\widetilde{w}$ en tout point $(s,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}$. Quant à la continuité de $\widetilde{w}$ au point $(0,x)$ (pour $x\in\mathbb{R}$), il suffit d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} G_t(y-z)\Phi(z)\,dz-\Phi(x)=\Big[\int_{\mathbb{R}} G_t(y-z)\Phi(z)\,dz-\Phi(y)\Big]+\big[\Phi(y)-\Phi(x)\big]\,,$$

puis d'appliquer (40) (la fonction Φ étant supposée continue bornée). □

5.6. **Remarque sur les dimensions spatiales $d\geq 2$.**

Un examen rapide de la preuve du théorème 5.17 (voir par exemple (56)) montre que l'un des ingrédients-clés de l'analyse dans ce chapitre (relative à l'équation (51), c'est-à-dire l'équation de la chaleur sur $[0,T]\times\mathbb{R}$, en présence d'un champ brownien espace-temps) est l'intégrabilité espace-temps du carré de la solution fondamentale, autrement dit le fait que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |G_s(x)|^2\,ds\,dx \ < \ \infty\ .$$

Malheureusement, en dimension (spatiale) $d\geq 2$, cette propriété n'est plus vérifiée. En effet, pour $d\geq 2$, la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (sur $\mathbb{R}^d$) est donnée par

$$G^{(d)}_t(x):=\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big)\mathbf{1}_{\{t>0\}}\,,$$

et l'on a alors

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left|G_s^{(d)}(x)\right|^2 ds\, dx = \int_0^t \frac{ds}{(4\pi s)^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \exp\left(- \frac{|x|^2}{2s} \right) = c_d \int_0^t \frac{ds}{s^{d/2}} = \infty \, .$$

Ce constat nous empêche ainsi d'étendre l'analyse précédente en dimension spatiale $d \geq 2$. Une façon de surmonter (ou plutôt de contourner) le problème est d'envisager un modèle dans lequel le champ W, tout en restant gaussien et "brownien en temps", présenterait une régularité spatiale "supérieure à celle du champ brownien espace-temps". Nous illustrerons cette stratégie dans la section suivante, à travers la considération de l'équation des ondes en dimension $d \geq 2$.

6. L'Équation des ondes stochastique

On s'intéresse dans cette section à l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u + \sigma(u) \dfrac{\partial^3 W}{\partial t \partial x_1 \partial x_2} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}^2, \\ u_0(.) = \Phi \ , \ \Big(\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big)_0(.) = \Psi \ , \end{cases} \tag{69}$$

où $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $W : ([0,T] \times \mathbb{R}^2) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un processus stochastique dont nous préciserons la nature exacte ultérieurement.

Comme dans la section précédente, interrogeons nous en premier lieu sur l'interprétation de ce modèle.

6.1. **Heuristique: formulation mild de l'équation des ondes.** Considérons pour l'instant une équation de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u + f(.,u) \ , \quad t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}^2, \\ u_0(.) = \Phi \ , \ \Big(\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big)_0(.) = \Psi \ , \end{cases} \tag{70}$$

où $f : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une *fonction bien définie* et la notation dans (70) signifie $f(.,u)_t(x) := f(t,x,u_t(x))$.

Cherchons maintenant à nous inspirer de la procédure utilisée dans la section 5.1 afin de réécrire l'équation sous une forme "intégrale" (ou "mild") qui facilitera son extension au cas où

$$f(.,u) = \sigma(u) \frac{\partial^3 W}{\partial t \partial x_1 \partial x_2} \ . \tag{71}$$

L'équation linéaire sous-jacente correspond ici à l'équation des ondes standard

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} = \Delta_x \mathcal{G} \ , \tag{72}$$

dont nous allons exploiter la solution fondamentale. Dans ce cadre hyperbolique, la solution fondamentale (avec conditions nulles en $t = 0$) est définie comme la distribution $\mathcal{G} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ telle que, pour toute fonction-test $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la solution (au sens des distributions) de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_x v + \varphi \ , \quad v(0,x) = (\partial_t v)(0,x) = 0 \ ,$$

est donnée par la convolution (espace-temps) $v := \mathcal{G} * \varphi$.

Cette solution fondamentale est en fait explicitement donnée par la fonction

$$\mathcal{G}_t(x) := \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} \mathbf{1}_{\{|x|<t\}} \ . \tag{73}$$

Les propriétés (39)-(40) laissent alors place aux résultats suivants:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2}(t,x) = (\Delta_x \mathcal{G})(t,x) \quad \text{pour presque tous } t, x \, , \tag{74}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y) \psi(y) \, dy \xrightarrow{t \to 0} 0 \ , \tag{75}$$

$$\text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\varphi(y)\,dy\Big)_t \xrightarrow{t\to 0} \varphi(x) , \tag{76}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, toute fonction $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue bornée, et toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, bornée, et à différentielle continue bornée.

Exercice 6.1. *Vérifier (74), (75) et (76). Les formules (75) et (76) peuvent être facilement vérifiées à partir de (73), en utilisant l'identité*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{|z|<1\}} \frac{dz}{\sqrt{1-|z|^2}} = 2\pi .$$

Proposition 6.2. *Si u est solution de (70) au sens classique (c'est-à-dire u est $\mathcal{C}^2$ en temps, $\mathcal{C}^2$ en espace, et satisfait (70) pour tout (t,x)), et si*

$$\max\Big(\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^2} |u_t(x)|, \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^2} \big|(\partial_t u)_t(x)\big|, \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^2} \big|(\partial_x u)_t(x)\big|\Big) < \infty , \tag{77}$$

alors u est aussi solution de l'équation suivante (appelée forme mild de (70)*): pour tous $t\in[0,T]$ et $x \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned} u_t(x) =& \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Phi(y)\,dy\Big)_t + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Psi(y)\,dy \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{t-s}(x-y) f(s,y,u_s(y))\,ds\,dy . \end{aligned} \tag{78}$$

Comme dans la section 5.1, la formulation (78) laisse apparaître une intégrale en temps et en espace, et va permettre d'étendre l'interprétation de l'équation à la situation donnée par (71).

Preuve de la proposition 6.2. Pour simplifier la présentation, considérons, pour $\eta > 0$, l'approximation $\mathcal{G}^\eta$ de $\mathcal{G}$ donnée par

$$\mathcal{G}^\eta_t(x) := \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}} \mathbf{1}_{\{t^2-|x|^2>\eta^2\}} .$$

A $\eta > 0$ fixé, $\mathcal{G}^\eta$ satisfait toujours (74), mais cette fonction est en outre telle que pour tout $k \geq 0$ et tout $t > 0$, $(\partial_t^k \mathcal{G}^\eta)_t \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

A présent, soit u une solution classique vérifiant (77). On a alors, pour tous $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > \eta > 0$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \Big[(\partial_t \mathcal{G}^\eta)_\varepsilon(x-y)u_t(y) + \mathcal{G}^\eta_\varepsilon(x-y)(\partial_t u)_t(y)\Big]\,dy \\ &\qquad - \int_{\mathbb{R}^2} \Big[(\partial_t \mathcal{G}^\eta)_{t+\varepsilon}(x-y)\Phi(y) + \mathcal{G}^\eta_{t+\varepsilon}(x-y)\Psi(y)\Big]\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t \partial_s\Big[(\partial_t \mathcal{G}^\eta)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y) + \mathcal{G}^\eta_{t-s+\varepsilon}(x-y)(\partial_t u)_s(y)\Big]_s\,ds\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t \Big[-(\partial_t^2 \mathcal{G}^\eta)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y) + \mathcal{G}^\eta_{t-s+\varepsilon}(x-y)(\partial_t^2 u)_s(y)\Big]\,ds\,dy \\ &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} \Big[-(\partial_t^2 \mathcal{G}^\eta)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y) + \mathcal{G}^\eta_{t-s+\varepsilon}(x-y)(\Delta_x u)_s(y)\Big]\,dy\,ds \\ &\qquad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}^\eta_{t-s+\varepsilon}(x-y) f(s,y,u_s(y))\,dy\,ds . \end{aligned} \tag{79}$$

En intégrant par parties, on obtient ensuite

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}^\eta_{t-s+\varepsilon}(x-y)\big(\Delta_x u\big)_s(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \big(\Delta_x \mathcal{G}^\eta\big)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y)\,dy\,,$$

d'où, par (74),

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Big[-\big(\partial_t^2 \mathcal{G}^\eta\big)_{t-s+\varepsilon}(x-y)u_s(y) + \mathcal{G}^\eta_{t-s+\varepsilon}(x-y)\big(\Delta_x u\big)_s(y)\Big]\,dy\,ds = 0\,.$$

En faisant finalement tendre η, puis ε, vers 0 dans (79), et en utilisant les propriétés (75)-(76), on déduit facilement (78). □

6.2. Problème en présence d'un champ brownien espace-temps.

Considérons un champ brownien espace-temps W (au sens de la définition 5.13) et supposons f de la forme (71). L'intégrale impliquée dans l'équation (78) devient alors (formellement)

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{t-s}(x-y)\sigma(u_s(y))\,\frac{\partial^3 W}{\partial s \partial y_1 \partial y_2}(s,y)\,ds\,dy\,,$$

et l'on serait a priori tentés de vouloir interpréter cette intégrale comme une intégrale d'Itô

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{t-s}(x-y)\sigma(u_s(y))\,\dot{W}(ds\,dy)\,,$$

au sens de la définition 5.13.

Malheureusement, les conditions d'existence mises en évidence dans cette dernière définition (et plus exactement la condition d'intégrabilité (iii) du lemme 5.12) ne sont généralement pas satisfaites par l'intégrant considéré ici. En effet, si σ est par exemple constante (le cas le plus élémentaire), on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \big|\mathcal{G}_s(y)\big|^2\,ds\,dy &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{|y|<s\}}\frac{ds\,dy}{(s^2-|y|^2)}\\ &= 2\pi \int_0^t \int_0^s \frac{r}{s^2-r^2}\,dr\,ds = \pi t \int_0^1 \frac{d\rho}{1-\rho} \;=\; \infty\,.\end{aligned}$$

La situation est ici comparable à celle décrite dans la section 5.6 pour l'équation de la chaleur stochastique en dimension (spatiale) $d \geq 2$. Comme nous l'évoquions alors, nous allons contourner le problème à travers la considération d'une classe spécifique de bruits "moins irréguliers" (en espace) que le bruit blanc espace-temps: les champs browniens homogènes en espace.

6.3. Champ brownien homogène en espace.

Définition 6.3. *Une fonction positive $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est dite* définie positive *si: (i) $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$; (ii) la fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$; (iii) on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \varphi(x)\varphi(y)f(x-y)\,dx\,dy \geq 0 \tag{80}$$

pour toute fonction réelle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Remarque 6.4. Si les conditions (ii) et (iii) sont vérifiées, alors (80) est également vraie pour toute fonction φ bornée à support compact.

Exemple 6.5. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction positive telle que, pour toute $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = f(-x)$, et, pour presque tous $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{f}(\xi) \geq 0$, alors f est une fonction définie positive.*

En effet, comme f et $\widehat{f}$ sont réelles (par hypothèse), on est en droit d'écrire, pour toute fonction réelle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \varphi(x)\varphi(y) f(x-y)\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\varphi * \tilde{\varphi})(x)\,dx \\ &= c\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\widehat{(\varphi * \tilde{\varphi})}(\xi)\,d\xi = c\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\big|\widehat{\varphi}(\xi)\big|^2\,d\xi \;\geq\; 0\,, \qquad (81)\end{aligned}$$

où l'on a noté $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$, et où $c > 0$ désigne une constante.

En s'appuyant sur cette observation, on montre par exemple que les deux fonctions suivantes sont définies positives:

(i) $f(x) := e^{-a|x|^2}$, avec $a > 0$. On rappelle en effet que $\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-|\xi|^2/4a}$.

(ii) $f(x) := e^{-a|x|}$, avec $a > 0$. On a en effet

$$\hat{f}(\xi) = 2^d \pi^{(d-1)/2}\,\Gamma\big((d+1)/2\big)\frac{a}{(a^2+|\xi|^2)^{(d+1)/2}} \qquad \left(\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\right),$$

ce que l'on peut déduire (exercice) de l'exemple (i) en utilisant la représentation

$$e^{-a|x|} = \int_0^\infty ds\,\frac{a}{(\pi s)^{1/2}} e^{-a^2 s} e^{-|x|^2/4s}\,. \qquad (82)$$

Définition 6.6. *Une fonction de covariance $C : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite* homogène *s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie positive telle que, pour tous ensembles $A := [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}] \times \ldots \times [a_1^{(d)}, a_2^{(d)}]$ et $B := [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}] \times \ldots \times [b_1^{(d)}, b_2^{(d)}]$, on a*

$$\int_{A\times B} \frac{\partial^{2d} C}{\partial x_1 \cdots \partial x_d \partial y_1 \cdots \partial y_d}(x,y)\,dx\,dy = \int_{A\times B} f(x-y)\,dx\,dy\,, \qquad (83)$$

en observant que le membre de gauche est systématiquement bien défini (par intégrations successives), même si C est irrégulière. Par exemple, pour $d = 1$,

$$\int_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(x,y)\,dx\,dy = C(a_2,b_2) - C(a_2,b_1) - C(a_1,b_2) + C(a_1,b_1)\,.$$

Définition 6.7. *On appelle* champ brownien homogène en espace *(sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$) tout processus gaussien $W^{(C)} : ([0,T] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ centré dont la covariance est donnée par la formule*

$$\mathbb{E}\big[W_s^{(C)}(x) W_t^{(C)}(y)\big] = \inf(s,t) C(x,y)\ , \quad s,t \in [0,T],\ x,y \in \mathbb{R}^d\,, \qquad (84)$$

avec C une fonction de covariance homogène sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 6.8. *Pour toute fonction définie positive $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, il existe un champ brownien homogène en espace $W^{(f)}$ dont la covariance spatiale C vérifie (83). On dira que $W^{(f)}$ est un champ brownien homogène en espace* associé à f.

Preuve (pour $d = 1$). Il s'agit donc de montrer qu'il existe une fonction de covariance $C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (83). On pose en fait simplement, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$C(a,b) := \int_{[0,a]\times[0,b]} dxdy\, f(x-y)\,,$$

en utilisant la convention usuelle $\int_{[0,a]} dx := -\int_{[a,0]} dx$ si $a \leq 0$.

Cette fonction C est bien symétrique (puisque f l'est). Ensuite, pour tous $\alpha_i, a_i \in \mathbb{R}$ et en posant $\varphi(x) := \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{[0,a_i]}(x)$ (avec $\mathbf{1}_{[0,a_i]} := -\mathbf{1}_{[a_i,0]}$ si $a_i \leq 0$), on a, grâce à (80),

$$\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j C(a_i, a_j) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} dxdy\, \varphi(x)\varphi(y) f(x-y) \geq 0\,,$$

et donc C est définie positive (au sens des fonctions définies sur un espace produit).

Enfin, pour tous $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$,

$$\begin{aligned}
&\int_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx\, dy \\
&= C(a_2,b_2) - C(a_2,b_1) - C(a_1,b_2) + C(a_1,b_1) \\
&= \Big(\int_{[0,a_2]\times[0,b_2]} \cdots - \int_{[0,a_2]\times[0,b_1]} \cdots \Big) - \Big(\int_{[0,a_1]\times[0,b_2]} \cdots - \int_{[0,a_1]\times[0,b_1]} \cdots \Big) \\
&= \int_{[0,a_2]\times[b_1,b_2]} \cdots - \int_{[0,a_1]\times[b_1,b_2]} \cdots = \int_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} dxdy\, f(x-y)\,,
\end{aligned}$$

comme souhaité. □

Tentons de justifier (au moins partiellement) l'introduction de ces différents concepts, au-delà du fait que, d'un point de vue technique, leur combinaison permettra par la suite une construction rigoureuse de l'intégrale recherchée.

La considération de la quantité (toujours bien définie!)

$$\int_{A\times B} \frac{\partial^{2d} C}{\partial x_1 \cdots \partial x_d \partial y_1 \cdots \partial y_d}(x,y)\, dx\, dy$$

est en fait directement liée à l'étude des "variations" (au sens généralisé d-dimensionnel) du processus gaussien (disons X) sous-jacent, autrement dit à l'étude des variables

$$X(A) = \int_A \frac{\partial^d X}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}(x)\, dx := \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\ldots+i_d} X(a^{(1)}_{i_1}, \ldots, a^{(d)}_{i_d})\,,$$

qui apparaissaient déjà dans les constructions de la section 5.2 (voir (46)), et que l'on retrouvera par la suite.

En effet, en dérivant (au moins formellement) l'identité

$$\mathbb{E}[X(x)X(y)] = C(x,y)\,,$$

on constate immédiatement que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(A)X(B)] &= \int_{A\times B} \mathbb{E}\Big[\frac{\partial^d X}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}(x) \frac{\partial^d X}{\partial y_1 \cdots \partial y_d}(y)\Big]\, dx\, dy \\
&= \int_{A\times B} \frac{\partial^{2d} C}{\partial x_1 \cdots \partial x_d \partial y_1 \cdots \partial y_d}(x,y)\, dx\, dy\,. \qquad (85)
\end{aligned}$$

Remarque 6.9. A partir du constat ci-dessus, il est facile de voir que la notion d'homogénéité décrite dans la définition 6.6 est étroitement liée aux propriétés de stationarité des "variations" (à nouveau, au sens généralisé d-dimensionnel) du processus gaussien sous-jacent: si $X : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ est le processus gaussien (centré) en question, on a en effet, pour $A := [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}] \times \ldots \times [a_1^{(d)}, a_2^{(d)}]$,

$$\mathbb{E}\big[(X(A))^2\big] = \int_{A\times A} \frac{\partial^{2d} C}{\partial x_1 \cdots \partial x_d \partial y_1 \cdots \partial y_d}(x,y)\,dx\,dy = \int_{A\times A} f(x-y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{[0,a_2^{(1)}-a_1^{(1)}]^2} dx_1 dy_1 \ldots \int_{[0,a_2^{(d)}-a_1^{(d)}]^2} dx_d dy_d\, f(x_1-y_1,\ldots,x_d-y_d)\,,$$

et ainsi la loi de la "variation" $X(A)$ ne dépend que de la différence

$$a_2 - a_1 = (a_2^{(1)} - a_1^{(1)}, \ldots, a_2^{(d)} - a_1^{(d)})\,.$$

Remarque 6.10. Moralement, la covariance brownienne est homogène avec "$f = \delta_0$". On sait en effet, par le lemme 5.9, que si $C(x,y) = \prod_{i=1}^d \inf(x_i, y_i)$, alors

$$\int_{A\times B} \frac{\partial^{2d} C}{\partial x_1 \cdots \partial x_d \partial y_1 \cdots \partial y_d}(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \mathbb{E}\big[W_1(A)W_1(B)\big] = \mu(A\cap B) = \int_{A\times B} \delta_0(x-y)\,dxdy\,.$$

C'est en ce sens que les processus considérés ici sont "moins irréguliers" que le brownien en espace.

Exercice 6.11. *L'exemple de référence (pour une telle covariance homogène C) est celui de la* covariance fractionnaire

$$C_H(x,y) := \prod_{i=1}^d c_{H_i}\big\{|x_i|^{2H_i} + |y_i|^{2H_i} - |x_i - y_i|^{2H_i}\big\} \tag{86}$$

où $H := (H_1, \ldots, H_d) \in (\frac{1}{2}, 1)^d$ est un (jeu de) paramètre(s) donné et $c_{H_i} := (2H_i(2H_i - 1))^{-1}$. On peut en effet vérifier que la fonction C_H satisfait l'identité (83) avec

$$f_H(x) := \prod_{i=1}^d \frac{1}{|x_i|^{2-2H_i}}\,,$$

et, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact, on a bien

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \varphi(x)\varphi(y) f_H(x-y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_H(x)(\varphi * \tilde{\varphi})(x)\,dx$$
$$= c\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_H}(\xi)\widehat{(\varphi*\tilde{\varphi})}(\xi)\,d\xi = c_H \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \prod_{i=1}^d \frac{1}{|\xi_i|^{2H_i-1}}\,d\xi \;\geq\; 0\,,$$

où l'on a noté $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$, et où $c, c_H > 0$ désignent des constantes.

6.4. **Intégration par rapport à un champ brownien homogène en espace.**

Fixons une fonction définie positive $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, et considérons un champ brownien homogène en espace $W^{(f)}$ associé à f, au sens de la proposition 6.8.

Une fois munis de ce processus, nous souhaitons poursuivre le même objectif général que dans la section 4.1.2, à savoir donner sens à l'intégrale

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x) \, \frac{\partial^{d+1} W^{(f)}}{\partial s \partial x_1 \cdots \partial x_d}(s,x) \, ds \, dx \, .$$

La procédure de construction sera en fait en tout point similaire à celle de la section 4.1.2. Notons à nouveau $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ la filtration *en temps* associée à $W^{(f)}$, autrement dit

$$\mathcal{F}_s := \sigma\text{-algèbre engendrée par } \{W_r^{(f)}(x);\, 0 \leq r \leq s, x \in \mathbb{R}^d\} \, .$$

Etape 1: Définition pour un processus simple adapté.

On se contente ici de reproduire l'exemple du brownien espace-temps. Ainsi, on considère là encore, dans un premier temps, l'espace $\mathcal{E}$ des processus *simples adaptés*, soit l'ensemble des processus $H : ([0,T] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ de la forme

$$H_s(x) := \sum_{i,j} \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) \mathbf{1}_{A_j}(x) \, X_i^j \tag{87}$$

où la somme porte sur un nombre fini d'indices i, j, et où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < T$,

$$A_j := [a_1^{(1)}(j), a_2^{(1)}(j)[\times \ldots \times [a_1^{(d)}(j), a_2^{(d)}(j)[\quad \text{avec} \quad a_1^{(k)}(j) < a_2^{(k)}(j) \, ,$$

$$A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset \quad \text{si } j_1 \neq j_2 \, ,$$

et enfin, pour tous i, j, $X_i^j : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une variable aléatoire bornée et* $\mathcal{F}_{t_i}$*-mesurable.*
On pose alors, comme précédemment,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x) \, \frac{\partial^{d+1} W^{(f)}}{\partial s \partial x_1 \cdots \partial x_d}(s,x) \, ds \, dx := \sum_{i,j} X_i^j \{W_{t_{i+1}}^{(f)}(A_j) - W_{t_i}^{(f)}(A_j)\} \, ,$$

où, pour tous $A := [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}] \times \ldots \times [a_1^{(d)}, a_2^{(d)}]$ et $s \in [0,T]$, $W_s^{(f)}(A)$ est défini par la formule

$$W_s^{(f)}(A) = \int_A \frac{\partial^d W_s^{(f)}}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}(x) \, dx := \sum_{i_1, \ldots, i_d = 1}^{2} (-1)^{i_1 + \ldots + i_d} W_s^{(f)}(a_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_d}^{(d)}) \, . \tag{88}$$

Le lemme 5.9 laisse ici place aux quelques propriétés suivantes:

Lemme 6.12. *Avec les notations ci-dessus, on a, pour tous ensembles* $A := [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}] \times \ldots \times [a_1^{(d)}, a_2^{(d)}]$, $B := [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}] \times \ldots \times [b_1^{(d)}, b_2^{(d)}]$, *et pour tous* $0 \leq s \leq t$*:*

(i) $\mathbb{E}[W_s^{(f)}(A) W_t^{(f)}(B)] = s \int_{A \times B} f(x-y) \, dx \, dy$.

(ii) $W_t^{(f)}(A) - W_s^{(f)}(A) \sim W_{t-s}^{(f)}(A)$.

(iii) $W_t^{(f)}(A) - W_s^{(f)}(A)$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$*. En particulier,* $\{W_t^{(f)}(A),\, t \geq 0\}$ *est une martingale (centrée).*

(iv) Le crochet *de* $W^{(f)}(A)$ *et* $W^{(f)}(B)$ *est donné par*

$$\langle W^{(f)}(A), W^{(f)}(B) \rangle_t = t \int_{A \times B} f(x-y) \, dx \, dy \, .$$

Exercice 6.13. *Prouver les assertions (i)-(ii)-(iii)-(iv) du lemme 6.12.*

(i) Formellement, on peut déduire l'identité recherchée en dérivant la formule (84), comme nous l'avons fait pour obtenir (85). La preuve rigoureuse de cette identité est en fait une conséquence de l'expression exacte

$$\int_{A\times B} \frac{\partial^{2d} C}{\partial x_1\cdots\partial x_d \partial y_1 \cdots \partial y_d}(x,y)\, dx\, dy$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{2} \sum_{j_1,\ldots,j_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\ldots+i_d}(-1)^{j_1+\ldots+j_d} C\big((a^{(1)}_{i_1},\ldots,a^{(d)}_{i_d}),(b^{(1)}_{j_1},\ldots,b^{(d)}_{j_d})\big)\,,$$

que l'on peut vérifier par récurrence sur $d\geq 2$.

Les points (ii), (iii) et (iv) se démontrent ensuite avec les mêmes arguments que ceux de la preuve du lemme 5.9.

Etape 2: Isométrie.

Lemme 6.14. *Pour tout processus simple adapté H, on a*

$$\mathbb{E}\bigg[\bigg(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \frac{\partial^{d+1} W^{(f)}}{\partial s \partial x_1 \cdots \partial x_d}(s,x)\, ds\, dx\bigg)^2\bigg]$$
$$= \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} H_s(x)H_s(y) f(x-y)\, ds\, dx\, dy\bigg]\,.$$

Preuve. Il suffit de reprendre un à un les arguments de la preuve du lemme 5.11, en s'appuyant sur les propriétés du lemme 6.12. □

Etape 3: Argument de densité.

Nous allons (enfin) utiliser le fait que f est définie positive pour établir le résultat préliminaire suivant:

Lemme 6.15. *Soit $\mathcal{H}_f$ l'ensemble des processus $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\|H\|^2_{\mathcal{H}_f} := \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |H_s(x)||H_s(y)| f(x-y)\, ds\, dx\, dy\bigg] \;<\; \infty\,. \tag{89}$$

Alors $(\mathcal{H}_f, \|.\|_{\mathcal{H}_f})$ est un espace vectoriel normé.

Il est implicitement entendu que le résultat s'applique au quotient sous-jacent, induit par la relation: $H \sim K$ si et seulement si, p.s., $H_s(x)H_s(y)f(x-y) = K_s(x)K_s(y)f(x-y)$ pour presque tous s,x,y.

Preuve. Il s'agit de montrer la sous-additivité de $\|.\|_{\mathcal{H}_f}$. Introduisons d'abord, pour tous processus $H,K : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ bornés à support compact (en x), la quantité (finie)

$$\langle H,K\rangle_f := \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} H_s(x)K_s(y) f(x-y)\, ds\, dx\, dy\bigg]\,.$$

Etape 1: Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Dans un premier temps, considérons $H,K : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega\to\mathbb{R}$ deux processus bornés à support compact (en x). Pour de tels processus, et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on sait par (80) que

$$0 \leq \langle |H|+\lambda|K|, |H|+\lambda|K|\rangle_f = \|K\|^2_{\mathcal{H}_f}\,\lambda^2 + 2\lambda\langle |H|,|K|\rangle_f + \|H\|^2_{\mathcal{H}_f}\,,$$

ce qui permet immédiatement d'affirmer que $4\langle |H|,|K|\rangle_f^2 - 4\|H\|_{\mathcal{H}_f}^2 \|K\|_{\mathcal{H}_f}^2 \leq 0$, autrement dit

$$\langle |H|,|K|\rangle_f \leq \|H\|_{\mathcal{H}_f} \|K\|_{\mathcal{H}_f} \,. \tag{90}$$

Le résultat s'étend ensuite facilement, par convergence monotone, à tous processus $H, K \in \mathcal{H}_f$ (en utilisant par exemple l'approximation définie à travers (**??**)).

Etape 2: Conclusion. Pour tous $H, K \in \mathcal{H}_f$, on a

$$\|H+K\|_{\mathcal{H}_f}^2 \leq \|H\|_{\mathcal{H}_f}^2 + \|K\|_{\mathcal{H}_f}^2 + 2\langle |H|,|K|\rangle_f \,,$$

ce qui, associé à (90), prouve la sous-additivité de $\|.\|_{\mathcal{H}_f}$.

□

Lemme 6.16. *Soit H un processus dans $\mathcal{H}_f$ tel que, en outre:*

(i) pour tous $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $H_t(x)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable;

(ii) p.s., la fonction $(t,x) \mapsto H_t(x)$ est continue presque partout.

Alors il existe une suite H^n de processus simples adaptés telle que

$$\|H - H^n\|_{\mathcal{H}_f} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Preuve. Nous pouvons en fait reprendre les mêmes approximations successives que dans la preuve du lemme 5.12. En effet, grâce à la condition d'intégrabilité (89), nous pouvons d'abord appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer que la suite de processus bornés à support compact définie par (**??**) vérifie $\|H-\widetilde{H}^n\|_{\mathcal{H}_f} \to 0$ (on utilise ici la présence des valeurs absolues à l'intérieur des intégrales dans (89)).

En supposant ensuite le processus H borné à support compact, nous pouvons à nouveau considérer la suite H^n de processus simples adaptés définie par (**??**): la condition de continuité (ii), combinée au théorème de convergence dominée, nous garantit que $\|H - H^n\|_{\mathcal{H}_f} \to 0$.

□

Soit H un processus dans $\mathcal{H}_f$ vérifiant en outre les conditions (i)-(ii) du lemme 6.16. Pour un tel processus, on sait, par le lemme 6.16, qu'il existe une suite H^n de processus simples adaptés telle que $\|H - H^n\|_{\mathcal{H}_f} \to 0$.

Définition 6.17. *Soit $H : ([0,T]\times\mathbb{R}^d)\times\Omega \to \mathbb{R}$ un processus adapté tel que*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\big[|H_s(x)||H_s(y)|\big] f(x-y)\, ds\, dx\, dy \;<\; \infty \,. \tag{91}$$

On appelle intégrale d'Itô de H contre $W^{(f)}$, et on notera

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \dot{W}^{(f)}(ds\, dx) \;,$$

la limite, dans $L^2(\Omega)$, de la suite

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s^n(x)\, \frac{\partial^{d+1} W^{(f)}}{\partial s \partial x_1 \cdots \partial x_d}(s,x)\, ds\, dx \,,$$

pour toute suite H^n de processus simples adaptés telle que $\|H^n - H\|_{\mathcal{H}_f} \to 0$. L'intégrale d'Itô vérifie en particulier la propriété d'isométrie fondamentale:

$$\mathbb{E}\bigg[\Big(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \dot{W}^{(f)}(ds\, dx)\Big)^2\bigg] = \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} H_s(x) H_s(y) f(x-y)\, ds\, dx\, dy\bigg] \,. \tag{92}$$

Avec les mêmes arguments que dans la section 5.2 (Proposition 5.14 et Corollaire 5.15), on obtient ensuite facilement:

Proposition 6.18. *Pour tout processus $H : ([0,T] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions du lemme 6.16, le processus*

$$M_t := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} H_s(x)\, \dot{W}^{(f)}(ds\, dx)$$

est une martingale continue (relativement à $\{\mathcal{F}_s\}$) de variation quadratique

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} H_s(x) H_s(y) f(x-y)\, ds\, dx\, dy \ .$$

Corollaire 6.19 (Burkholder-Davis-Gundy inequality)**.** *Soit $t \geq 0$ fixé, et $H_{t,.} : ([0,t] \times \mathbb{R}^d) \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus vérifiant les conditions du lemme 6.16 (avec $T = t$). Alors, pour tout $p \geq 2$, il existe une constante $c_p > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\Big[\Big| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} H_{t,s}(x)\, \dot{W}^{(f)}(ds\, dx)\Big|^p\Big] \\ &\leq c_p\, \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} H_{t,s}(x) H_{t,s}(y) f(x-y)\, ds\, dx\, dy\Big)^{p/2}\Big] . \end{aligned}$$

6.5. **Interprétation et résolution de l'équation.**

Rappelons que nous nous intéressons, dans cette section, au modèle dynamique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u + \sigma(u) \dfrac{\partial^3 W^{(f)}}{\partial t \partial x_1 \partial x_2} \ , \quad t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}^2, \\ u_0(.) = \Phi \ , \ \Big(\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big)_0 (.) = \Psi \ , \end{cases} \tag{93}$$

où $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $W^{(f)} : ([0,T] \times \mathbb{R}^2) \times \Omega \to \mathbb{R}$ est un champ brownien homogène en espace, dont la covariance spatiale C vérifie (83) pour une certaine fonction définie positive f.

En combinant les résultats des sections 6.1 et 6.4, nous sommes en mesure de donner une interprétation rigoureuse de cette équation:

Définition 6.20. *On appelle solution de l'équation (93) tout processus $\{u_t(x),\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^2\}$ continu et adapté (au sens de la condition (i) du lemme 6.16) tel que, presque sûrement, et pour tous $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \mathbb{E}\big[\big|\mathcal{G}_{t-s}(x-y)\sigma(s,y,u_s(y))\big|\big|\mathcal{G}_{t-s}(x-z)\sigma(s,z,u_s(z))\big|\big] f(y-z)\, ds\, dy\, dz \tag{94}$$

est finie et

$$\begin{aligned} u_t(x) = &\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Phi(y)\, dy\Big)_t + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Psi(y)\, dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{t-s}(x-y)\sigma(s,y,u_s(y))\, \dot{W}^{(f)}(ds\, dy) \ . \end{aligned} \tag{95}$$

Pour mettre en évidence des conditions (sur f, σ et Φ, Ψ) garantissant une équation *bien posée*, c'est-à-dire admettant une unique solution, nous avons besoin d'introduire deux quantités intermédiaires, qui apparaîtront très vite dans les estimations qui suivent:

$$J_f^{(1)}(s) := \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} |\mathcal{G}_s(z)| f(z-w) |\mathcal{G}_s(w)|\, dz\, dw$$

et

$$J_f^{(2)}(s,x;t,y) := \int_0^t dr \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} dz\, dw\, f(z-w) \\ \big|\mathcal{G}_{t-r}(y-z) - \mathcal{G}_{s-r}(x-z)\big|\big|\mathcal{G}_{t-r}(y-w) - \mathcal{G}_{s-r}(x-w)\big|\,.$$

Hypothèse $(\mathbf{H})_\mathbf{f}$: la fonction (définie positive) f est telle que

$$\sup_{s\in[0,T]} J_f^{(1)}(s) < \infty \tag{96}$$

et, pour tout compact A de $\mathbb{R}^2$ et tous $(s,x),(t,y) \in [0,T]\times A$,

$$\big|J_f^{(2)}(s,x;t,y)\big| \leq c_{T,A}\left(|t-s|^\gamma + |y-x|^\beta\right), \tag{97}$$

pour certains coefficients $\gamma, \beta > 0$ et pour une certaine constante $c_{T,A} > 0$.

Pour tout $k \geq 0$, on notera $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables k fois, et dont les dérivées partielles d'ordres $0 \leq \ell \leq k$ sont continues bornées. Nous sommes à présent en mesure d'établir le résultat général suivant:

Théorème 6.21. *Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que*

$$\|\sigma\|_{0,1} := \sup_{s\in[0,T]} \sup_{y\in\mathbb{R}} \sup_{a\in\mathbb{R}} \left\{|\sigma(s,y,a)| + |\partial_a \sigma(s,y,a)|\right\} \;<\; \infty\,. \tag{98}$$

Par ailleurs, soit $W^{(f)}$ un champ brownien homogène en espace dont la fonction de covariance vérifie l'identité (83), pour une certaine fonction définie positive f qui satisfait l'hypothèse $(\mathbf{H})_\mathbf{f}$. Enfin, soit $\Phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^2)$ et $\Psi \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^2)$.

Alors l'équation (93) admet une unique solution u sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$.

Comme dans l'énoncé du théorème 5.17, l'unicité est ici comprise “à indistinguabilité près” (voir la remarque 5.18 à ce sujet).

Commençons par étudier les analogues des lemmes 5.19 et 5.20 dans ce contexte.

Lemme 6.22. *Soient f une fonction définie positive f vérifiant l'hypothèse $(\mathbf{H})_\mathbf{f}$, et $\{v_s(y),\, s\in[0,T], y\in\mathbb{R}^d\}$ un processus adapté (au sens de la condition (i) du lemme 6.16), continu (p.s.) et borné. On définit le processus $\{w_t(x),\, t\in[0,T], x\in\mathbb{R}^d\}$ par la formule*

$$w_t(x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}_{t-s}(x-y) v_s(y)\, \dot{W}^{(f)}(ds\, dy)\ .$$

Alors w est bien défini et admet une modification continue.

Preuve. Comme dans le lemme 5.19, il s'agit d'abord de vérifier que les conditions du lemme 6.16 sont satifaites par l'intégrant

$$(s,y) \longmapsto \mathcal{G}_{t-s}(x-y) v_s(y) \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\ .$$

La vérification des conditions (i)-(ii) est en fait immédiate, tandis que la condition d'intégrabilité (89) est une conséquence directe de l'hypothèse $\sup_{s\in[0,T]} J_f^{(1)}(s) < \infty$ (le processus v étant supposé borné). Ceci nous garantit que le processus w est effectivement bien défini.

Sa continuité découle ensuite du critère de Kolmogorov multi-paramétrique (lemme 5.22), puisque, grâce à l'isométrie (92) et l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{f}}$, on sait que, si v est par exemple majoré par une constante M,

$$\mathbb{E}\Big[\big|w_t(y) - w_s(x)\big|^2\Big] \leq M^2 \big|J_f^{(2)}(s,x;t,y)\big| \leq c_{T,A}\, M^2 \big(|t-s|^\gamma + |y-x|^\beta\big)\,,$$

pour certains coefficients $\gamma, \beta > 0$. □

Lemme 6.23. *Etant données $\Phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^2)$ et $\Psi \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^2)$, soit $\{\widetilde{w}_t(x),\, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^2\}$ la fonction définie par $\widetilde{w}_0(x) = \Phi(x)$ et, pour $t > 0$,*

$$\widetilde{w}_t(x) := \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Phi(y)\,dy\Big)_t + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Psi(y)\,dy\,.$$

Alors, pour tous $(s,x),(t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}^2$, on a

$$\big|\widetilde{w}_t(y) - \widetilde{w}_s(x)\big| \leq c_{\Phi,\Psi}\big\{|t-s| + |y-x|\big\}\,.$$

Preuve. En notant que $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{|z|<1\}} \frac{dz}{\sqrt{1-|z|^2}} < \infty$, le résultat découle rapidement des deux identités (faciles à vérifier successivement):

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Psi(y)\,dy = c\,t \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{|z|<1\}} \frac{dz}{\sqrt{1-|z|^2}}\Psi(x-tz) \tag{99}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Phi(y)\,dy\Big)_t\\ &= c\Big[\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{|z|<1\}} \frac{dz}{\sqrt{1-|z|^2}}\Phi(x-tz) - t\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{|z|<1\}} \frac{dz}{\sqrt{1-|z|^2}}\langle z, \nabla\Phi(x-tz)\rangle\Big]\,,\end{aligned} \tag{100}$$

pour une certaine constante c. □

Preuve du théorème 6.21. On reprend le schéma de preuve usuel, déjà utilisé pour montrer les théorèmes 4.7 et 5.17.

Existence. On considère la suite de processus $u^{(n)}$ définie par $u_t^{(0)}(x) := \Phi(x)$ et

$$\begin{aligned}u_t^{(n+1)}(x) =& \frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Phi(y)\,dy\Big)_t + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_t(x-y)\Psi(y)\,dy\\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{t-s}(x-y)\sigma(s,y,u_s^{(n)}(y))\,\dot{W}^{(f)}(ds\,dy)\ .\end{aligned} \tag{101}$$

La combinaison des lemmes 6.22 et 6.23 nous garantit que cette suite est bien définie au sein de la classe des processus (p.s.) continus.

Posons alors

$$H_t^{(n)}(x) := u_t^{(n+1)}(x) - u_t^{(n)}(x)\ .$$

On a par définition

$$H_t^{(n)}(x)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{G}_{t-s}(x-y)\big[\sigma\big(s,y,u_s^{(n)}(y)\big)-\sigma\big(s,y,u_s^{(n-1)}(y)\big)\big]\,\dot W^{(f)}(ds\,dy)\,,$$

et par conséquent, en utilisant successivement l'isométrie (92) et la condition de régularité (98), on obtient

$$\mathbb{E}\big[\big|H_t^{(n)}(x)\big|^2\big]\leq\|\sigma\|_{0,1}^2$$
$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}|\mathcal{G}_{t-s}(x-z)|f(z-w)|\mathcal{G}_{t-s}(x-w)|\mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n-1)}(z)\big|\big|H_s^{(n-1)}(w)\big|\big]\,ds\,dzdw\,.$$

En posant $h_t^{(n)}:=\sup_{0\leq s\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}}\mathbb{E}\big[\big|H_s^{(n)}(x)\big|^2\big]$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour l'espérance), on déduit

$$\begin{aligned}h_t^{(n)}&\leq\|\sigma\|_{0,1}^2\Big(\sup_{s\in[0,T]}J_f^{(1)}(s)\Big)\int_0^t h_s^{(n-1)}\,ds\\&\leq c_1\,\|\sigma\|_{0,1}^2\int_0^t h_s^{(n-1)}\,ds\,,\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_1>0$. En itérant le procédé, il vient

$$h_t^{(n)}\leq\Big(c_1\,\|\sigma\|_{0,1}^2\Big)^n\int_{0\leq s_1<\ldots<s_n<t}h_{s_1}^{(0)}\,ds_1\ldots ds_n\ .$$

Or il est facile de constater, en utilisant notamment les écritures (99) et (100), que

$$\mathbb{E}\big[|H_s^{(0)}(x)|^2\big]\leq c_2\big\{\|\Phi\|_{\mathcal{C}_b^2}+\|\Psi\|_{\mathcal{C}_b^1}^2+^2+\|\sigma\|_{0,1}^2\big\}\,,$$

pour une certaine constante $c_2>0$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}h_t^{(n)}&\leq\Big(c_1\,\|\sigma\|_{0,1}^2\Big)^n\Big(c_2\big\{\|\Phi\|_{\mathcal{C}_b^2}+\|\Psi\|_{\mathcal{C}_b^1}^2+^2+\|\sigma\|_{0,1}^2\big\}\Big)\int_{0\leq s_1<\ldots<s_n<t}ds_1\ldots ds_n\\&\leq\frac{\Big(c_1\,T\,\|\sigma\|_{0,1}^2\Big)^n}{n!}\Big(c_2\big\{\|\Phi\|_{\mathcal{C}_b^2}+\|\Psi\|_{\mathcal{C}_b^1}^2+^2+\|\sigma\|_{0,1}^2\big\}\Big)\,,\end{aligned}$$

ce qui garantit la convergence $\sum_{n\geq 0}(h_T^{(n)})^{1/2}<\infty$, autrement dit la convergence

$$\sum_{n\geq 0}\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big(\mathbb{E}\Big[\big|u_t^{(n+1)}(x)-u_t^{(n)}(x)\big|^2\Big]\Big)^{1/2}<\infty\ ,$$

et par conséquent la convergence de $u^{(n)}$ dans l'espace (complet) $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R};L^2(\Omega))$. Notons u la limite de cette suite. En associant cette propriété de convergence à l'isométrie (92), on montre aisément que

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}(x-y)\sigma\big(s,y,u_s^{(n)}(y)\big)\,\dot W^{(f)}(ds\,dy)\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}G_{t-s}(x-y)\sigma\big(s,y,u_s(y)\big)\,\dot W^{(f)}(ds\,dy)\quad\text{dans }L^2(\Omega)\,.\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de faire tendre n vers l'infini dans la relation (101) pour obtenir le résultat escompté: le processus u est solution de l'équation (95).

Unicité. Soient u,v deux solutions de l'équation (de même conditions initiales Φ,Ψ) et notons

$$H_t(x):=u_t(x)-v_t(x)\,.$$

En utilisant successivement l'isométrie (92) et la condition de régularité (98) (comme précédemment), on déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\big|H_t(x)\big|^2\big] \\
&\leq \|\sigma\|_{0,1}^2 \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} dzdw\, \mathcal{G}_{t-s}(x-z)f(z-w)\mathcal{G}_{t-s}(x-w)\mathbb{E}\big[\big|H_s(z)\big|\big|H_s(w)\big|\big]\,.
\end{aligned}$$

Par suite, si $h_t := \sup_{0\leq s\leq t}\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\big[\big|H_t(x)\big|^2\big]$, on obtient, avec les mêmes arguments que ci-dessus,

$$h_t \leq c_1\|\sigma\|_{0,1}^2 \int_0^t h_s\, ds\,,$$

et donc, pour tout $m\geq 1$,

$$\begin{aligned}
0 \leq h_t &\leq \big(c_1\,\|\sigma\|_{0,1}^2\big)^m \int_{0<s_1<\cdots<s_m<t} h_{s_1}\, ds_1 \ldots ds_m \\
&\leq \frac{\big(c_1\, T\|\sigma\|_{0,1}^2\big)^m}{m!} h_T^3\,.
\end{aligned}$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient $h_t = 0$, et donc v est une modification de u. La continuité des deux processus nous permet ensuite d'affirmer qu'ils sont en fait indistinguables l'un de l'autre. □

6.6. **Applications.**

Proposition 6.24. *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction définie positive et bornée. Alors f satisfait l'hypothèse* $(\mathbf{H})_{\mathbf{f}}$.

Les fonctions $f(x) := e^{-|x|^2}$ et $f(x) := e^{-|x|}$ vérifient en particulier l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{f}}$.

Preuve. On a d'abord

$$\begin{aligned}
J_f^{(1)}(s) &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \bigg(\int_{\mathbb{R}^2} dx\, \mathcal{G}_s(x)\bigg)^2 \\
&\leq c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \bigg(\int_{|x|<s} \frac{dx}{|s^2-|x|^2|^{1/2}}\bigg)^2 \\
&\leq c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \bigg(\int_0^s \frac{\rho\, d\rho}{|s^2-\rho^2|^{1/2}}\bigg)^2 \\
&\leq c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \bigg(\int_0^{s^2} \frac{dr}{|s^2-r|^{1/2}}\bigg)^2 \leq c\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} s^2\,.
\end{aligned}$$

pour une certaine constante c dont la valeur peut changer d'une inégalité à l'autre. On constate ainsi que l'hypothèse (96) est bien vérifiée.

Fixons ensuite un compact A de $\mathbb{R}^2$ et soient $(s,x),(t,y)\in[0,T]\times A$, avec (par exemple) $s<t$. On a clairement

$$J_f^{(2)}(s,x;t,y) \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_0^t dr\, \big\|\mathcal{G}_{t-r}(y-.) - \mathcal{G}_{s-r}(x-.)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2\,,$$

puis

$$\int_0^t dr\, \big\|\mathcal{G}_{t-r}(y-.) - \mathcal{G}_{s-r}(x-.)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 3\big\{\mathcal{N}_{s,t}^{(1)} + \mathcal{N}_s^{(2)}(x,y)\big\}\,, \tag{102}$$

avec

$$\mathcal{N}^{(1)}_{s,t} := \int_0^t dr \, \|\mathcal{G}_{t-r} - \mathcal{G}_{s-r}\|^2_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

et

$$\mathcal{N}^{(2)}_{s}(x,y) := \int_0^s dr \, \|\mathcal{G}_{r}(y-.) - \mathcal{G}_{r}(x-.)\|^2_{L^1(\mathbb{R}^2)} \,.$$

Estimation de $\mathcal{N}^{(1)}_{s,t}(y)$. Décomposons la variation $\mathcal{G}_t(y) - \mathcal{G}_s(y)$ en

$$\mathcal{G}_t(y) - \mathcal{G}_s(y) = c\left[\Lambda^{(1)}_{s,t}(y) + \Lambda^{(2)}_{s,t}(y)\right], \tag{103}$$

avec

$$\Lambda^{(1)}_{s,t}(y) = \mathbf{1}_{\{s<|y|<t\}} \frac{1}{\sqrt{t^2-|y|^2}}$$

et

$$\Lambda^{(2)}_{s,t}(y) = \mathbf{1}_{\{0<|y|<s\}} \left[\frac{1}{\sqrt{t^2-|y|^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2-|y|^2}}\right].$$

On a d'une part, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned}\|\Lambda^{(1)}_{s,t}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} dy \, \mathbf{1}_{\{s<|y|<t\}} \frac{1}{\sqrt{t^2-|y|^2}} \\ &\leq c \int_s^t d\rho \, \frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \\ &\leq c \int_{s^2}^{t^2} \frac{dr}{\sqrt{t^2-r}} \;\leq\; c\sqrt{t^2-s^2} \;\leq\; c_T\sqrt{t-s}\,. \end{aligned} \tag{104}$$

D'autre part, observons que, pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\left|\Lambda^{(2)}_{s,t}(y)\right| \leq c_\lambda \, |t-s|^\lambda \Lambda^{(1),\lambda}_s(y) \quad \text{avec} \quad \Lambda^{(1),\lambda}_s(y) := \mathbf{1}_{\{0<|y|<s\}} \frac{1}{|s^2-|y|^2|^{\frac{1}{2}+\lambda}},$$

ce qui permet de reproduire les estimations ci-dessus pour affirmer que, pour tout $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$,

$$\|\Lambda^{(2)}_{s,t}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq c_{T,\lambda} \, |t-s|^\lambda \,.$$

En revenant à (103), on a ainsi montré que pour tout $\lambda \in (0,1)$,

$$\mathcal{N}^{(1)}_{s,t} \leq c_{T,\lambda} \, |t-s|^\lambda \,. \tag{105}$$

Estimation de $\mathcal{N}^{(2)}_s(x,y)$. Ecrivons d'abord

$$\mathcal{N}^{(2)}_s(x,y) \leq 3\{\widetilde{\mathcal{N}}^{(2)}_s(x,y) + \widetilde{\mathcal{N}}^{(2)}_s(y,x)\} \tag{106}$$

avec

$$\widetilde{\mathcal{N}}^{(2)}_s(x,y) := \int_0^s dr \left(\int_{\mathbb{R}^2} dz \, \mathbf{1}_{\{|x-z|<|y-z|\}} |\mathcal{G}_r(y-z) - \mathcal{G}_r(x-z)|\right)^2 .$$

Il est ensuite facile de constater que

$$\widetilde{\mathcal{N}}^{(2)}_s(x,y) \leq 3\{\Pi^{(1)}_s(x,y) + \Pi^{(2)}_s(x,y)\}, \tag{107}$$

avec

$$\Pi^{(1)}_s(x,y) := \int_0^s dr \left(\int_{\mathbb{R}^2} dz \, \mathbf{1}_{\{|x-z|<|y-z|<r\}} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2-|y-z|^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2-|x-z|^2}}\right]\right)^2$$

et

$$\Pi_s^{(2)}(x,y) := \int_0^s dr \Big(\int_{\mathbb{R}^2} dz\, \mathbf{1}_{\{|x-z|<r<|y-z|\}} \frac{1}{\sqrt{r^2-|x-z|^2}} \Big)^2 .$$

Pour $\Pi_s^{(1)}(x,y)$, on a, pour tout $\lambda \in (0,\frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned}
&\Pi_s^{(1)}(x,y)\\
&\leq c_\lambda \int_0^s dr \Big(\int_{\mathbb{R}^2} dz\, \mathbf{1}_{\{|x-z|<|y-z|<r\}} \frac{1}{\big|r^2-|y-z|^2\big|^{\frac{1}{2}+\lambda}} \big||y-z|^2-|x-z|^2\big|^{\lambda} \Big)^2\\
&\leq c_\lambda\, |y-x|^{2\lambda} \int_0^s dr\, r^{2\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} dz\, \mathbf{1}_{\{|z|<r\}} \frac{1}{\big|r^2-|z|^2\big|^{\frac{1}{2}+\lambda}} \Big)^2 \;\leq\; c_{T,\lambda}\, |y-x|^{2\lambda} , \quad (108)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le même argument que dans (104) pour obtenir la dernière inégalité.

Enfin, en ce qui concerne $\Pi_s^{(2)}(x,y)$, il suffit d'écrire, si $|y-x|<s$,

$$\begin{aligned}
&\Pi_s^{(2)}(x,y)\\
&= \int_0^s dr \Big(\int_{\mathbb{R}^2} dz\, \mathbf{1}_{\{|z|<r<|y-x+z|\}} \frac{1}{\sqrt{r^2-|z|^2}} \Big)^2\\
&\leq \Big[\int_0^{|y-x|} dr \Big(\int_{|z|<r} \frac{dz}{\sqrt{r^2-|z|^2}} \Big)^2 + \int_{|y-x|}^s dr \Big(\int_{r-|y-x|<|z|<r} \frac{dz}{\sqrt{r^2-|z|^2}} \Big)^2 \Big]\\
&\leq c \Big[\int_0^{|y-x|} dr\, r^2 + \int_{|y-x|}^s dr \Big(\int_{(r-|y-x|)^2<\rho<r^2} d\rho\, \frac{1}{\sqrt{r^2-\rho}} \Big)^2 \Big]\\
&\leq c \Big[|y-x|^3 + \int_{|y-x|}^s dr \big[r^2-(r-|y-x|)^2 \big] \leq c_{T,A} |y-x| , \quad (109)
\end{aligned}$$

et si $|y-x|\geq s$,

$$\Pi_s^{(2)}(x,y) \leq \int_0^{|y-x|} dr \Big(\int_{|z|<r} \frac{dz}{\sqrt{r^2-|z|^2}} \Big)^2 \leq c_A |y-x| . \quad (110)$$

En injectant les bornes (108) et (109)-(110) dans (106) et (107), on déduit, pour tout $\lambda \in (0,1)$,

$$\mathcal{N}_s^{(2)}(x,y) \leq c_{T,A,\lambda}\, |y-x|^{\lambda} ,$$

et en associant ce résultat à (105), on obtient finalement

$$J_f^{(2)}(s,x;t,y) \leq c_{T,A,\lambda} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \big\{ |t-s|^{\lambda} + |y-x|^{\lambda} \big\} ,$$

pour tout $\lambda \in (0,1)$.

□

En utilisant des estimations plus sophistiquées (voir par exemple [5]), on peut également établir le résultat suivant:

Proposition 6.25. *Pour tout $H=(H_1,H_2)\in(\frac{1}{2},1)^2$, la fonction f_H définie dans l'exemple 6.11 satisfait l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{f}}$.*

6.7. **Annexe: preuve de la formule (82).**

Calculons d'abord la transformée de Fourier de la fonction $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a|\lambda|}$: on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-a|.|})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} d\lambda\, e^{-\imath\xi\lambda} e^{-a|\lambda|} \\ &= \int_{-\infty}^{0} d\lambda\, e^{-\lambda(\imath\xi - a)} + \int_{0}^{\infty} d\lambda\, e^{-\lambda(\imath\xi + a)} \\ &= \frac{1}{a - \imath\xi} - \frac{1}{a + \imath\xi} = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}e^{-a|\lambda|} &= \frac{a}{\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi\, e^{\imath\lambda\xi} \frac{1}{a^2 + \xi^2} \\ &= \frac{a}{\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi\, e^{\imath\lambda\xi} \int_0^{\infty} ds\, e^{-a^2 s} e^{-\xi^2 s} \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} ds\, e^{-a^2 s} \int_{\mathbb{R}} d\xi\, e^{\imath\lambda\xi} e^{-\xi^2 s} = a \int_0^{\infty} \frac{ds}{(\pi s)^{1/2}} e^{-a^2 s} e^{-x^2/4s}\,.\end{aligned}$$

References

[1] I. Karatzas and S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag New York, 2nd edition (1998).

[2] H. Kunita: Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[3] G. Da Prato and J. Zabczyk: Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, 2nd edition (2014).

[4] D. Revuz and M. Yor: Continuous martigales and Brownian motion. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd edition (1999).

[5] M. Sanz-Solé and M. Sarrà: Hölder continuity for the stochastic heat equation with spatially correlated noise. In: Stochastic analysis, random fields and applications (R.C. Dalang, M. Dozzi & F. Russo, eds), pp. 259-268, Progress in Probability 52, Birkhäuser, Basel, 2002.

[6] J.B. Walsh: An introduction to stochastic partial differential equations. In: *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour*, XIV-1984. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1180, pp. 265-439. Springer, Berlin (1986).