

UNIVERSITÉ DE NANTES
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES JEAN LERAY - UMR 6629

Document de synthèse en vue d'obtenir
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : Mathématiques

Dynamiques hamiltoniennes et aléa

par

Laurent Thomann

Soutenue publiquement le lundi 18 novembre 2013 devant le jury :

M. Massimiliano BERTI
M. Nicolas BURQ
M. Jean-Marc DELORT
Mme Isabelle GALLAGHER
M. Benoît GRÉBERT
M. Gilles LEBEAU
M. Didier ROBERT

après avis des rapporteurs :

M. Massimiliano BERTI
Mme Isabelle GALLAGHER
M. Gilles LEBEAU

Remerciements

Je veux exprimer toute ma gratitude à Nicolas Burq, avec qui j'ai effectué mes premiers pas dans la recherche mathématique. Faire des mathématiques et discuter avec lui est toujours un plaisir.

Un grand merci à Benoît Grébert, qui dès mon arrivée à Nantes m'a proposé des sujets très intéressants. Notre collaboration m'est très riche d'enseignement.

Je suis très reconnaissant à Massimiliano Berti, Isabelle Gallagher et Gilles Lebeau d'avoir accepté de faire un rapport sur mes travaux. Je les remercie pour tout le temps et l'énergie qu'ils ont consacrés à cette évaluation. Merci également à Jean-Marc Delort d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je dois énormément à mes collaborateurs pour nos échanges fructueux et divers. En particulier, merci à Nikolay Tzvetkov qui m'a enrichi dans de nombreux domaines. Merci également à Éric Patourel pour nos nombreuses discussions et projets à venir, ainsi qu'à Didier Robert de me faire profiter de sa grande expérience. Enfin je remercie Pierre Albin, Hans Christianson, Emanuele Haus, Tiphaine Jézéquel, Jeremy Marzuola et Aurélien Poiret pour tout ce que j'ai appris à leurs côtés.

Dans ce mémoire, je présente l'essentiel de mes travaux de recherche depuis mon arrivée à Nantes. Le laboratoire Jean Leray fournit un cadre très agréable et je suis très heureux de pouvoir au quotidien y travailler.

Je remercie tous ses membres pour les nombreux échanges que j'ai eu et pour tout ce qu'ils m'ont apporté. En particulier, je souhaite mentionner Frédéric Bernicot, Philippe Carmona, Gilles Carron, Jean-François Coulombel, Frédéric Héreau, Luc Hillairet, Nicolas Pétrélis et Rodolphe Turpault pour nos nombreuses discussions mathématiques et autres. Je remercie également tous les secrétariats et la bibliothèque dont l'efficacité simplifie grandement les nombreuses démarches administratives.

Enfin, je remercie ma famille et plus particulièrement Alice avec qui j'ai la chance de partager ma vie.

Table des matières

1	Introduction générale	7
2	Dynamiques hamiltoniennes et aléa	15
2.1	Séries aléatoires	15
2.1.1	Inégalité de Khintchin et chaos de Wiener	15
2.1.2	Application à l'existence locale d'EDP	17
2.1.3	Application à la construction de mesures de Gibbs	20
2.2	Solutions fortes globales	24
2.2.1	Introduction et résultats	24
2.2.2	Idées de preuve	26
2.3	Solutions faibles pour les ondes	28
2.4	Solutions faibles pour NLS	30
2.4.1	Introduction et résultats	30
2.4.2	Principe général de la méthode	33
2.4.3	L'argument probabiliste de convergence	34
2.5	KAM pour l'oscillateur harmonique	36
2.5.1	Le problème	36
2.5.2	Les résultats	37
2.5.3	La méthode KAM pour l'équation non-linéaire	38
2.6	Réductibilité de l'équation de Schrödinger linéaire	42
2.6.1	Introduction et résultats	42
2.6.2	Idées de preuve	44
3	Dynamiques résonantes	47
3.1	Introduction	47
3.1.1	Dynamiques proches du linéaire	47
3.1.2	Un premier exemple de dynamique résonante	48
3.2	Présentation de nos résultats	48
3.2.1	Résultats pour l'équation quintique	48
3.2.2	Résultats pour le système cubique	52
3.2.3	Croissance de norme pour l'équation linéaire	53
3.3	Idées de preuve	53

Conclusion et perspectives	59
Références	60

1 Introduction générale

Nos travaux concernent l'étude qualitative d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. En particulier nous nous intéressons à une classe d'équations hamiltoniennes appelées *dispersives* qui comprend notamment l'équation des ondes et l'équation de Schrödinger. Ces modèles sont très étudiés puisqu'ils servent à décrire de nombreux phénomènes physiques (en optique non-linéaire, en électromagnétisme, en mécanique des fluides, ...) et d'un point de vue mathématique leurs structures sont très riches. Un exemple est l'oscillateur harmonique quantique non-linéaire qui s'écrit

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u = |u|^2 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

et dont nous avons abordé l'étude. Cette équation qui a pour inconnue la fonction à valeurs complexes $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, est un modèle utilisé dans la description des condensats de Bose-Einstein. L'équation linéaire associée est bien comprise car on peut représenter explicitement la solution à l'aide de modes propres. En revanche, lorsque l'on rajoute la non-linéarité, l'étude se complique sensiblement, puisque des interactions sont possibles entre des modes d'énergies différentes.

Ces dernières années, beaucoup de progrès ont été faits dans l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions d'équations dispersives et dans certains cas, on sait même résoudre dans des espaces optimaux. Il est donc maintenant naturel d'essayer d'obtenir des renseignements qualitatifs sur leur dynamique : les exemples montrant l'optimalité de la régularité de la solution sont-ils isolés ou typiques ? Peut-on résoudre l'équation pour des données très irrégulières ? Quel est le comportement en temps long du système ? En particulier, peut-on construire des solutions globales remarquables (par exemple des solutions périodiques ou quasi-périodiques en temps), ou obtenir des propriétés globales du flot (propriétés de récurrence ou bornes en temps des solutions) ? Ce sont ce type de problèmes que nous allons aborder dans ce mémoire.

Pour attaquer ces questions, nous allons nous servir des probabilités et mettre de l'aléa soit dans les conditions initiales, soit dans l'équation elle-même. Souvent la présence de termes stochastiques complique l'étude d'un système puisque l'on est amené à traiter des objets de faible régularité (par exemple dans une équation stochastique avec force aléatoire). Au contraire, ici nous allons essayer de tirer profit de l'aléa grâce à des propriétés de régularisation de séries aléatoires ou en éliminant un certain nombre de mauvaises valeurs d'un paramètre de l'équation. Ainsi, nous allons obtenir, sur un ensemble de mesure pleine ou de mesure proche de 1, des résultats concernant la dynamique de l'équation. Notons que physiquement cette approche a

un sens puisque les paramètres et les conditions initiales de l'équation ne peuvent pas être déterminés de façon absolue. De plus, dans chacune de nos méthodes employées, nous obtenons des résultats de stabilité de la dynamique par rapport aux conditions initiales. Enfin, nous montrons que l'approche précédente est pertinente en construisant, pour des choix particuliers de paramètres, des trajectoires exceptionnelles en utilisant des phénomènes de résonance.

Dans nos travaux, nous utilisons les probabilités pour l'étude d'équations déterministes, et ceci avec deux points de vue différents.

La première approche utilise des idées de la physique statistique et qui ont été développées mathématiquement par Lebowitz-Rose-Speer [69], P. Zhidkov [99], J. Bourgain [15, 17] puis N. Tzvetkov [91, 90]. Cela consiste à munir l'espace des conditions initiales d'une loi de probabilité et de traiter les trajectoires en leur ensemble au lieu de les considérer de façon isolée comme on le fait traditionnellement dans l'étude d'un problème de Cauchy. L'avantage est de pouvoir tirer profit de phénomènes de régularisation en moyenne des séries aléatoires. Avec ces idées, on peut donc revisiter les arguments classiques d'étude d'EDPs et ainsi développer une théorie de Cauchy locale (voire globale) probabiliste pour des équations mal-posées, ou construire par compacité des solutions faibles probabilistes. De plus, dans certains cas, on peut montrer une dépendance continue presque sûre du flot par rapport aux conditions initiales, ce qui renforce la pertinence de l'approche stochastique.

La deuxième stratégie utilisant l'aléa que nous allons adopter repose sur une méthode qui tire ses origines des systèmes dynamiques hamiltoniens en dimension finie. Il s'agit de la méthode KAM développée par Kolmogorov [62], puis confirmée par Arnold [3] et Moser [73], qui a notamment contribué à montrer la stabilité du système solaire (voir Chierchia et Pinzari [34] pour une preuve complète). Cette stratégie a été adaptée pour des EDP hamiltoniennes (donc vues comme des systèmes dynamiques en dimension infinie) par S. Kuksin [63], puis E. Wayne [97] et J. Pöschel [86]. La méthode KAM est une méthode itérative sur l'hamiltonien du système qui permet de montrer que la partie linéaire de l'équation est stable par perturbation. Pour mettre en œuvre cette méthode, on doit à chaque étape restreindre un ensemble de paramètres de l'hamiltonien, puis avec un argument de mesure on montre qu'il est non vide à la fin : c'est à ce niveau qu'intervient l'aléa. En utilisant cette méthode, Kuksin et Pöschel [66] ont construit des tores invariants pour une équation de Schrödinger en prenant comme seuls paramètres les conditions initiales de l'équation : on peut ainsi voir le contenu de [66] comme un résultat de conditions initiales aléatoires. Mentionnons pour conclure un point important de la méthode KAM, par rapport à d'autres méthodes de construction de solutions quasi-périodiques : la méthode KAM fournit l'existence de tores invariants qui sont, de plus, linéairement stables.

Ainsi, dans les deux cas, l'utilisation de l'aléa permet de fournir un ensemble de conditions initiales ou de paramètres pour lesquels on a une bonne compréhension de la dynamique.

Décrivons maintenant plus précisément notre travail.

Dans [A1] nous avons étudié l'équation de Schrödinger avec potentiel confinant (qui comprend notamment l'équation (1.1)) en dimension quelconque et avec des conditions initiales aléatoires. Grâce aux travaux de Christ, Colliander et Tao [35] on sait qu'il existe un seuil critique de régularité des données initiales pour que l'équation soit bien posée de façon déterministe. En utilisant des idées de Burq-Tzvetkov [26, 27] pour l'équation des ondes, nous avons montré qu'il existe beaucoup (en un sens probabiliste) de données de faible régularité

(sous l'indice critique) pour lesquelles on sait construire des solutions fortes probabilistes par un argument de contraction. L'argument utilise le fait que la partie linéaire de l'équation étudiée a un spectre discret et que les fonctions propres associées (fonctions d'Hermite dans le cas du potentiel quadratique) jouissent de bonnes propriétés dispersives. Néanmoins, grâce à une transformation explicite (dite transformation de lentille), on est capable de déduire des résultats analogues pour l'équation de Schrödinger non-linéaire sans potentiel.

Avec N. Tzvetkov [A2] nous avons construit une mesure de Gibbs pour l'équation de Schrödinger avec dérivée dans la non-linéarité. Cette construction est non-triviale et nécessite des arguments fins de probabilités, comme par exemple des estimées de chaos de Wiener qui permettent de contrôler des produits de séries aléatoires. Une mesure de Gibbs est une mesure sur un espace de Sobolev, et c'est un outil pour la compréhension de la dynamique d'une EDP hamiltonienne. En particulier :

1. Supposons que l'on a une théorie de Cauchy raisonnable pour des conditions initiales sur le support d'une mesure de Gibbs. Alors on peut espérer construire un flot global, presque sûrement défini par rapport à cette mesure : de façon informelle, une mesure de Gibbs remplace une loi de conservation de faible régularité.
2. Si l'on arrive à montrer que cette mesure finie est invariante par ce flot, on peut appliquer le théorème récurrence de Poincaré : presque tout point est récurrent par la dynamique.

Avec N. Burq et N. Tzvetkov [A4] (voir aussi l'acte [A5]) nous avons mis en oeuvre ce programme sur le modèle (1.1). Nous avons montré que cette équation (et avec n'importe quelle non-linéarité polynomiale dans le cas défocalisant) était globalement bien posée sur le support de la mesure de Gibbs associée qui est essentiellement $L^2(\mathbb{R})$, ce qui constitue un gain d'une demi-dérivée par rapport à la théorie déterministe. De plus, nous obtenons une borne en norme Sobolev sur la croissance typique des solutions, lorsque le temps va vers l'infini. Grâce à la transformée de lentille, nous montrons dans [A4] un phénomène de diffusion (*scattering*) sur le support de la mesure pour Schrödinger sans potentiel. Ici encore, nous obtenons un résultat qui semble hors d'atteinte avec les méthodes déterministes.

Les preuves d'existence dans les travaux précédents reposent sur un argument de point fixe combiné avec des estimations probabilistes. Il est naturel d'étudier un analogue stochastique des méthodes de compacité usuelles pour l'obtention de solutions faibles. Dans [A6], avec Burq et Tzvetkov, nous construisons des solutions faibles globales, d'énergie infinie, à l'équation des ondes périodique avec non-linéarité cubique, en dimension quelconque. La globalisation ne repose pas ici sur l'utilisation d'une mesure de Gibbs mais sur une estimation a priori utilisant l'énergie de l'équation, déjà utilisée dans [28]. Dans [A6] on construit des solutions globales pour des données distribuées selon une grande classe de mesures de probabilités : l'avantage de cette approche est qu'elle permet de briser la rigidité induite par une mesure de Gibbs, qui est typiquement supportée dans un ensemble très irrégulier et en pratique seulement utilisable en dimension 1. En revanche, en dimension 1 (ou en dimension supérieure, avec hypothèse radiale), une mesure de Gibbs peut être un outil efficace pour construire des solutions faibles probabilistes, c'est l'objet du travail [A7]. Dans cet article, en nous inspirant de l'approche [2] et [40], nous avons considéré différents modèles dispersifs (équation de Schrödinger sur la sphère \mathbb{S}^3 avec solutions radiales, Schrödinger avec dérivée, Benjamin-Ono et équation des demi-ondes) et nous avons construit des solutions globales sur le support de la mesure de Gibbs considérée. L'argument repose sur un théorème de compacité des mesures (théorème de Prokhorov)

combiné avec le théorème de Skorohod qui permet de passer d'une convergence en loi, à une convergence presque sûre. L'invariance (au moins formelle) de la mesure de Gibbs par l'équation est utilisée de façon cruciale pour obtenir des bornes en vue de la compacité.

Jusqu'à présent, nous avons étudié le comportement de solutions irrégulières, intéressons-nous maintenant à la dynamique en temps long de solutions régulières, en particulier regardons l'existence de solutions quasi-périodiques à (1.1). Avec B. Grébert [A3] nous avons construit des tores invariants pour (1.1) perturbé par un potentiel aléatoire. Idéalement, on aimerait considérer exactement l'équation (1.1), mais ce système est résonant au sens où il existe des combinaisons linéaires des valeurs propres de l'équation libre qui s'annulent. La présence du potentiel aléatoire permet d'éviter des problèmes de petits diviseurs et de mettre en place une méthode KAM. On adopte le formalisme abstrait de Pöschel [85] en y incorporant des estimées dispersives des fonctions d'Hermite. La méthode KAM fournit un changement de variables, proche de l'identité, sur l'hamiltonien qui montre que la dynamique est une perturbation de la dynamique linéaire. Il s'agit du premier résultat de ce type pour une EDP dans un cadre non compact. Notons à ce propos que le fait que la variable d'espace varie dans \mathbb{R} tout entier est utilisé via les estimées dispersives des fonctions d'Hermite ; le seul fait que l'opérateur sous-jacent soit à résolvante compacte n'est pas suffisant.

Cette même approche permet de montrer la réductibilité de l'oscillateur harmonique avec potentiel quasi-périodique en temps : il existe un changement de variables qui transforme l'équation en une équation à coefficients constants. Ceci donne une description complète de la dynamique. Ici encore l'aléa est crucial, le paramètre étant la fréquence de la perturbation.

Il est naturel de se demander si l'approche stochastique est nécessaire, ou si les résultats précédents restent valables sans avoir à se restreindre à un sous ensemble de conditions initiales ou de paramètres.

En ce qui concerne le caractère bien posé des EDP dispersives, un certain nombre de contre-exemples (ou suites de contre-exemples) montrent l'optimalité des espaces de résolution. Citons en particulier les résultats de G. Lebeau [68, 67] pour les ondes, Christ-Colliander-Tao [35] pour Schrödinger puis Alazard-Carles [1] ainsi que les travaux [A11, A12, A13] issus de notre thèse que nous ne détaillerons pas ici.

Avec la théorie KAM, dans [A3] nous avons montré, sous une hypothèse générique sur le potentiel perturbatif, que la dynamique de l'oscillateur harmonique était proche du linéaire. Pour montrer que les hypothèses de non-résonance inhérentes à la méthode sont nécessaires, avec B. Grébert [A8] nous avons considéré une équation de Schrödinger non-linéaire sur le cercle et construit des exemples de solutions qui ne se comportent pas comme une solution linéaire. Ceci demande une description en temps long, rendue possible grâce à une méthode de formes normales de Birkhoff résonantes. Ceci étend des résultats de Grébert et Villegas-Blas [56] pour une équation de Schrödinger avec non-linéarité non autonome. Avec B. Grébert et É. Paturel [A9] nous avons montré que la méthode développée dans [56] et [A11] était robuste et pouvait s'appliquer à des systèmes. En corollaire de notre étude nous obtenons un exemple de croissance optimal de norme Sobolev pour l'équation de Schrödinger sur le cercle avec potentiel régulier dépendant de la variable de temps, on retrouve ainsi un résultat de Bourgain [19]. Dans [A8, A9] nous avons construit des solutions proches de solutions périodiques en temps, dans [A10] avec E. Haus nous avons adapté la preuve pour obtenir des solutions

quasi-périodiques pour un grand choix de fréquences. Ce dernier résultat repose sur une étude arithmétique des résonances.

Travaux présentés dans ce mémoire

Dynamiques hamiltoniennes et aléa

- [A1] **Random data Cauchy problem for supercritical Schrödinger equations.**
Laurent Thomann.
Ann. I. H. Poincaré - AN, 26 (2009), no. 6, 2385–2402.
- [A2] **Gibbs measure for the periodic derivative nonlinear Schrödinger equation.**
Laurent Thomann et Nikolay Tzvetkov.
Nonlinearity. 23 (2010), 2771–2791.
- [A3] **KAM for the quantum harmonic oscillator.**
Benoît Grébert et Laurent Thomann.
Comm. Math. Phys. 307, no 2, (2011), 383–427.
- [A4] **Long time dynamics for the one dimensional non linear Schrödinger equation.**
Nicolas Burq, Laurent Thomann et Nikolay Tzvetkov.
Ann. Inst. Fourier. À paraître.
- [A5] **Invariant measures for NLS with harmonic potential.**
Nicolas Burq, Laurent Thomann et Nikolay Tzvetkov.
Compte-rendu des Journées EDP, Évian 2009.
- [A6] **Global infinite energy solutions for the cubic wave equation.**
Nicolas Burq, Laurent Thomann et Nikolay Tzvetkov.
Bull. Soc. Math. France. À paraître.
- [A7] **Remarks on the Gibbs measures for nonlinear dispersive equations.**
Nicolas Burq, Laurent Thomann et Nikolay Tzvetkov.
Preprint.

Dynamiques résonantes

- [A8] **Resonant dynamics for the quintic non linear Schrödinger equation.**
Benoît Grébert et Laurent Thomann.
Ann. I. H. Poincaré - AN, 29 (2012), no. 3, 455–477.
- [A9] **Beating effects in cubic Schrödinger systems and growth of Sobolev norms.**
Benoît Grébert, Éric Paturel et Laurent Thomann.
Nonlinearity. 26 (2013), 1361–1376.

[A10] **Dynamics on resonant clusters for the quintic non linear Schrödinger equation.**

Emanuele Haus et Laurent Thomann.

Dynamics of PDE. 10. no. 2, 157–169, 2013.

Autres travaux non présentés dans le mémoire

Quasimodes non-linéaires, instabilités

[A11] **Geometric and projective instability for the Gross-Pitaevski equation.**

Laurent Thomann.

Asymptot. Anal. 51 (2007), no. 3-4, 271–287.

[A12] **The WKB method and geometric instability for nonlinear Schrödinger equations on surfaces.**

Laurent Thomann.

Bull. Soc. Math. France. 136 (2008), no. 2, 167–193.

[A13] **Instabilities for supercritical Schrödinger equations in analytic manifolds.**

Laurent Thomann.

J. Differential Equations, 245 (2008), no. 1, 249–280.

[A14] **Construction of nonlinear quasimodes near elliptic periodic orbits.**

Pierre Albin, Hans Christianson, Jeremy Marzuola et Laurent Thomann.

Physica D : Nonlinear Phenomena, 241 (2012), no. 4, 409–425.

Divers

[A15] **A remark on the Schrödinger smoothing effect.**

Laurent Thomann.

Asymptot. Anal. 69 (2010), no. 1-2, 117–123.

[A16] **Low regularity for a quadratic Schrödinger equation on the circle.**

Laurent Thomann.

Differential and Integral Equations, 24, no 11-12 (2011), 1073–1092.

[A17] **Dynamics of Klein-Gordon on a compact surface near an homoclinic orbit.**

Benoît Grébert, Tiphaine Jézéquel et Laurent Thomann.

Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A. À paraître.

2 Dynamiques hamiltoniennes et aléa

2.1 Séries aléatoires

Dans la première partie de ce mémoire, beaucoup de nos résultats reposent sur des propriétés remarquables des séries aléatoires. Ces séries, qu'elles soient à valeurs réelles ou dans un espace de Banach, ont beaucoup été étudiées pour elles-mêmes : voir les livres de Marcus-Pisier [72] et de J.-P. Kahane [59]. Nous allons les utiliser dans l'étude des équations aux dérivées partielles ; commençons par donner quelques propriétés qui seront utiles par la suite.

2.1.1 Inégalité de Khintchin et chaos de Wiener

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé. On dira qu'une suite de variables aléatoires $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'Hypothèse 1 si

Hypothèse 1. *Les variables $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et leur distribution conjointe θ vérifie*

$$\exists c > 0, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma x} d\theta(x) \leq e^{c\gamma^2}.$$

Cette condition implique que la loi considérée est centrée et admet des moments à tout ordre, en particulier sa distribution est très localisée près de zéro. Par exemple on peut choisir des gaussiennes $d\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx$ ou des lois de type Bernoulli $d\theta(x) = \frac{1}{2}\delta_{x_0}(x) + \frac{1}{2}\delta_{-x_0}(x)$.

Alors on a le résultat suivant (voir [26, Lemma 3.1] pour une preuve), connu sous le nom d'inégalité de Paley-Zygmund [80, 81, 82] ou de Khintchin

Lemme 2.1.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \geq 2$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$*

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sqrt{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Dans le cas où les g_n sont des gaussiennes centrées indépendantes, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n g_n(\omega)$ est une gaussienne centrée et l'on peut montrer le résultat de façon élémentaire. En général, ce résultat se démontre grâce à l'inégalité de Markov combinée à un argument d'optimisation.

Le Lemme 2.1.1 montre un phénomène de régularisation dû à l'aléa. Prenons un exemple concret : on choisit $c_n = 1/(n+1)$ et (g_n) une suite de variables de Bernoulli centrées. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ diverge, mais d'après (2.1) on a $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n g_n(\omega) \right| < +\infty$, \mathbf{p} -p.s., autrement dit un changement de signe aléatoire rend la série convergente p.s.

À partir du Lemme 2.1.1 avec l'inégalité de Markov et en faisant une optimisation en $p \geq 2$, et grâce à la connaissance explicite de la constante $C\sqrt{p}$ dans (2.1), on peut obtenir le résultat de grande déviation suivant qui permet de quantifier la taille ponctuelle de la série.

Corollaire 2.1.2. *Il existe des constantes $c, C > 0$ telles que pour tout $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $\lambda > 0$*

$$\mathbf{p}\left(\omega \in \Omega ; \left| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n g_n(\omega) \right| > \lambda\right) \leq C e^{-c\lambda^2 / \|c\|_{\ell^2}^2}.$$

Les résultats précédents sont bien connus par les probabilistes et les spécialistes de l'analyse harmonique, mais ne semblent pas avoir été utilisés pour l'étude des équations aux dérivées partielles avant le travail de Burq-Tzvetkov [26, 27] (voir aussi [21] pour une présentation du sujet). Donnons de suite une application du Lemme 2.1.1.

Application à l'inégalité de Strichartz pour Schrödinger sur le tore :

Soient $d \geq 1$ et $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f_n e^{in \cdot x} \in L^2(\mathbb{T}^d)$. Pour étudier l'équation de Schrödinger non-linéaire il peut être utile d'établir des inégalités de Strichartz, qui sont des bornes espace-temps de la solution libre :

$$\left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^q((0,T) \times \mathbb{T}^d)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

Ces inégalités sont souvent difficiles à obtenir et nécessitent des restrictions sur $q \geq 2$ et $d \geq 1$.

Montrons comment à partir du Lemme 2.1.1 on peut simplement obtenir une version faible de ces inégalités, quels que soient $q \geq 2$ et $d \geq 1$.

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$ on considère une suite de v.a. $(g_n)_{n \geq 1}$ vérifiant l'Hypothèse 1. On définit alors la variable aléatoire, appelée "randomisée de f " donnée par

$$f^\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n(\omega) f_n e^{in \cdot x} \in L^2(\Omega; L^2(\mathbb{T}^d)).$$

La solution libre de Schrödinger issue de f^ω s'écrit $e^{it\Delta} f^\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g_n(\omega) f_n e^{-it|n|^2} e^{inx}$. Alors en posant $c_n = f_n e^{-it|n|^2} e^{inx}$, il n'est pas difficile de montrer que pour tout $q \geq 2$ il existe des constantes $c, C > 0$ telles que

$$\mathbf{p}\left(\omega \in \Omega ; \left\| e^{it\Delta} f^\omega \right\|_{L^q((0,T) \times \mathbb{T}^d)} > \lambda\right) \leq C e^{-c\lambda^2 / \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2},$$

qui est bien une version probabiliste de l'inégalité de Strichartz usuelle. Ceci a été utilisé pour la première fois par Burq et Tzvetkov dans [26, 27] pour montrer des résultats d'existence presque sûre pour l'équation des ondes.

Remarques :

- Une telle approche est possible dès que le laplacien a un spectre discret (par exemple sur une variété compacte, ou si l'on considère le laplacien avec un potentiel confinant). Dans ce cas, on munit L^2 d'une base hilbertienne de fonctions propres et on utilise les estimées en norme L^p de ces fonctions propres.
- La randomisation ainsi que les estimées de la série aléatoire dépendent du choix d'une base hilbertienne.
- Il est important de souligner que si la randomisation induit une régularisation dans l'échelle des espaces L^p , $p > 2$, ce n'est pas le cas au niveau L^2 . Voir l'appendice de [26] pour le résultat suivant : Soit $f \in H^s$ et telle que $f \notin H^{s+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$, alors presque sûrement $f^\omega \notin H^{s+\varepsilon}$.

Pour conclure ce paragraphe, donnons une version multilinéaire de (2.1) dans le cas particulier des gaussiennes qui sera utile dans la suite. Le résultat repose sur les estimées d'hypercontractivité du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (voir [A2] pour plus de détails).

Proposition 2.1.3 (Chaos de Wiener).

Soient $c(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{C}$ et $(g_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ des gaussiennes complexes i.i.d., centrées et normalisées dans L^2 . Pour $k \geq 1$ on définit

$$S_k(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} c(n_1, \dots, n_k) g_{n_1}(\omega) \cdots g_{n_k}(\omega).$$

Alors pour tout $p \geq 2$

$$\|S_k\|_{L^p(\Omega)} \leq \sqrt{k+1} (p-1)^{\frac{k}{2}} \|S_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ce résultat signifie que l'on peut se ramener au cas $p = 2$ dans les estimées de produits de séries aléatoires, ce qui est agréable, puisque dans ce cas on peut écrire explicitement tous les termes. Si $k = 1$ on retrouve le Lemme 2.1.1 dans le cas des gaussiennes. Ce qui est remarquable dans ce résultat, c'est la connaissance explicite de la constante de la borne en fonction de k, p , qui permet d'obtenir des estimées de grande déviation avec décroissance exponentielle :

$$\mathbf{p}\left(\omega \in \Omega ; \left|S_k(\omega)\right| > \lambda\right) \leq C e^{-c\lambda^{2/k}}.$$

2.1.2 Application à l'existence locale d'EDP

Présentons le travail [A1] qui concerne l'existence locale de solutions fortes pour l'équation de Schrödinger cubique avec potentiel harmonique

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - |x|^2 u = \pm |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.2)$$

en dimension $d \geq 2$ (le cas $d = 1$ sera détaillé dans la Section 2.2). On note $H = -\Delta + |x|^2$ l'oscillateur harmonique et on définit les espaces de Sobolev basés sur l'opérateur H

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : H^{s/2} u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}. \quad (2.3)$$

Grâce aux inégalités de Strichartz, on peut montrer [51] que l'équation (2.2) est localement bien posée dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ dès que $s > s_c := d/2 - 1$, avec un flot uniformément continu sur les

bornés de $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$. D'un autre côté, Christ-Colliander-Tao [35] ont montré que l'indice s_c est optimal, en mettant en défaut l'uniforme continuité du flot dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$, dès que $s < s_c$. Pour plus de résultats déterministes concernant NLS avec potentiel quadratique, voir Zhang [98], Carles [29, 30] et le livre [33].

Nous allons utiliser une idée de Burq-Tzvetkov [26, 27] qui consiste à randomiser les conditions initiales pour montrer que (2.2) est localement bien posée pour beaucoup de données $f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s < s_c$. Plus précisément, on note $(h_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$ de fonctions propres de H tel que $Hh_n = \lambda_n^2 h_n$ pour tout $n \geq 0$.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. vérifiant l'Hypothèse 1. À tout élément $f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ que l'on écrit

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n h_n(x),$$

on peut associer $\omega \mapsto f^\omega \in L^2(\Omega; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))$ donné par

$$f^\omega(x) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n g_n(\omega) h_n(x). \quad (2.4)$$

En effet, par Parseval

$$\|f^\omega\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2 = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^{2s} |\alpha_n|^2 |g_n(\omega)|^2,$$

puis $\int_{\Omega} \|f^\omega\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2 d\mathbf{p}(\omega) \leq C \|f\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)}^2$ par intégrabilité des (g_n) . Avec le même argument, on montre que la somme partielle associée est de Cauchy dans $L^2(\Omega; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))$ ce qui permet de définir la limite (2.4).

Au lieu de résoudre (2.2) avec donnée f , on résout pour f^ω et on obtient

Théorème 2.1.4 ([A1]). *Soient $d \geq 2$, $\sigma > \frac{d}{2} - 1 - \frac{1}{d+3}$ et $f \in \mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$. On considère la fonction $f^\omega \in L^2(\Omega; \mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}^d))$ donnée par la randomisation (2.4). Alors il existe $s > \frac{d}{2} - 1$ tel que pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe $T_\omega > 0$ et une unique solution à (2.2) de condition initiale f^ω de la forme*

$$u(t) = e^{-itH} f^\omega + \mathcal{C}([0, T_\omega]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)). \quad (2.5)$$

On peut quantifier le temps d'existence de la façon suivante : pour tout $0 < T \leq 1$, il existe un événement Ω_T tel que

$$\mathbf{p}(\Omega_T) \geq 1 - Ce^{-c/T^\delta}, \quad C, c, \delta > 0,$$

et tel que pour tout $\omega \in \Omega_T$, il existe une unique solution de (2.2) dans la classe (2.5) avec temps d'existence $T_\omega = T$.

Le Théorème 2.1.4 montre que l'on peut résoudre (2.2) pour beaucoup de données sur-critiques avec un gain de $1/(d+3)$ dérivée par rapport à l'indice critique.

Cette méthode permet également d'obtenir des résultats d'existence locale pour l'équation de Schrödinger cubique sans potentiel

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \pm |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (2.6)$$

En utilisant une transformation explicite qui permet de passer de (2.2) à (2.6), on montre que

Théorème 2.1.5 ([A1]). *Soient $d \geq 2$, $\sigma > \frac{d}{2} - 1 - \frac{1}{d+3}$ et $f \in \mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f^\omega \in L^2(\Omega; \mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}))$ donnée par la randomisation (2.4). Alors il existe $s > \frac{d}{2} - 1$ tel que pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe $T_\omega > 0$ et une solution unique à (2.6) avec condition initiale f^ω de la forme*

$$u(t) = e^{it\Delta} f^\omega + \mathcal{C}([0, T_\omega]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)).$$

Remarque 2.1.6. *Soit $H^s(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Sobolev usuel sur \mathbb{R}^d . Alors pour $s > 0$ on peut montrer que*

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^d), \langle x \rangle^s u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Par rapport aux résultats connus d'existence et d'unicité dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, le Théorème 2.1.5 montre que l'on peut résoudre (2.6) pour des données de régularité sur-critique, mais avec un certain taux de décroissance à l'infini.

Idées de preuve

La stratégie générale pour construire le flot est la suivante :

Étape 1 : utilisation des propriétés dispersives des fonctions propres. Les fonctions propres $(h_n)_{n \geq 0}$ de l'oscillateur harmonique, qui sont des combinaisons linéaires de produits de fonctions d'Hermite jouissent d'une propriété remarquable de décroissance en norme L^p . Si l'on note $Hh_n = \lambda_n^2 h_n$ on a pour

$$p_\star = 2(d+3)/(d+1), \tag{2.7}$$

et tout $\varepsilon > 0$ l'estimation

$$\|h_n\|_{L^{p_\star}(\mathbb{R}^d)} \leq C \lambda_n^{-1/(d+3)-\varepsilon} \|h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.8}$$

Pour $d = 1$ l'estimation est due à Yajima-Zhang [94] et dans le cas général à Koch-Tataru [61]. Ainsi, lorsque $n \rightarrow +\infty$ une partie de la masse des h_n part à l'infini. Notons qu'un tel phénomène n'est pas possible sur une variété compacte, et qu'en général dans ce dernier cas on a plutôt des phénomènes de concentration.

En combinant l'estimée (2.8) avec le Lemme 2.1.1 on obtient une version probabiliste de Strichartz avec un gain de $1/(d+3)$ dérivée dans $L^{p_\star}(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, on définit l'espace de Sobolev

$$\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : H^{s/2}u \in L^p(\mathbb{R}^d)\},$$

alors

Proposition 2.1.7 ([A1]). *Soient $d \geq 1$ et p_\star donné par (2.7). Soient $p_\star \leq p < \infty$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et $0 < T \leq 1$. Soit $f \in \mathcal{H}^\sigma$ et soit f^ω sa randomisée. Alors pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\|e^{-itH} f^\omega\|_{L^p(\Omega \times (0,T); \mathcal{W}^{1/(d+3)+\sigma-\varepsilon,p_\star}(\mathbb{R}^d))} \lesssim \sqrt{p} T^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)}.$$

Ceci implique en particulier l'estimée de grande déviation

$$\mathbf{p}(\{\omega \in \Omega : \|e^{-itH} f^\omega\|_{L^p((0,T); \mathcal{W}^{1/(d+3)+\sigma-\varepsilon,p_\star}(\mathbb{R}^d))} \geq \lambda\}) \leq C e^{-c\lambda^2}.$$

Étape 2 : point fixe dans les espaces de Strichartz. Pour tirer profit de l'estimée de la Proposition 2.1.7 on cherche une solution de la forme $u(t) = e^{-itH} f^\omega + v(t)$. Alors u est solution de (2.2) si et seulement si v est un point fixe de

$$v \mapsto -i \int_0^t e^{-i(t-\tau)H} |e^{-i\tau H} f^\omega + v|^2 (e^{-i\tau H} f^\omega + v)(\tau, \cdot) d\tau.$$

Le terme de fluctuation v est traité comme un terme déterministe. En fait on montre que cette application est contractante dans les espaces de Strichartz à un niveau de régularité $s > s_c$. Le point-clé est d'estimer le terme linéaire uniquement dans la norme de la Proposition 2.1.7, dans laquelle on peut tirer profit du gain p.s. de régularité.

Remarque 2.1.8. *Plus généralement, dans [A1] on obtient un résultat pour l'équation de Schrödinger non-linéaire avec un potentiel confinant à croissance au moins quadratique en dimension 1. Dans ce cas, on a encore des estimées dispersives de type (2.8) mais qui dépendent de la croissance du potentiel (voir [94]).*

Remarque 2.1.9. *Dans le travail [26, 27], Burq-Tzvetkov développent une théorie de Cauchy pour des équations des ondes sur-critiques sur des variétés compactes. Dans leur cas, le gain de régularité provient du terme de Duhamel des ondes, alors que dans notre cas ce sont les estimées dispersives des fonctions propres qui permettent de conclure.*

Étape 3 : la transformation de lentille. On suppose que $v(s, y)$ est solution de l'équation

$$i\partial_s v + \Delta_y v = |v|^{k-1} v, \quad s \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (2.9)$$

Alors on définit $u(t, x)$ pour $|t| < \frac{\pi}{4}$, $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$u(t, x) = \frac{1}{\cos^{\frac{d}{2}}(2t)} v\left(\frac{\tan(2t)}{2}, \frac{x}{\cos(2t)}\right) e^{-\frac{i|x|^2 \tan(2t)}{2}}, \quad (2.10)$$

et on peut vérifier que u est solution de

$$i\partial_t u - H u = \cos^\alpha(2t) |u|^{k-1} u, \quad |t| < \frac{\pi}{4}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (2.11)$$

avec $\alpha = (k-1)d/2 - 2$. La transformation (2.10) a été utilisée dans l'étude de l'équation de Schrödinger L^2 -critique (dans ce cas $\alpha = 2$), notamment par R. Carles [31].

La théorie d'existence développée dans les étapes précédentes s'applique également à (2.11), et on déduit immédiatement le résultat pour (2.9).

2.1.3 Application à la construction de mesures de Gibbs

Nous présentons ici une autre application des séries aléatoires qui est la construction de mesures de Gibbs pour des EDP dispersives. Les mesures de Gibbs sont des objets très étudiés en physique statistique. D'un point de vue mathématique, leur construction est intéressante en soi, puisqu'elle nécessite souvent des estimées fines d'analyse harmonique. Nos motivations sont également les suivantes :

- Des mesures de Gibbs permettent d'obtenir des propriétés de récurrence de flot, d'après le théorème de récurrence de Poincaré.
- Une mesure de Gibbs peut en un certain sens remplacer une loi de conservation à faible régularité et permet de construire des solutions globales à des EDP, qu'elles soient fortes (Section 2.2) ou faibles (Section 2.4).

Qu'est-ce qu'une mesure de Gibbs ?

Soit un système hamiltonien dans \mathbb{R}^2

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (2.12)$$

et supposons que H s'écrive $H(x, y) = x^2 + y^2 + P(x, y)$ où P est une perturbation d'ordre supérieure. Comme le champ (2.12) est à divergence nulle, on sait d'après le théorème de Liouville que la mesure de Lebesgue $dx dy$ est invariante par le flot de l'équation. De même, comme H est conservée, la mesure $f(H(x, y)) dx dy$ est également invariante, quel que soit f . En particulier, on peut définir

$$d\rho(x, y) = e^{-H(x, y)} dx dy = e^{-P(x, y)} d\mu(x, y), \quad (2.13)$$

où μ est une gaussienne et c'est la mesure ρ qui est appelée mesure de Gibbs. Cette définition présente l'intérêt de pouvoir être étendue en dimension infinie : il suffit de montrer que $|P| < +\infty$, μ -p.s. pour que ρ donnée par (2.13) soit non triviale.

Donnons l'exemple concret de Schrödinger sur le tore \mathbb{T}^d , qui permet de voir quels vont être les problèmes de construction et de support d'une mesure de Gibbs. Soit

$$i\partial_t u + (\Delta - 1)u = |u|^2 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d, \quad (2.14)$$

qui s'obtient à partir de l'équation usuelle par changement d'inconnue $u \mapsto e^{it} u$. On se donne une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$ de $L^2(\mathbb{T}^d)$ de fonctions propres de $(1 - \Delta)$. Alors

$$(1 - \Delta)e_n = \lambda_n^2 e_n, \quad n \geq 0,$$

et on vérifie que $\lambda_n \sim cn^{1/d}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On décompose $u = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e_n$ en série de Fourier, alors dans les coordonnées c_n, \bar{c}_n , l'hamiltonien de l'équation s'écrit

$$H = \int_{\mathbb{T}^d} (|u|^2 + |\nabla u|^2) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} |u|^4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} |u|^4.$$

Soit (g_n) une suite i.i.d. de gaussiennes complexes centrées réduites sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$. On peut alors interpréter la mesure de Gibbs de la partie linéaire

$$d\mu = \prod_{n=0}^{\infty} \beta_n e^{-\lambda_n^2 |c_n|^2} dc_n d\bar{c}_n,$$

($\beta_n > 0$ étant un facteur de normalisation) comme la mesure image $\mu = \mathbf{p} \circ \varphi^{-1}$ avec

$$\omega \mapsto \varphi(\omega, \cdot) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_n(\omega)}{\lambda_n} e_n.$$

En utilisant l'asymptotique de λ_n , on vérifie que $\varphi \in L^2(\Omega; H^s(\mathbb{T}^d))$ pour tout $s < 1 - d/2$. En particulier, on déduit que μ est supportée dans $X^{1-d/2}(\mathbb{T}^d) := \cap_{s < 1-d/2} H^s(\mathbb{T}^d)$.

Pour mieux comprendre la mesure μ , mentionnons les propriétés élémentaires suivantes :

- $\mu(X^{1-d/2}(\mathbb{T}^d)) = 1$ (μ est une mesure de probabilité)
- $\mu(H^{1-d/2}(\mathbb{T}^d)) = 0$ (μ est supportée dans un ensemble irrégulier)
- Soit $\sigma < 1 - d/2$. Pour tout ouvert non vide $B \subset H^\sigma(\mathbb{T}^d)$, $\mu(B) > 0$ (μ charge tous les ouverts).

Maintenant, en ce qui concerne la construction de la mesure de Gibbs associée au problème non-linéaire :

- En dimension $d = 1$: μ est supportée dans $X^{1/2}(\mathbb{T}^d)$. Une injection de Sobolev permet alors de montrer que $\int_{\mathbb{T}} |u|^4 < +\infty$ μ -p.s. et on définit ainsi une mesure de Gibbs par

$$d\rho(u) = \exp(-\|u\|_{L^4(\mathbb{T})}^4/2) d\mu(u).$$

- En dimension $d = 2$: μ est supportée dans $X^0(\mathbb{T}^d)$. La construction plus difficile a été faite par Bourgain après renormalisation de Wick de la non-linéarité.
- En dimension $d \geq 3$: on ne sait pas définir de mesure de Gibbs pour (2.14).

La construction de mesure de Gibbs pour les équations focalisantes est plus difficile en général. En effet, si l'on note $d\rho(u) = G(u)d\mu(u)$ il faut s'assurer que la densité est intégrable par rapport à μ , i.e. $G \in L^p(d\mu)$. Ceci induit des restrictions sur le degré de la non-linéarité et nécessite des arguments de renormalisation, comme nous allons en voir juste après.

Pour la construction mathématique de mesures de Gibbs pour des EDP dispersives, nous renvoyons à P. Zhidkov [99], Lebowitz-Rose-Speer [69], B. Bidégaray [13], J. Bourgain [15, 17], et plus récemment à N. Tzvetkov [91, 90, 89], Burq-Tzvetkov [25, 27], T. Oh [78, 79] et Tzvetkov-Visciglia [92], ainsi qu'aux papiers que nous présentons ici.

Construction d'une mesure pour l'équation de Schrödinger

Ici, comme exemple de construction, nous allons présenter l'article [A2], où avec N. Tzvetkov nous construisons une mesure pour l'équation de Schrödinger périodique avec dérivée (*derivative non linear Schrödinger equation*). Une motivation pour ce travail, est d'utiliser à terme cette mesure pour construire des solutions globales de faible régularité à l'équation : ceci est le résultat du Théorème 2.4.2.

Soit $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le cercle. Dans la suite on considère l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = i\partial_x(|u|^2 u), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.15)$$

Pour $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ on note $\int_{\mathbb{S}^1} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$. Outre la moyenne, l'équation (2.15) admet trois lois de conservation élémentaires qui sont :

- La masse

$$M(u(t)) = \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} = M(u_0).$$

- L'énergie

$$H(u(t)) = \int_{\mathbb{S}^1} |\partial_x u|^2 dx - \frac{3}{4} \text{Im} \int_{\mathbb{S}^1} \bar{u}^2 \partial_x (u^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |u|^6 dx = H(u_0).$$

- Le moment

$$P(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |u|^4 dx - \text{Im} \int_{\mathbb{S}^1} \bar{u} \partial_x u dx = P(u_0).$$

Le moment est l'hamiltonien de (2.15) pour une structure symplectique un peu compliquée faisant intervenir ∂_x (voir l'appendice de [A2]). Dans notre construction, nous allons plutôt utiliser l'énergie H .

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé et $(g_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite indépendante de gaussiennes complexes centrées réduites, $g_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Dans la suite on note $\langle n \rangle = \sqrt{n^2 + 1}$. En passant par les sommes partielles, on définit alors la v.a. φ par

$$\omega \mapsto \varphi(\omega, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle} e^{inx}, \quad (2.16)$$

et on montre que $\varphi \in L^2(\Omega; H^\sigma(\mathbb{S}^1))$ pour tout $\sigma < 1/2$.

Dans la suite on note $X^{1/2}(\mathbb{S}^1) = \bigcap_{\sigma < 1/2} H^\sigma(\mathbb{S}^1)$. On définit la mesure gaussienne μ sur $X^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ par $\mu = \mathbf{p} \circ \varphi^{-1}$. Ainsi, μ est la mesure image de \mathbf{p} par l'application

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow X^{1/2}(\mathbb{S}^1) \\ \omega &\longmapsto \varphi(\omega, \cdot). \end{aligned}$$

Pour un élément $u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ de $L^2(\mathbb{S}^1)$, on définit le projecteur spectral Π_N par $u_N = \Pi_N u = \sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx}$. On introduit alors

$$f_N(u) = \text{Im} \int_{\mathbb{S}^1} \overline{u_N^2(x)} \partial_x (u_N^2(x)) dx.$$

Soient $\kappa > 0$ et $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \chi \leq 1$ une fonction continue de support $\text{supp } \chi \subset [-\kappa, \kappa]$ telle que $\chi = 1$ sur $[-\frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa}{2}]$. Soient enfin la densité

$$G_N(u) = \chi(\|u_N\|_{L^2(\mathbb{S}^1)}) e^{\frac{3}{4} f_N(u) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |u_N(x)|^6 dx}, \quad (2.17)$$

et la mesure ρ_N sur $X^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ donnée par

$$d\rho_N(u) = G_N(u) d\mu(u).$$

On peut montrer, grâce au théorème de Liouville que ρ_N est une mesure invariante par le flot d'une approximation de type Galerkin de (2.15) (voir l'appendice de [A2]). Avec N. Tzvetkov nous avons montré que la densité G_N admettait une limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, ce qui permet de définir une mesure finie non nulle ρ qui est formellement invariante pour (2.15). Rappelons que G_N dépend de κ via le support de χ . Alors on a :

Théorème 2.1.10 ([A2]). *La suite $G_N(u)$ définie en (2.17) converge en mesure par rapport à la mesure μ vers une limite notée $G(u)$.*

De plus pour tout $p \in [1, \infty[$, il existe $\kappa_p > 0$ tel que pour tout $0 < \kappa \leq \kappa_p$, $G(u) \in L^p(d\mu(u))$ et la suite G_N converge vers G dans $L^p(d\mu(u))$, lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Ce résultat permet de définir une mesure non triviale sur $X^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ par

$$d\rho(u) \equiv G(u)d\mu(u).$$

Les idées principales de la preuve proviennent du papier [89] où N. Tzvetkov a construit une mesure de Gibbs pour l'équation de Benjamin-Ono. Ici on a une difficulté supplémentaire qui est d'estimer le terme f_N : pour faire cela, on utilise des méthodes de renormalisation des séries et la Proposition 2.1.3.

En suivant une approche différente, Nahmod, Oh, Rey-Bellet et Staffilani [74] puis Nahmod, Rey-Bellet, Sheffield et Staffilani [76] ont construit des solutions globales sur le support de ρ . Leur approche est basée sur la théorie d'existence et d'unicité locale de Grünrock-Herr [57] valable pour une transformée de jauge de l'équation (2.15). Nous renvoyons à la Section 2.4 (et en particulier au Théorème 2.4.2) pour une utilisation de la mesure ρ dans la construction de solutions faibles globales de (2.15).

2.2 Solutions fortes globales

Dans la Section 2.1.2 nous avons montré comment on peut utiliser l'aléa pour construire des solutions fortes localement en temps pour des équations sur-critiques. Ici nous allons de plus utiliser une mesure de Gibbs pour construire un flot global presque-sûrement défini sur le support de cette mesure. Cette idée qui remonte à Lebowitz-Rose-Speer [69] s'est révélée fructueuse dans différents contextes : citons Bourgain [17, 15], Zhidkov [99], Tzvetkov [90, 91], Burq-Tzvetkov [27] et Oh [78, 79].

2.2.1 Introduction et résultats

Nous présentons le travail [A4] dans lequel nous étudions l'équation de Schrödinger défocalisante avec potentiel harmonique

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u = |u|^{k-1} u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.18)$$

où $k \geq 5$ est un entier impair.

On note $H = -\partial_x^2 + x^2$ l'oscillateur harmonique. Rappelons que cet opérateur est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R})$ et admet une famille $(h_n)_{n \geq 0}$ de fonctions propres (les fonctions d'Hermites) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Hh_n = (2n + 1)h_n$ et qui forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Rappelons également la définition (2.3) des espaces de Sobolev $\mathcal{H}^\sigma(\mathbb{R})$. On définit alors $X^0(\mathbb{R}) = \bigcap_{\sigma > 0} \mathcal{H}^{-\sigma}(\mathbb{R})$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé et $g_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$ une suite i.i.d. On définit alors la v.a. gaussienne

$$\varphi(\omega, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{2n+1}} g_n(\omega) h_n(x),$$

ainsi que la mesure gaussienne μ sur $X^0(\mathbb{R})$ par $\mu = \mathbf{p} \circ \varphi^{-1}$. Dans [A4] on montre que l'on peut définir une mesure de probabilité par

$$d\rho(u) = \beta \exp\left(-\frac{1}{k+1} \|u\|_{L^{k+1}(\mathbb{R})}^{k+1}\right) d\mu(u),$$

où $\beta > 0$ est un facteur de normalisation.

Alors on peut énoncer

Théorème 2.2.1 ([A4]). *Il existe un ensemble $\Sigma \subset X^0(\mathbb{R})$ avec $\rho(\Sigma) = 1$ et tel que pour tout $f \in \Sigma$, il existe une unique solution globale $u(t, \cdot) = \Phi(t)(f)$ de (2.18) telle que*

$$u(t, \cdot) - e^{-itH} f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathcal{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R})), \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

On a de plus $\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ et la mesure ρ est invariante par Φ .

Dans [A4] on montre plus précisément que pour tout $\sigma > 0$ et $t \in \mathbb{R}$

$$\|u(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}^{-\sigma}(\mathbb{R})} \leq C(\Lambda(f, \sigma) + \ln^{1/2}(1 + |t|)),$$

où la constante $\Lambda(f, \sigma)$ vérifie l'estimée de grande déviation $\mu(f : \Lambda(f, \sigma) > \lambda) \leq Ce^{-c\lambda^2}$.

L'unicité dans le théorème doit être comprise au sens suivant : pour tout $T > 0$, il existe un espace fonctionnel X_T continûment inclus dans $\mathcal{C}([-T, T]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}))$ tel que la solution soit unique dans la classe $u(t, \cdot) - e^{-itH} f \in X_T$.

Remarque 2.2.2. *Dans le cas $k = 3$, on a un analogue du Théorème 2.2.1 mais avec un gain de régularité de $1/3$. Pour $k = 3$ on est également capables de traiter l'équation focalisante (avec non-linéarité $-|u|^2 u$). Dans ce contexte une difficulté supplémentaire apparaît, à savoir l'intégrabilité de la densité $\exp(\frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^2)$ par rapport à la mesure μ .*

L'approche que nous venons de développer nous permet également d'obtenir des résultats pour l'équation de Schrödinger sans potentiel. Soit

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^{k-1} u, & k \geq 5, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x), \end{cases} \quad (2.19)$$

alors on a

Théorème 2.2.3 ([A4]). *Pour tout $0 < s < 1/2$, l'équation (2.19) a pour μ -presque toute donnée initiale une unique solution globale telle que*

$$u(t, \cdot) - e^{-it\Delta} f \in C(\mathbb{R}; \mathcal{H}^s(\mathbb{R})).$$

De plus, cette solution diffuse au sens suivant : il existe μ -p.s. des états $g_{\pm} \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R})$ tels que

$$\|u(t, \cdot) - e^{it\Delta}(f + g_{\pm})\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \longrightarrow \pm\infty.$$

Le Théorème 2.2.3 montre un phénomène de diffusion pour des données qui sont grandes, irrégulières, (μ -presque sûrement, $f \notin L^2(\mathbb{R})$) et qui tendent vers 0 à l'infini (voir l'appendice de [A4]). Dans cette direction, citons le résultat de B. Dodson [45] qui montre le scattering dans $L^2(\mathbb{R})$ pour l'équation quintique. En général, les résultats de diffusion pour (2.19) nécessitent des données de régularité H^1 (voir [77]), et il semble que le résultat général du Théorème 2.2.3 est difficile à obtenir avec des méthodes déterministes.

La preuve repose sur la transformation de lentille que nous avons déjà utilisée dans [A1] : celle-ci permet de ramener l'équation (2.19) à une équation de la forme (2.18), mais avec non-linéarité $\cos \frac{k-5}{2}(2t)|u|^{k-1}u$. Dans ce cas, l'approche utilisée dans la preuve du Théorème 2.2.1 s'applique encore, à la différence que l'on perd l'invariance de l'énergie (sauf dans le cas $k = 5$), nous n'avons donc pas de mesure de Gibbs invariante. Néanmoins, persiste une monotonie qui permet de construire un flot global. Mentionnons pour finir, dans un autre contexte, Colliander-Oh [36] qui obtiennent un résultat d'existence globale pour NLS sans mesure invariante.

Les résultats des Théorèmes 2.2.1 et 2.2.3 ont été généralisés en dimension $d = 2$ par Y. Deng [44] puis par A. Poiret [83, 84] en dimension quelconque.

Dans le même ordre d'idée, A.-S. de Suzzoni [41] a obtenu un résultat de diffusion pour l'équation des ondes dans \mathbb{R}^3 . Dans ce contexte, il existe une transformation (de Penrose) qui change l'équation des ondes non-linéaire sur \mathbb{R}^3 en une équation des ondes non-linéaire sur \mathbb{S}^3 . On peut alors tirer profit de la compacité de \mathbb{S}^3 .

2.2.2 Idées de preuve

Étape 1 : existence locale, gain d'une demi-dérivée. Dans la preuve du Théorème 2.2.1, on a besoin d'une théorie de Cauchy locale dans $X^0(\mathbb{R})$ pour l'équation (2.18). Or l'indice critique de l'équation est $s_c = \frac{1}{2} - \frac{2}{k-1}$, donc il faut récupérer essentiellement $1/2$ dérivée lorsque $k \geq 5$ est grand. Rappelons qu'en utilisant simplement les estimations L^4 des fonctions d'Hermite, on avait gagné $1/4$ de dérivée en un sens probabiliste : c'est le résultat de la Proposition 2.1.7 pour $d = 1$.

Pour commencer, on énonce une version probabiliste de l'effet régularisant qui montre un gain local d'une $1/2$ dérivée pour le groupe libre.

Lemme 2.2.4. *Soient $0 < s < \sigma < \frac{1}{2}$ et $q \geq 2$. Alors il existe $C, c > 0$ tels que pour tout $\lambda > 0$*

$$\rho(u \in X^0(\mathbb{R}) : \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^\sigma} H^{s/2} e^{-itH} u \right\|_{L^q_{[0, 2\pi]} L^2(\mathbb{R})} > \lambda) \leq C e^{-c\lambda^2}.$$

L'amélioration par rapport à l'inégalité déterministe, est que l'on peut prendre $q \geq 2$ aussi grand que l'on veut.

Le deuxième ingrédient crucial est une estimée bilinéaire des fonctions d'Hermite qui a été prouvée par P. Gérard : il existe $C > 0$ telle que pour tout $0 \leq \theta \leq 1$ et $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|h_n h_m\|_{\mathcal{H}^\theta(\mathbb{R})} \leq C \max(n, m)^{-1/4+\theta/2} \left(\log(\min(n, m) + 1) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

L'inégalité montre en particulier que le produit permet de gagner $1/2$ dérivée dans l'échelle des espaces $\mathcal{H}^s(\mathbb{R})$.

Grâce au Lemme 2.2.4 et à (2.20) on est capable d'établir des estimations multilinéaires qui à leur tour permettent de montrer que (2.18) est localement bien posée dans un espace qui tient compte des informations dont on dispose sur le flot linéaire.

Remarque 2.2.5. Avec l'inégalité (2.20), on peut montrer que pour tout $\theta < \frac{1}{2}$ et $q \geq 2$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$

$$\rho(u \in X^0(\mathbb{R}) : \|(e^{-itH}u)^2\|_{L_T^q \mathcal{H}^\theta(\mathbb{R})} > \lambda) \leq C e^{-c\lambda}.$$

Nous n'avons pas utilisé cette estimation dans la preuve, mais elle montre bien le gain de régularité dû au carré.

Étape 2 : existence globale, utilisation de la mesure invariante. L'équation que nous étudions est donc localement bien posée sur le support de la mesure de Gibbs. Nous allons maintenant présenter, de façon informelle, un argument de Bourgain qui montre comment on peut utiliser une mesure invariante pour prolonger un flot défini localement. Supposons que :

- Il existe un flot Φ tel que le temps d'existence τ sur la boule

$$B_R = \{u \in X^0(\mathbb{R}) : \|u\| \leq R^{1/2}\},$$

est uniforme et tel que $\tau \sim R^{-\gamma}$ pour un certain $\gamma > 0$. De plus, pour tout $|t| \leq \tau$

$$\Phi(t)(B_R) \subset \{u \in X^0(\mathbb{R}) : \|u\| \leq (R+1)^{1/2}\}. \quad (2.21)$$

Nous ne précisons pas ici la norme $\|\cdot\|$ dont la définition est un peu technique.

- On a l'estimée de grande déviation $\rho(X^0(\mathbb{R}) \setminus B_R) \leq C e^{-cR}$.

Posons pour $T \leq e^{cR/2}$ fixé,

$$\Sigma_R = \bigcap_{k=-[T/\tau]}^{[T/\tau]} \Phi(-k\tau)(B_R). \quad (2.22)$$

Par invariance de la mesure, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \rho(X^0(\mathbb{R}) \setminus \Sigma_R) &\leq (2[T/\tau] + 1) \rho(X^0(\mathbb{R}) \setminus B_R) \\ &\leq C R^\gamma e^{cR/2} e^{-cR} \leq C e^{-cR/4}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

ce qui montre que Σ_R est un gros ensemble de $X^0(\mathbb{R})$ lorsque $R \rightarrow +\infty$. Maintenant, par définition (2.22) de Σ_R et (2.21), on en déduit que pour tout $|t| \leq T$ et $f \in \Sigma_R$

$$\|\Phi(t)(f)\| \leq (R+1)^{1/2}.$$

En particulier, pour $|t| = T \sim e^{cR/2}$

$$\|\Phi(t)(f)\| \leq C(\ln |t| + 1)^{1/2},$$

ce qui est bien la croissance annoncée dans le Théorème 2.2.1. Le terme – optimal – en $\ln^{1/2}(t)$ provient des estimations de grandes déviations des gaussiennes qui définissent la mesure.

Pour rendre cet argument rigoureux, il faut approcher l'équation par un système de dimension finie dont on sait montrer qu'il admet une mesure invariante ρ_N et un flot Φ_N avec des bornes uniformes en $N \geq 1$. Grâce à cela, on peut définir un flot global à (2.18) et finalement montrer que ρ est invariante par ce dernier. Voir également [22] pour une explication de cet argument.

Étape 3 : preuve du Théorème 2.2.3. On procède comme dans la preuve du Théorème 2.1.5 en utilisant la transformation donnée en (2.10) qui ramène le problème à l'étude en temps $|t| < \pi/4$ de l'équation

$$i\partial_t u - Hu = \cos^{\frac{k-5}{2}}(2t)|u|^{k-1}u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cette équation n'admet pas d'énergie conservée, mais dans l'argument de globalisation, ce n'est pas tant l'invariance d'une mesure qui compte, mais une monotonie (notamment dans (2.23)).

2.3 Solutions faibles globales pour les ondes

Soit $d \geq 3$. On considère l'équation des ondes cubique sur le tore $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + u^3 = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d, \\ (u, \partial_t u)(0, \cdot) = (u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d), \end{cases} \quad (2.24)$$

où l'on note

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d) := H^s(\mathbb{T}^d) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^d).$$

On définit $s_c = (d-2)/2$ l'indice critique de Sobolev pour (2.24). Alors on peut montrer que (2.24) est bien posée dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ si $s > s_c$ ([51]) et mal-posée si $s < s_c$ ([68, 67, 35]). On renvoie à l'introduction de [28] pour plus de détails. L'énergie de (2.24) s'écrit

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} (|\nabla u|^2 + (\partial_t u)^2) + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{T}^d} u^4,$$

ainsi avec les méthodes de compacité classiques déterministes (voir par exemple G. Lebeau [67, Section 6]) on peut construire des solutions faibles à (2.24) telles que

$$(u, \partial_t u) \in \mathcal{C}_w(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}^d) \cap L^4(\mathbb{T}^d)) \times \mathcal{C}_w(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{T}^d)),$$

et $\mathcal{E}(u)(t) \leq \mathcal{E}(u)(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (ici \mathcal{C}_w signifie faiblement continue en temps). À noter que cette méthode fonctionne même si l'indice critique est tel que $s_c > 1$ ce qui arrive dès que $d > 4$.

En dimension $d = 3$, N. Burq et N. Tzvetkov [28] ont montré que (2.24) était globalement bien posée en un sens probabiliste dans $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^3)$, $s > 0$. En dimension supérieure, leur approche ne s'applique plus, mais on peut néanmoins construire des solutions faibles d'énergie infinie avec des arguments probabilistes et de compacité : c'est l'objet de l'article [A6] que nous présentons ici. Dans ce travail, nous combinons l'approche de [28] avec celle de Nahmod-Pavlovic-Staffilani [75] pour Navier-Stokes.

Soient $0 < s < 1$ et $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ dont les séries de Fourier s'écrivent

$$u_j(x) = a_j + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^d} (b_{n,j} \cos(n \cdot x) + c_{n,j} \sin(n \cdot x)), \quad j = 0, 1,$$

avec $\mathbb{Z}_*^d = \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. On se donne $(\alpha_j(\omega), \beta_{n,j}(\omega), \gamma_{n,j}(\omega))$, $n \in \mathbb{Z}_*^d$, $j = 0, 1$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$ qui vérifient l'Hypothèse 1. On définit alors u_j^ω par

$$u_j^\omega(x) = \alpha_j(\omega) a_j + \sum_{n \in \mathbb{Z}_*^d} (\beta_{n,j}(\omega) b_{n,j} \cos(n \cdot x) + \gamma_{n,j}(\omega) c_{n,j} \sin(n \cdot x)),$$

et on définit la mesure $\mu_{(u_0, u_1)}$ sur $\mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ comme étant l'image de \mathbf{p} par l'application

$$\omega \longmapsto (u_0^\omega, u_1^\omega) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d).$$

On note \mathcal{M}^s l'ensemble de ces mesures $\mathcal{M}^s = \bigcup_{(u_0, u_1) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)} \{\mu_{(u_0, u_1)}\}$, et on définit le propagateur des ondes

$$S(t)(u_0, u_1) = \cos(t\sqrt{-\Delta})(u_0) + \frac{\sin(t\sqrt{-\Delta})}{\sqrt{-\Delta}}(u_1).$$

Alors on peut énoncer

Théorème 2.3.1 ([A6]). *Soient $0 < s < 1$ et $\mu \in \mathcal{M}^s$. Alors il existe un ensemble $\Sigma \subset \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^d)$ avec $\mu(\Sigma) = 1$ et tel que pour tout $(u_0, u_1) \in \Sigma$ l'équation (2.24) avec condition initiale $(u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1)$ admet une solution*

$$u(t) = S(t)(u_0, u_1) + w(t),$$

où pour tout $\varepsilon > 0$

$$(w, \partial_t w) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; H^{1-\varepsilon}(\mathbb{T}^d) \times H^{-\varepsilon}(\mathbb{T}^d)).$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|(w(t), \partial_t w(t))\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^d)} &\leq C(M + |t|)^{\frac{1-s}{s} + \varepsilon}, \\ \|w(t)\|_{L^4(\mathbb{T}^d)} &\leq C(M + |t|)^{\frac{1-s}{2s} + \varepsilon}, \end{aligned}$$

avec $\mu(M > \lambda) \leq C e^{-\lambda^\delta}$ pour un certain $\delta > 0$.

Ce résultat (obtenu par compacité) ne donne pas l'unicité de la solution dans la classe considérée. La solution construite s'écrit comme somme du terme libre et d'un terme dans l'espace d'énergie : cette régularisation est due au gain d'une dérivée dans le terme de Duhamel pour les ondes. Ceci peut être comparé au résultat du Théorème 2.2.1, mais dans ce dernier cas, le gain de régularité est dû aux propriétés dispersives des fonctions d'Hermite.

Ici l'existence globale ne repose pas sur une mesure de Gibbs invariante. Le point-clé est l'estimation suivante qui provient de [28]. On écrit $u(t) = S(t)(u_0, u_1) + w(t)$. Alors avec une simple intégration par parties on peut montrer que l'énergie de w

$$\mathcal{E}(w) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} (|\nabla w|^2 + (\partial_t w)^2) + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{T}^d} w^4,$$

vérifie

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(w) \leq C \mathcal{E}^{1/2}(w) (g(t) + f(t) \mathcal{E}^{1/2}(w)),$$

où f et g ne dépendent que des conditions initiales. Par Gronwall, cette estimation donne un contrôle a priori de w dans l'espace d'énergie, et un argument de compacité donne le résultat. À noter que cette méthode ne fonctionne que pour des non-linéarités au plus cubiques.

2.4 Solutions faibles globales pour les équations de Schrödinger

2.4.1 Introduction et résultats

Dans la partie précédente, nous avons construit des solutions à une EDP en tirant profit d'un phénomène de régularisation par la formule de Duhamel. Maintenant, en l'absence de celui-ci – typiquement pour Schrödinger sur une variété compacte – nous allons montrer comment on peut utiliser une mesure de Gibbs associée à l'équation non-linéaire pour construire des solutions globales à faible régularité. L'objectif ici est de :

- Construire des solutions globales d'énergie infinie, grâce à des méthodes probabilistes.
- Obtenir des propriétés de récurrence du flot grâce à des mesures invariantes.

L'approche que nous allons présenter s'inspire des travaux d'Albeverio-Cruzeiro [2] pour Euler et Da Prato-Debussche [40] pour Navier-Stokes avec forçage aléatoire. Avec N. Burq et T. Tzvetkov [A7] nous avons développé cette méthode pour différentes équations dispersives. Pour simplifier la présentation, nous allons nous concentrer sur le cas de NLS sur la sphère \mathbb{S}^3 .

On considère donc l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_{\mathbb{S}^3} u = |u|^{r-1} u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3, \\ u(0, x) = f(x) \in H^\sigma(\mathbb{S}^3), \end{cases} \quad (2.25)$$

où $1 \leq r < 5$. Dans [23] Burq, Gérard et Tzvetkov ont montré que (2.25) est globalement bien posée dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{S}^3)$. Sous une hypothèse radiale, nous allons construire des solutions faibles dont la régularité est essentiellement $H^{1/2-\varepsilon}$.

Plus précisément, soit $Z(\mathbb{S}^3)$ l'espace des fonctions zonales, *i.e.* l'espace des fonctions qui ne dépendent que de la distance au pôle nord de \mathbb{S}^3 . On définit $H_{rad}^\sigma(\mathbb{S}^3) := H^\sigma(\mathbb{S}^3) \cap Z(\mathbb{S}^3)$, $L_{rad}^2(\mathbb{S}^3) = H_{rad}^0(\mathbb{S}^3)$ et

$$X_{rad}^{1/2} = X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3) = \bigcap_{\sigma < 1/2} H_{rad}^\sigma(\mathbb{S}^3).$$

Pour $x \in \mathbb{S}^3$, on note $\theta = \text{dist}(x, N) \in [0, \pi]$ la distance géodésique de x au pôle nord et on définit

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad n \geq 1.$$

Alors, $(P_n)_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne de $L_{rad}^2(\mathbb{S}^3)$. Pour éviter le problème de la fréquence nulle, on fait le changement d'inconnue $u \mapsto e^{-it}u$, et dans la suite on étudie l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u + (\Delta_{\mathbb{S}^3} - 1)u = |u|^{r-1}u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3, \\ u(0, x) = f(x) \in H^\sigma(\mathbb{S}^3). \end{cases} \quad (2.26)$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé et $(g_n(\omega))_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de gaussiennes complexes centrées et réduites $g_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Comme dans la Section 2.1.3 on peut définir la v.a.

$$\omega \mapsto \varphi(\omega, x) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_n(\omega)}{n} P_n(x) \in L^2(\Omega; H^\sigma(\mathbb{S}^3)),$$

pour tout $\sigma < 1/2$, ainsi que la mesure gaussienne μ sur $X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)$ par $\mu = \mathbf{p} \circ \varphi^{-1}$.

On construit maintenant une mesure de Gibbs pour l'équation (2.26). Pour $u \in L^{r+1}(\mathbb{S}^3)$ et $\beta > 0$, on définit la densité

$$G(u) = \beta e^{-\frac{1}{r+1} \int_{\mathbb{S}^3} |u|^{r+1}},$$

et avec le bon choix de la constante $\beta > 0$, on définit une mesure de probabilité ρ sur $X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)$ par

$$d\rho(u) = G(u)d\mu(u).$$

On peut alors énoncer

Théorème 2.4.1 ([A7]). *Soit $1 \leq r < 5$. La mesure ρ est invariante par une dynamique de (2.26). Plus précisément, il existe un ensemble Σ de mesure pleine pour ρ tel que pour tout $f \in \Sigma$ l'équation (2.26) avec condition initiale $u(0) = f$ admet une solution*

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la distribution de la variable aléatoire $u(t)$ est égale à ρ

$$\mathcal{L}_{X_{rad}^{1/2}}(u(t)) = \mathcal{L}_{X_{rad}^{1/2}}(u(0)) = \rho, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On ne se restreint aux fonctions zonales que pour définir la mesure ρ , aucun des autres arguments de la preuve ne nécessite cette hypothèse.

La mesure ρ construite vérifie les points suivants :

- $\mu(X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)) = \rho(X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)) = 1$
- $\mu(H_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)) = \rho(H_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)) = 0$
- Soit $\sigma < 1/2$. Pour tout ouvert non vide $B \subset H^\sigma(\mathbb{S}^3)$, $\rho(B) > 0$.

En particulier, la dernière propriété montre que ρ est une mesure raisonnable puisqu'elle charge tous les ouverts de H^σ .

Il est intéressant de comparer le résultat du Théorème 2.4.1 avec la méthode de compacité déterministe usuelle. L'énergie de l'équation (2.25) s'écrit

$$H(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^3} |\nabla u|^2 + \frac{1}{r+1} \int_{\mathbb{S}^3} |u|^{r+1}.$$

Alors on peut montrer (voir par exemple [33]) que pour tout $f \in H^1(\mathbb{S}^3) \cap L^{r+1}(\mathbb{S}^3)$ il existe une solution de (2.25) telle que

$$u \in \mathcal{C}_w(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{S}^3)) \cap \mathcal{C}_w(\mathbb{R}; L^{r+1}(\mathbb{S}^3)),$$

et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $H(u)(t) \leq H(f)$ (ici \mathcal{C}_w veut dire faiblement continue en temps). Un des avantages de cette méthode est qu'il n'y a pas de restriction sur $r \geq 1$ ni d'hypothèse radiale sur la condition initiale. En revanche, cette stratégie demande plus de régularité sur f .

Comme nous venons de le dire, une méthode de compacité déterministe peut induire une perte d'énergie de la solution, et ce phénomène provient d'une concentration de l'objet limite en un point. Dans notre contexte, nous utilisons un argument de compacité pour des mesures et celles-ci peuvent au contraire décrire une concentration ponctuelle, et c'est pour cela que nous obtenons une dynamique invariante dans le Théorème 2.4.1.

Soit ρ la mesure sur $X^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ définie dans la Section 2.1.3 (quitte à la renormaliser, on peut supposer que ρ est une mesure de probabilité). Avec des arguments analogues on peut alors montrer le résultat suivant pour l'équation de Schrödinger avec dérivée (2.15). Soit $\kappa_2 > 0$ donné par le Théorème 2.1.10, alors

Théorème 2.4.2 ([A7]). *Supposons que $\kappa \leq \kappa_2$. Alors il existe un ensemble $\Sigma \in X^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ tel que $\rho(\Sigma) = 1$ et tel que pour tout $f \in \Sigma$ l'équation (2.15) avec condition initiale $u(0) = f$ admet une solution*

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; X^{1/2}(\mathbb{S}^1)).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la distribution de la variable aléatoire $u(t)$ est égale à ρ

$$\mathcal{L}_{X^{1/2}}(u(t)) = \mathcal{L}_{X^{1/2}}(u(0)) = \rho, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, ce résultat peut être vu comme une conséquence de [74, 76] avec une méthode alternative.

Dans [A7], nous avons également construit des solutions faibles globales pour l'équation de Benjamin-Ono et pour l'équation des demi-ondes dans $X^0(\mathbb{S}^1)$. Voir [A7] pour les énoncés et les détails.

2.4.2 Principe général de la méthode

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{p})$ un espace probabilisé et $(g_n(\omega))_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de gaussiennes complexes $g_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Soit M une variété riemannienne compacte et soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de $L^2(M)$. On définit l'espace

$$X^\sigma = X^\sigma(M) = \bigcap_{\tau < \sigma} H^\tau(M).$$

La stratégie générale pour construire les solutions faibles est la suivante :

Étape 1 : la mesure gaussienne μ . On commence par définir une mesure μ sur $X^\sigma(M)$ qui est invariante par le flot de la partie linéaire de l'équation considérée. L'indice $\sigma_c \in \mathbb{R}$ est donné par l'équation et par la variété M . Cette mesure est définie par $\mu = \mathbf{p} \circ \varphi^{-1}$, où $\varphi \in L^2(\Omega; H^\sigma(M))$ pour tout $\sigma < \sigma_c$ est une variable aléatoire gaussienne qui s'écrit

$$\varphi(\omega, x) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_n(\omega)}{\lambda_n} e_n(x).$$

Les coefficients (λ_n) vérifient $\lambda_n \sim cn^\alpha$, $\alpha > 0$ et sont donnés par la partie linéaire et par la structure hamiltonienne de l'équation. En particulier, pour toute fonction mesurable $f : X^{\sigma_c}(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{X^{\sigma_c}(M)} f(u) d\mu(u) = \int_{\Omega} f(\varphi(\omega, \cdot)) d\mathbf{p}(\omega).$$

Étape 2 : la mesure invariante ρ_N . À partir de la formulation hamiltonienne de l'équation, on définit un problème approché qui admet un flot global Φ_N , et pour lequel on peut construire une mesure ρ_N sur $X^{\sigma_c}(M)$ qui a les propriétés suivantes :

i) La mesure ρ_N est une mesure de probabilité absolument continue par rapport à μ

$$d\rho_N(u) = \Psi_N(u) d\mu(u).$$

ii) La mesure ρ_N est invariante par le flot Φ_N d'après le théorème de Liouville.

iii) Il existe $\Psi \neq 0$ telle que $p \geq 2$, $\Psi(u) \in L^p(d\mu)$ et

$$\Psi_N(u) \rightarrow \Psi(u), \quad \text{dans } L^p(d\mu).$$

(En particulier $\|\Psi_N(u)\|_{L^p_\mu} \leq C$ uniformément en $N \geq 1$.) Ceci permet de définir une mesure de probabilité sur $X^{\sigma_c}(M)$ par

$$d\rho(u) = \Psi(u) d\mu(u),$$

qui est formellement invariante par l'équation.

Étape 3 : la mesure ν_N . Par abus de notation, on écrit

$$\mathcal{C}([-T, T]; X^{\sigma_c}(M)) = \bigcap_{\sigma < \sigma_c} \mathcal{C}([-T, T]; H^\sigma(M)).$$

On définit la mesure $\nu_N = \rho_N \circ \Phi_N^{-1}$ sur $\mathcal{C}([-T, T]; X^{\sigma_c}(M))$ comme étant la mesure image de ρ_N par l'application

$$\begin{aligned} X^{\sigma_c}(M) &\longrightarrow \mathcal{C}([-T, T]; X^{\sigma_c}(M)) \\ v &\longmapsto \Phi_N(t)(v). \end{aligned}$$

En particulier, pour toute fonction mesurable $F : \mathcal{C}([-T, T]; X^{\sigma_c}(M)) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathcal{C}([-T, T]; X^{\sigma_c})} F(u) d\nu_N(u) = \int_{X^{\sigma_c}} F(\Phi_N(t)(v)) d\rho_N(v).$$

Un point important de la preuve consiste alors à montrer que la suite (ν_N) est tendue dans $\mathcal{C}([-T, T]; H^\sigma(M))$ pour tout $\sigma < \sigma_c$. Alors, pour tout $\sigma < \sigma_c$, d'après le théorème de Prokhorov, il existe une mesure $\nu_\sigma = \nu$ sur $\mathcal{C}([-T, T]; H^\sigma(M))$ telle que, à une sous-suite près, on a la convergence faible : pour tout $\sigma < \sigma_c$ et toute fonction continue et bornée $F : \mathcal{C}([-T, T]; H^\sigma(M)) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}([-T, T]; H^\sigma)} F(u) d\nu_N(u) = \int_{\mathcal{C}([-T, T]; H^\sigma)} F(u) d\nu(u).$$

De plus, il est facile de voir que l'on peut définir la mesure ν sur $\mathcal{C}([-T, T]; X^{\sigma_c}(M))$.

Enfin, avec le théorème de Skorohod, on construit une suite de variables aléatoires qui converge vers une solution du problème initial (voir le paragraphe suivant pour plus de détails).

2.4.3 L'argument probabiliste de convergence

Soit $N \geq 1$. On considère l'approximation suivante de (2.26)

$$\begin{cases} i\partial_t u + (\Delta - 1)u = S_N(|S_N u|^{r-1} S_N u), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3, \\ u(0, x) = v(x) \in X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3), \end{cases} \quad (2.27)$$

où S_N est une version lisse du projecteur spectral usuel. Le problème (2.27) est une équation différentielle ordinaire pour les basses fréquences et correspond à l'équation de Schrödinger linéaire pour les hautes fréquences. En utilisant la conservation de la masse, il est facile de voir que (2.27) admet un flot global Φ_N . On définit une mesure de Gibbs pour ce problème par

$$d\rho_N(u) = G_N(u) d\mu(u),$$

où

$$G_N(u) = \beta_N e^{-\frac{1}{r+1} \int_{\mathbb{S}^3} |S_N u|^{r+1}},$$

la constante $\beta_N > 0$ étant choisie pour que ρ_N soit une mesure de probabilité sur $X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)$. On peut montrer que $\rho_N \longrightarrow \rho$ au sens des mesures. De plus, avec le théorème de Liouville, ρ_N est invariante par Φ_N : pour tout borélien $A \subset X_{rad}^{1/2}(\mathbb{S}^3)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\rho_N(\Phi_N(t)(A)) = \rho_N(A)$.

En particulier si $\mathcal{L}_{X_{rad}^{1/2}}(v) = \rho_N$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_{X_{rad}^{1/2}}(\Phi_N(t)v) = \rho_N$.

Dans [A7], en utilisant l'invariance de ρ_N , on montre le résultat suivant

Proposition 2.4.3. *Soient $T > 0$ et $\sigma < \frac{1}{2}$. Alors la famille de mesures*

$$\nu_N = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_T H^\sigma}(u_N(t); t \in [-T, T])_{N \geq 1}$$

est tendue dans $\mathcal{C}([-T, T]; H^\sigma(\mathbb{S}^3))$.

Grâce à cette proposition, on peut appliquer le théorème de Prokhorov : pour tout $T > 0$ il existe une sous-suite ν_{N_k} et une mesure ν sur l'espace $\mathcal{C}([-T, T]; X^{1/2}(\mathbb{S}^3))$ telles que pour tout $\tau < 1/2$ et toute fonction continue et bornée $F : \mathcal{C}([-T, T]; H^\tau(\mathbb{S}^3)) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathcal{C}([-T, T]; H^\tau)} F(u) d\nu_{N_k}(u) \longrightarrow \int_{\mathcal{C}([-T, T]; H^\tau)} F(u) d\nu(u).$$

Ensuite, d'après le théorème de Skorohod, il existe un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{p}})$, une suite de variables aléatoires (\tilde{u}_{N_k}) et une variable aléatoire \tilde{u} à valeurs dans $\mathcal{C}([-T, T]; X^{1/2}(\mathbb{S}^3))$ tels que

$$\mathcal{L}(\tilde{u}_{N_k}; t \in [-T, T]) = \mathcal{L}(u_{N_k}; t \in [-T, T]) = \nu_{N_k}, \quad \mathcal{L}(\tilde{u}; t \in [-T, T]) = \nu, \quad (2.28)$$

vérifiant pour tout $\tau < 1/2$

$$\tilde{u}_{N_k} \longrightarrow \tilde{u}, \quad \tilde{\mathbf{p}} - \text{p.s. dans } \mathcal{C}([-T, T]; H^\tau(\mathbb{S}^3)).$$

De plus, on montre facilement que pour tout $t \in [-T, T]$ et $k \geq 1$ on a

$$\mathcal{L}_{X^{1/2}}(u_{N_k}(t)) = \mathcal{L}_{X^{1/2}}(\tilde{u}_{N_k}(t)) = \rho_{N_k}. \quad (2.29)$$

Comme \tilde{u}_{N_k} et u_{N_k} ont même loi, on peut vérifier que \tilde{u}_{N_k} est solution de l'équation approchée avec la condition initiale ad hoc. Enfin, avec les arguments standards, on peut alors passer à la limite dans l'équation et montrer que \tilde{u} est $\tilde{\mathbf{p}}$ -p.s. une solution de (2.26). De plus, en passant à la limite dans (2.29) on obtient bien que pour tout $t \in [-T, T]$, $\mathcal{L}_{X^{1/2}}(\tilde{u}(t)) = \rho$.

2.5 Un théorème KAM pour l'oscillateur harmonique

Nous allons maintenant présenter une autre utilisation de l'aléa dans l'étude qualitative des équations de Schrödinger, par le biais de la méthode KAM. Dans ce cas, ce ne sont plus les conditions initiales qui sont aléatoires, mais un paramètre de l'équation.

Avec B. Grébert [A3] nous avons démontré un théorème KAM abstrait pour des équations hamiltoniennes en dimension infinie qui étend des résultats antérieurs de S. Kuksin et J. Pöschel. En particulier, avec notre résultat, nous pouvons montrer que l'équation de Schrödinger non-linéaire avec potentiel harmonique perturbée

$$i\partial_t u + \Delta u - x^2 u + V(x)u = |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

admet "beaucoup" de solutions quasi-périodiques (régulières), sous une hypothèse de généricité sur le potentiel V .

2.5.1 Le problème

On considère l'équation de Schrödinger non-linéaire avec potentiel harmonique

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u = \varepsilon |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.30)$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. On note $H = -\partial_x^2 + x^2$ l'oscillateur harmonique, et pour $p \geq 0$ on note $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ s.t. } H^{p/2}u \in L^2(\mathbb{R})\}$ l'espace de Sobolev basé sur H . On peut alors vérifier que

$$\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(\mathbb{R}) = \{u \in H^p(\mathbb{R}) \text{ t.q. } (1 + x^2)^{p/2}u \in L^2(\mathbb{R})\},$$

où $H^p(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev usuel sur \mathbb{R} .

On peut montrer, en utilisant la conservation de l'énergie, que (2.30) est globalement bien posée dans \mathcal{H}^1 . Une question naturelle est de décrire les dynamiques possibles des solutions lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ce problème est difficile, nous n'allons donner qu'un début de réponse en construisant des solutions quasi-périodiques.

Rappelons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$ est quasi-périodique s'il existe $n \geq 1$, une fonction périodique $U : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ et $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = U(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$.

Néanmoins, une difficulté majeure est que la partie linéaire de l'équation est résonante : les valeurs propres de H sont $\lambda_j = 2j - 1$, $j \geq 1$ et il existe beaucoup de $k \in \mathbb{N}^\infty$ de longueur finie tels que $k \cdot \lambda = \sum_{j \geq 1} k_j \lambda_j = 0$. Pour éviter ce problème, on va plutôt considérer une équation où la partie linéaire est perturbée. Soit

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u + \varepsilon V(x)u = \varepsilon |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.31)$$

où $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Une motivation de notre approche est que l'équation linéaire associée à (2.31) admet beaucoup de solutions quasi-périodiques, il est donc raisonnable de penser que cette propriété persiste par perturbation par le terme non-linéaire.

Soit $A = -\partial_x^2 + x^2 + \varepsilon V(x)$. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, A est auto-adjoint, son spectre est purement ponctuel et ses valeurs propres $(\lambda_j(\varepsilon))_{j \geq 1}$ sont simples et vérifient $\lambda_j(\varepsilon) \sim 2j - 1$. Les fonctions propres associées $(\varphi_j(\varepsilon, \cdot))_{j \geq 1}$ forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$, et $\varphi_j(\varepsilon, \cdot) \sim h_j$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ en norme L^2 . Ainsi A et H ont même domaine $D(H^{p/2}) = D(A^{p/2}) = \mathcal{H}^p$.

2.5.2 Les résultats

Notre résultat principal concernant l'équation (2.31) est le suivant

Théorème 2.5.1 ([A3]). *Soit $n \geq 1$ un entier. Alors il existe une grande classe de potentiels $V \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ la solution de (2.31) avec donnée initiale*

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^n I_j^{1/2} e^{i\theta_j} \varphi_j(\varepsilon, x), \quad (2.32)$$

avec $(I_1, \dots, I_n) \subset (0, 1]^n$ et $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n$, est quasi-périodique en temps.

En fait, dans [A3] on montre de plus que lorsque θ décrit \mathbb{T}^n , l'ensemble des solutions de (2.31) avec condition initiale (2.32) décrit un tore de dimension n qui est invariant par (2.31). De plus, ce tore est linéairement stable.

Remarque 2.5.2. *Notre résultat s'applique à une non-linéarité qui est une combinaison linéaire de termes du type $|u|^{2m}u$, avec $m \geq 1$. De plus, sous des conditions ad hoc sur les dérivées de G , on peut traiter des non-linéarités de la forme $\frac{\partial G}{\partial u}(x, u, \bar{u})$ (i.e. qui dépendent de x) dans (2.31). Par ailleurs, on peut remplacer l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ par n'importe quel ensemble de \mathbb{N} de cardinal n .*

Le Théorème 2.5.1 étend des résultats antérieurs de S. Kuksin [65] et J. Pöschel [85], soit lorsque les valeurs propres de l'opérateur linéaire vérifient $\lambda_j \sim cj^d$ avec $d > 1$, soit lorsque la non-linéarité de l'équation est régularisante au sens Sobolev. Ici, pour compenser l'absence de régularisation on utilise la décroissance des dérivées de la partie non-linéaire de l'hamiltonien (dans l'esprit de la condition Töplitz-Lipschitz utilisée par H. Eliasson et S. Kuksin [47]). Cette décroissance provient ici d'estimées dispersives sur les fonctions d'Hermites. Voir aussi [53] où cette idée a été utilisée pour faire des formes normales de Birkhoff. Dans la méthode KAM, les fréquences du système doivent vérifier une condition de petits diviseurs, dite condition de Melnikov (voir (2.43)). Ceci demande une asymptotique précise des fréquences obtenue par un contrôle itératif dans des normes adaptées. Pour une discussion plus précise à ce sujet, on renvoie à la fin de la Section 2.5.

Il existe différentes méthodes pour construire des solutions quasi-périodiques à des EDP. Parmi celles-ci, mentionnons la méthode de Lyapunov-Schmidt qui fut initiée par W. Craig et E. Wayne [39] puis développée par J. Bourgain [14, 16] en dimension supérieure. Comme cette méthode ne demande pas de seconde condition de Melnikov, elle s'applique à des systèmes

hamiltoniens plus généraux, mais elle ne donne pas la stabilité (les tores invariant sont linéairement stables) comme la méthode KAM. Plus récemment, M. Berti et Ph. Bolle ont généralisé ces résultats en prenant le point de vue de Nash-Moser, voir [10, 11] et références. Dans chacune de ces approches, on doit traiter des problèmes de petits diviseurs : voir à ce sujet le livre de W. Craig [38].

2.5.3 La méthode KAM pour l'équation non-linéaire

On présente maintenant la méthode KAM pour (2.31).

Formulation Hamiltonienne

Soient $n \geq 1$ un entier, $V \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$ un petit paramètre. On considère l'espace de Hilbert complexe ℓ_p^2 défini par la norme

$$\|w\|_p^2 = \sum_{j \geq 1} |w_j|^2 j^p.$$

On définit l'espace des phases \mathcal{P}^p par

$$\mathcal{P}^p = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \ell_p^2 \times \ell_p^2,$$

muni de la structure symplectique canonique

$$\sum_{j=1}^n d\theta_j \wedge dy_j + i \sum_{j \geq 1} dz_j \wedge d\bar{z}_j. \quad (2.33)$$

Soit $v(x) = \sum_{j \geq 1} w_j \varphi_j(\varepsilon, x)$ un élément typique de L^2 . Alors on peut vérifier que $v \in \mathcal{H}^p$ si et seulement si $(w_j)_{j \geq 1} \in \ell_p^2$. Fixons maintenant $(I_1, \dots, I_n) \in]0, 1]^n$ et $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ et écrivons

$$\begin{cases} u(x) = \sum_{j=1}^n (y_j + I_j)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_j} \varphi_j(\varepsilon, x) + \sum_{j \geq 1} z_j \varphi_{j+n}(\varepsilon, x), \\ \bar{u}(x) = \sum_{j=1}^n (y_j + I_j)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_j} \varphi_j(\varepsilon, x) + \sum_{j \geq 1} \bar{z}_j \varphi_{j+n}(\varepsilon, x), \end{cases}$$

où $(\theta, y, z, \bar{z}) \in \mathcal{P}^p = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \ell_p^2 \times \ell_p^2$ sont considérés comme des variables. Alors l'équation (2.31) est issue de l'hamiltonien $H = N + P$ où

$$N = \sum_{j=1}^n \lambda_j(\varepsilon) y_j + \sum_{j \geq 1} \Lambda_j(\varepsilon) z_j \bar{z}_j, \quad (2.34)$$

$\Lambda_j(\varepsilon) = \lambda_{j+n}(\varepsilon)$ et

$$P(\theta, y, z, \bar{z}) = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^n (y_j + I_j)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_j} \varphi_j(\varepsilon, x) + \sum_{j \geq 1} z_j \varphi_{j+n}(\varepsilon, x), \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n (y_j + I_j)^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_j} \varphi_j(\varepsilon, x) + \sum_{j \geq 1} \bar{z}_j \varphi_{j+n}(\varepsilon, x) \right|^4 dx. \quad (2.35)$$

Autrement dit, on obtient le système suivant, qui est équivalent à (2.31)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j}, & \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j}, & 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}_j = i\frac{\partial H}{\partial \bar{z}_j}, & \dot{\bar{z}}_j = -i\frac{\partial H}{\partial z_j}, & j \geq 1 \\ (\theta_j(0), y_j(0), z_j(0), \bar{z}_j(0)) = (\theta_j^0, y_j^0, z_j^0, \bar{z}_j^0), \end{cases}$$

où les conditions initiales sont choisies telles que

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^n (y_j^0 + I_j)^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_j^0} \varphi_j(\varepsilon, x) + \sum_{j \geq 1} z_j^0 \varphi_{j+n}(\varepsilon, x).$$

La méthode KAM

Présentons la stratégie générale de la méthode KAM comme utilisée par exemple dans [63, 64, 85]. On considère une fonction régulière $F = F(\theta, y, z, \bar{z})$, et on note X_F^t le flot de l'équation

$$\begin{cases} \dot{\theta}_j = \frac{\partial F}{\partial y_j}, & \dot{y}_j = -\frac{\partial F}{\partial \theta_j}, & 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}_j = i\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j}, & \dot{\bar{z}}_j = -i\frac{\partial F}{\partial z_j}, & j \geq 1 \\ (\theta_j(0), y_j(0), z_j(0), \bar{z}_j(0)) = (\theta_j^0, y_j^0, z_j^0, \bar{z}_j^0). \end{cases}$$

Si F est assez petit, X_F^1 est bien défini et on a les propriétés suivantes

- (i) L'application X_F^1 préserve la structure symplectique (2.33).
- (ii) Pour tout G régulier on a

$$\frac{d}{dt}(G \circ X_F^t) = \{G, F\} \circ X_F^t. \quad (2.36)$$

L'idée de l'itération KAM est de trouver F telle que $H \circ X_F^1$ a une forme plus simple (en un sens qui sera précisé dans la suite) que $H = N + P$. Le terme P dans (2.35) peut être réécrit

$$P = \sum_{m, q, \bar{q}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} P_{kmq\bar{q}} e^{ik \cdot \theta} y^m z^q \bar{z}^{\bar{q}}.$$

On considère alors l'approximation de Taylor au second ordre de P qui est

$$R = \sum_{2|m|+|q+\bar{q}| \leq 2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} R_{kmq\bar{q}} e^{ik \cdot \theta} y^m z^q \bar{z}^{\bar{q}}, \quad (2.37)$$

où $R_{kmq\bar{q}} = P_{kmq\bar{q}}$ et on définit sa valeur moyenne

$$[R] = \sum_{|m|+|q|=1} R_{0mq\bar{q}} y^m z^q \bar{z}^{\bar{q}}.$$

Notons que dans ce contexte z, \bar{z} est homogène de degré 1, alors que y est homogène de degré 2. Soit F une fonction de la forme (2.37) et notons X_F^t le flot au temps t associé au champ de vecteurs de F . On peut alors définir un nouvel hamiltonien par $H \circ X_F^1 := N_+ + P_+$, et la

structure hamiltonienne de l'équation de départ est préservée car X_F^1 est une transformation symplectique. L'idée de la méthode KAM est de trouver de façon itérative, une fonction adéquate F telle que le nouveau terme d'erreur a une partie quadratique petite. Plus précisément, grâce à la formule de Taylor et (2.36) on peut écrire

$$\begin{aligned} H \circ X_F^1 &= N \circ X_F^1 + (P - R) \circ X_F^1 + R \circ X_F^1 \\ &= N + \{N, F\} + \int_0^1 (1-t) \{ \{N, F\}, F \} \circ X_F^t dt + \\ &\quad + (P - R) \circ X_F^1 + R + \int_0^1 \{R, F\} \circ X_F^t dt. \end{aligned}$$

Supposons qu'on puisse trouver F et \widehat{N} qui a la même forme que N et qui vérifient l'équation homologique suivante

$$\{N, F\} + R = \widehat{N}. \quad (2.38)$$

Alors on définit la nouvelle forme normale $N_+ = N + \widehat{N}$, dont les fréquences sont données par

$$\lambda^+(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) + \widehat{\lambda}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \Lambda^+(\varepsilon) = \Lambda(\varepsilon) + \widehat{\Lambda}(\varepsilon), \quad (2.39)$$

avec

$$\widehat{\lambda}_j(\varepsilon) = \frac{\partial \widehat{N}}{\partial y_j}(0, 0, 0, 0, \varepsilon) \quad \text{et} \quad \widehat{\Lambda}_j(\varepsilon) = \frac{\partial^2 \widehat{N}}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}(0, 0, 0, 0, \varepsilon). \quad (2.40)$$

Une fois que l'on a résolu l'équation homologique, on définit le nouveau terme de perturbation P_+ par

$$P_+ = (P - R) \circ X_F^1 + \int_0^1 \{R(t), F\} \circ X_F^t dt,$$

avec $R(t) = (1-t)\widehat{N} + tR$ de telle sorte que

$$H \circ X_F^1 = N_+ + P_+.$$

Noter que si P est initialement de taille ε , alors R et F sont de taille ε et la partie quadratique de P_+ est formellement de taille ε^2 . Ainsi, on peut espérer que ce schéma itératif est convergent avec vitesse exponentielle.

Si ce schéma est convergent, on obtient une transformation symplectique Φ (près de l'origine) telle que $H^* = H \circ \Phi = N^* + P^*$, où

$$N^* = \sum_{j=1}^n \lambda_j^*(\varepsilon) y_j + \sum_{j \geq 1} \Lambda_j^*(\varepsilon) z_j \bar{z}_j, \quad (2.41)$$

et P^* n'a pas de partie quadratique en z, \bar{z} et pas de partie linéaire en y . Alors les nouvelles coordonnées $(y', \theta', z', \bar{z}') = \Phi^{-1}(y, \theta, z, \bar{z})$ satisfont le système

$$\begin{cases} \dot{\theta}'_j = \frac{\partial H^*}{\partial y'_j}, & \dot{y}'_j = -\frac{\partial H^*}{\partial \theta'_j}, & 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}'_j = i \frac{\partial H^*}{\partial \bar{z}'_j}, & \dot{\bar{z}}'_j = -i \frac{\partial H^*}{\partial z'_j}, & j \geq 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Grâce à la forme particulière de P^* , la solution de (2.42) avec condition initiale

$$(\theta'_j(0), y'_j(0), z'_j(0), \bar{z}'_j(0)) = (\theta_j^0, 0, 0, 0),$$

s'écrit

$$(\theta'_j(t), y'_j(t), z'_j(t), \bar{z}'_j(t)) = (t\theta_j^0 + \lambda_j^*, 0, 0, 0),$$

qui est quasi-périodique. En conclusion, nous avons construit une solution quasi-périodique à (2.31).

L'équation homologique

Comme la dépendance des valeurs propres à un potentiel général V n'est pas facile à étudier, on choisit V de la forme

$$V(\xi, x) = \sum_{k=1}^n \xi_k f_k(x),$$

avec $(f_1, \dots, f_n) \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}))^n$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Pi = [-1, 1]^n$. Dans la suite, pour simplifier les notations, on écrit $\varphi_j(\xi), \lambda_j(\xi), \Lambda_j(\xi)$ au lieu de $\varphi_j(\xi, \varepsilon), \lambda_j(\xi, \varepsilon), \Lambda_j(\xi, \varepsilon)$. Dans [A3] on montre que l'on peut trouver $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que :

Contrôle des petits diviseurs : il existe un ensemble $\Pi_\alpha \subset \Pi$ tel que $\text{Mes}(\Pi \setminus \Pi_\alpha) \rightarrow 0$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$ et $\tau \geq 1$, tel que pour tout $\xi \in \Pi_\alpha$ les fréquences dans (2.34) satisfont

$$|k \cdot \lambda(\xi) + \ell \cdot \Lambda(\xi)| \geq \alpha \frac{\langle \ell \rangle}{1 + |k|^\tau}, \quad (k, \ell) \in \mathcal{Z}, \quad (2.43)$$

où $\mathcal{Z} := \{(k, \ell) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^\infty, (k, \ell) \neq 0, |\ell| \leq 2\}$.

On suppose maintenant que la condition (2.43) est vérifiée et on montre qu'on peut résoudre l'équation homologique (2.38). Comme dans [85], on cherche une solution F de (2.38) de la forme (2.37), *i.e.*

$$F = \sum_{2|m|+|q+\bar{q}| \leq 2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} F_{kmq\bar{q}} e^{ik \cdot \theta} y^m z^q \bar{z}^{\bar{q}}. \quad (2.44)$$

Un calcul immédiat donne les coefficients dans (2.44)

$$iF_{kmq\bar{q}} = \begin{cases} \frac{R_{kmq\bar{q}}}{k \cdot \lambda(\xi) + (q - \bar{q}) \cdot \Lambda(\xi)}, & \text{si } |k| + |q - \bar{q}| \neq 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on peut poser $\widehat{N} = [R]$.

Pour pouvoir appliquer la méthode KAM, on doit alors vérifier que la condition (2.43) persiste à chaque itération. Ceci sera le cas si la perturbation $\widehat{\Lambda}$ des fréquences extérieures (voir (2.39)) vérifient $|\widehat{\Lambda}_j(\xi)| \leq C\varepsilon j^{-\beta}$ pour un certain $\beta > 0$. Mais par (2.40) et le fait que $\widehat{N} = [R]$, on a

$$\widehat{\Lambda}_j(\xi) = \frac{\partial^2 \widehat{N}}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}(0, 0, 0, 0, \xi) = \frac{\partial^2 P}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}(0, 0, 0, 0, \xi).$$

Dans notre cas, on a $P = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^4$, ainsi $\frac{\partial^2 P}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j+n}^2 |u|^4$. Maintenant on utilise l'estimée dispersive $\|\varphi_j\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq Cj^{-1/12}$ obtenue par K. Yajima & G. Zhang [94] pour en déduire que

$$\left| \frac{\partial^2 P}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right| \leq \varepsilon \|\varphi_{j+n}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C\varepsilon j^{-1/6} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Commentaires et généralisations : Ainsi, après itération de la méthode, on obtient un hamiltonien $H^* = N^* + P^*$ comme dans (2.41), dont les fréquences $(\lambda^*(\xi), \Lambda^*(\xi))$ vérifient la condition (2.43). On sait vérifier cette condition, qui porte sur une infinité d'indices (k, ℓ) car on a l'asymptotique

$$\Lambda_j(\xi) = 2j + 1 + \mathcal{O}(j^{-\beta}), \quad \beta > 0,$$

qui permet de se ramener à un nombre fini de vérifications. Notons que la seule information $\Lambda_j(\xi) = 2j + 1 + \mathcal{O}(1)$ n'est pas suffisante.

Plus généralement, M. Procesi et X. Xu [88] ont introduit la notion de fonctions quasi-Töplitz, qui contrairement à la classe des fonctions Töplitz-Lipschitz, est stable par crochet de Poisson : elle est ainsi bien adaptée à une itération KAM. Cette notion a été utilisée pour des équations d'ondes quasi-linéaires en une dimension par M. Berti, L. Biasco et M. Procesi [7, 8, 9], qui obtiennent dans ce cas l'asymptotique

$$\Lambda_j(\xi) = j + c + \mathcal{O}(j^{-1}).$$

On renvoie à l'introduction de l'article [7] pour une introduction pédagogique à ces notions.

2.6 Réductibilité de l'équation de Schrödinger linéaire

La théorie KAM développée dans la partie précédente permet également de montrer la réductibilité de l'oscillateur harmonique linéaire avec un potentiel quasi-périodique en temps, ce qui signifie qu'il existe un changement d'inconnue qui transforme l'équation de départ en une équation à coefficients constants. Ceci montre que toutes les solutions sont presque périodiques et en particulier, qu'elles restent bornées pour tout temps dans les normes Sobolev.

2.6.1 Introduction et résultats

Considérons l'équation linéaire

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u - \varepsilon V(t\omega, x)u = 0, \quad u = u(t, x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Le vecteur des fréquences $\omega \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ est aussi considéré comme un paramètre. On suppose que le potentiel $V : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \ni (\theta, x) \mapsto \mathbb{R}$ est analytique en la variable θ sur $|\operatorname{Im} \theta| < s$ pour un certain $s > 0$, et \mathcal{C}^2 en x . On suppose de plus qu'il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\theta \in [0, 2\pi)^n$ et $x \in \mathbb{R}$

$$|V(\theta, x)| \leq C(1 + x^2)^{-\delta}, \quad |\partial_x V(\theta, x)| \leq C, \quad |\partial_{xx} V(\theta, x)| \leq C. \quad (2.45)$$

Alors on peut énoncer

Théorème 2.6.1 ([A3]). *Supposons que V vérifie (2.45). Alors il existe ϵ_0 tel que pour tout $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ il existe $\Lambda_\epsilon \subset [0, 2\pi]^n$ de mesure strictement positive et asymptotiquement de mesure pleine : $Mes(\Lambda_\epsilon) \rightarrow (2\pi)^n$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, tels que pour tout $\omega \in \Lambda_\epsilon$, l'équation de Schrödinger linéaire*

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u - \epsilon V(t\omega, x)u = 0, \quad (2.46)$$

est réductible dans $L^2(\mathbb{R})$ en une équation linéaire à coefficients constants.

En particulier, on obtient le résultat suivant concernant les solutions de (2.46).

Corollaire 2.6.2 ([A3]). *Supposons que V est C^∞ en x et que toutes ses dérivées sont bornées et satisfont (2.45). Soient $p \geq 0$ et $u_0 \in \mathcal{H}^p$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $\omega \in \Lambda_\epsilon$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}; \mathcal{H}^p)$ de (2.46) telle que $u(0) = u_0$. De plus, u est presque-périodique en temps et on a les bornes*

$$(1 - \epsilon C)\|u_0\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|u(t)\|_{\mathcal{H}^p} \leq (1 + \epsilon C)\|u_0\|_{\mathcal{H}^p}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

pour une certaine constante $C = C(p, \omega)$.

L'idée d'utiliser des techniques KAM pour obtenir des résultats de réductibilité d'EDP provient de Bambusi & Graffi [5], où les auteurs ont montré la réductibilité d'équations de Schrödinger avec un potentiel x^β , pour $\beta > 2$. Voir aussi le travail récent de J. Liu et X. Yuan [70]. Pour la preuve de notre résultat, nous suivons l'approche développée récemment par Eliasson-Kuksin [48] pour NLS sur un tore de dimension quelconque. Enfin, notons que W.M. Wang [95] a obtenu la réductibilité de (2.46) pour une classe de potentiels plus petite, en utilisant une approche de type KAM différente de la nôtre.

Le résultat du Corollaire 2.6.2 montre que pour un grand choix de paramètres $\omega \in [0, 2\pi]^n$, toutes les solutions de (2.46) restent bornées en temps. Une question naturelle est de savoir si l'on peut trouver un potentiel réel V , quasi-périodique en temps et une solution $u \in \mathcal{H}^p$ telle que $\|u(t)\|_{\mathcal{H}^p}$ ne reste pas bornée lorsque $t \rightarrow +\infty$. J.-M. Delort [43] a montré que c'était le cas si V était remplacé par un opérateur pseudo-différentiel : il existe des solutions régulières telles que pour tout $p \geq 0$ et $t \geq 0$, $\|u(t)\|_{\mathcal{H}^p} \geq ct^{p/2}$, qui est la croissance optimale. Nous renvoyons à l'introduction de [43] pour un survol des problèmes de croissance de norme Sobolev pour l'équation de Schrödinger linéaire.

Le résultat du Théorème 2.6.1 peut aussi se comprendre en terme d'opérateur de Floquet (voir Eliasson [46] et Wang [95] pour une approche mathématique, et [49, 93] pour une explication physique de cette notion). Sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{T}^n)$ on considère l'hamiltonien de Floquet

$$K := i \sum_{k=1}^n \omega_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} - \partial_x^2 + x^2 + \epsilon V(\theta, x),$$

alors on a

Corollaire 2.6.3 ([A3]). *On suppose que V vérifie (2.45). Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $\omega \in \Lambda_\epsilon$, le spectre de l'opérateur de Floquet K est purement ponctuel.*

Notons qu'un résultat analogue, avec une méthode KAM différente, a été obtenu par W.-M. Wang [95] dans le cas où V s'écrit

$$V(t\omega, x) = e^{-x^2} \sum_{k=1}^n \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

2.6.2 Idées de preuve

Dans cette section, on donne une idée de la preuve du Théorème 2.6.1 en suivant la stratégie développée par H. Eliasson et S. Kuksin [48] pour l'équation de Schrödinger sur le tore avec un potentiel quasi-périodique en temps.

Ici on ne montre pas seulement qu'un tore de dimension finie est stable par perturbation, mais on construit un changement de variables défini sur tout l'espace des phases. Considérons l'équation (2.46) où V satisfait à la condition (2.45). Ici on travaille dans l'espace des phases $\mathcal{P}^2 = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \ell_2^2 \times \ell_2^2$. On écrit u et \bar{u} dans la base d'Hermite, $u = \sum_{j \geq 1} z_j h_j$, $\bar{u} = \sum_{j \geq 1} \bar{z}_j h_j$. Alors l'équation (2.46) devient un système hamiltonien non-autonome

$$\begin{cases} \dot{z}_j = -i(2j-1)z_j - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \tilde{Q}(t, z, \bar{z}), & j \geq 1 \\ \dot{\bar{z}}_j = i(2j-1)\bar{z}_j + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial z_j} \tilde{Q}(t, z, \bar{z}), & j \geq 1 \end{cases} \quad (2.47)$$

où

$$\tilde{Q}(t, z, \bar{z}) = \int_{\mathbb{R}} V(\omega t, x) \left(\sum_{j \geq 1} z_j h_j(x) \right) \left(\sum_{j \geq 1} \bar{z}_j h_j(x) \right) dx,$$

et $(z, \bar{z}) \in \ell_2^2 \times \ell_2^2$. On ré-interprète (2.47) comme un système hamiltonien autonome dans un espace des phases plus grand

$$\begin{cases} \dot{z}_j = -i(2j-1)z_j - i\varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} Q(\theta, z, \bar{z}) & j \geq 1 \\ \dot{\bar{z}}_j = i(2j-1)\bar{z}_j + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial z_j} Q(\theta, z, \bar{z}) & j \geq 1 \\ \dot{\theta}_j = \omega_j & j = 1, \dots, n \\ \dot{y}_j = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta_j} Q(\theta, z, \bar{z}) & j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.48)$$

où

$$Q(\theta, z, \bar{z}) = \int_{\mathbb{R}} V(\theta, x) \left(\sum_{j \geq 1} z_j h_j(x) \right) \left(\sum_{j \geq 1} \bar{z}_j h_j(x) \right) dx,$$

est quadratique (z, \bar{z}) et $(\theta, y, z, \bar{z}) \in \mathcal{P}^2$. On remarque que les trois premières équations de (2.48) sont indépendantes de y et sont équivalentes à (2.47). De plus (2.48) est le système hamiltonien issu de $H = N + Q$ avec

$$N(\omega) = \sum_{j=1}^n \omega_j y_j + \sum_{j \geq 1} (2j-1) z_j \bar{z}_j.$$

Ici, les paramètres extérieurs sont directement les fréquences $\omega = (\omega_j)_{1 \leq j \leq n} \in [0, 2\pi)^n =: \Pi$ et les fréquences normales (les fréquences de l'hamiltonien en forme normale) $\Omega_j = 2j - 1$ sont constantes.

Grâce à la méthode KAM, on est capable de montrer qu'il existe un ensemble de paramètres $\Pi_\varepsilon \subset \Pi$ avec $|\Pi \setminus \Pi_\varepsilon| \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et une transformation de coordonnées $\Phi : \Pi_\varepsilon \times \mathcal{P}^0 \rightarrow \mathcal{P}^0$, tels que $H \circ \Phi = N^*$, où N^* est de la forme

$$N^*(\omega) = \sum_{j=1}^n \omega_j y_j + \sum_{j \geq 1} \Omega_j^* z_j \bar{z}_j.$$

Alors dans les nouvelles coordonnées, $(y', \theta', z', \bar{z}') = \Phi^{-1}(y, \theta, z, \bar{z})$, la dynamique est linéaire et y' est invariant :

$$\begin{cases} \dot{z}'_j = i\Omega_j^* z'_j & j \geq 1 \\ \dot{\bar{z}}'_j = -i\Omega_j^* \bar{z}'_j & j \geq 1 \\ \dot{\theta}'_j = \omega_j & j = 1, \dots, n \\ \dot{y}'_j = 0 & j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Finalement, on conclut en utilisant l'équivalence entre l'équation (2.46) et le système (2.48).

Nécessité d'une hypothèse de petit diviseur sur ω : considérons l'équation linéaire

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - x^2 u - \varepsilon V(t\omega)u = 0,$$

où $V : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est réel analytique et indépendant de $x \in \mathbb{R}$, et on suppose que $V(0) = 0$ et $\int_{\mathbb{T}^n} V = 0$. Notons que dans ce cas, on n'est pas tout à fait dans les conditions d'application du Théorème 2.6.1 puisque V ne décroît pas comme demandé dans (2.45). Néanmoins dans ce cas on peut expliciter la transformation construite dans la partie précédente.

Si l'on suppose que $\omega \in [0, 2\pi)^n$ est diophantien, on peut définir $u(t, x) = e^{i\varepsilon \int_0^t V(\omega s) ds} v(t, x)$ où v est solution de $i\partial_t v = -\partial_x^2 v + x^2 v$, et on vérifie que l'on a bien une fonction presque-périodique. De plus, on peut déterminer la transformation Φ qui est bien définie si ω est diophantien. Voir [A3] pour plus de détails.

3 Dynamiques résonantes

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment en mettant de l'aléa dans les conditions initiales ou dans l'équation, on pouvait obtenir des résultats sur des équations non-linéaires ; sous ces hypothèses, nous avons montré que la dynamique était proche de celle d'une équation linéaire. Nous allons montrer que ces hypothèses sont nécessaires en construisant des exemples de dynamiques non-linéaires en utilisant les résonances de l'équation. Ceci correspond aux travaux [A8, A9, A10] avec B. Grébert, E. Haus et É. Paturel.

3.1 Introduction

3.1.1 Dynamiques proches du linéaire

Considérons l'équation de Schrödinger linéaire sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Dans ce cas on peut calculer explicitement la solution $u(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \xi_j(t) e^{ijx}$, où $\xi_j(t) = \xi_j^0 e^{-ij^2 t}$.

On voit en particulier que toutes les solutions sont 2π -périodiques en temps. De plus, chaque mode de Fourier est préservé au sens où $|\xi_j|$ est constant.

Regardons maintenant l'équation non-linéaire

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + V \star u = \nu \partial_{\bar{u}} g(x, u, \bar{u}), \quad x \in \mathbb{S}^1, t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

où $\nu \ll 1$ est un petit paramètre, $V = V(x)$ est un potentiel réel, 2π -périodique et régulier, et g est une fonction analytique qui s'annule au moins à l'ordre 3 à l'origine. Dans ce cas, les valeurs propres de la partie linéaire sont $\omega_j = j^2 + \hat{V}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$ où $\hat{V}(j)$ désigne le coefficient de Fourier de V . Sous une condition de non-résonance, Bambusi-Grébert [6] (voir aussi [52]) ont montré que les actions $|\xi_j|^2$, $j \in \mathbb{Z}$ étaient essentiellement constantes pendant des temps très long. Plus précisément, pour tout $N \geq 1$

$$|\xi_j(t)|^2 = |\xi_j(0)|^2 + \mathcal{O}(\nu), \quad \text{pour } |t| \leq \nu^{-N}.$$

Ainsi, dans le cas non-résonant, la dynamique de NLS est proche de la dynamique de l'équation linéaire. Notons par ailleurs qu'il est possible de développer une théorie KAM pour l'équation (3.1) en faisant des hypothèses plus fortes sur les fréquences. En particulier, dans le cas de

la non-linéarité quintique J. Bourgain [20] a montré l'existence de tores invariants de dimensions infinies qui sont proches des tores invariants de l'équation linéaire.

Dans le cas de l'équation cubique

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = \pm \nu |u|^2 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1,$$

les actions sont presque préservées et ceci pour tout temps :

$$|\xi_j(t)|^2 = |\xi_j(0)|^2 + \mathcal{O}(\nu), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Ce résultat est en fait une conséquence de l'existence de coordonnées actions-angles (I, θ) . Ces coordonnées sont définies globalement pour l'équation défocalisante (voir [54, 55]) et près de l'origine seulement dans le cas focalisant (voir [60]). On peut alors montrer que ces variables d'actions vérifient $I_j = |\xi_j|^2(1 + \mathcal{O}(\nu))$, ce qui donne le résultat.

Ces différents exemples montrent donc que les actions linéaires $|\xi_j|^2$ sont presque préservées, et ceci pour différentes raisons. En particulier, pour les échelles de temps en question, les normes Sobolev $\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2s} |\xi_j(t)|^2\right)^{1/2}$ des solutions sont essentiellement constantes.

3.1.2 Un premier exemple de dynamique résonante

Donnons maintenant un exemple où les résonances produisent des effets non-linéaires sur la dynamique. Soit l'équation

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = \pm \nu \cos 2x |u|^2 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1,$$

alors Villegas-Blas & Grébert [56] ont montré que pour des données initiales de la forme $u_0(x) = Ae^{ix} + \bar{A}e^{-ix}$, il y avait un échange périodique entre les modes 1 et -1 de la solution. En particulier, pour $u_0(x) = \cos x + \sin x$, on a pour des temps $|t| \leq \nu^{-5/4}$

$$|\xi_1(t)|^2 = \frac{1 \pm \sin 2\nu t}{2} + \mathcal{O}(\nu^{3/4}), \quad |\xi_{-1}(t)|^2 = \frac{1 \mp \sin 2\nu t}{2} + \mathcal{O}(\nu^{3/4}).$$

On parle alors de battement de période $t \sim \nu^{-1}$.

3.2 Présentation de nos résultats

Le phénomène précédent est dû à la présence du $\cos(2x)$ devant la non-linéarité. Nous allons maintenant montrer que cet effet existe dans des équations autonomes. Comme on l'a vu avant, la complète intégrabilité de l'équation cubique interdit ce phénomène. Le premier exemple naturel à considérer est donc l'équation quintique.

3.2.1 Résultats pour l'équation quintique

Soit l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \pm \nu |u|^4 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.2)$$

Liang et You [71] ont montré l'existence de beaucoup de solutions quasi-périodiques pour l'équation (3.2). Leur preuve suit la stratégie de Kuksin-Pöschel [66] : une première forme normale permet d'utiliser les amplitudes de la condition initiale comme paramètres et permet ainsi d'éviter les résonances pour appliquer une méthode KAM (voir aussi [87]). Ici, au contraire, nous allons essayer de tirer profit de ces résonances et de montrer que différents modes de Fourier peuvent échanger entre eux.

Nous allons voir que nous pourrions faire échanger certains modes particuliers, dont nous donnons la définition

Définition 3.2.1. *On appellera ensemble résonant, un ensemble \mathcal{A} de la forme*

$$\mathcal{A} = \{n, n + 3k, n + 4k, n + k\}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{et } n \in \mathbb{Z},$$

Dans la suite on notera $a_2 = n$, $a_1 = n + 3k$, $b_2 = n + 4k$, $b_1 = n + k$.

Les ensembles résonants correspondent aux indices des termes résonants $\xi_{a_1}^2 \xi_{a_2} \bar{\xi}_{b_1}^2 \bar{\xi}_{b_2}$ de degré 6 dans la forme normale de l'hamiltonien de (3.2). Par exemple pour $(n, k) = (-2, 1)$ on obtient $(a_2, a_1, b_2, b_1) = (-2, 1, 2, -1)$.

Notre résultat s'énonce alors

Théorème 3.2.2 ([A8]). *Il existe $T > 0$, $\nu_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1/2)$ et une fonction $2T$ -périodique $K_\star : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ qui vérifie $K_\star(0) \leq \alpha$ et $K_\star(T) \geq 1 - \alpha$ tels que si $0 < \nu < \nu_0$, alors il existe une solution u à (3.2) vérifiant pour tout $|t| \leq \nu^{-9/8}$*

$$u(t, x) = v(t, x) + \nu^{1/4} q(t, x),$$

avec

$$v(t, x) = \sum_{j \in \mathcal{A}} w_j(t) e^{ijx},$$

et

$$\begin{aligned} |w_{a_1}(t)|^2 &= 2|w_{a_2}(t)|^2 = K_\star(\nu t) \\ |w_{b_1}(t)|^2 &= 2|w_{b_2}(t)|^2 = 1 - K_\star(\nu t). \end{aligned}$$

Le terme d'erreur q est régulier en temps et analytique en espace sur $[-\nu^{-9/8}, \nu^{-9/8}] \times \mathbb{S}^1$. De plus, ses coefficients de Fourier $\hat{q}_j(t)$ satisfont

$$\sup_{|t| \leq \nu^{-9/8}} |\hat{q}_j(t)| \leq C e^{-|j|},$$

avec C indépendant de \mathcal{A} et $\nu > 0$.

Ce résultat montre qu'il y a un échange entre les modes a_1 et a_2 ainsi qu'entre les modes b_1 et b_2 . Notons que cet effet non-linéaire est universel au sens où la dynamique de la solution exhibée ne dépend pas du choix de l'ensemble résonant \mathcal{A} .

Le résultat du Théorème 3.2.2 a été vérifié numériquement par F. Castella, P. Chartier, F. Méhats et A. Murua [32] à l'aide d'une méthode appelée moyennisation stroboscopique (*stroboscopic averaging*) qui permet de simuler des problèmes sur des temps longs. Ainsi sur la

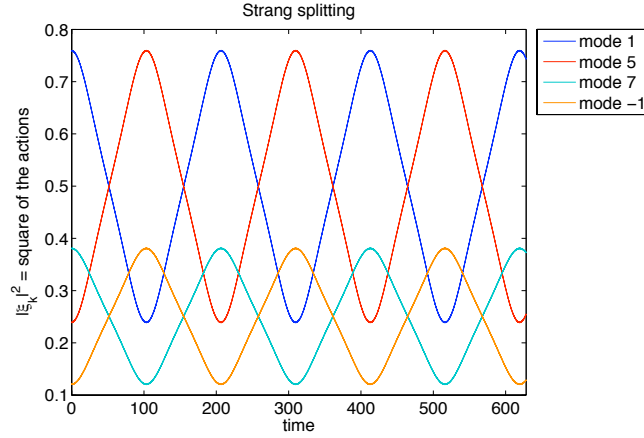


FIGURE 3.1 – Battement entre les modes -1, 5, 7 et 1. Ces simulations proviennent de [32].

Figure 3.1 on observe le phénomène de battement entre les modes $(a_2, a_1, b_2, b_1) = (-1, 5, 7, 1)$.

Dans le résultat du Théorème 3.2.2, l'effet non-linéaire apparaît pour des temps $t \sim \nu^{-1}$. En fait, c'est le temps minimal pour qu'un tel effet se produise, puisque la formule de Duhamel

$$u(t) = e^{it\partial_x^2} u_0 - i\nu \int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2} (|u|^4 u)(s) ds,$$

permet de déduire que $|\xi_j|^2$ reste essentiellement constant pour des temps $t \ll \nu^{-1}$.

Les solutions construites sont telles que, pour $0 \leq t \leq \nu^{-9/8}$ et $s \geq 0$

$$\|u(t, \cdot)\|_{\dot{H}^s}^2 = \frac{K_\star(\nu t)}{2} (2|a_1|^{2s} + |a_2|^{2s} - 2|b_1|^{2s} - |b_2|^{2s}) + |b_1|^{2s} + \frac{1}{2}|b_2|^{2s} + \mathcal{O}(\nu^{1/4}).$$

En particulier, ce résultat est compatible avec la conservation de la masse ($s = 0$) et de l'énergie ($s = 1$), car compte tenu du choix $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathcal{A}$, le facteur $(2|a_1|^{2s} + |a_2|^{2s} - 2|b_1|^{2s} - |b_2|^{2s})$ s'annule pour ces valeurs de s . On peut également vérifier que ces solutions sont de moment constant. Si $s \geq 2$, $\|u(t, \cdot)\|_{\dot{H}^s}$ n'est plus constant en général (sauf pour certains choix particuliers de \mathcal{A}).

Si $s \geq 4$ et $n = -k$ dans la définition de \mathcal{A} , on peut trouver un $T > 0$ tel que

$$\|u(T, \cdot)\|_{\dot{H}^s}^2 \geq 2\|u(0, \cdot)\|_{\dot{H}^s}^2.$$

Ceci est à comparer avec le résultat de Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao [37] qui ont montré un transfert des basses vers les hautes fréquences pour NLS cubique 2D. Leur résultat est plus fort, puisque dans notre situation, nous avons un échange entre les modes $\{n, n + 3k\}$ et les modes $\{n + 4k, n + k\}$ dont l'énergie est du même ordre de grandeur.

Notons pour conclure que les simulations de [32] suggèrent l'existence d'une dynamique plus riche pour des termes de taille inférieure : voir Figure 3.2.

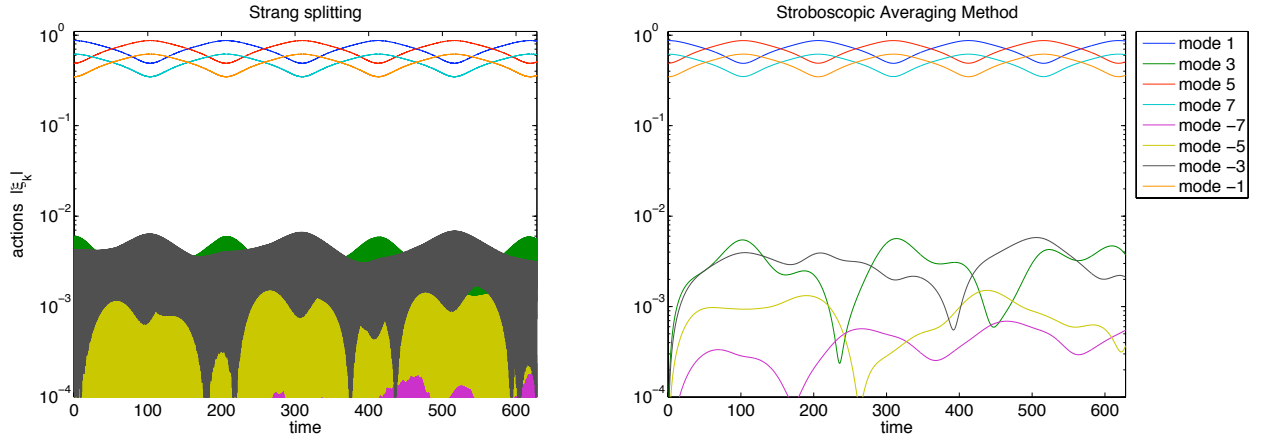


FIGURE 3.2 – Simulations de termes d'ordres supérieurs. Voir [32].

Par ailleurs, il serait intéressant de montrer qu'il existe effectivement des solutions périodiques de (3.2) qui sont proches de celles que l'on a exhibées dans le Théorème 3.2.2. Pour ce faire, on pourrait essayer d'utiliser un théorème de type Birkhoff-Lewis pour des systèmes hamiltoniens de dimension infinie, dans l'esprit des travaux de D. Bambusi et M. Berti [4] et de L. Biasco et L. Di Gregorio [12].

Une généralisation du résultat

Dans la suite on va considérer les ensembles résonants

$$\mathcal{A}_k = \{n_k - 2, n_k - 1, n_k + 1, n_k + 2\},$$

où $(n_k)_{k \geq 1}$ est une suite d'entiers qui sera précisée après, et pour $K \geq 1$, on écrit $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^K \mathcal{A}_k$.

Avec E. Haus [A10], nous avons construit des solutions avec un nombre arbitraire de modes supportés dans \mathcal{A} .

Théorème 3.2.3 ([A10]). *Il existe $\nu_0 > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \geq 1}$ tels que si $0 < \nu < \nu_0$, pour tout $K \geq 1$ avec $n_K \leq -c \ln \nu$ il existe une solution à (3.2) qui s'écrit $|t| \leq \nu^{-9/8}$*

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^K e^{-n_k} v_k(t, x) + \nu^{1/4} q(t, x), \quad (3.3)$$

avec

- i) Pour tout $1 \leq k \leq K$, v_k est comme dans le Théorème 3.2.2.
- ii) Le terme d'erreur q est régulier en temps et analytique en espace sur $[-\nu^{-9/8}, \nu^{-9/8}] \times \mathbb{S}^1$. De plus, ses coefficients de Fourier $\hat{q}_j(t)$ vérifient

$$\sup_{|t| \leq \nu^{-9/8}} |\hat{q}_j(t)| \leq C e^{-|j|},$$

où C est une constante indépendante de $K \geq 1$ et $\nu > 0$.

Ce résultat montre un échange entre les modes à l'intérieur de chacun des ensembles \mathcal{A}_k . Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier \hat{u}_j de u dans (3.3) vérifie

$$\sup_{|t| \leq \nu^{-9/8}} |\hat{u}_j(t)| \leq C e^{-|j|},$$

et donc u reste uniformément bornée par rapport à $K \geq 1$ en norme analytique. Il est donc naturel de se demander si l'on peut choisir $K = +\infty$ dans le Théorème 3.2.3. En fait, il n'en est rien car la période de v_k croît vers l'infini avec k . De plus, l'asymptotique (3.3) a un sens tant que $e^{-n_k} v_k$ est plus grand que le terme d'erreur, ce qui donne la restriction $n_K \leq -c \ln \nu$.

Ce résultat n'est pas une conséquence directe du Théorème 3.2.2. En effet, si on excite plusieurs ensembles résonants, des interactions entre ceux-ci peuvent apparaître. Pour pouvoir contrôler ces différents modes de Fourier et limiter les interactions on a besoin d'une hypothèse arithmétique sur la suite (n_k) , qui est vérifiée pour presque toutes les suites telles que $n_{k+1} \geq 12n_k^2$ (voir [A10]).

3.2.2 Résultats pour le système cubique

Notre approche permet également d'obtenir un résultat de battement pour le système cubique de Schrödinger suivant

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \varepsilon^2 |v|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \\ i\partial_t v + \partial_x^2 v = \varepsilon^2 |u|^2 v, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Avec B. Grébert et É. Paturel [A9] nous avons établi que

Théorème 3.2.4 ([A9]). *Pour tout $0 < \gamma < 1/2$, il existe $0 < T_\gamma < C |\ln \gamma|$, une fonction $K_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$, $2T_\gamma$ -périodique telle que $K_\gamma(0) = \gamma$ et $K_\gamma(T_\gamma) = 1 - \gamma$, et il existe $0 < \varepsilon_0 < \gamma^2$ tel que si $p, q \in \mathbb{Z}$ et si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une solution à (3.4) vérifiant pour tout $|t| \leq \varepsilon^{-5/2}$*

$$u(t, x) = u_p(t) e^{ipx} + u_q(t) e^{iqx} + \varepsilon^{1/2} r_u(t, x),$$

$$v(t, x) = v_p(t) e^{ipx} + v_q(t) e^{iqx} + \varepsilon^{1/2} r_v(t, x),$$

avec

$$|u_q(t)|^2 = |v_p(t)|^2 = K_\gamma(\varepsilon^2 t),$$

$$|u_p(t)|^2 = |v_q(t)|^2 = 1 - K_\gamma(\varepsilon^2 t),$$

et où r_u et r_v sont réguliers en temps et analytiques en espace sur $[-\varepsilon^{-5/2}, \varepsilon^{-5/2}] \times \mathbb{S}^1$.

Ici on a montré un échange d'énergie entre les modes p et q : les modes u_q et v_p croissent de γ à $1 - \gamma$ en temps $t = \varepsilon^{-2} T_\gamma$.

Les solutions que nous avons construites sont telles que

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^s}^2 = (q^{2s} - p^{2s}) K_\gamma(\varepsilon^2 t) + p^{2s} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

alors que $\|u(t, \cdot)\|_{H^s}^2 + \|v(t, \cdot)\|_{H^s}^2$ reste constant pour $0 \leq t \leq \varepsilon^{-5/2}$ et $s \geq 0$. Ainsi, si $|p| \neq |q|$, on a un transfert d'énergie entre u et v sans pour autant avoir une croissance de norme.

3.2.3 Croissance de norme pour l'équation linéaire

Considérons maintenant l'équation linéaire

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + V(t, x)u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \quad (3.5)$$

avec $V(t, x)$ un potentiel analytique réel en espace et régulier en temps. Une question intéressante est de savoir si les solutions u de (3.5) sont bornées en norme Sobolev. Bourgain [18] a obtenu des bornes polynomiales, puis dans [19] en supposant de plus que V était quasi-périodique en temps il a obtenu des bornes logarithmiques. Ce dernier résultat a été étendu par Wang [96] qui a montré qu'il existe $C_s > 0$ et $\kappa > 0$ tels que

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq C_s (\log(|t| + 2))^{\kappa s} \|u_0\|_{H^s}, \quad (3.6)$$

si V est réel analytique en (t, x) .

Grâce au Théorème 3.2.4, on peut montrer l'optimalité de (3.6) et ainsi retrouver un résultat de [19]. En effet, dans (3.2) on peut écrire $V(t, x) = -\varepsilon^2 |v(t, x)|^2$ et interpréter la première équation comme une équation linéaire avec potentiel V .

Rappelons que si une fonction périodique $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ vérifie : il existe $K > 0$ et $B > 0$ tels que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $|\hat{f}_j| \leq K e^{-B|j|}$, alors f est analytique, et on note $f \in \mathcal{G}(\mathbb{T})$. Dans ce cas, on définit la semi-norme $\|f\|_{\mathcal{G}}$ par la meilleure constante K dans l'inégalité précédente.

Nous pouvons alors énoncer

Théorème 3.2.5 ([A9]). *Soit $s > 0$. Il existe une suite de potentiels réels $V_q(t, x)$, une suite de conditions initiales (u_0^q) et une suite de temps $T_q \rightarrow +\infty$ lorsque $q \rightarrow +\infty$ tels que*

i) Les potentiels sont réguliers en temps, réels analytiques en espace et uniformément bornés :

$$\forall q \in \mathbb{Z}, \forall t \in [0, T_q], \quad \|V_q(t, \cdot)\|_{\mathcal{G}} \leq C,$$

ii) $\|u_0^q\|_{H^s} = 1$,

iii) La solution $u^q(t)$ de (3.5) issue de u_0^q est réelle analytique en espace pour $t \in [0, T_q]$,

iv) Il existe une constante $C_s > 0$ ne dépendant seulement de s telle que

$$\|u^q(T_q)\|_{H^s} \geq C_s (\ln T_q)^s.$$

Comme nous l'avons dit, le résultat du Théorème 3.2.5 a été obtenu en premier par J. Bourgain [19].

Mentionnons enfin qu'en suivant l'approche de Delort [42], Fang-Zhang [50] ont obtenu des bornes logarithmiques dans le cas d'un potentiel Gevrey. Notre approche permet également de montrer que celles-ci sont optimales (voir [A9] pour plus de détails).

3.3 Idées de preuve

Nous allons donner un schéma de preuve pour le système (3.4), l'étude de l'équation quintique présentant des aspects plus techniques.

Étape 1 : formulation hamiltonienne. Avec un changement d'inconnue, on commence par se ramener à un problème à données petites. On étudie donc

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = |v|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \\ i\partial_t v + \partial_x^2 v = |u|^2 v, \\ u(0, x) = \varepsilon u_0(x), \quad v(0, x) = \varepsilon v_0(x). \end{cases} \quad (3.7)$$

La fonctionnelle

$$H = \int |\partial_x u|^2 + |\partial_x v|^2 + \int |u|^2 |v|^2,$$

est l'hamiltonien de (3.7) pour la structure symplectique $du \wedge d\bar{u} + dv \wedge d\bar{v}$. Autrement dit, le système (3.7) est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{u} = -i \frac{\delta H}{\delta \bar{u}}, & \dot{\bar{u}} = i \frac{\delta H}{\delta u}, \\ \dot{v} = -i \frac{\delta H}{\delta \bar{v}}, & \dot{\bar{v}} = i \frac{\delta H}{\delta v}. \end{cases} \quad (3.8)$$

On écrit les décompositions en série de Fourier de u, \bar{u}, v et \bar{v}

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{ijx}, & \bar{u}(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_j e^{-ijx}, \\ v(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j e^{ijx}, & \bar{v}(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \bar{\beta}_j e^{-ijx}, \end{aligned}$$

et on définit

$$P(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{T}} |u(x)|^2 |v(x)|^2 dx = \sum_{\substack{j, \ell \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathcal{M}(j, \ell) = 0}} \alpha_{j_1} \bar{\alpha}_{j_2} \beta_{\ell_1} \bar{\beta}_{\ell_2},$$

où $\mathcal{M}(j, \ell) = j_1 - j_2 + \ell_1 - \ell_2$ est le moment de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^4$.

Dans la suite on travaillera dans l'espace des phases

$$\mathcal{F}_\rho = \left\{ (\alpha, \beta) \in (\ell^1(\mathbb{Z}))^4, \text{ s.t. } \|(\alpha, \beta)\|_\rho := \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{|j|} (|\alpha_j| + |\beta_j|) < \infty \right\},$$

que l'on munit de la structure symplectique canonique $-i \sum_j (d\alpha_j \wedge d\bar{\alpha}_j + d\beta_j \wedge d\bar{\beta}_j)$. Alors, le crochet de Poisson de deux fonctions f et g de $(\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta})$ s'écrit

$$\{f, g\} = -i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{\alpha}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_j} \frac{\partial g}{\partial \alpha_j} + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{\beta}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\beta}_j} \frac{\partial g}{\partial \beta_j} \right) \right].$$

Enfin, on introduit les coordonnées polaires symplectiques $(\alpha_j = \sqrt{I_j} e^{i\theta_j}, \bar{\alpha}_j = \sqrt{I_j} e^{-i\theta_j}, \beta_j = \sqrt{J_j} e^{i\varphi_j}, \bar{\beta}_j = \sqrt{J_j} e^{-i\varphi_j})_{j \in \mathbb{Z}}$, et dans celles-ci le système (3.8) est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{\theta}_j = -\frac{\partial H}{\partial I_j}, & \dot{I}_j = \frac{\partial H}{\partial \theta_j}, & j \in \mathbb{Z}, \\ \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial H}{\partial J_j}, & \dot{J}_j = \frac{\partial H}{\partial \varphi_j}, & j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Étape 2 : mise sous forme normale. On définit l'ensemble résonant

$$\mathcal{R} = \{ (j_1, j_2, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^4 \text{ s.t. } | j_1 - j_2 + \ell_1 - \ell_2 = 0 \text{ et } j_1^2 - j_2^2 + \ell_1^2 - \ell_2^2 = 0 \}.$$

Grâce à une forme normale de Birkhoff, on simplifie l'écriture de l'hamiltonien. Ceci permet de détecter les termes qui contribuent à la dynamique du système. En général, des conditions de non-résonance permettent d'éliminer tous les termes qui ne dépendent pas seulement des actions : dans ce cas, la dynamique est alors proche d'une dynamique non-linéaire. Ici au contraire, Z_4 contient des termes non triviaux dont on espère qu'ils auront une influence sur la dynamique de \overline{H} (et donc sur H).

Proposition 3.3.1. *Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, il existe un changement de variables canonique τ proche de l'identité tel que*

$$\overline{H} := H \circ \tau = N + Z_4 + R_6,$$

où

i) $N = N(I) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (I_j + J_j).$

ii) Z_4 est le polynôme homogène de degré 4 qui est donné par

$$Z_4 = \sum_{\mathcal{R}} \alpha_{j_1} \overline{\alpha}_{j_2} \beta_{\ell_1} \overline{\beta}_{\ell_2}.$$

iii) R_6 est un reste d'ordre 6.

Par abus de notation, on continue à noter (α, β) les nouvelles variables $(\alpha', \beta') = \tau^{-1}(\alpha, \beta)$.

Le terme Z_4 contient les monômes résonants : $\{ Z_4, N \} = 0$, et on peut le décrire explicitement. Notons

$$I = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2, \quad J = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\beta_n|^2, \quad S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \overline{\beta}_n.$$

Alors

$$Z_4 = IJ + |S|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 |\beta_n|^2.$$

Étape 3 : étude d'un sous-système de dimension finie. On cherche maintenant une dynamique de dimension finie issue de H , qui ne soit pas linéaire et ayant le moins de degrés de liberté possible. On fixe $p, q \in \mathbb{Z}$ et on définit la restriction

$$\widehat{H} := H|_{\mathcal{J}(p,q)},$$

où

$$\mathcal{J}(p, q) := \{ (\alpha, \beta) \in \mathcal{F}_\rho \mid \alpha_j = \overline{\alpha}_j = \beta_j = \overline{\beta}_j = 0 \text{ lorsque } j \neq p, q \}.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= p^2(I_p + J_p) + q^2(I_q + J_q) + (I_p + I_q)(J_p + J_q) + (\alpha_p \overline{\alpha}_q \overline{\beta}_p \beta_q + \overline{\alpha}_p \alpha_q \beta_p \overline{\beta}_q) \\ &= p^2(I_p + J_p) + q^2(I_q + J_q) + (I_p + I_q)(J_p + J_q) + 2(I_p I_q J_p J_q)^{1/2} \cos(\psi_0), \end{aligned}$$

avec $\psi_0 = \theta_q - \theta_p + \varphi_p - \varphi_q$.

Le système hamiltonien qui est associé à \widehat{H} est défini sur l'espace des phases $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{R}^4 \ni (\theta_p, \theta_q, \varphi_p, \varphi_q; I_p, I_q, J_p, J_q)$ et s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\theta}_j = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial I_j}, & \dot{I}_j = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \theta_j}, & j = p, q, \\ \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial J_j}, & \dot{J}_j = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \varphi_j}, & j = p, q. \end{cases} \quad (3.9)$$

L'expression de \widehat{H} ne dépend seulement d'un angle (ψ_0) : il en résulte que le système (3.9) est complètement intégrable. On vérifie que le changement de variables

$$\begin{cases} K_1 = I_q + I_p, & K_2 = J_q + J_p, & K_3 = I_q + J_q, & K_0 = I_q \\ \psi_1 = \theta_p, & \psi_2 = \varphi_p, & \psi_3 = \varphi_q - \varphi_p, & \psi_0 = \theta_q - \theta_p + \varphi_p - \varphi_q \end{cases}$$

est symplectique : $dI \wedge d\theta + dJ \wedge d\varphi = dK \wedge d\psi$. De plus, les quantités K_1 , K_2 et K_3 sont des constantes du mouvement.

On étudie maintenant \widehat{H} dans les nouvelles coordonnées. On fixe $K_1 = K_2 = K_3 = \varepsilon^2$ et on définit

$$\widehat{H}_0(\psi_0, K_0) := \widehat{H}(\varphi_0, K_0, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^2) = \varepsilon^2(p^2 + q^2) + \varepsilon^4 + 2K_0(\varepsilon^2 - K_0) \cos \psi_0.$$

Alors (ψ_0, K_0) satisfont au système

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial K_0}, \quad \dot{K}_0 = \frac{\partial \widehat{H}_0}{\partial \psi_0}.$$

Enfin on fait le changement d'inconnues

$$\psi_0(t) = \psi(\varepsilon^2 t) \quad \text{and} \quad K_0(t) = \varepsilon^2 K(\varepsilon^2 t),$$

et on vérifie que (ψ, K) satisfont

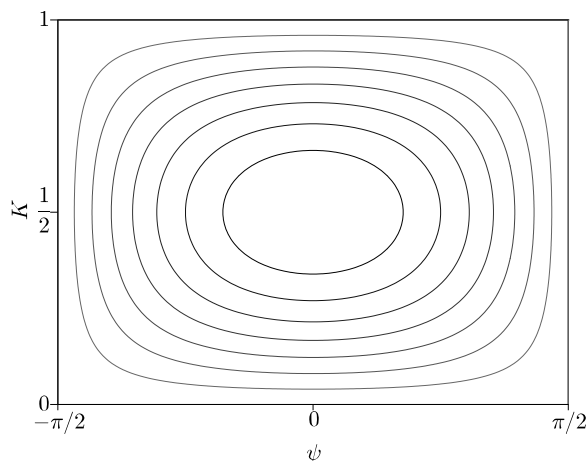
$$\begin{cases} \dot{\psi} = -2(1 - 2K) \cos \psi = -\frac{\partial H_\star}{\partial K} \\ \dot{K} = -2K(1 - K) \sin \psi = \frac{\partial H_\star}{\partial \psi}, \end{cases}$$

où

$$H_\star = H_\star(\psi, K) = 2K(1 - K) \cos \psi.$$

La dynamique de H_\star est celle d'un pendule (voir Figure 3.1.)

Étape 4 : analyse perturbative en temps longs. Il s'agit maintenant de montrer que les trajectoires exhibées dans la partie précédente sont proches de véritables trajectoires de (3.7), et ceci sur des temps supérieurs à une période de (φ, K) , *i.e.* $t \geq T\varepsilon^{-2}$. Ce genre de question est difficile en général. Ici on peut y répondre car on a une perturbation d'un système intégrable et on peut faire l'analyse perturbative dans des coordonnées actions-angles.


 FIGURE 3.3 – Lignes de niveau de l'hamiltonien H_* .

On considère le système donné par \overline{H} avec des conditions initiales dans $\mathcal{J}(p, q)$. On peut montrer que les quantités K_1 , K_2 et K_3 sont presque préservées par le flot. Cette propriété repose sur certaines symétries du système.

Soit (φ, K) une solution du système de dimension finie. On définit la variable $\tau = \varepsilon^2 t$. Alors

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(\tau) = -\frac{\partial H_*}{\partial K} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \dot{K}(\tau) = \frac{\partial H_*}{\partial \varphi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad \text{pour } 0 < \tau < \varepsilon^{-2}.$$

D'après le théorème d'Arnold-Liouville, il existe des coordonnées actions-angles

$$(L_*, \alpha_*) = \Phi(\varphi_*, K_*),$$

telles que

$$\begin{cases} \dot{L}_*(\tau) = 0 \\ \dot{\alpha}_*(\tau) = \omega_* \end{cases}$$

On définit alors

$$(L, \alpha) = \Phi(\varphi, K),$$

qui vérifient le système

$$\begin{cases} \dot{L}(\tau) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \dot{\alpha}(\tau) = \omega_* + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad \text{pour } 0 < \tau < \varepsilon^{-2}.$$

Finalement

$$(\varphi, K)(\tau) = (\varphi_*, K_*)(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \tau^2),$$

ce qui donne la description de la trajectoire.

Pour conclure, remarquons que la stratégie précédente est robuste. En fait, dans [A9] nous avons dégagé un principe général pour exhiber un phénomène de battement pour des modes supportés dans un ensemble \mathcal{A} . Il suffit de vérifier les points suivants :

- L'hamiltonien réduit \widehat{H} doit être complètement intégrable.
- L'hamiltonien \overline{H} doit être une perturbation d'ordre au moins 2 de \widehat{H} : $\overline{H} - \widehat{H} = \mathcal{O}(\alpha, \beta)^2$ pour $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{A}$.
- L'hamiltonien \overline{H} doit satisfaire une hypothèse de symétrie (voir [A9] pour plus de détails).

Conclusion et perspectives

Dans nos travaux nous avons utilisé différents outils provenant de la théorie des probabilités et des systèmes dynamiques en dimension finie. Nous souhaitons poursuivre dans cette voie pour obtenir des résultats fins sur les dynamiques des EDP dispersives non-linéaires, notamment en grand temps.

D'emblée, nous pouvons donner trois directions naturelles concernant les résultats typiques d'existence de solutions :

- Décrire plus précisément les solutions probabilistes que nous avons construites : voir comment se comportent les modes de Fourier (interactions), ou étudier le comportement en temps infini.
- Construire des solutions globales, mais en développant des outils alternatifs à des mesures de Gibbs car celles-ci donnent beaucoup de rigidité et dans de nombreux problèmes elles sont supportées dans des espaces trop irréguliers pour être utiles.
- Développer d'autres méthodes de randomisation des conditions initiales, qui donneraient plus de souplesse dans leur utilisation, par exemple dans l'esprit de celle développée par Burq-Lebeau [24]. Notons également que ces méthodes de randomisation s'appliquent à des équations à spectre discret et qu'en général on n'a pas de notion analogue pour des équations posées sur \mathbb{R}^d .

Il serait aussi intéressant d'utiliser l'aléa pour construire des solutions remarquables ou obtenir d'autres résultats qualitatifs d'un flot. Par exemple on pourrait se servir de l'aléa pour exhiber des croissances de normes Sobolev dans des équations de type Schrödinger (voir par exemple J. Bourgain [18] pour l'utilisation d'un potentiel aléatoire pour une croissance de norme dans une équation linéaire).

Dans le contexte de dynamiques résonantes, nous aimerions exhiber d'autres dynamiques, à plusieurs degrés de liberté, notamment des solutions quasi-périodiques en temps. Dans ce cas il faudra comprendre comment faire l'analyse perturbative dans des cas où le sous-système effectif n'est pas complètement intégrable.

Plus généralement, nous voulons mieux comprendre des notions classiques en systèmes dynamiques, comme celle de variété centrale, variété stable/instable ou la notions d'orbites homoclines ou hétéroclines, qui pourront être utiles dans l'étude d'EDP. Ces outils pourront servir à montrer des phénomènes de transfert d'énergie qui induisent des croissances de normes sur des EDP hamiltoniennes : c'est en substance le résultat de [37] (voir aussi Guardia-Kaloshin [58]). Avec B. Grébert et T. Jézéquel [A17], nous avons étudié une équation d'ondes non-linéaire sur

une variété compacte au voisinage d'une trajectoire homocline, ce qui est une première étape dans cette direction.

Références

- [1] T. Alazard et R. Carles. Loss of regularity for supercritical nonlinear Schrödinger equations. *Math. Ann.* 343 (2009), no. 2, 397–420.
- [2] S. Albeverio et A. Cruzeiro. Global flows with invariant (Gibbs) measures for Euler and Navier-Stokes two dimensional fluids. *Comm. Math. Phys.* 129 (1990) 431–444.
- [3] V. Arnold. Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the conservation of quasiperiodic motions under a small change of the Hamiltonian function. *Russ. Math. Surv.* 18 (1963), no. 5, 9–36.
- [4] D. Bambusi et M. Berti. A Birkhoff-Lewis-type theorem for some Hamiltonian PDEs. *SIAM J. Math. Anal.* 37 (2005), no. 1, 83–102.
- [5] D. Bambusi et S. Graffi. Time quasi-periodic unbounded perturbations of Schrödinger operators and KAM method. *Comm. Math. Phys.* 219, (2001), no. 2, 465–480.
- [6] D. Bambusi et B. Grébert. Birkhoff normal form for PDEs with tame modulus. *Duke Math. J.* 135 (2006), 507–567.
- [7] M. Berti, L. Biasco et M. Procesi. KAM theory for the Hamiltonian derivative wave equation. *Annales scientifiques de l'ENS*, fascicule 2, p. 299–371, (2013).
- [8] M. Berti, L. Biasco et M. Procesi. KAM theory for the reversible derivative wave equation. *preprint* 2012.
- [9] M. Berti, L. Biasco et M. Procesi. Existence and stability of quasi-periodic solutions of reversible derivative wave equations. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl.*, 24 (2013), 1–16.
- [10] M. Berti et P. Bolle. Sobolev quasi periodic solutions of multidimensional wave equations with a multiplicative potential. *Nonlinearity*, 25, 2579–2613, 2012.
- [11] M. Berti et P. Bolle. Quasi-periodic solutions with Sobolev regularity of NLS on \mathbb{T}^d and a multiplicative potential. *J. European Math. Society*, 15, 229–286, 2013.
- [12] L. Biasco et L. Di Gregorio. A Birkhoff-Lewis type theorem for the nonlinear wave equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 196 (2010), no. 1, 303–362.
- [13] B. Bidégaray. Invariant measures for some partial differential equations. *Phys. D* 82 (1995), no. 4, 340–364.
- [14] J. Bourgain. Construction of quasi-periodic solutions for Hamiltonian perturbations of linear equations and applications to nonlinear PDE. *Internat. Math. Res. Notices* 1994, no. 11, 475ff., approx. 21 pp.

-
- [15] J. Bourgain. Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures. *Comm. Math. Phys.*, 166 (1994) 1–26.
 - [16] J. Bourgain. Construction of periodic solutions of nonlinear wave equations in higher dimension. *J. Geom. Funct. Anal.* 5 (1995), no. 4, 629–639.
 - [17] J. Bourgain. Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 176 (1996) 421–445.
 - [18] J. Bourgain. On growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with smooth time-dependent potential. *J. Anal. Math.* 77 (1999), 315–348.
 - [19] J. Bourgain. Growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with quasi-periodic potential. *Comm. Math. Phys.* 204 (1999), no. 1, 207–247.
 - [20] J. Bourgain. On invariant tori of full dimension for 1D periodic NLS. *J. Funct. Anal.* 229 (2005), no. 1, 62–94.
 - [21] N. Burq. Random data Cauchy theory for dispersive partial differential equations. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Volume III, 1862–1883, 2010.
 - [22] N. Burq. Large-time dynamics for the one-dimensional Schrödinger equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 141 (2011), no. 2, 227–251.
 - [23] N. Burq, P. Gérard and N. Tzvetkov. Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 38 (2005), no. 2, 255–301.
 - [24] N. Burq et G. Lebeau. Injections de Sobolev probabilistes et applications. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*
 - [25] N. Burq et N. Tzvetkov. Invariant measure for the three dimensional nonlinear wave equation. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2007, no. 22, Art. ID rnm108, 26 pp.
 - [26] N. Burq et N. Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I : local existence theory. *Invent. Math.* 173, No. 3, (2008), 449–475.
 - [27] N. Burq et N. Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations II : A global existence result. *Invent. Math.* 173, No. 3 (2008), 477–496.
 - [28] N. Burq et N. Tzvetkov. Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation (2011). *Preprint : arXiv :1103.2222*. À paraître dans JEMS.
 - [29] R. Carles. Nonlinear Schrödinger equation with time dependent potential. *Commun. Math. Sci.* 9 (2011), no. 4, 937–964.
 - [30] R. Carles. Global existence results for nonlinear Schrödinger equations with quadratic potentials. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 13 (2005), no. 2, 385–398.
 - [31] R. Carles. Rotating points for the conformal NLS scattering operator. *Dynamics of PDE* 6 (2009), 35–51.
 - [32] F. Castella, P. Chartier, F. Méhats et A. Murua. Stroboscopic averaging for the nonlinear Schrödinger equation. *Preprint : hal-00732850*.
 - [33] T. Cazenave. Semilinear Schrödinger Equations. *Courant Lecture Notes*, vol. 10, 2003.
 - [34] L. Chierchia et G. Pinzari. The planetary N-body problem : Symplectic foliation, reductions and invariant tori. *Invent. Math.* 186 (2011), no. 1, 1–77.

RÉFÉRENCES

- [35] M. Christ, J. Colliander and T. Tao, Ill-posedness for nonlinear Schrödinger and wave equations. *Preprint : arXiv :0311048*.
- [36] J. Colliander et T. Oh. Almost sure well-posedness of the cubic nonlinear Schrödinger equation below $L^2(\mathbb{T})$, *Duke Math. J.* 161 (2012) no. 3, 367–414.
- [37] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka et T. Tao. Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Invent. Math.* 181 (2010), no. 1, 39–113.
- [38] W. Craig. Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles. *Panoramas et Synthèses*, 9. Société Mathématique de France, Paris, 2000. viii+120 pp.
- [39] W. Craig et E. Wayne. Newton’s method and periodic solutions of nonlinear wave equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 46 (1993), no. 11, 1409–1498.
- [40] G. Da Prato et A. Debussche. Two-dimensional Navier-Stokes equations driven by a space-time white noise. *J. Funct. Anal.* 196 (2002), no. 1, 180–210.
- [41] A.-S. de Suzzoni. Large data low regularity scattering result for the wave equation on the Euclidian space. *Comm. Partial Differential Equations* 38 (2013), no. 1, 1–49.
- [42] J.-M. Delort. Growth of Sobolev norms of solutions of linear Schrödinger equations on some compact manifolds. *Int. Math. Res. Not.* (2010), no. 12, 2305–2328.
- [43] J.-M. Delort. Growth of Sobolev norms for solutions of time dependent Schrödinger operators with harmonic oscillator potential. *Preprint : hal-00467572*.
- [44] Y. Deng. Two dimensional NLS equation with random radial data. *Analysis & PDE* 5-5 (2012) 913–960.
- [45] B. Dodson. Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2 -critical, nonlinear Schrödinger equation when $d = 1$. *Preprint : arXiv :1010.0040*.
- [46] L.H. Eliasson. Almost reducibility of linear quasi-periodic systems. *Smooth ergodic theory and its applications* (Seattle, WA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math., 69, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001) 679–705.
- [47] L.H. Eliasson et S.B. Kuksin. KAM for the nonlinear Schrödinger equation. *Ann. of Math.* (2) 172 (2010), no. 1, 371–435.
- [48] L.H. Eliasson et S.B. Kuksin. On reducibility of Schrödinger equations with quasiperiodic in time potentials. *Comm. Math. Phys.* 286 (2009), no. 1, 125–135.
- [49] V. Enss et K. Veselic. Bound states and propagating states for time-dependent hamiltonians. *Ann IHP* 39(2), 159–191 (1983).
- [50] D. Fang et Q. Zhang. On growth of Sobolev norms in linear Schrödinger equations with time-dependent Gevrey potential. *J. Dyn. Diff. Equat.* 2012, DOI 10.1007/s10884-012-9244-7.
- [51] J. Ginibre et G. Velo. Generalized Strichartz inequalities for the wave equation *J. Funct. Anal.* 133 (1995), 1, 50–68
- [52] B. Grébert. Birkhoff normal form and Hamiltonian PDEs, *Partial differential equations and applications, Sémin. Congr., vol. 15, Soc. Math. France, Paris* 2007, pp. 1–46.
- [53] B. Grébert, R. Imekraz et É. Paturel. Normal forms for semilinear quantum harmonic oscillators. *Commun. Math. Phys.* 291, 763–798 (2009).

-
- [54] B. Grébert et T. Kappeler. Perturbations of the defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Milan J. Math.* 71 (2003), 141–174.
 - [55] B. Grébert, T. Kappeler et J. Pöschel. The defocusing NLS equation and its normal form. To appear.
 - [56] B. Grébert et C. Villegas-Blas. On the energy exchange between resonant modes in nonlinear Schrödinger equations. *Ann. I. H. Poincaré - AN*, 28 (2011), no. 1, 127–134.
 - [57] A. Grünrock et S. Herr. Low regularity local well-posedness of the derivative nonlinear Schrödinger equation with periodic initial data. *SIAM J. Math. Anal.* 39 (2008), no. 6, 1890–1920.
 - [58] M. Guardia et V. Kaloshin. Growth of Sobolev norms in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation. *arXiv :1205.5188*.
 - [59] J.-P. Kahane. Some random series of functions. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 5. 1985. xiv+305 pp.
 - [60] T. Kappeler, P. Lohrmann, P. Topalov et N. T. Zung. Birkhoff coordinates for the focusing NLS equation. Preprint. *Comm. Math. Phys.*, 285 (2009), no. 3, 1087–1107.
 - [61] H. Koch et D. Tataru. L^p eigenfunction bounds for the Hermite operator *Duke Math. J.* 128 (2005), no. 2, 369–392.
 - [62] A. Kolmogorov. On the conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton’s function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 98 (1954), 527–530.
 - [63] S. B. Kuksin. Hamiltonian perturbations of infinite-dimensional linear systems with an imaginary spectrum. *Funct. Anal. Appl.*, 21 (1987), 192–205.
 - [64] S. B. Kuksin. Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems. *Lecture Notes in Mathematics*, 1556. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
 - [65] S. B. Kuksin. Analysis of Hamiltonian PDEs. *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*, 19. Oxford University Press, Oxford, 2000. xii+212 pp.
 - [66] S. B. Kuksin et J. Pöschel. Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation. *Ann. of Math.* 143 (1996), 149–179.
 - [67] G. Lebeau. Perte de régularité pour les équation d’ondes sur-critiques. *Bull. Soc. Math. Fr.* 133 (2005), 145–157.
 - [68] G. Lebeau. Non linear optic and supercritical wave equation.. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 70 (2001), no. 4-6, 267–306 (2002).
 - [69] J. Lebowitz, R. Rose et E. Speer. Statistical dynamics of the nonlinear Schrödinger equation. *J. Stat. Physics*, V 50 (1988) 657-687.
 - [70] J. Liu et X. Yuan. Spectrum for quantum Duffing oscillator and small-divisor equation with large-variable coefficient. *Comm. Pure Appl. Math.* 63 (2010), no. 9, 1145–1172.
 - [71] Z. Liang and J. You. Quasi-periodic solutions for 1D Schrödinger equations with higher order nonlinearity. *SIAM J. Math. Anal.*, 36 (2005), no. 6, 1965–1990.
 - [72] M. Marcus et G. Pisier. Random Fourier series with applications to harmonic analysis. *Annals of Mathematics Studies*, 101. 1981. v+151 pp.
 - [73] J. Moser. On invariant curves of area preserving mappings of an annulus. *Nach. Akad. Wiss. Gott., Math. Phys. Kl.* (1962), 1–20.

RÉFÉRENCES

- [74] A. Nahmod, T. Oh, L. Rey-Bellet and G. Staffilani. Invariant weighted Wiener measures and almost sure global well-posedness for the periodic derivative NLS. *JEMS*, 14 (2012), no. 4, 1275–1330.
- [75] A. Nahmod, N. Pavlovic et G. Staffilani. Almost sure existence of global weak solutions for super-critical Navier-Stokes equations. (2012) *Preprint : arXiv :1204.5444*.
- [76] A. Nahmod, L. Rey-Bellet, S. Sheffield et G. Staffilani. Absolute continuity of Brownian bridges under certain gauge transformations. *Math. Res. Letters* Volume 18 (2011), no. 5, 875–887.
- [77] K. Nakanishi. Energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions 1 and 2. *J. Funct. Anal.* 169 (1999) 201–225.
- [78] T. Oh. Invariance of the Gibbs measure for the Schrödinger-Benjamin-Ono system. *SIAM J. Math. Anal.* 41 (2009/10), no. 6, 2207–2225.
- [79] T. Oh. Invariant Gibbs measures and a.s. global well-posedness for coupled KdV systems. *Diff. Int. Eq.* 22 (2009), no. 7–8, 637–668.
- [80] R. Paley et A. Zygmund. On some series of functions. 1. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 26 (1930), 337–357. 11 R. E. A. C. Paley and A. Zygmund. On some series of functions. 2. *Proc. Camb. Phil. Soc.*
- [81] R. Paley et A. Zygmund. On some series of functions. 2. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 26 (1930), 458–474.
- [82] R. Paley et A. Zygmund. On some series of functions. 3. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 28 (1932), 190–205.
- [83] A. Poiret. Solutions globales pour l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3. *Preprint : arXiv :1207.1578*.
- [84] A. Poiret. Solutions globales pour des équations de Schrödinger sur-critiques en toutes dimensions. *Preprint : arXiv :1207.3519*.
- [85] J. Pöschel. A KAM-theorem for some nonlinear partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) 23 (1996), no. 1, 119–148.
- [86] J. Pöschel. On elliptic lower-dimensional tori in Hamiltonian systems. *Math. Z.* 202 (1989), no. 4, 559–608.
- [87] C. Procesi et M. Procesi. A normal form for the Schrödinger equation with analytic non-linearities. *Comm. Math. Phys.* 312 (2012), no. 2, 501–557.
- [88] M. Procesi et X. Xu. Quasi-Töplitz Functions in KAM Theorem. *SIAM J. Math. Anal.*, (2013), Vol. 45, No. 4, 2148–2181.
- [89] N. Tzvetkov. Construction of a Gibbs measure associated to the periodic Benjamin-Ono equation. *Probab. Theory Related Fields*, 146 (2010), 481–514.
- [90] N. Tzvetkov. Invariant measures for the defocusing NLS. *Ann. Inst. Fourier*, 58 (2008) 2543–2604.
- [91] N. Tzvetkov. Invariant measures for the Nonlinear Schrödinger equation on the disc. *Dynamics of PDE* 3 (2006), 111–160.
- [92] N. Tzvetkov et N. Visciglia. Gaussian measures associated to the higher order conservation laws of the Benjamin-Ono equation. *Preprint : arXiv :1109.5291*.

- [93] K. Yajima et H. Kitada. Bound states and scattering states for time periodic Hamiltonians. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)* 39 (1983), no. 2, 145–157.
- [94] K. Yajima et G. Zhang. Smoothing property for Schrödinger equations with potential superquadratic at infinity. *Comm. Math. Phys.* 221 (2001), no. 3, 573–590.
- [95] W.-M. Wang. Pure point spectrum of the Floquet Hamiltonian for the quantum harmonic oscillator under time quasi-periodic perturbations. *Comm. Math. Phys.* 277 (2008), 459–496.
- [96] W.-M. Wang. Logarithmic bounds on Sobolev norms for time-dependant linear Schrödinger equations. *Comm. Partial Differential Equations* (2009), 33 :12, 2164–2179.
- [97] C. E. Wayne. Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory. *Comm. Math. Phys.* 127 (1990), no. 3, 479–528.
- [98] J. Zhang. Sharp threshold for blowup and global existence in nonlinear Schrödinger equations under a harmonic potential, *Comm. Partial Differential Equations* 30 (2005), no. 10-12, 1429–1443.
- [99] P. Zhidkov. KdV and nonlinear Schrödinger equations : Qualitative theory. Lecture Notes in Mathematics 1756, Springer 2001.