Sur une courte note de V. V. Deodhar

Jean-Yves Hée

31 janvier 2008

Voici une démonstration, plus courte me semble-t-il, du théorème de [2] (*cf.* le corollaire de la proposition 2 ci-dessous). Ce résultat de V. V. Deodhar a également été obtenu par M. Dyer (*cf.* [3] et [4]).

1 Notations

(1.1) Soient W un groupe opérant sur un ensemble non vide E, R une partie génératrice de W formée d'éléments d'ordre 2, et $(\mathcal{P}_r)_{r\in R}$ une famille de partitions de E satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) ci-dessous.

(1) *Pour tout* $r \in R$, *la partition* $\mathcal{P}_r$ *est constituée de deux parties échangées par* r.

(2) *Pour tout* $r \in R$ *et tout* $w \in W$, *on a* $wrw^{-1} \in R$ *et* $w(\mathcal{P}_r) = \mathcal{P}_{wrw^{-1}}$ (*i.e. les images par* w *des parties de* E *constituant la partition* $\mathcal{P}_r$ *sont les parties de* E *constituant la partition* $\mathcal{P}_{wrw^{-1}}$).

Avant d'énoncer la condition (3), introduisons des notations. Pour $x, y \in E$ et $r \in R$, nous écrivons $x \sim_r y$ si x et y appartiennent au même terme de la partition $\mathcal{P}_r$, et nous disons que r *sépare* x et y dans le cas contraire. Il résulte de (1) que, pour $x \in E$ et $r \in R$, r sépare x et $r(x)$; nous disons que r est un *mur* de x si r est le seul élément de R qui sépare x et $r(x)$. La condition (2) entraîne que, si r est un mur de x et si $w \in W$, wrw^{-1} est un mur de $w(x)$. Pour $x, y \in E$, nous écrivons $x \sim y$ si $x \sim_r y$ pour tout $r \in R$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans E; d'après (2), si $x, y \in E$, si $x \sim y$ et si $w \in W$, alors $w(x) \sim w(y)$.

Voici la condition (3).

(3) *Pour tout* $x \in E$ *et tout* $y \in E$ *tels que* $x \nsim y$, *il existe une suite finie* $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ $(n \geq 1)$ *d'éléments de* E *et une suite* $r_1, ..., r_n$ *d'éléments de* R *telles que, pour* $1 \leq i \leq n$, r_i *soit un mur de* x_{i-1} *et* $r_i(x_{i-1}) \sim x_i$.

Avec les notations de (3), on observe que, pour $0 \leq i < j \leq n$, l'ensemble des éléments de R séparant x_i et x_j est contenu dans $\{r_{i+1}, ..., r_j\}$.

2 Un système de Coxeter

(2.1) Soient x_0 un élément de E et R_0 l'ensemble des murs de x_0.

Nous allons montrer que (W, R_0) est un système de Coxeter et que $R = \{wrw^{-1} \mid w \in W,\ r \in R_0\}$.

(2.2) Lemme 1 : *Pour tout* $y \in E$, *il existe* $w \in < R_0 >$ *tel que* $y \sim w(x_0)$.

Démonstration : On peut supposer que $x_0 \nsim y$. On adopte alors les notations de (3) et l'on raisonne par récurrence sur n.

Si $n = 1$, on a $y = x_1 \sim r_1(x_0)$ et $r_1 \in R_0$.

Si $n \geq 2$, on considère les suites $x'_0 = r_1(x_1), x'_1 = r_1(x_2), ..., x'_{n-1} = r_1(x_n) = r_1(y)$, et $r'_1 = r_1 r_2 r_1^{-1}, ..., r'_{n-1} = r_1 r_n r_1^{-1}$. Pour $1 \leq i \leq n-1$, on a $r'_i \in R$ (*cf.* (2)), $r'_i = r_1 r_{i+1} r_1^{-1}$ est un mur de $r_1(x_i) = x'_{i-1}$, et $r'_i(x'_{i-1}) = r_1 r_{i+1} r_1^{-1} r_1(x_i) = r_1 r_{i+1}(x_i) \sim r_1(x_{i+1}) = x'_i$. D'autre part, on a $x'_0 \sim x_0$, ce qui entraîne que les murs de x'_0 sont les mêmes que ceux de x_0. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc $w' \in < R_0 >$ tel que $r_1(y) \sim w'(x'_0)$. On a $y \sim r_1 w'(x'_0) \sim r_1 w'(x_0)$ et, comme r_1 est un mur de $x_0, r_1 w' \in < R_0 >$.

(2.3) Lemme 2 : *Pour tout* $r \in R$, *il existe* $x \in E$ *tel que* r *soit un mur de* x, *et il existe* $w \in < R_0 >$ *tel que* $r \in w R_0 w^{-1}$.

Démonstration : D'après (1), r sépare x_0 et $r(x_0)$. Posons $y = r(x_0)$, et adoptons les notations de (3). Alors, $r \in \{r_1, ..., r_n\}$: il existe i $(1 \leq i \leq n)$ tel que $r = r_i$; en particulier, r est un mur de x_{i-1}. D'après le lemme 1, il existe $w \in < R_0 >$ tel que $x_{i-1} \sim w(x_0)$. Comme $w^{-1} r w$ est un mur de $w^{-1}(x_{i-1})$ et que $w^{-1}(x_{i-1}) \sim x_0$, on a $w^{-1} r w \in R_0$, donc $r \in w R_0 w^{-1}$.

(2.4) Remarque : Si $r, r' \in R$ et si $r \neq r'$, on a $\mathcal{P}_r \neq \mathcal{P}_{r'}$. En effet, il existe $x \in E$ tel que r soit un mur de x. Alors, x et $r(x)$ sont séparés par r mais ne le sont pas par r', donc $\mathcal{P}_r \neq \mathcal{P}_{r'}$.

(2.5) Lemme 3 : *L'ensemble R_0 engendre W.*
Démonstration : Puisque R engendre W, cela résulte du lemme 2.

(2.6) Proposition 1 : (a) *Le couple (W, R_0) est un système de Coxeter.*
(b) *Notons $l : W \to \mathbb{N}$ la fonction longueur par rapport à R_0. Pour tout $r \in R_0$ et tout $w \in W$, on a les équivalences :*

$$l(rw) > l(w) \iff r \text{ ne sépare pas } x_0 \text{ et } w(x_0),$$

$$l(rw) < l(w) \iff r \text{ sépare } x_0 \text{ et } w(x_0).$$

(c) *L'opération de W sur les classes d'équivalence de la relation $\sim$ dans E est simplement transitive ; en particulier, l'opération de W sur E est fidèle.*
Démonstration : Le raisonnement qui suit est inspiré de la démonstration de [1, chap. V, 3, n° 2, th. 1 (i), (ii), (iii), p. 74]. Pour tout $r \in R$, notons Q_r l'ensemble des éléments w de W tels que $x_0 \sim_r w(x_0)$. Vérifions les conditions (A'), (B') et (C) de [1, chap. IV, 1, n° 7, p. 18].
(A') *Pour tout $r \in R_0$, on a $1 \in Q_r$.* C'est évident.
(B') *Pour tout $r \in R_0, Q_r$ est disjoint de rQ_r.* En effet, si w et w' appartiennent à Q_r, on a $w(x_0) \sim_r x_0 \sim_r w'(x_0) \nsim_r rw'(x_0)$, donc $w \neq rw'$.
(C) *Si $r, r' \in R_0$, si $w \in Q_r$ et si $wr' \notin Q_r$, on a $rw = wr'$.* En effet, on a $w(x_0) \sim_r x_0 \nsim_r wr'(x_0)$; ainsi, r sépare $w(x_0)$ et $wr'(x_0)$, donc (*cf.* (2)) $w^{-1}rw$ sépare x_0 et $r'(x_0)$. Puisque $r' \in R_0, r'$ est le seul élément de R qui sépare x_0 et $r'(x_0)$. On a donc $w^{-1}rw = r'$, *i.e.* $rw = wr'$.
Les assertions (a) et (b) résultent maintenant de [1, chap. IV, 1, prop. 6, p. 18].
(c) Vu le lemme 1, il suffit de montrer que si $x \in W$ et si $w(x_0) \sim x_0$, alors $w = 1$. Or, d'après (b), l'hypothèse faite entraîne que $l(rw) > l(w)$ pour tout $r \in R_0$; on a donc $w = 1$.

3 Sous-groupes engendrés par des réflexions

(3.1) Proposition 2 : *Soient R' une partie de R, et $W' = < R' >$.*

(a) *Supposons que, quels que soient $r, r' \in R'$, on ait $rr'r^{-1} \in R'$. Alors, W', R', E et la famille de partitions $(\mathcal{P}_r)_{r \in R'}$ satisfont aux conditions* (1), (2), (3) *ci-dessus.*

(b) *Le groupe W' est un groupe de Coxeter.*

Démonstration : (a) Il suffit de vérifier la condition (3). Soient $x, y \in E$, et supposons qu'il existe un élément de R' qui sépare x et y. La condition (3) appliquée à R nous fournit des éléments $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ $(n \geq 1)$ de E et des éléments $r_1, ..., r_n$ de R. Supprimons les r_i qui n'appartiennent pas à R'; nous obtenons une suite $r'_1 = r_{i_1}, ..., r'_m = r_{i_m}$ (où $m \geq 1$ et $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n$). Posons $x'_0 = x, x'_j = x_{i_j}$ pour $1 \leq j \leq m-1$, et $x'_m = y$. Les suites $x'_0, x'_1, ..., x'_m$ et $r'_1, ..., r'_m$ montrent que la condition (3) pour R' est remplie.

(b) Soit $R'' = \{wrw^{-1} \mid w \in W' \text{ et } r \in R'\}$. D'après (2), R'' est une partie de R. D'autre part, $< R'' > = W'$ et, quels que soient $r_1, r_2 \in R''$, on a $r_1 r_2 r_1^{-1} \in R''$. Il résulte donc de (a) et de la proposition 1 que W' est un groupe de Coxeter.

(3.2) Corollaire : *Soit (W, S) un système de Coxeter. Pour toute partie R' de l'ensemble $R = \{wsw^{-1} \mid w \in W, s \in S\}$, le groupe $< R' >$ est un groupe de Coxeter.*

Démonstration : Cela résulte de la Proposition 2 appliquée à l'opération de W par translations à gauche sur $E = W$ et à la famille de partitions de W définie ci-dessous (*cf.* (4.3) et (4.4)).

4 Appendice

Soit (W, S) un système de Coxeter.

(4.1) *Supposons que $S = \{s, t\}$, où $s \neq t$. Soient $w \in W \setminus \{1\}$ et $s' \in S$ tels que $wsw^{-1} = s'$ et que $l(ws) > l(w)$. Alors, $m_{s,t} < \infty$, ws est l'élément le plus long de W, et s' est égal à s ou à t selon que $m_{s,t}$ est pair ou impair.*

Démonstration : Soit $w' = wt$. On a $l(w') = l(w) - 1$ et $wst = s'w'$, donc $l(wst) = l(s'w') \leq 1 + l(w') = l(w) < l(ws)$. Par suite, $m_{s,t} < \infty$ et ws est l'élément le plus long de W. On en déduit aisément la dernière assertion.

(4.2) *Soient $s, s' \in S$, et $w \in W$ tels que $wsw^{-1} = s'$ et que $l(ws) > l(w)$. Il existe un entier naturel $n \leq l(w)$, une suite $(w_h)_{1 \leq h \leq n}$ d'éléments de $W \setminus \{1\}$, et deux suites $(s_h)_{1 \leq h \leq n+1}$ et $(t_h)_{1 \leq h \leq n}$ d'éléments de S possédant les propriétés suivantes :*

$$w = w_n ... w_2 w_1,\ l(w) = l(w_n) + ... + l(w_2) + l(w_1), s_1 = s, s_{n+1} = s',$$

et, pour $1 \leq h \leq n$,

$$w_h s_h w_h^{-1} = s_{h+1},\ s_h \neq t_h, s_{h+1} \in \{s_h, t_h\} \text{ et } w_h \in < s_h, t_h > .$$

Alors, nécessairement, pour $1 \leq h \leq n$, on a $m_{s_h,t_h} < \infty$, $w_h s_h$ est l'élément le plus long du groupe diédral $< s_h, t_h >$, et s_{h+1} est égal à s_h ou à t_h selon que m_{s_h,t_h} est pair ou impair.

Démonstration : Nous raisonnons par récurrence sur $l(w)$. On peut supposer que $l(w) \geq 1$. Il existe $t \in S$ tel que $l(wt) < l(w)$; on a $t \neq s$. Soient x l'élément le plus court de la classe à gauche $w < s, t >$ et $y = x^{-1}w$. On a $w = xy,\ y \in < s, t >,\ l(x) < l(w) = l(x) + l(y),\ l(xs) > l(x),\ l(xt) > l(x)$ et $l(ys) > l(y)$. Soit $r = ysy^{-1}$. On a $1 \neq r \in < s, t >$ et $xrx^{-1} = s'$, donc $1 = l(s') = l(xrx^{-1}) \geq l(xr) - l(x) = l(r) \geq 1$, d'où $l(r) = 1$, *i.e.* $r \in \{s, t\}$. Posons $w_1 = y,\ s_1 = s,\ t_1 = t$ et $s_2 = r$. On a $w_1 s_1 w_1^{-1} = s_2,\ s_1 \neq t_1,\ s_2 \in \{s_1, t_1\}$ et $w_1 \in < s_1, t_1 >$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à x, on voit qu'il n'y a plus qu'à démontrer les assertions concernant $m_{s_1,t_1} = m_{s,t}$ et $w_1 s_1 = ys$. Mais celles-ci résultent de (4.1).

(4.3) *Pour tout $s \in S$, posons $P_s^+ = \{w \in W \mid l(sw) > l(w)\}$, et $P_s^- = \{w \in W \mid l(sw) < l(w)\}$, de sorte que l'ensemble $\mathcal{P}_s = \{P_s^+,\ P_s^-\}$ est une partition de W.*

(a) *Soit $s \in S$. On a $sP_s^+ = P_s^-$ et $sP_s^- = P_s^+$. Plus généralement, si s appartient à une partie sphérique J de S, l'élément $s' = w_J s w_J^{-1}$ appartient aussi à J et l'on a $w_J P_s^+ = P_{s'}^-$ et $w_J P_s^- = P_{s'}^+$.*

(b) *Soient $s, s' \in S$, et $w \in W$ tels que $wsw^{-1} = s'$. Alors, la partition $w\mathcal{P}_s = \{wP_s^+, wP_s^-\}$ est égale à $\mathcal{P}_{s'}$.*

(c) *Soient $w \in W, s \in S$ et $r = wsw^{-1}$. La partition $w\mathcal{P}_s = \{wP_s^+, wP_s^-\}$ ne dépend que de r et non du choix du couple (w, s) tel que $r = wsw^{-1}$. Nous la notons $\mathcal{P}_r$.*

Démonstration : (a) Soit $z \in W$. Notons y l'élément le plus court de $< J > z$, et posons $x = zy^{-1}$. Pour tout $u \in < J >$, on a $l(uy) = l(u) + l(y)$ et $l(w_J u) = l(w_J) - l(u)$. Or

$$z = xy,\ sz = (sx)y,\ w_J z = (w_J x)y,\ s' w_J z = w_J sz = (w_J sx)y,$$

et $x, sx, w_J x, w_J sx$ appartiennent à $< J >$, donc

$$l(z) = l(x) + l(y),$$

$$l(sz) = l(sx) + l(y),$$

$$l(w_J z) = l(w_J x) + l(y) = l(w_J) - l(x) + l(y),$$

$$l(s' w_J z) = l(w_J sx) + l(y) = l(w_J) - l(sx) + l(y).$$

Par suite, on a $l(s' w_J z) - l(w_J z) = l(x) - l(sx) = l(z) - l(sz)$, ce qui entraîne les égalités $w_J P_s^+ = P_{s'}^-$ et $w_J P_s^- = P_{s'}^+$.

(b) se déduit de (a) et de (4.2).

(c) résulte de (b).

(4.4) *Posons* $R = \{wsw^{-1} \mid w \in W, s \in S\}$ *et* $E = W$, *et considérons l'opération de* W *sur* E *par translations à gauche. Alors, la famille de partitions* $(\mathcal{P}_r)_{r \in R}$ *définie en* (4.3) *satisfait aux conditions* (1), (2), (3) *de* (1.1).

Démonstration : Les conditions (1) et (2) se déduisent aisément de (4.3) (a) et (c). Ensuite, on montre sans peine que les murs de l'élément 1 de E sont les éléments de S. Enfin, vérifions la condition (3). Soient $x, y \in E$ tels que $x \nsim y$, et écrivons $y = xs_1 ... s_n$, où $s_1, ..., s_n \in S$. Posons $x_0 = x$, et, pour $1 \leq i \leq n$, définissons par récurrence sur i, $x_i = x_{i-1} s_i$ et $r_i = x_{i-1} s_i x_{i-1}^{-1}$. On a $x_n = y$ et, pour $1 \leq i \leq n, r_i \in R, r_i(x_{i-1}) = x_{i-1} s_i = x_i$ et, comme s_i est un mur de 1, r_i est un mur de $x_{i-1}(1) = x_{i-1}$.

Références

[1] Bourbaki, N. : *Groupes et algèbres de Lie,* Chapitres IV, V, VI, Masson, Paris, 1981.

[2] Deodhar, V. V. : A note on subgroups generated by reflections in Coxeter groups, *Arch. Math.* 53 (1989), 543-546.

[3] Dyer, M. : *Hecke Algebras and Reflections in Coxeter Groups,* Thesis, University of Sydney, 1987.

[4] Dyer, M. : Reflection Subgroups of Coxeter Systems, *J. Algebra* 135 (1990), 57-73.

Table des matières