Opérateurs invariants sur un immeuble affine de type $\widetilde{B}_n$ $(n \geq 3)$

Ferdaous Kellil et Guy Rousseau

4 août 2011

Résumé

On considère un immeuble Δ de type $\widetilde{B}_n$ $(n \geq 3)$, différents sous-ensembles $\mathcal{S}'$ de l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets de Δ et un groupe G d'automorphismes de Δ, fortement transitif sur Δ en respectant les types. On montre que l'algèbre des opérateurs G-invariants agissant sur l'espace des fonctions sur $\mathcal{S}'$ n'est pas commutative (contrairement aux résultats classiques) et on donne ses générateurs. On explicite également la structure de certaines sous-algèbres commutatives.

Abstract

We consider a building Δ of type $\widetilde{B}_n$ $(n \geq 3)$, different subsets $\mathcal{S}'$ of the set $\mathcal{S}$ of vertices in Δ and an automorphism group G strongly transitive and type preserving on Δ. We prove that the algebra of G-invariant operators acting on the space of functions on $\mathcal{S}'$ is not commutative (contrarily to the classical results) and we give its generators. We give also the precise structure of some commutative subalgebras

Introduction

Soit Δ un immeuble épais localement fini et $\mathcal{S}'$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses sommets. On suppose qu'il existe un groupe G d'automorphismes de Δ qui respecte les types et agit "fortement transitivement" sur Δ. Un opérateur K est une fonction "localement finie" sur $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'$. Ces opérateurs forment une algèbre qui agit sur l'espace des fonctions sur $\mathcal{S}'$. On s'intéresse à l'algèbre $\mathcal{O}'$ des opérateurs G-invariants *i.e.* vérifiant : $K(gu, gv) = K(u, v)$, $\forall\ g \in G$, $\forall u, v \in \mathcal{S}'$ (*cf.* préliminaires). Ce point de vue a été adopté dans plusieurs articles antérieurs [C 01], [CM 94], [CW 04], [GL 99], [MZ 00] et [MZ 02].

Ce travail est une suite logique de notre étude précédente [K-R 07] qui traite le cas d'un immeuble de type $\widetilde{A}_2$ ou $\widetilde{B}_2$. On s'intéresse à des cas non classiques, c'est à dire non couverts par les résultats d'Ichiro Satake [S 63] qui affirment que $\mathcal{O}'$ est souvent commutative.

Plus précisément on se place dans le cas d'un immeuble Δ, épais localement fini, de type $\widetilde{B}_n$ ($n \geq 3$). D'après les travaux de Jacques Tits (cf. [T 78], [R 89 ; corollary 10.25] ou [W 09 ; chap. 27]) un tel immeuble est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe G quasi-simple simplement connexe sur un corps local non archimédien $\mathbb{K}$. Ce groupe G agit fortement transitivement sur Δ en respectant les types. Si on remplace G par son groupe adjoint G^*, alors celui-ci permute les deux types spéciaux (0 et 1) de sommets [T 78 ; 2.5 p. 47]. On n'utilisera ci-dessous que les propriétés de transitivité de G et G^*.

Après une première partie consacrée aux résultats généraux, on s'intéresse, dans la seconde partie, aux sommets spéciaux (donc de type 0 ou 1). Sans surprise l'algèbre $\mathcal{O}_0$ (resp. $\mathcal{O}_1$) des opérateurs sur l'ensemble $\mathcal{S}_0$ (resp. $\mathcal{S}_1$) des sommets de type 0 (resp. 1) invariants par G est commutative. Soit $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}^*$) l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ invariants par le groupe G (resp. G^*). On montre que $\mathcal{O}$ n'est pas commutative et, grâce à une filtration sur cette algèbre, on en détermine des générateurs (théorème 2.6). On explicite complètement la structure des algèbres commutatives $\mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}^*$ (théorèmes 2.7 et 2.9), en particulier $\mathcal{O}^*$ est une algèbre de polynômes. On en déduit aussi la structure explicite de l'algèbre $\mathcal{O}$ (remarque 2.8).

Dans la partie 3, on étudie l'algèbre $\mathcal{O}^n$ (resp. $\mathcal{O}^{n*}$) des opérateurs sur l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des sommets de type n de Δ invariants par G (resp. G^*). C'est techniquement plus difficile. On trouve cependant des générateurs de l'algèbre non commutative $\mathcal{O}^n$ (théorème 3.8) et on prouve que l'algèbre $\mathcal{O}^{n*}$ est une algèbre de polynômes (théorème 3.10).

Enfin dans une dernière partie, on compare ces résultats avec ceux que l'on peut déduire des travaux classiques d'Ichiro Satake [S 63].

1 Préliminaires :

1.1 Complexes de chambres

Un *complexe simplicial* d'ensemble de sommets $\mathcal{S}$ est un ensemble X de parties finies de $\mathcal{S}$ qu'on appelle *simplexes* (*facettes*) tel que :

1. Chaque singleton $\{x\}$ pour x dans S est un simplexe.
2. Chaque partie F' d'un simplexe F est un simplexe, une telle partie est appelée *face* du simplexe initial. La *codimension* de F' (dans F) est alors le cardinal de $F \backslash F'$.

Un *morphisme simplicial* d'un complexe X dans Y est une application f de l'ensemble des sommets de X dans l'ensemble des sommets de Y qui envoie simplexe sur simplexe. Si de plus f est bijective et f^{-1} est un morphisme simplicial on parle d'*isomorphisme* simplicial. Dans le cas où l'ensemble des sommets de X est une partie de l'ensemble des sommets de Y et tout simplexe de X est un simplexe de Y, on dit que X est un *sous-complexe* de Y. Alors X est un complexe simplicial à part entière.

Un complexe simplicial est un *complexe de chambres* si tout simplexe est contenu dans un simplexe maximal (chambre) et si pour toute paire $\{c, c'\}$ de chambres il existe une suite appelée *galerie* $c = c_1, c_2, ..., c_m = c'$ de chambres consécutivement adjacentes (*i.e.* telles que $\forall i, 1 \leq i \leq m-1, c_i$ et c_{i+1} ont un simplexe de codimension 1 (*cloison*) en commun). Alors toutes les chambres ont le même nombre $n+1$ de sommets, le nombre n est appelé le *rang* du complexe.

1.2 Complexes de Coxeter

On appelle *groupe de réflexions affine essentiel* un groupe W^a agissant de manière affine sur un espace vectoriel euclidien V de dimension n tel qu'il existe un ensemble $\mathcal{H}$ d'hyperplans affines (appelés murs) vérifiant :

1. W^a stabilise l'ensemble de ces hyperplans ;
2. W^a est engendré par les réflexions orthogonales r_H pour $H \in \mathcal{H}$;
3. il existe un ensemble fini Φ d'éléments non nuls du dual V^* engendrant V^* tel que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des hyperplans $H_{\alpha,k}$ d'équation $\alpha(v) + k = 0$ pour $\alpha \in \Phi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On peut en fait montrer que Φ est alors un système de racines et W^a son groupe de Weyl affine, *cf.* [B 68].

À chaque point x on associe sa facette qui est l'intersection des demi-appartements $D_{\alpha,k}$ (d'équation $\alpha(v) + k \geq 0$ pour $\alpha \in \Phi$ et $k \in \mathbb{Z}$) qui le contiennent. Une facette minimale est réduite à un sommet ; c'est l'intersection de n murs $H_{\alpha,k}$ associés à des α indépendants. Les facettes maximales appelées chambres, sont les adhérences des composantes connexes de V privé de la réunion de tous les murs.

Une facette est l'enveloppe convexe des sommets qu'elle contient.

L'*enclos* d'une partie Ω de V est l'intersection des demi-appartements contenant Ω, c'est une partie convexe de V. La partie Ω est dite *close* si elle est égale à son enclos.

On considère uniquement le cas où l'action de W sur V est irréductible. Alors toute facette est un simplexe : les sommets qu'elle contient sont affinement indépendants. On associe à ce groupe de réflexions un complexe simplicial appelé *complexe de Coxeter affine* de type W^a dont les sommets sont les sommets de V et les simplexes les ensembles de sommets d'une facette de V. Ce complexe est un complexe de chambres de rang n. Le groupe W^a induit un groupe d'automorphismes simpliciaux que l'on appelle le groupe de Weyl de ce complexe. Un sommet $a \in V$ est dit *spécial* pour W^a si pour tout hyperplan $H \in \mathcal{H}$, il existe un hyperplan $H' \in \mathcal{H}$ parallèle à H et tel que $a \in H'$.

1.3 Immeubles

Un *immeuble* de type W^a est un complexe simplicial Δ qui peut être recouvert par une famille de sous-complexes appelés *appartements* et vérifiant :

1. chaque appartement est un complexe de Coxeter de type W^a ;
2. deux simplexes quelconques de Δ sont toujours contenus dans un même appartement ;
3. Si A et A' sont deux appartements contenant une chambre c, il existe un isomorphisme de A dans A' fixant tous les simplexes de A et A' en commun.

Un immeuble est un complexe de chambres. Il existe une application τ de Δ dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ qui à chaque sommet associe son *type* et dont la restriction à chaque simplexe est injective. Une cloison F est dite de type i si $\tau(F) = \{0, 1, \cdots, n\} \backslash \{i\}$; la *valence* $v(F)$ de cette cloison est le nombre de chambres la contenant, elle ne dépend en général que du type $\tau(F)$. On dit que l'immeuble est *épais* si $v(F) \geq 3$ pour toute cloison F. Dans la suite on note $q_i + 1$ la valence d'une cloison de type i ; c'est un nombre fini si l'immeuble est localement fini.

Un *automorphisme* de l'immeuble Δ est un automorphisme simplicial qui envoie appartement sur appartement. On dit qu'un automorphisme φ de Δ *respecte les types* si et seulement si pour toute facette F contenue dans un appartement A et pour tout $w \in W(A)$ tel que $\varphi(F) \subset A$ et $w\varphi(F) = F$, alors $w\varphi$ stabilise toute face de F.

Un groupe G d'automorphismes de l'immeuble Δ agit *fortement transitivement* sur Δ s'il est transitif sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des appartements de Δ et si pour tout $A \in \mathcal{A}$ les trois conditions ci-dessous pour une paire (C, C') de chambre de A sont équivalentes :

1. C et C' sont conjuguées par le groupe de Weyl $W(A)$ de A.
2. C et C' sont conjuguées par le stabilisateur $N_G(A)$ de A dans G.
3. C et C' sont conjuguées par G (comme chambres de Δ).

Le groupe G agit *très fortement transitivement* sur Δ si le sous-groupe G_0 de G formé des éléments conservant les types agit transitivement sur les paires (A, C) où C est une chambre de l'appartement A.

Soit $\mathcal{S}'$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets d'un immeuble. Un *opérateur* K sur $\mathcal{S}'$ est une fonction sur $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'$. L'opérateur est dit *localement fini* si pour tout $u \in \mathcal{S}'$, $\{v \in \mathcal{S}' \ / \ K(u,v) \neq 0\}$ est fini. Le produit de deux tels opérateurs K, K' est alors donné par $K * K'(s,t) = \sum_u K(s,u)K'(u,t)$. Ces opérateurs localement finis forment une algèbre qui agit sur l'espace des fonctions sur $\mathcal{S}'$ par $(K * f)(s) = \sum_u K(s,u) f(u)$. L'opérateur est dit *$G$-invariant* par un groupe G d'automorphismes si $K(gu, gv) = K(u,v)$, $\forall g \in G$, $\forall u, v \in \mathcal{S}'$. Si on suppose G transitif sur $\mathcal{S}'$ alors un tel opérateur s'identifie à une fonction à support fini sur G/K_s où K_s est le fixateur dans G d'un sommet s de $\mathcal{S}'$.

On considérera dans la suite des immeubles "géométriques" de type W^a dans lesquels un simplexe est remplacé par son "enveloppe convexe". Alors l'appartement "géométrique" associé à un appartement est isomorphe à l'espace V sur lequel W agit (comme en 1.2). L'intersection de deux appartements est une partie close de chacun d'eux. L'immeuble $\mathcal{I}$ est muni d'une métrique qui induit la métrique euclidienne sur chaque appartement et les isomorphismes entre appartements sont des isométries. De même tout automorphisme de $\mathcal{I}$ agit par isométrie.

1.4 Immeubles de type $\widetilde{B}_n$

Plus précisément dans ce papier on va regarder le cas particulier d'un immeuble localement fini épais de type $\widetilde{B}_n$ $(n \geq 3)$:

Nous prendrons pour V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et du produit scalaire usuel $< ., . >$. Soit $R = \{\pm e_i \ (1 \leq i \leq n)\ ,\ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n)\}$ un système de racines réduit et irréductible dans V et $B = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de R où, pour $1 \leq i \leq n-1$, $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ et pour $i = n$, $\alpha_n = e_n$. Comme R est irréductible, il existe une plus grande racine $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + 2\alpha_n = e_1 + e_2$. On a $< \widetilde{\alpha}, \alpha_i >= 0$ pour $i \neq 2$ et $< \widetilde{\alpha}, \alpha_2 >= 1$.

La formule $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{< \alpha, \alpha >}$ donne pour le système $R^\vee$ des coracines l'ensemble des vecteurs $\pm 2e_i$ $(1 \leq i \leq n)$, $\pm e_i \pm e_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Comme R est réduit, il s'en suit que $B^\vee = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, 2\alpha_n\}$ est une base de $R^\vee$. La base duale $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de B est définie par $< \lambda_i, \alpha_j >= \delta_{ij}$ pour tout j $(1 \leq j \leq n)$, ses éléments s'appellent les *copoids fondamentaux* relativement à B et valent $\lambda_i = e_1 + e_2 + \cdots e_i$. Le $\mathbb{Z}-$module de R est $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\lambda_i$ de base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Finalement, soit Q, le sous-$\mathbb{Z}-$module de P défini par $Q = \displaystyle\sum_{\alpha \in R} \mathbb{Z}\alpha^\vee = \{x \in P\ ,\ x = (a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ pair}\}$.

Le groupe de Weyl $W = W(R)$ est engendré par les réflexions r_α , $\alpha \in R$. Or dans $\mathbb{R}^n$, la réflexion orthogonale $r_{e_i - e_j}$ $(i \neq j)$ échange e_i et e_j et laisse invariants les e_k d'indice k distinct de i et j. Ces réflexions engendrent un groupe isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. La réflexion orthogonale r_{e_i} transforme e_i en $-e_i$ et laisse invariants les e_k d'indice k distinct de i. Ces dernières réflexions engendrent un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, distingué dans le groupe de Weyl W. Ainsi W est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathcal{S}_n$ par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, il est d'ordre $2^n.n!$.

Le groupe de Weyl affine $W^a = W^a(R)$ engendré par les réflexions affines $r_{\alpha,k}$ (par rapport au mur $H_{\alpha,k}$) pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbb{Z}$ est le produit semi-direct de W par Q. Le groupe de Weyl affine étendu est $W^{et} = W \ltimes P$.

Soit $\mathcal{C}$ la chambre fermée de Weyl définie par la base de racines B, on a :

$$\mathcal{C} = \{x = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0\}.$$

Les sommets spéciaux dans $\mathcal{C}$ sont les $x = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i$ pair, ou $\sum_{i=1}^{n} a_i$ impair qui correspondent respectivement aux sommets de types 0 ou 1 dans $\mathcal{C}$. Les sommets non spéciaux de type h avec $2 \leq h \leq n$ dans $\mathcal{C}$ ont des coordonnées demi-entières avec un nombre égal à h ($h \geq 2$) de non-entiers.

Dans la suite on sera amené à choisir un sommet $x = (b_1, \cdots, b_n)$ de type 0, 1 ou n dans $V = A$ et on notera $(j_1, \cdots, j_n)$ les coordonnées de V d'origine x ($j_i = a_i - b_i$).

L'immeuble Δ considéré est donc réunion d'appartements isomorphes à V. Pour un tel immeuble on sait que les valences vérifient $q_0 = q_1 = \cdots = q_{n-1}$, éventuellement différent de q_n. Si Δ est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe quasi-simple simplement connexe G sur un corps local non archimédien $\mathbb{K}$, on sait que q_0 et q_n valent q, q^2 ou q^3 où q est le cardinal du corps résiduel de $\mathbb{K}$, voir les tables de [T 78] ou [W 09 ; chap. 28].

2 L'algèbre $\mathcal{O}$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$:

Soit A un appartement, x un sommet de $\mathcal{S}_i \cap A$, $i \in \{0, 1\}$ (c'est à dire x spécial) et C une chambre de A contenant x, il existe un unique système orthonormé de coordonnées sur l'appartement A tel que $x = x_{0,\cdots,0}$, $\mathcal{S} \cap C = \{x_{0,\cdots,0}, x_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\cdots,0}, x_{\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}}, x_{1,0,\cdots,0}\}$ avec $\tau(x_{\underbrace{\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}}_{k},0,\cdots,0}) = k \geq 2$, $\tau(x_{0,\cdots,0}) = i$, $\tau(x_{1,0,\cdots,0}) = 1 - i$. Alors $\{x_{j_1,\cdots,j_n} \mid j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0\}$ est le quartier $Q_{x,C}$ de A de sommet x contenant C. L'ensemble $\mathcal{S}_i \cap A$ (*resp.* $\mathcal{S}_{1-i} \cap A$, $\mathcal{S}_k \cap A$ ($k \geq 2$)) est formé des $x_{j_1,\cdots,j_n}$ avec $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{p=1}^{n} j_p$ est pair (*resp.* $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{p=1}^{n} j_p$ impair , $j_1, \cdots, j_n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et $\sharp\{j_p \mid j_p \notin \mathbb{Z}\} = k$).

On note $V_{j_1,\cdots,j_n}(x)$ l'ensemble des points $x_{j_1,\cdots,j_n}$ associés aux différents choix de A et C tels que $x \in C \subset A$; cet ensemble est fini car l'immeuble est supposé localement fini.

L'ensemble $\mathcal{S}_i$ (*resp.* $\mathcal{S}_{1-i}$, $\mathcal{S}_k$ ($k \geq 2$)) est réunion disjointe des $V_{j_1,\cdots,j_n}(x)$ avec $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$, $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{p=1}^{n} j_p$ est pair (*resp.* $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{p=1}^{n} j_p$ impair , $j_1, \cdots, j_n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et $\sharp\{j_p \mid j_p \notin \mathbb{N}\} = k$). Ces ensembles sont les orbites de G_x

(fixateur de x dans G) dans $\mathcal{S}_i$ (*resp.* $\mathcal{S}_{1-i}$, $\mathcal{S}_k$). Pour tout sommet spécial s et tout s_k dans $\mathcal{S}_k \cap A$ ($k \geq 2$), $\{s, s_k\}$ est une arête si et seulement si $s_k = s + (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = 0$ ou $\pm\dfrac{1}{2}$ (avec $\sharp\{\varepsilon_p \mid \varepsilon_p \neq 0\} = k$) *i.e.* $||s_k - s||_\infty = \dfrac{1}{2}$.

On définit des opérateurs $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ sur $(\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1) \times \mathcal{S}$ pour $i \in \{0,1\}$, $j_1, \cdots, j_n \in \dfrac{1}{2}\mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$ (et nombre de non-entiers $\neq 1$) par :

$$K^i_{j_1,\cdots,j_n}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau(u) = i \text{ et } v \in V_{j_1,\cdots,j_n}(u) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$, les opérateurs $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ opèrent sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$.

On note $\mathcal{O}$ l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ invariants par le groupe G fortement transitif et respectant les types. Ainsi l'algèbre $\mathcal{O}$ admet pour base les $K^0_{j_1,\cdots,j_n}$ et $K^1_{j_1,\cdots,j_n}$ ($j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$). Comme le support de $K^0_{j_1,\cdots,j_n} K^1_{j'_1,\cdots,j'_n}$ est différent du support de $K^1_{j'_1,\cdots,j'_n} K^0_{j_1,\cdots,j_n}$, l'algèbre $\mathcal{O}$ est non commutative.

On veut maintenant déterminer les générateurs de $\mathcal{O}$. Pour cela on définit d'abord ci-dessous une relation d'ordre compatible avec l'addition dans $\mathbb{R}^n$.

On note :

$$\mathcal{C}^\perp = \mathbb{R}_+(e_1 - e_2) \oplus \mathbb{R}_+(e_2 - e_3) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}_+ e_n.$$

On a $\mathcal{C}^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid < x, y > \geq 0 \ , \ \forall\, x \in \mathcal{C}\}$ et $\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid < x, y > \geq 0 \ , \ \forall\, x \in \mathcal{C}^\perp\}$.
On pose par définition :

$$x \leq_{\mathcal{C}^\perp} y \Longleftrightarrow y - x \in \mathcal{C}^\perp.$$

En particulier pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$x \leq_{\mathcal{C}^\perp} y \Longrightarrow (y_1 > x_1) \text{ ou } (y_1 = x_1 \text{ et } y_2 > x_2) \text{ ou, ..., ou } (y_1 = x_1, \cdots y_{n-1} = x_{n-1}, y_n \geq x_n);$$

donc $\leq_{\mathcal{C}^\perp}$ implique l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$.
D'après un résultat classique (*cf.* [B 68], VI §1 proposition 18) on a :

$$y \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \ \forall\, w \in W \ , \ wy \leq_{\mathcal{C}^\perp} y.$$

Proposition 2.1 *Si on pose, pour* $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta(x) = Wx \cap \mathcal{C}$ *on a :*

$$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n;\ \delta(x+y) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x) + \delta(y).$$

Démonstration : En effet soit $w \in W$ tel que $w(x+y) \in \mathcal{C}$ et soient $w', w" \in W$ tels que $w'x \in \mathcal{C}$ et $w"y \in \mathcal{C}$. Alors pour tout $w_0 \in W$ on a $w_0(w'x) \leq_{\mathcal{C}^\perp} w'x$. En particulier pour $w_0 = ww'^{-1}$ on obtient $wx \leq_{\mathcal{C}^\perp} w'x$. De même $w_0 = ww"^{-1}$ donne $wy \leq_{\mathcal{C}^\perp} w"y$. Il s'en suit que $wx + wy = w(x+y) \leq_{\mathcal{C}^\perp} w'x + w"y$. Ainsi on a le résultat. $\diamondsuit$

Conséquence : Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ posons $\delta(x,y) = \delta(y-x)$. On définit ainsi une application $\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{C}$ qui est invariante par le groupe de Weyl affine W^a (ou le groupe de Weyl affine étendu $W^{et} = W \ltimes P$). La proposition 2.1 montre l'inégalité triangulaire :

$$\delta(x,z) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

Comme δ est invariante par W^a elle peut être définie de manière intrinsèque, sur tout appartement de l'immeuble et même sur l'immeuble car deux appartements contenant x et y sont isomorphes par un isomorphisme fixant x et y.

Pour $x \in (\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1) \cap A$ et $(j_1, \cdots, j_n) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ on a $s \in V_{j_1,\cdots,j_n}(x)$ si et seulement si $\delta(x,s) = (j_1, \cdots, j_n)$.

On a $\delta(x,y) = \delta(y,x)$, $\forall\, x, y \in \mathcal{I}$, car $-Id$ est dans W.

Proposition 2.2 *L'inégalité triangulaire est vérifiée dans l'immeuble :*

$$\forall\, x, y, z \in \mathcal{I} \;;\; \delta(x,z) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

Démonstration : Il existe un nombre fini de points $y_0 = y, y_1, \cdots, y_n = z$ du segment $[y,z]$ tel que, pour tout $i = 1, \cdots, n$, x, y_{i-1}, y_i soient dans un même appartement. Dans cet appartement on a $\delta(x,y_i) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x,y_{i-1}) + \delta(y_{i-1},y_i)$ d'après la proposition 2.1. Donc $\delta(x,z) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x,y) + \sum_{i=1}^{n} \delta(y_{i-1},y_i)$. Mais les points $y_0 = y, y_1, \cdots, y_n = z$ sont alignés dans un même appartement, donc $\sum_{i=1}^{n} \delta(y_{i-1},y_i) = \delta(y,z)$. ◊

Remarque : On sait que ce résultat se généralise à tout immeuble affine.

Définition 2.3 *Le terme dominant d'un élément non nul $\kappa = \sum a^i_{j_1,\cdots,j_n} K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ de $\mathcal{O}$ est l'élément $dom(\kappa)$ de $\mathcal{O}$ obtenu en remplaçant chaque $a^i_{j_1,\cdots,j_n}$ par 0 dès qu'il existe $(j'_1, \cdots, j'_n)$ strictement supérieur à $(j_1, \cdots, j_n)$ tel que $a^i_{j'_1,\cdots,j'_n} \neq 0$.*

Proposition 2.4 *Pour $i = 0$ ou 1, $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$, on a :*

$$dom(K^i_{j_1,j_2,\cdots,j_n} K^{\overline{i+\sum_p j_p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}) = K^i_{j_1+i_1,j_2+i_2,\cdots,j_n+i_n} \;;$$

où $\overline{i + \sum_p j_p}$ est la classe de $i + \sum_p j_p$ modulo 2.

Démonstration : Par définition la valeur $(K^i_{j_1,j_2,\cdots,j_n} K^{\overline{i+\sum_p j_p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_n})(s,t)$ en $(s,t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ de ce produit est $\sum_u K^i_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(s,u) K^{\overline{i+\sum_p j_p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(u,t)$. Ceci est non nul si et seulement si

$s \in \mathcal{S}_i$, $t \in \mathcal{S}_{\overline{i+\sum_p (j_p+i_p)}}$ et il existe $u \in \mathcal{S}_{\overline{i+\sum_p j_p}}$ tel que $u \in V_{j_1,\cdots,j_n}(s)$ et $t \in V_{i_1,\cdots,i_n}(u)$. Par un bon choix de la chambre fondamentale d'origine s les coordonnées normalisées de u sont $(j_1, \cdots, j_n)$, les coordonnées de t normalisées par rapport à u sont $(i_1, \cdots, i_n)$. Cela signifie que $\delta(s,u) = (j_1, \cdots, j_n)$ et $\delta(u,t) = (i_1, \cdots, i_n)$. D'après la proposition 2.2 $\delta(s,t) \leq_{\mathcal{C}^\perp} (i_1+j_1, \cdots, i_n+j_n)$. Autrement dit après renormalisation les coordonnées de t sont de la forme $(j'_1, \cdots, j'_n)$ avec $(j'_1, \cdots, j'_n) \leq_{\mathcal{C}^\perp} (j_1+i_1, \cdots, j_n+i_n)$. De plus pour $s = (0, \cdots, 0)$ et $t = (j_1+i_1, \cdots, j_n+i_n)$, il existe un unique $u \in \mathcal{I}$ tel que $\delta(s,u) = (j_1, \cdots, j_n)$ et $\delta(u,t) = (i_1, \cdots, i_n)$, puisque ce u est forcément dans l'enclos de s et t. Donc $dom(K^i_{j_1,j_2,\cdots,j_n} K^{\overline{i+\sum_p j_p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}) = K^i_{j_1+i_1,j_2+i_2,\cdots,j_n+i_n}$. ♢

Définition 2.5 *Le degré de l'opérateur $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ est $j_1 + \cdots + j_n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 2.6 *Pour $i \in \{0,1\}$, $k \geq 1$, on note : $L^i_k = K^i_{\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0}$.*

1. $$dom(K^i_{j_1,\cdots,j_n} L_k^{\overline{i+\sum_p j_p}}) = K^i_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},j_n}.$$
2. *Les opérateurs L^i_k pour $i \in \{0,1\}$ et $0 \leq k \leq n$ engendrent l'algèbre $\mathcal{O}$.*

Démonstration :

1. S'obtient en appliquant la proposition 2.4.
2. S'obtient facilement par un raisonnement par récurrence sur le degré de $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$.

♢

Notations : On note

$$L^*_j = L^0_j + L^1_j \quad , \quad K^*_{j_1,\cdots,j_n} = K^0_{j_1,\cdots,j_n} + K^1_{j_1,\cdots,j_n}.$$

Un opérateur K de $\mathcal{O}$ est dit *symétrique* si $K(s,t) = K(t,s) \quad , \forall s,t \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$. L'opérateur $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ pour $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{Z}$ est symétrique si et seulement si son degré est pair : c'est clairement une condition nécessaire car sinon son support est $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_{1-i}$ et on a $K^i_{j_1,\cdots,j_n}(t,s) = K^{1-i}_{j_1,\cdots,j_n}(s,t)$ et c'est suffisant car on a vu que $\delta(s,t) = \delta(t,s)$.

L'espace vectoriel $\mathcal{O}^\sigma$ des opérateurs invariants symétriques a pour base les $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ de degré pair et les $K^*_{j_1,\cdots,j_n}$ de degré impair.

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{O}^*$ de $\mathcal{O}^\sigma$ de base les $K^*_{j_1,\cdots,j_n}$ est formé des opérateurs "très symétriques" ou "P-invariants", c'est à dire invariants par le groupe affine étendu $W^{et} = W \ltimes P$. C'est l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ invariants sous le groupe G^* très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$.

Théorème 2.7 *L'algèbre $\mathcal{O}^*$ est commutative, c'est l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[L^*_1, \cdots, L^*_n]$.*

Remarque : La commutativité de $\mathcal{O}^*$ est un résultat de Parkinson [P 06].
Démonstration : L'algèbre $\mathcal{O}^*$ est formée d'opérateurs symétriques, elle est donc commutative. Pour $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$, on voit facilement que le terme dominant de $(L_1^*)^{a_1} \cdots (L_n^*)^{a_n}$ est $K^*_{a_1+a_2+\cdots+a_n, a_2+\cdots+a_n, \cdots, a_n}$, les variables $L_1^*, \cdots, L_n^*$ sont donc algébriquement indépendantes et $\mathcal{O}^* = \mathbb{C}[L_1^*, \cdots, L_n^*]$. $\diamondsuit$

L'algèbre $\mathcal{O}$ est la somme directe des quatre sous-espaces vectoriels :

$$\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}^{0,0} \quad , \quad \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}^{1,1} \quad , \quad \mathcal{O}^{0,1} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^{1,0},$$

où $\mathcal{O}^{i,j}$ est formé des opérateurs de support dans $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$. Pour $K \in \mathcal{O}$ et $i, j \in \{0, 1\}$ on note ${}_i|K|_j$ (*resp.* ${}_i|K \;\; , \;\; K|_j$) sa restriction à $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ (*resp.* $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S} \;\; , \;\; \mathcal{S} \times \mathcal{S}_j$) prolongée par 0 en dehors. L'application $K \longmapsto {}_i|K|_j$ est la projection de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}^{i,j}$.

Malheureusement $\mathcal{O}^\sigma$ n'est pas une algèbre : $L_2^0 = K^0_{1,1,0,\cdots,0} \in \mathcal{O}^\sigma$ et $L_1^* = K^0_{1,0,\cdots,0} + K^1_{1,0,\cdots,0} \in \mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}^\sigma$, mais $L_2^0 L_1^*$ est non nul et son support est dans $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1$ il ne peut donc être symétrique.

Comme une base de $\mathcal{O}$ est formée des $K^i_{j_1,\cdots,j_n} = {}_i|K^*_{j_1,\cdots,j_n}$, on a $\mathcal{O} = {}_0|\mathcal{O}^* \oplus {}_1|\mathcal{O}^*$ avec la relation :

$$({}_i|K)({}_{i'}|K') = \begin{cases} {}_i|KK' & \text{si} \quad i + i' + deg(K) \equiv 0 \; [2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

si K et K' sont des monômes (ou plus généralement si tous les monômes de K ont des degrés de même parité).

Remarque 2.8 *Cette relation de composition des ${}_i|K$ et la structure de l'algèbre $\mathcal{O}^*$ décrivent entièrement la structure de l'algèbre $\mathcal{O}$.*

Par restriction à $\mathcal{S}_i$ ($i = 0$ ou 1), l'algèbre $\mathcal{O}_i$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_i$ invariants par G est contenue dans ${}_i|\mathcal{O}^*$ et on a :

$$\mathcal{O}_i = \{{}_i|K \;\; / \;\; K \in \mathcal{O}^* \text{ et tous monômes de } K \text{ ont un degré pair.}\}$$

La relation ci-dessus sur la composition des ${}_i|K$ permet de montrer :

Théorème 2.9 *L'algèbre $\mathcal{O}_i$ est commutative et isomorphe (par $K \mapsto {}_i|K$) à la sous-algèbre $\mathcal{O}^{**}$ de $\mathcal{O}^* = \mathbb{C}[L_1^*, \cdots, L_n^*]$ formée des éléments de degré pair.*

N.B. On rappelle que le degré de L_j^* est j.

3 L'algèbre $\mathcal{O}^n$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_n$:

Soit A un appartement, u un sommet de $\mathcal{S}_n \cap A$ (c'est à dire u est de type n), la chambre de Weyl C_u de sommet u est déterminée par :

$$C_u = \{(j_1, \cdots, j_n) \in \mathbb{R}^n \mid j_1 \geq j_2 \geq \cdots j_n \geq 0\},\ et\ C_u \cap \mathcal{S}_n = C_u \cap \mathbb{Z}^n$$

pour un système de coordonnées $(j_1, \cdots, j_n)$ d'origine u.

Il existe un système de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ d'origine un sommet spécial u_s dans lequel u a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})$ alors $x_i = j_i + \frac{1}{2}$ et la chambre C_u est $\{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \frac{1}{2}\}$. Le fixateur W_u^a (dans le groupe de Weyl affine $W^a = W \ltimes Q$) de u contient les permutations et les changements de signes des j_i (avec un nombre pair de changements de signe). En effet W contient toutes les permutations et tous les changements de signes des x_i ($cf.$ [B 68] ou encore §1 préliminaires), mais $Q = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ pair}\}$ et le changement de signe $j_i \longmapsto -j_i$ (autres j_k fixés) correspond à la transformation $(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto r_i(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.

Donc, à G_u près, tout sommet $v \in \mathcal{S}$ est dans $C'_u = C_u \cup r_n(C_u) = \{(j_1, \cdots, j_n) \mid j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_{n-1} \geq |j_n|\}$. Pour choisir entre la coordonnée j_n ou $-j_n$, on décide par convention que $(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})$ est de type 1 et $(\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{2})$ est de type 0 (i.e. $\tau(u_s) = (-1)^n$).

On dit que $v \in V_{j_1, \cdots, j_n}(u)$ avec $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq |j_n|$ s'il existe $g \in G_u$ tel que $g(v) = u + (j_1, \cdots, j_n)$. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ est réunion disjointe des $V_{j_1, \cdots, j_n}(u)$ (pour $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$) qui sont les orbites dans $\mathcal{S}_n$ du fixateur G_u de u dans G. De même $\mathcal{S}_k$ ($2 \leq k \leq n-1$) (resp. $\mathcal{S}_0$ ou $\mathcal{S}_1$) est réunion disjointe des $V_{j_1, \cdots, j_n}(u)$ pour $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^n$ et le nombre de j_i entiers égal à k (resp. égal à 0 et $n + \sum_{i=1}^{n} (j_i + \frac{1}{2})$ pair ou impair).

Pour $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^n$ les opérateurs $K^n_{j_1, \cdots, j_n}$ sont définis sur $\mathcal{S}$ par :

$$K^n_{j_1, \cdots, j_n}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ \tau(u) = n \ \text{ et } \ v \in V_{j_1, \cdots, j_n}(u) \\ 0 & \qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}$$

On note aussi $L^n_k = K^n_{\underbrace{1, \cdots, 1}_{k}, 0, \cdots, 0}$ (pour $0 \leq k \leq n$) et $L^n_{n-} = K^n_{1, \cdots, 1, -1}$.

L'algèbre $\mathcal{O}^n$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_n$ invariants par le groupe G fortement transitif et respectant les types a pour base les $K^n_{j_1, \cdots, j_n}$ pour $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$.

Pour $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ on a $v \in V_{j_1,\cdots,j_n}(u) \Longleftrightarrow v = u + (j_1, \cdots, j_n)$ (avec des coordonnées normalisées par rapport à u) $\Longleftrightarrow u = v + (-j_1, \cdots, -j_n)$ et par W_u^a on a $u = v + (j_1, \cdots, j_{n-1}, (-1)^n j_n)$, mais si on veut des coordonnées normalisées par rapport à v cela donne $u = v + (j_1, \cdots, j_{n-1}, (-1)^{n+\deg(j)} j_n)$. Ainsi on a $v \in V_{j_1,\cdots,j_n}(u) \Longleftrightarrow u \in V_{j_1,\cdots,j_{n-1},(-1)^{n+\deg(j)} j_n}(v)$, autrement dit $K^n_{j_1,\cdots,j_n}(u,v) = K^n_{j_1,\cdots,j_{n-1},(-1)^{n+deg(j)} j_n}(v,u)$. En particulier si $n + \deg(j)$ est pair ou si $j_n = 0$ l'opérateur $K^n_{j_1,\cdots,j_n}$ est symétrique.

On veut déterminer les générateurs de l'algèbre $\mathcal{O}^n$. En utilisant le préordre lexicographique sur $(j_1, \cdots, j_{n-1}, |j_n|)$, on définit le terme dominant d'un élément de $\mathcal{O}^n$ (ou plus généralement d'une combinaison linéaire des $K^n_{j_1,\cdots,j_n}$) comme en 2.3.

Proposition 3.1 *Si $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$, on a*

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} K^n_{1,\cdots,1,0}) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n}.$$

Démonstration : $K^n_{j_1,\cdots,j_n} K^n_{1,\cdots,1,0}(s,t) = \sum_u K^n_{j_1,\cdots,j_n}(s,u) K^n_{1,\cdots,1,0}(u,t)$.

Or $K^n_{1,\cdots,1,0}(u,t) \neq 0 \Longleftrightarrow u$ et $t \in \mathcal{S}_n$ et il existe une galerie C_0, C_1 tel que $u \in C_0$ et $t \in C_1$. Il existe alors un appartement A contenant s, C_0 (et par suite u) avec ou bien A contient s, C_0 et t ou bien la rétraction $\rho_{A,C}(t) = u$ (C est la chambre de sommet s dans la chambre de Weyl fondamentale). Les t possibles sont alors $s + (j_1 + m_1, \cdots, j_n + m_n)$ avec :

$$(m_i = 0 \ \text{ ou } \ \pm 1 \ \text{ et } \ \sharp\{m_i \neq 0\} = n-1) \ \text{ ou } \ (m_i = 0 \ \ \forall i).$$

Même après renormalisation elles sont toutes inférieures à $s + (j_1 + 1, \cdots, j_{n-1} + 1, j_n)$. De plus pour s et $t = s + (j_1 + 1, \cdots, j_{n-1} + 1, j_n)$ on a un unique u car cet u doit appartenir à l'enclos de s et t. D'où le résultat. $\diamondsuit$

Définition 3.2 *Pour $i, j \in \{0, 1, \cdots, n\}$ on définit l'opérateur $M^{i,j}$ sur $\mathcal{S}$ par :*

$$M^{i,j}(u,v) = \begin{cases} 1 & si \ \ \tau(u) = i \ \ , \ \ \tau(v) = j \ \ et \ \ \{u,v\} \ \ arête \\ 0 & \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

Proposition 3.3 *Pour $1 \leq k \leq n-2$ et $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ on a :*

1. *$dom(M^{n,n-k} M^{n-k,n}) = K^n_{\underbrace{1,1\cdots,1}_{k},0,\cdots,0} = L^n_k$.*
2. *$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,n-k}) = K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n}$.*
3. *$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,n-k} M^{n-k,n}) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}$.*

Démonstration :

1. $M^{n,n-k}M^{n-k,n}(s,t) = \sum_{u\in\mathcal{S}_{n-k}} M^{n,n-k}(s,u)M^{n-k,n}(u,t)$, où la somme porte sur les u tel que $\{s,u\}$ et $\{t,u\}$ sont des arêtes. Il existe alors un appartement contenant s,u et t et si $s=(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$, les coordonnées de u normalisées sont $(\underbrace{1,\cdots,1}_{k},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$ ou $(\underbrace{1,\cdots,1}_{k-1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},0)$, les t possibles voisins de u sont $(1+\varepsilon_1,\cdots,1+\varepsilon_k,\frac{1}{2}+\varepsilon_{k+1},\cdots,\frac{1}{2}+\varepsilon_n)$ ou $(1+\varepsilon'_1,\cdots,1+\varepsilon'_{k-1},\frac{1}{2}+\varepsilon'_k,\cdots,\frac{1}{2}+\varepsilon'_{n-1},\varepsilon'_n)$, avec $\varepsilon_i,\varepsilon'_i=0$, ou $\pm\frac{1}{2}$. Même après renormalisation elles sont inférieures à :
$$(\underbrace{1+\frac{1}{2},\cdots,1+\frac{1}{2}}_{k},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}) = s+(\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0).$$
De plus pour $s,\ t=s+(\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0)$, on a u est dans l'enclos de s et t. Donc u est bien déterminé par s et un tel t. Ainsi on obtient le résultat.
2. $K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,n-k}(s,t)\neq 0 \iff s\in\mathcal{S}_n,\ t\in\mathcal{S}_{n-k}$ et $\exists u\in\mathcal{S}_n$ tel que u est voisin de t ($s,\ u$ et t sont alors dans un même appartement). Avec un repère adapté si $s=(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}),\ u=s+(j_1,\cdots,j_n)$ normalisé, les voisins t de u sont $s+(j_1+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_i=0$, ou $\pm\frac{1}{2}$ et $\sharp\{\varepsilon_i\ /\ \ \varepsilon_i\neq 0\}=k$ ($t\in\mathcal{S}_{n-k}$). Même après renormalisation, elles sont inférieures à $s+(j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots j_n)$. Par ailleurs pour $s=(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$ et $t=s+(j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots j_n)$, u est bien déterminé (u est dans l'enclos de s et t) puisque pour toute racine α telle que $\alpha(s)\leq\alpha(t)$, on a $\alpha(s)\leq\alpha(u)\leq\alpha(t)$. D'où :
$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,n-k}) = K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n}.$$
3. Si on sait que :
$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,n-k}M^{n-k,n}) = dom(K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n}M^{n-k,n}),$$
par un raisonnement analogue au 1) on aura :
$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,n-k}M^{n-k,n}) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}.$$
Il suffit alors de s'assurer que les termes intervenant dans $K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,n-k}$ et qui sont strictement inférieurs à $K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n}$ donnent par le produit par

$M^{n-k,k}$ des termes strictement inférieurs à $K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}$. En effet les voisins dans $\mathcal{S}_{n-k}$ d'un sommet $u = s + (j_1+\varepsilon_1, \cdots, j_n+\varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = 0$, ou $\pm\dfrac{1}{2}$ et $\sharp\{\varepsilon_p \mid \varepsilon_p \neq 0\} = k$ sont sous la forme $s + (j_1+m_1, \cdots, j_n+m_n)$, avec $m_p = 0$, ou ± 1 et $\sharp\{m_p \mid m_p \neq 0\} \leq k$. Si de plus $(j_1+\varepsilon_1, \cdots, j_n+\varepsilon_n) < (j_1+\dfrac{1}{2}, \cdots, j_k+\dfrac{1}{2}, j_{k+1}, \cdots, j_n)$, on a $(j_1+m_1, \cdots, j_n+m_n) < (j_1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}, \cdots, j_k+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}, j_{k+1}, \cdots, j_n)$ et par suite $s+(j_1+m_1, \cdots, j_n+m_n) < s+(j_1+1, \cdots, j_k+1, j_{k+1}, \cdots, j_n)$.
Revoyons l'analogue de 1) : $K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n}M^{n-k,n}(s,t) \neq 0 \iff s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_n$ et $\exists u \in \mathcal{S}_{n-k}$ tel que $\{u,t\}$ est une arête (donc s, u et t sont dans un même appartement). Ainsi avec un bon choix de la chambre de Weyl fondamentale si $s = (\dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{2})$ et $u = s+(j_1+\dfrac{1}{2}, \cdots, j_k+\dfrac{1}{2}, j_{k+1}, \cdots j_n)$, les t voisins de u dans $\mathcal{S}_n$ sont de la forme $u = s+(j_1+\dfrac{1}{2}+\varepsilon_1, \cdots, j_k+\dfrac{1}{2}+\varepsilon_k, j_{k+1}+\varepsilon_{k+1}, \cdots j_n+\varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = 0$, ou $\pm\dfrac{1}{2}$ et comme $t \in \mathcal{S}_n$ alors $t = s + (j_1+\dfrac{1}{2}+\varepsilon_1, \cdots, j_k+\dfrac{1}{2}+\varepsilon_k, j_{k+1}, \cdots j_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm\dfrac{1}{2}$.
Or un $t = s + (j_1+m_1, \cdots, j_k+m_k, j_{k+1}, \cdots j_n)$, avec $m_p = 0$ ou 1. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + (j_1+1, \cdots, j_k+1, j_{k+1}, \cdots j_n)$. De plus pour s et $t = s + (j_1+1, \cdots, j_k+1, j_{k+1}, \cdots j_n)$, on a u est bien déterminé (u est dans l'enclos de s et t).

$\diamondsuit$

Corollaire 3.4 *Pour $k \leq n-2$ et $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$, on a : $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}L^n_k) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}$.*

Démonstration : On utilise la proposition 3.3 et le fait que les termes intervenant dans $M^{n,n-k}M^{n-k,n}$ et qui sont strictement inférieurs à L^n_k donnent par le produit à gauche par $K^n_{j_1,\cdots,j_n}$ des termes strictement inférieurs à $K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}$. $\diamondsuit$

Proposition 3.5 *Pour $k = n$, $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ et $i \in \{0,1\}$ on a :*

1.
$$dom(M^{n,i}M^{i,n}) = K^n_{1,\cdots,1,(-1)^{n+i}}.$$

2. $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,0}) =$
$$\begin{cases} K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n+\frac{1}{2}} & si \quad j_n \geq 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n+\frac{1}{2}} & si \quad j_n < 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad pair \\ K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n-\frac{1}{2}} & si \quad j_n \leq 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad impair \\ q_n K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n-\frac{1}{2}} & si \quad j_n > 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad impair \end{cases}$$

3. $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0} M^{0,n}) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & si \quad j_n \geq 0 \quad et \quad n + \sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad j_n < 0 \quad et \quad n + \sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad j_n > 0 \quad et \quad n + \sum j_p \quad impair \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & si \quad j_n \leq 0 \quad et \quad n + \sum j_p \quad impair \end{cases}$$

Démonstration : Faisons la démonstration dans le cas $i = 0$; le raisonnement est semblable pour $i = 1$.

1. $M^{n,0} M^{0,n}(s,t) \neq 0$ si $s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_n, \exists\ u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{s,u\}$ est une arête et $\{u,t\}$ aussi. Il existe un appartement contenant $s,\ u$ et t. Par un bon choix de la chambre de Weyl fondamentale si $s = (\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})$, $u = s + (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$ (u spécial).
   S'il y a un nombre pair des ε_p négatifs, on se ramène par changement de signe avec des ε_p tous positifs. S'il y a un nombre impair des ε_p négatifs, on se ramène par changement de signe et par permutation à $(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Donc les u spéciaux voisins de s sont $(1, \cdots, 1)$ ou $(1, \cdots, 1, 0)$. Maintenant les u dans $\mathcal{S}_0$ sont $(1, \cdots, 1)$ si n est pair ou $(1, \cdots, 1, 0)$ si n est impair.
   (a) Si n est pair, les t voisins de $u = (1, \cdots, 1)$ dans $\mathcal{S}_n$ sont $(1 + \varepsilon_1, \cdots, 1 + \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $(\frac{3}{2}, \cdots, \frac{3}{2}) = s + (1, \cdots, 1)$. De plus il n' y a qu'un seul u déterminé par $s = (\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})$ et $t = (\frac{3}{2}, \cdots, \frac{3}{2})$, donc :

$$dom(M^{n,0} M^{0,n}) = K^n_{1,\cdots,1} \text{ si n est pair.}$$

   (b) Si n est impair, les t voisins de $u = (1, \cdots, 1, 0)$ dans $\mathcal{S}_n$ sont $(1+\varepsilon_1, \cdots, 1+\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$, donc $t = s + (\frac{1}{2} + \varepsilon_1, \cdots, \frac{1}{2} + \varepsilon_{n-1}, m_n)$ où $m_n = 0$ ou -1 et $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + (1, \cdots, 1, -1)$. De plus pour s et $t = s + (1, \cdots, 1, -1)$ le sommet u est entièrement déterminé par un tel choix (u est dans l'enclos $cl(s,t)$). Donc :

$$dom(M^{n,0} M^{0,n}) = K^n_{1,\cdots,-1} \text{ si n est impair.}$$

2. $K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}(s,t) \neq 0 \iff s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_0, \exists\ u \in \mathcal{S}_n$ tel que u et t sont voisins (donc $s,\ u$ et t sont dans un même appartement) et par un bon choix de la

chambre de Weyl fondamentale si $s = (\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}),\ u = s + (j_1, \cdots, j_n)$ normalisée alors les t possibles sont $s + (j_1 + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$.

(a) Si $n + \sum j_p$ est pair alors elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + (j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_n + \frac{1}{2})$. De plus pour s et $t = s + (j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_n + \frac{1}{2})$, il n'y a qu'un seul u pour ce tel choix si $j_n \geq 0$ et plusieurs dans le cas où $j_n < 0$ car pour ce cas u n'est pas dans l'enclos de s et t. Donc :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}) = \begin{cases} K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2}}, & \text{si } \ n + \sum j_p \ \text{ est pair et } \ j_n \geq 0 \\ *K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2}}, & \text{si } \ n + \sum j_p \ \text{ est pair et } \ j_n < 0 \end{cases}$$

où $*$ est un coefficient positif que l'on va calculer. Pour $s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_0,\ t = s + (j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_{n-1} + \frac{1}{2}, -|j_n| + \frac{1}{2})$ fixés, on veut déterminer le nombre des $u = s + (j_1, \cdots, j_{n-1}, -|j_n|)$. Comme les racines α telles que $\alpha(s) \leq \alpha(t)$ sont : $(e_p - e_k)_{1\leq p<k\leq n}$; $-(e_p - e_k)_{1\leq p<k<n}$ et $j_p = j_k$; $(e_p + e_k)_{1\leq p<k\leq n-1}$;

$$(e_p + e_n)_{1\leq p<n} \ ; \ (e_p)_{1\leq p<n} \quad \text{et } -e_n.$$

Parmi celles ci, celles telles que $\alpha(s) \leq \alpha(u) \leq \alpha(t)$ sont toutes à part $-e_n$. Soit $r_{n,t}$ la réflexion par rapport à l'hyperplan de direction $\alpha_n = -e_n$ et contenant t. Comme $u = t - (\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}) = t - v$ où $v = (\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})$, on a $r_{n,t}(u) = t - [v - \alpha_n(v)\alpha_n^\vee]$. Donc $r_{n,t}(u) = t - (\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{2}) = s + (j_1, \cdots, j_{n-1}, -|j_n| + 1)$ et on a pour tout α tel que $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, $\alpha(s) \leq \alpha(r_{n,t}(u)) \leq \alpha(t)$. Ainsi $* = q_n$.

(b) Si $n + \sum j_p$ est impair, elles sont toutes inférieures après renormalisation à $s + (j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_{n-1} + \frac{1}{2}, j_n - \frac{1}{2})$ et pour $s, t = s + (j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_{n-1} + \frac{1}{2}, j_n - \frac{1}{2})$ on a u est dans l'enclos de s et t si $j_n \leq 0$ et u n'est pas dans l'enclos de s et t si $j_n > 0$. Donc :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}) = \begin{cases} K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n-\frac{1}{2}}, & \text{si } \ n + \sum j_p \ \text{ impair et } \ j_n \leq 0 \\ **\,K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n-\frac{1}{2}}, & \text{si } \ n + \sum j_p \ \text{ impair et } \ j_n > 0 \end{cases}$$

où $**$ est un coefficient positif que l'on calcule comme dans le cas pair ci-dessus, en remplaçant $-e_n$ par e_n ; on trouve encore $** = q_n$.

3. Si on sait que $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0} M^{0,n}) = dom[dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}) M^{0,n}]$, on aura :

(a) Si $n + \sum j_p$ est pair,

$K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2}} M^{0,n}(s,t) \neq 0 \Longleftrightarrow s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_n, \exists\ \ u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{u,t\}$ est une arête (donc s,u et t sont dans un même appartement) et par un bon choix du repère si $s = (\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}),\ u = s + (j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2})$ normalisée alors les t possibles sont de la forme $s+(j_1+\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\frac{1}{2}+\varepsilon_n)$, où $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$. après renormalisation elles sont toute inférieures à :

$$\left\{ \begin{array}{cc} s+(j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1) & \text{si} \quad j_n \geq 0 \\ s+(j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}) & \text{si} \quad j_n < 0. \end{array} \right.$$

De plus pour s et un tel t les u correspondants sont dans l'enclos de s et t. Donc pour $n+\sum j_p$ pair on a :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0} M^{0,n}) = \left\{ \begin{array}{ll} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & \text{si} \quad j_n \geq 0 \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & \text{si} \quad j_n < 0. \end{array} \right.$$

(b) Si $n+\sum j_p$ est impair on a :

$K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n-\frac{1}{2}} M^{0,n}(s,t) \neq 0 \Longleftrightarrow s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_n, \exists\ \ u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{u,t\}$ est une arête (donc s,u et t sont dans un même appartement) et par un bon choix du repère si $s = (\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}),\ u = s + (j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n-\frac{1}{2})$ normalisée alors les t possibles sont de la forme $s+(j_1+\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\cdots,j_n-\frac{1}{2}+\varepsilon_n)$, où $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$. après renormalisation elles sont toute inférieures à :

$$\left\{ \begin{array}{cc} s+(j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n) & \text{si} \quad j_n > 0 \\ s+(j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1) & \text{si} \quad j_n \leq 0. \end{array} \right.$$

De plus pour s et un tel t les u correspondants sont dans l'enclos de s et t. Donc pour $n+\sum j_p$ impair on a :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0} M^{0,n}) = \left\{ \begin{array}{ll} q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & \text{si} \quad j_n > 0 \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & \text{si} \quad j_n \leq 0. \end{array} \right.$$

Vérifions maintenant que :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0} M^{0,n}) = dom[dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}) M^{0,n}].$$

Les u dans $K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}$, sont dans un bon repère $s+(j_1+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n)$, où $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$, leurs voisins dans $\mathcal{S}_n$ sont $s+(j_1+m_1,\cdots,j_n+m_n)$, avec $m_p = 0$ ou ± 1 (les m_p sont obtenues en ajoutant $\pm\frac{1}{2}$ à ε_p).

(a) Si $n+\sum j_p$ impair et $s+(j_1+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n)<s+(j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n-\frac{1}{2})$, on a $s+(j_1+m_1,\cdots,j_n+m_n)\leq$

$$\begin{cases} s+(j_1+\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n+\frac{1}{2}) & <s+(j_1+1,\cdots,j_n) \quad \text{si } j_n>0 \\ s+(j_1+\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n-\frac{1}{2}) & <s+(j_1+1,\cdots,j_n-1) \quad \text{si } j_n\leq 0 \end{cases}$$

(b) Si $n+\sum j_p$ pair et $s+(j_1+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n)<s+(j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2})$, on a $s+(j_1+m_1,\cdots,j_n+m_n)\leq$

$$\begin{cases} s+(j_1+\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n+\frac{1}{2}) & <s+(j_1+1,\cdots,j_n+1) \quad \text{si } j_n\geq 0 \\ s+(j_1+\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n-\frac{1}{2}) & <s+(j_1+1,\cdots,j_n-1) \quad \text{si } j_n<0 \end{cases}$$

Il faut s'assurer que $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,0}M^{0,n}) = dom[K^n_{j_1,\cdots,j_n}dom(M^{n,0})M^{0,n})]$. On a les termes intervenant dans $M^{n,0}M^{0,n}$ et qui sont strictement inférieurs à $K^n_{1,\cdots,1,(-1)^n}$ sont $K^n_{\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0}$, $k\leq n-1$. D'après ce qui précède on a :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}K^n_{\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0}) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}.$$

Vérifions que ces termes sont strictement inférieurs à $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,0}M^{0,n})$. Les seuls cas qui causent un problème sont lorsque $n+\sum j_p$ est impair (*resp.* pair) avec $j_n>0$ (*resp.* $j_n<0$). Prenons le cas où $n+\sum j_p$ impair et $j_n>0$ (même genre de raisonnement pour $n+\sum j_p$ pair est $j_n<0$) on a :
pour $s=(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$, $u=s+(j_1,\cdots,j_n)$ et $t=u+(1,\cdots,1)=s+(j_1+1,\cdots,j_n+1)$, le milieu $\frac{u+t}{2}=s+(j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2})$ est spécial dans $\mathcal{S}_1$ ($n+\sum j_p$ impair), donc par rétraction par rapport au mur correspondant on trouve $(j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n)$. Par suite $K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n}$ figure dans $K^n_{j_1,\cdots,j_n}K^n_{1,\cdots,1,(-1)^n}$. donc :
Si $n+\sum j_p$ pair,

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}K^n_{1,\cdots,1,(-1)^n}) = \begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & \text{si} \quad j_n\geq 0 \\ *K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & \text{si} \quad j_n<0 \end{cases}$$

Si $n+\sum j_p$ impair,

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}K^n_{1,\cdots,1,(-1)^n}) = \begin{cases} **K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & \text{si} \quad j_n>0 \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & \text{si} \quad j_n\leq 0 \end{cases}$$

$\diamondsuit$

Remarque 3.6 *Un raisonnement analogue au 2) et 3) de la proposition 3.5 donne :* $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,1}) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+\frac12,\cdots,j_{n-1}+\frac12,j_n-\frac12} & si \quad j_n\leq 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad pair \\ q_nK^n_{j_1+\frac12,\cdots,j_{n-1}+\frac12,j_n-\frac12} & si \quad j_n> 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad pair \\ K^n_{j_1+\frac12,\cdots,j_{n-1}+\frac12,j_n+\frac12} & si \quad j_n\geq 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad impair \\ q_nK^n_{j_1+\frac12,\cdots,j_{n-1}+\frac12,j_n+\frac12} & si \quad j_n< 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad impair \end{cases}$$

et $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,1}M^{1,n}) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & si \quad j_n\leq 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad pair \\ q_nK^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad j_n> 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad pair \\ q_nK^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad j_n< 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad impair \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & si \quad j_n\geq 0 \quad et \quad n+\sum j_p \quad impair \end{cases}$$

Proposition 3.7 *Pour* $(j_1,\cdots,j_n)\in C'_u\cap\mathbb{Z}^n$ *on a :*

1. $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}L^n_n) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & si \quad j_n\leq 0 \quad et \quad \sum j_p \quad impair \\ q_nK^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad (j_n>0 \ et \ \sum j_p \quad impair) \quad ou \quad (j_n<0 \ et \ \sum j_p \ pair) \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & si \quad j_n\geq 0 \quad et \quad \sum j_p \ pair \end{cases}$$

2. $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}L^n_{n-}) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & si \quad j_n\geq 0 \quad et \quad \sum j_p \quad impair \\ q_nK^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad (j_n<0 \ et \ \sum j_p \quad impair) \quad ou \quad (j_n>0 \ et \ \sum j_p \ pair) \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & si \quad j_n\leq 0 \quad et \quad \sum j_p \ pair \end{cases}$$

Démonstration : Corollaire assez facile de la proposition 3.5 et de la remarque 3.6.
$\diamondsuit$

Théorème 3.8 *L'algèbre $\mathcal{O}^n$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_n$ invariants par un groupe fortement transitif et respectant les types est engendrée par :*

$$L_k^n \quad et \quad L_{n-}^n \quad (0 \leq k \leq n).$$

Elle est non commutative

Démonstration : Par un raisonnement par récurrence sur le degré de $K_{j_1,\cdots,j_n}^n$ et en utilisant les propositions précédentes. Pour la non commutativité on a :

$$dom(L_n^n L_{n-}^n) = K_{2,2,\cdots,2}^n \text{ alors que } dom(L_{n-}^n L_n^n) = q_n K_{2,2,\cdots,-1}^n.$$

$\diamondsuit$

Remarques 3.9 *1. Les opérateurs L_k^n et L_{n-}^n $(0 \leq k \leq n)$ sont des opérateurs symétriques et ils engendrent $\mathcal{O}^n$ qui est formée d'opérateurs non nécessairement symétriques ; c'est possible car $\mathcal{O}^n$ n'est pas commutative.*

2. L'algèbre $\mathcal{O}^{n*}$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_n$ invariants sous le groupe G^*, très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$, admet pour base les $K_{j_1,\cdots,j_{n-1},j_n}^{n*} = K_{j_1,\cdots,j_{n-1},j_n}^n + K_{j_1,\cdots,j_{n-1},-j_n}^n$, pour $(j_1,\cdots,j_{n-1},j_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$.

Théorème 3.10 *L'algèbre $\mathcal{O}^{n*}$ est commutative. C'est l'algèbre de polynômes $\mathcal{O}^{n*} = \mathbb{C}[L_1^n,\cdots,L_{n-1}^n,L_n^{n*}]$, si l'on note $L_n^{n*} = L_n^n + L_{n-}^n$.*

Démonstration : D'après le calcul précédant la proposition 3.1, l'algèbre $\mathcal{O}^{n*}$ est formée d'opérateurs symétriques, elle est donc commutative. D'après les propositions 3.1, 3.4 et 3.7 elle est engendrée par L_k^n $(0 \leq k \leq n-1)$ et L_n^{n*}. De plus pour $a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{N}$, le terme dominant de $(L_1^n)^{a_1}(L_2^n)^{a_2}\cdots(L_n^{n*})^{a_n}$ est $K_{a_1+a_2+\cdots+a_n,a_2+\cdots+a_n,\cdots,a_n}^{n*}$. Les variables L_k^n $(0 \leq k \leq n-1)$ et L_n^{n*} sont donc algébriquement indépendantes et $\mathcal{O}^{n*} = \mathbb{C}[L_1^n,\cdots,L_n^{n*}]$. $\diamondsuit$

4 Commentaires :

Comme signalé en [K-R 07], on peut comparer nos résultats avec les résultats classiques de Ichiro Satake [S 63], qui a étudié les groupes réductifs sur un corps p-adique. Si G est un tel groupe et U un "bon" sous-groupe compact ouvert, alors l'algèbre de Hecke, $\mathcal{H}(G,U)$, c'est à dire l'algèbre de convolution des fonctions complexes bi-U-invariantes à support compact, est toujours commutative si G est connexe. Elle est même intègre de degré de transcendance le rang relatif de G, et on sait déterminer des générateurs explicites.

À un tel groupe G est associé son immeuble de Bruhat-Tits Δ qui est supposé ici de type $\widetilde{B_n}$, $(n \geq 3)$.

Pour faire le lien entre notre point de vue et celui de Satake il faut choisir pour U le fixateur K_s dans G d'un sommet s de type i. Alors G/U s'identifie à l'ensemble $\mathcal{S}_{Gi}$ des sommets de type appartenant à l'orbite Gi de i sous G. Ainsi $\mathcal{H}(G,U)$ s'identifie à l'algèbre $\mathcal{O}_{Gi}$ des opérateurs G-invariants sur $\mathcal{S}_{Gi}$.

Examinons de plus près les conditions d'application du théorème de Satake. Il faut que $U = K_s$ soit un "bon" sous-groupe compact ouvert ce qui se traduit par les conditions techniques I et II de Satake. La condition II est essentiellement conséquence des propriétés connues des immeubles (car on a choisi $U = K_s$). La condition I se résume en l'existence de décompositions dans G : $G = U.\,H.\,N$ (Iwasawa) et $G = U.\,H.\,U$ (Bruhat). Cette décomposition de Bruhat est vérifiée si et seulement si $U = K_s$ induit tout le groupe de Weyl relatif sur un appartement contenant s ; cela élimine donc le cas de l'algèbre $\mathcal{O}^n$ (on a bien trouvé que $\mathcal{O}^n$ est non commutative). La décomposition d'Iwasawa est vérifiée essentiellement si $U = K_s$ est transitif sur la frontière Ω de l'immeuble, ce qui conduit à la même élimination.

Pour les autres cas envisagés ici, si G respecte les types, $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ n'est pas une orbite de G et la non commutativité de $\mathcal{O}$ ne contredit pas Satake. Pour G très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$, on a vu que les algèbres $\mathcal{O}^*$ et $\mathcal{O}^{n*}$ sont bien commutatives.

Références

[B 68] N. Bourbaki. Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6. Éléments de mathématique, Hermann, Paris (1968).

[C 01] D.I. Cartwright. Spherical harmonic analysis on buildings of type $\widetilde{A_n}$, Monatsh. Math. 133 (2001), 93-109.

[CM 94] D.I. Cartwright and W. Mlotkowski. Harmonic analysis for groups acting on triangle buildings, J. Austral. Math. Soc. (Series A). 56 (1994), 345-383.

[CW 04] D.I. Cartwright, W. Woess. Isotropic random walks in a building of type $\widetilde{A_d}$, Math. Z. 247 (2004), 101-135.

[GL 99] P. Gérardin et K.F. Lai. Opérateurs invariants sur les immeubles affines de type A, C. R. Acad. Sci. Paris ser. I, 329 (1999), 1-4.

[K-R 07] F. Kellil et G. Rousseau. Opérateurs invariants sur certains immeubles affines de rang 2, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 16 (2007), n^0 3, 591-610.

[MZ 00] A. M. Mantero and A. Zappa. Eigenfunctions of the Laplace operators for a building of type $\widetilde{A_2}$, J. Geom. Analysis. 10 (2000), 339-363.

[MZ 02] A. M. Mantero and A. Zappa. Eigenfunctions of the Laplace operators for buildings of type $\widetilde{B_2}$, Boll. Unione Mat. Ital. Ser B Artic. Ric. Mat. (8)5 (2002), 163-195.

[P 06] J. Parkinson. Buildings and Hecke algebras, J. of Algebra. 297 (2006), 1-49.

[R 89] M. Ronan. Lectures on buildings, Academic Press (1989).

[S 63] I. Satake. Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, Pub. Math. I. H. E. S, 18 (1963), 5-69.

[T 78] J. Tits. Reductive groups over local fields, in "Automorphic forms, representations and L-functions, Corvallis-1977", Proc. Symp. pure Math. 33, Amer. Math. Soc. (1979), 29-69.

[W 09] R. Weiss. The structure of affine buildings, Annals of Math. Studies 168, Princeton U. Press (2009).

F.K. : Département de Mathématiques,
Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir (ISIMM),
5000 Monastir Tunisie.
kellilferdaous@yahoo.fr

G.R. : Institut Élie Cartan, UMR 7502, Nancy-Université, CNRS,
BP 70239 54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex, France
Guy.Rousseau@iecn.u-nancy.fr

Mathematics Subjet Classfication : 51E24 ; 20E42 ; 22E35.
Key words and phrases : immeubles, groupes d'automorphismes, opérateurs.