Journal of Lie Theory
Volume **17** (2007) 1–25

Sous-algèbres de Cartan des Algèbres de Kac-Moody affines réelles presque compactes

Hechmi Ben Messaoud et **Guy Rousseau**

Communicated by J. Faraut

Résumé. Almost compact real forms of affine Kac-Moody Lie algebras have been already classified. In the present paper, we study the conjugate classes of their Cartan subalgebras under the adjoint groups or the full automorphism groups. Maximally compact Cartan subalgebras are all conjugated to a standard one (noted ${}^c\mathfrak{h}$) and one may compare any Cartan subalgebra to ${}^c\mathfrak{h}$. Cartan subalgebras are related to non compact unitary roots of ${}^c\mathfrak{h}$ and one can see especially that the number of the conjugate classes is always finite. This approach is a generalization of the classification by Carmona of Cartan subalgebras for real semi-simple Lie algebras which is different from (but equivalent to) that of Sugiura. The approach of Sugiura, which consists in comparing any Cartan subalgebra to a maximally split one, does not adapt to our framework of study as maximally split Cartan subalgebras are not conjugated in general.
Mathematics Subject Index 2000: 17B67.
Key Words and Phrases: Algèbres de Kac-Moody affines, formes réelles presque compactes, sous-algèbres de Cartan.

Introduction

Les formes réelles des algèbres de Kac-Moody complexes généralisent les algèbres de Lie semi-simples réelles. Outre leur intérêt mathématique, ces formes ont des applications diverses en Physique Théorique (notamment en théorie des supergravités, voir par exemple [9]). La non-conjugaison des sous-algèbres de Borel des algèbres de Kac-Moody fait apparaître, dans le cas indécomposable, deux types de formes réelles : les formes presque déployées et les formes presque compactes. Ces formes ont été étudiées séparément et respectivement dans [19], [20] et [1] pour les algèbres de Kac-Moody symétrisables et dans [18] et [4] pour les algèbres de Kac-Moody affines (voir aussi [21] pour une revue d'ensemble). On s'intéresse ici à l'étude des classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan pour les formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines. Le cas des formes presque déployées fait l'objet d'une étude à part [5].

Dans le cas des algèbres de Lie semi-simples réelles, l'étude des classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan est due à Harish-Chandra ([8], 1956) et

ISSN 0949–5932 / $2.50

B. Kostant ([12], 1955); elle a été reprise par M. Sugiura ([22], 1959) qui donne une classification effective pour chaque algèbre de Lie simple réelle. L'approche utilisée par ces trois auteurs consiste essentiellement à comparer une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle à une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée de celle-ci. Quelques années après, J. Carmona ([7], 1973) a refait la classification par une nouvelle méthode basée sur la comparaison d'une sous-algèbre de Cartan à une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte. Il s'agit ici d'étendre la méthode de classification de Carmona aux algèbres de Kac-Moody affines réelles presque compactes.

Au paragraphe 1, nous rappelons les résultats généraux sur les algèbres de Kac-Moody complexes, leurs groupes d'automorphismes et leurs formes réelles. Nous y fixons également les notations utilisées dans la suite. Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle associée à une semi-involution σ' d'une algèbre de Kac-Moody complexe $\mathfrak{g}$, il existe une semi-involution de Cartan (ou compacte) ω' qui commute à σ' et on a la décomposition de Cartan $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ par rapport à l'involution de Cartan $\sigma = \sigma'\omega'$ (qui est non triviale dès que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est non compacte).

Le groupe commutatif Γ engendré par σ' et ω' agit sur le groupe de Kac-Moody G associé à l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ de $\mathfrak{g}$, sur le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ des automorphismes de $\mathfrak{g}$ et sur le groupe $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce de $\mathfrak{g}'$. On considère les groupes $G_{\mathbb{R}} = G^{\sigma'}$, $\mathrm{Ad}(G)^{\sigma'}$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ ainsi que $K = G^{\Gamma}$, $\mathrm{Ad}(G)^{\Gamma}$ et $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\Gamma}$ (cf. 1.11). Le couple $(G_{\mathbb{R}}, K)$ est la généralisation la plus naturelle dans ce cadre de la paire symétrique associée à une algèbre de Lie semi-simple réelle; mais les couples $(\mathrm{Ad}(G)^{\sigma'}, \mathrm{Ad}(G)^{\Gamma})$ et $(\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}, \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\Gamma})$ sont a priori (et a posteriori) aussi intéressants.

Au paragraphe 2, on se restreint aux algèbres de Kac-Moody affines pour étudier les sous-algèbres de Cartan de leurs formes réelles presque compactes. Les involutions de Cartan d'une forme réelle presque compacte sont conjuguées par le groupe des automorphismes de première espèce de celle-ci (Théorème 2.2) c'est l'un des théorèmes clés de [4]. Toute sous-algèbre de Cartan d'une forme réelle presque compacte $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est stable par une involution de Cartan de celle-ci (Corollaire 2.3); elle correspond donc à une sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$.

On se fixe une involution de Cartan σ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et on obtient le théorème suivant sur les classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan $\sigma'-$stables ou $\Gamma-$stables. Ce résultat est malheureusement partiel: il est incomplet pour le couple $(\mathrm{Ad}(G)^{\sigma'}, \mathrm{Ad}(G)^{\Gamma})$ et inexistant pour le couple $(G_{\mathbb{R}}, K)$.

Théorème A (2.11). *1) Les classes de conjugaison sous* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ *ou* $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ *des sous-algèbres de Cartan* σ'*-stables de* $\mathfrak{g}$ *(i.e. des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$*) correspondent bijectivement aux classes de conjugaison sous* $Aut_1(\mathfrak{g}')^{\Gamma}$ *des sous-algèbres de Cartan* $\Gamma-$*stables de* $\mathfrak{g}$.
2) L'ensemble des classes de conjugaison sous $Ad(G)^{\Gamma}$ *des sous-algèbres de Cartan* $\Gamma-$ *stables de* $\mathfrak{g}$ *s'identifie à un sous-ensemble de l'ensemble des classes de conjugaison sous* $Ad(G)^{\sigma'}$ *des sous-algèbres de Cartan* σ'*-stables de* $\mathfrak{g}$ *(i.e. des sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$*).*

On ne considère maintenant que des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$. On montre d'abord que toutes celles qui sont "maximalement compactes" pour σ' (cf. 1.12.3) sont conjuguées par K (Proposition 2.8). On va comparer les autres sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables à l'une de ces sous-algèbres de Cartan maximalement compactes ${}^c\mathfrak{h}$ que l'on fixe. On montre (Proposition 2.12) que, à conjugaison près par K, on peut supposer que toute sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable $\mathfrak{h}$ est standard relativement à ${}^c\mathfrak{h}$ i.e. vérifie $\mathfrak{h}^\sigma \subset ({}^c\mathfrak{h})^\sigma$. De plus la classe de conjugaison de $\mathfrak{h}$ sous le groupe $X = \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^\Gamma$ (resp. $X = \mathrm{Ad}(G)^\Gamma$, $X = K$) est en correspondance bijective avec la classe de conjugaison de $\mathfrak{h}^\sigma$ sous le normalisateur de ${}^c\mathfrak{h}$ dans X et donc sous l'image W_X de celui-ci dans le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g}, {}^c\mathfrak{h})$ (Proposition 2.14). Un sous-espace de $({}^c\mathfrak{h})^\sigma$ est dit *admissible* s'il peut s'écrire sous la forme $\mathfrak{h}^\sigma$ avec une sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$. A l'aide d'une transformation de Cayley, on donne, comme dans le cas des algèbres de Lie semi-simples réelles ([7]; Théorème III-2-1]) une condition nécessaire et suffisante d'admissibilité pour les sous-espaces de $({}^c\mathfrak{h})^\sigma$ en terme de systèmes de racines unitaires non compactes fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{g}, {}^c\mathfrak{h})$ (Théorème 2.19). Puis on montre que W_K a un nombre fini d'orbites dans ces systèmes de racines fortement orthogonales (à l'équivalence $\mathcal{R}$ près de 2.19). On obtient donc le théorème suivant :

Théorème B (2.21 + 2.28). *Les classes de conjugaison sous $X = Aut_1(\mathfrak{g}')^\Gamma$ (resp. $X = Ad(G)^\Gamma$, $X = K$) des sous-algèbres de Cartan Γ-stables correspondent bijectivement aux classes de conjugaison sous W_X des systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{nc} modulo $\mathcal{R}$. Elles sont en nombre fini.*

On s'intéresse enfin aux sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ qui correspondent bijectivement (à K près) aux sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables maximalement déployées : Proposition 2.30. On obtient donc pour ces sous-algèbres toriques déployées maximales les analogues des théorèmes A et B, à condition de ne considérer que les systèmes de racines fortement orthogonales de rang maximal (Corollaires 2.32 et 2.34).

Enfin, au paragraphe 3, nous appliquons ces résultats aux formes réelles presque compactes (non compactes) des algèbres affines de type $A_1^{(1)}$ et de type $A_2^{(2)}$, ce qui fournit un contre-exemple pour confirmer la non-conjugaison des sous-algèbres de Cartan maximalement déployées ou des sous-algèbres toriques déployées maximales (cf. 3.2.2).

En vertu de la non-conjugaison des sous-algèbres de Cartan maximalement déployées, l'approche de Sugiura (équivalente à celle de Carmona pour les algèbres de Lie semi-simples réelles) s'avère inadaptée à notre cadre d'étude.

1.Automorphismes et formes réelles des algèbres de Kac-Moody

1.1. On considère une algèbre de Kac-Moody complexe symétrisable indécomposable $\mathfrak{g}$ que l'on suppose construite comme dans [10] et de dimension infinie. Pour les résultats standard suivants, on renvoie à [10] et [17] ou parfois à [13], [14], [18], [20] ou [1]. Il existe une matrice de Cartan généralisée (encore appelée matrice de Kac-Moody) $A = (a_{i,j})_{i,j\in I}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ soit engendrée par l'*algèbre de Cartan standard* $\mathfrak{h}$ et des éléments e_i, f_i pour $i \in I$. On a la décomposition

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \big)$, où Δ désigne le système de racines $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$. On note $\Pi = \{\alpha_i, i \in I\}$ la base des racines simples de Δ. L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est $\Delta^+ = \Delta \cap \big(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i \big)$ (resp. $\Delta^- = -\Delta^+$).

Les coracines $\check{\alpha_i}$ dans $\mathfrak{h}$ sont telles que $a_{i,j} = \alpha_j(\check{\alpha_i})$ pour tout i, j. Le *groupe de Weyl* W de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est engendré par l'ensemble S des réflexions fondamentales r_i définies par $r_i(\chi) = \chi - \check{\alpha_i}(\chi)\alpha_i$ pour $\chi \in \mathfrak{h}^*$. Une *racine réelle* est une racine conjuguée par W à une racine dans Π, leur ensemble est noté Δ^{re}. Les éléments de $\Delta^{im} = \Delta \setminus \Delta^{re}$ sont les *racines imaginaires.* Le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{c} = \{h \in \mathfrak{h}; \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Pi\}$, il est contenu dans $\mathfrak{h}' = \oplus_{i \in I} \mathbb{C}\check{\alpha_i}$.

1.2. On définit un groupe G (ne dépendant que de l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$) agissant sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Il est engendré par des sous-groupes V_α, pour α racine réelle, chacun isomorphe au groupe additif $\mathfrak{g}_\alpha$ par un isomorphisme exp tel que $\mathrm{Ad} \circ \exp = \exp \circ \mathrm{ad}$. On note V_+ (resp. V_-) le sous-groupe de G engendré par les V_α pour $\alpha \in (\Delta^{re})^+$ (resp. $(\Delta^{re})^-$).
Le groupe H associé à la sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}'$ est l'ensemble des $g \in G$ qui agissent sur $\mathfrak{g}_\alpha$ (pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$) par multiplication par un scalaire $\alpha(g)$ dépendant multiplicativement de α (en particulier H fixe $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$). Ainsi, pour $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, on a $h \exp(X) h^{-1} = \exp(\alpha(h)X)$ et donc H normalise V_α, en particulier H normalise V_+ et V_-. On note $B^+ = HV_+$ et $B^- = HV_-$: ce sont les *sous-groupes de Borel standard positif et négatif.*
Soit N le normalisateur de H dans G. Le groupe N/H s'identifie au groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On a les décompositions suivantes du groupe G (cf. [17] ou [13]):

Décomposition de Bruhat : $G = B^+ W B^+ = V_+ N V_+$.

Décomposition de Birkhoff : $G = B^- W B^+ = V_- N V_+$.

Dans les deux décompositions, la composante suivant N est unique et tout élément g de G s'écrit de manière unique $g = vnu$, avec $u \in V_+$, $n \in N$ et $v \in V_\pm \cap n V_- n^{-1}$.

1.3. Une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}-$diagonalisable (pour des valeurs propres complexes) maximale. Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par G, cf. [17]. Une *sous-algèbre de Borel* de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie complètement résoluble maximale de $\mathfrak{g}$. C'est le cas des sous-algèbres $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \big)$ [ou $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha \big)$] appelées respectivement sous-algèbre de Borel standard positive ou négative. Ces sous-algèbres de Borel $\mathfrak{b}^+$ et $\mathfrak{b}^-$ ne sont pas conjuguées par G; leurs stabilisateurs respectifs dans G sont les sous-groupes de Borel B^+ et B^-. Les sous-algèbres de Borel conjuguées par G à $\mathfrak{b}^+$ (resp. $\mathfrak{b}^-$) sont dites *positives* (resp. *négatives*). Comme $\mathfrak{g}$ est indécomposable, toute sous-algèbre de Borel est positive ou négative.
Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de $\mathfrak{g}$ agit de manière compatible à Ad sur G et donc transforme deux sous-algèbres de Borel conjuguées en deux sous-algèbres de Borel conjuguées; il est dit de *première espèce* (resp. *seconde espèce*) s'il transforme une sous-algèbre de Borel positive en une sous-algèbre de Borel positive (resp. négative). Comme $\mathfrak{g}$ est indécomposable, tout automorphisme est de première ou de seconde espèce.

1.4. Automorphismes de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan standard de $\mathfrak{g}$. On définit dans [17] un groupe $\tilde{H}$ qui agit sur G et $\mathfrak{g}$ et qui, dans le cas complexe, vérifie $\mathrm{Ad}(\tilde{H}) = \exp \mathrm{ad}(\mathfrak{h})$. L'*involution de Cartan* ω de $\mathfrak{g}$ est définie par $\omega(e_i) = -f_i$, $\omega(f_i) = -e_i$ et $\omega(h) = -h$ pour $h \in \mathfrak{h}$; elle dépend donc du choix de l'épinglage $(\mathfrak{h}, \Pi, (e_i, f_i)_{i\in I})$ de 1.1. Le *groupe des automorphismes intérieurs* de $\mathfrak{g}$ est l'image $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Ad}(\tilde{H} \ltimes G)$ du produit semi-direct de $\tilde{H}$ et G. Son groupe dérivé est le *groupe adjoint* $\mathrm{Ad}(G)$ (noté aussi $\mathrm{Int}'(\mathfrak{g})$ ou $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$) ou groupe des automorphismes intérieurs de l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$. Ces groupes sont intrinsèquement définis par $\mathfrak{g}$ (cf. [18]).

Le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des permutations ρ de I telles que $a_{\rho i,\rho j} = a_{i,j}$ pour $i, j \in I$ agit fidèlement sur $\mathfrak{g}'$ de façon que $\rho(e_i) = e_{\rho i}$, $\rho(f_i) = f_{\rho i}$ et $\rho(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\rho i}^\vee$. D'après [17], le groupe $\mathrm{Aut}(A) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $(\mathrm{Aut}(A) \times \{1, \omega\}) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$) est le groupe $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce (resp. le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ de tous les automorphismes) de $\mathfrak{g}'$ (ou $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$). On peut prolonger l'action de $\mathrm{Aut}(A)$ de $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \oplus \mathbb{C}\alpha_i^\vee$ à $\mathfrak{h}$, et donc de $\mathfrak{g}'$ à $\mathfrak{g}$, par le choix d'un supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$. On peut ainsi considérer $\mathrm{Aut}(A)$ comme un groupe d'automorphismes (dits *de diagramme*) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, commutant à ω et normalisant $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$, et considérer $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ comme un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$, mais ces définitions ne sont pas intrinsèques (cf. [18]).

Le sous-groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ des transvections de $\mathfrak{g}$ (cf. [15; 4.20]) est formé des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui induisent l'identité sur $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$); il est isomorphe au groupe additif des applications $\mathbb{C}-$ linéaires de $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{g}'}$ dans $\mathfrak{c}$ (cf. [18]) et commute à $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ si $\mathfrak{g}$ est affine [19; 2.7]. Ainsi, si $\mathfrak{g}$ est affine, le groupe des automorphismes (resp. des automorphismes de première espèce) de $\mathfrak{g}$ est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}') \times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') = [(\{1, \omega\} \times \mathrm{Aut}(A)) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})] \times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ (resp. $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}') \times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') = [\mathrm{Aut}(A) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})] \times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$).

1.5. Automorphismes semi-linéaires. On note $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont soit $\mathbb{C}$-linéaires soit *semi-linéaires* (ou antilinéaires i.e. $\phi(\lambda x) = \bar{\lambda}\phi(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathfrak{g}$). Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est distingué dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ et d'indice 2. On appelle *semi-involution* de $\mathfrak{g}$ un automorphisme semi-linéaire d'ordre 2. Pour toute semi-involution σ', on a la décomposition en produit semi-direct :

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1, \sigma'\} \ltimes \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Si σ' est une semi-involution de $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$ au sens où l'application évidente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes; de plus, σ' est la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On obtient ainsi une correspondance bijective entre semi-involutions et formes réelles. La forme réelle *normale* (ou *déployée*) standard est la sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{g}$ engendrée par les $e_i, f_i, \alpha_i^\vee$, et $\mathfrak{h}''_{\mathbb{R}}$, où $\mathfrak{h}''_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}''$ sur laquelle $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ prend des valeurs réelles. La semi-involution correspondante σ'_n est la *semi-involution normale.*

1.6. Structure de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. La semi-involution normale σ'_n commute à ω et $\mathrm{Aut}(A)$, elle normalise $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ mais ne commute pas avec eux. La décomposition suivante de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$) se déduit donc de celle de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$) :

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = (\{1,\sigma'_n\} \times \{1,\omega\} \times \mathrm{Aut}(A)) \ltimes \Big(\mathrm{Ad}(G.\tilde{H}) \ltimes \mathrm{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')\Big).$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}') = (\{1,\sigma'_n\} \times \{1,\omega\} \times \mathrm{Aut}(A)) \ltimes \mathrm{Ad}\left(G.\tilde{H}\right).$$

1.7. Forme bilinéaire invariante. Le choix fait en 1.4 d'un supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$ permet de définir une forme $(.\,,.)$ $\mathbb{C}$-bilinéaire invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ comme dans [10] Chapitre 2. Elle est invariante sous l'action de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$; plus précisément, si $\mathfrak{g}$ est affine, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$ est le stabilisateur de cette forme [18; 3.4].

1.8. Semi-involutions de Cartan. La *semi-involution de Cartan standard* ω' de $\mathfrak{g}$ est le produit commutatif $\omega' = \omega\sigma'_n = \sigma'_n\omega$. On appelle *semi-involution de Cartan* de $\mathfrak{g}$ tout conjugué de ω' par un automorphisme de $\mathfrak{g}$; c'est donc une semi-involution de seconde espèce (voir [19] pour plus de détail).
Ces semi-involutions de Cartan sont aussi appelées *semi-involutions compactes* et les formes réelles correspondantes sont appelées *formes réelles compactes.* D'après ce que l'on vient de dire, toute algèbre de Kac-Moody affine a une forme compacte unique à conjugaison près.
On sait [18; 4.4] que deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ stables par une semi-involution de Cartan ω' sont conjuguées par $U = G^{\omega'}$. Ainsi, les couples $(\omega',\mathfrak{h})$ formés d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ stable par une semi-involution de Cartan ω' sont conjugués par G.

1.9. Formes réelles presque déployées ou presque compactes.
La forme réelle correspondant à une semi-involution de première espèce (resp. de seconde espèce) est dite *presque déployée* (resp. *presque compacte*). Les formes réelles presque compactes sont $\mathbb{R}-$presque-anisotropes [6; 1.7] au sens où il n'existe pas de sous-algèbre parabolique propre définie sur $\mathbb{R}$ (au moins dans le cas affine, cf. [18; 3.7]).
D'après [19; 3.6], toute semi-involution de $\mathfrak{g}$ est conjuguée par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$ à une semi-involution contenue dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$. Si $\mathfrak{g}$ est affine, il résulte du dernier alinéa de 1.4 que tout automorphisme d'ordre fini de $\mathfrak{g}$ est dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$.

Dans la suite de cet article on supposera donc que *toutes les involutions ou semi-involutions qui interviendront seront dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ *ou* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$. Si l'on ne veut pas faire cette restriction, il faudra rajouter le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$ dans les théorèmes de conjugaison qui vont suivre.

Proposition 1.10.
1) Toute semi-involution de $\mathfrak{g}$ stabilise une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.
2) Soit σ' une semi-involution de $\mathfrak{g}$ (dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$). Pour toute sous-algèbre de Cartan σ'-stable $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, il existe une semi-involution de Cartan θ' (dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$) stabilisant $\mathfrak{h}$ et commutant à σ'. De plus θ' est unique à conjugaison près par un élément de $\widetilde{H}^{\sigma'}$, c'est-à-dire par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$ qui fixe $\mathfrak{h}$ (point par point) et commute à σ'.
3) Deux semi-involutions de Cartan qui commutent et stabilisent une même sous-algèbre de Cartan sont égales.

Démonstration. C'est une conséquence directe des résultats 3.11, 3.12, 4.5 et 4.6 b de [18]; on peut voir aussi [14]. ∎

1.11. Définitions.
1) On considère une semi-involution de Cartan ω' de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ' et on note $\sigma = \sigma'\omega' = \omega'\sigma'$ et $\Gamma = \langle \sigma', \omega' \rangle = \{1, \sigma', \omega', \sigma\}$.
2) La forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ admet une *décomposition de Cartan* (associée à σ ou ω') :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

où $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{-\sigma}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^{\sigma}$, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^{-\sigma}$.
Plus généralement les notations $\mathfrak{e}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{e}$ pour des sous-espaces de $\mathfrak{g}$ signifient que $\mathfrak{e}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{e}^{\sigma'}$ et $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.
On note $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\omega'} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ la forme compacte associée à ω'.
3) On associe à ces sous-algèbres plusieurs sous-groupes des groupes de 1.2 et 1.4 :

$$G_{\mathbb{R}} = G^{\sigma'}; \quad U = G^{\omega'}; \quad K = G^{\Gamma} = U \cap G_{\mathbb{R}} = U^{\sigma} = G_{\mathbb{R}}^{\sigma}.$$

$$\tilde{G}_{\mathbb{R}} = \{g \in G; \mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}\}$$

$$K^* = \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\Gamma}; \quad K_0^* = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\Gamma}; \quad \tilde{K} = \{k \in \tilde{G}_{\mathbb{R}}; \mathrm{Ad}(k) \in K^*\}.$$

On a: $K \subset \tilde{K} \subset \tilde{G}_{\mathbb{R}}$; $K \subset G_{\mathbb{R}} \subset \tilde{G}_{\mathbb{R}}$; $\mathrm{Ad}(\tilde{K}) = \mathrm{Ad}(G)^{\Gamma} \subset K_0^* \subset K^*$ et $\mathrm{Ad}(\tilde{G}_{\mathbb{R}}) = \mathrm{Ad}(G)^{\sigma'} \subset \mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$.
Les couples $(G_{\mathbb{R}}, K)$, $(\tilde{G}_{\mathbb{R}}, \tilde{K})$ et $(\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}, K^*)$ sont les trois généralisations naturelles de la paire symétrique associée à une algèbre de Lie semi-simple.

1.12. Sous-algèbres de Cartan.
1. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan σ'-stable de $\mathfrak{g}$, on dit que la sous-algèbre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}^{\sigma'}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.
Avec les notations de 1.11, on considère maintenant une sous-algèbre de Cartan σ-stable $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire une sous-algèbre de Cartan Γ-stable $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$, où $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ (resp. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-\sigma}$) est la *partie compacte ou torique* (resp.*déployée ou vectorielle*) de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. On note $\mathfrak{h}^{+} = \mathfrak{h}^{\sigma}$ et $\mathfrak{h}^{-} = \mathfrak{h}^{-\sigma}$.
2. Considérons le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$, il est stable par Γ. Pour $\alpha \in \Delta$, $-\alpha = \omega'(\alpha) = \mathrm{conj} \circ \alpha \circ \omega'$, où conj est la conjugaison complexe, ainsi α prend des valeurs imaginaires pures sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$; c'est-à-dire que α est réelle sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ et imaginaire pure sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}$; ceci justifie les termes "compacte" et "déployée" ci-dessus. En particulier $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ est une *sous-algèbre torique déployée* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ est commutative et l'action adjointe de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est diagonalisable. Le centre $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre torique déployée.
Les *racines unitaires* (on dit "imaginaires" dans le cas classique des algèbres de Lie semi-simples) de Δ sont celles de $\Delta_u = \{\alpha \in \Delta;\ \alpha(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}) = 0\} = \{\alpha \in \Delta;\ \sigma(\alpha) = \alpha = -\sigma'(\alpha)\}$, elles prennent des valeurs imaginaires pures sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.
Si α est une racine réelle unitaire (i.e. $\alpha \in \Delta_u^{re}$), alors $\mathfrak{g}_{\alpha}$ (qui est de dimension 1) est stable par σ et on distingue deux cas :
Si $\sigma = 1$ sur $\mathfrak{g}_{\alpha}$, alors $\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ et α est dite *compacte* : $\alpha \in \Delta_c$.

Si $\sigma = -1$ sur $\mathfrak{g}_\alpha$, alors $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}_\mathbb{C}$ et α est dite *non compacte* : $\alpha \in \Delta_{nc}$.

3. La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est dite *maximalement déployée* si $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^- + \mathfrak{c}_\mathbb{R}$ est une *sous-algèbre torique déployée maximale*, c'est-à-dire $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$; on dit aussi alors que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée pour σ'.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est dite *maximalement compacte* ou *fondamentale* (cf. [23], page 99) si $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$, c'est-à-dire si $\mathfrak{h}^+$ est une sous-algèbre $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$-diagonalisable maximale de $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$; on dit aussi alors que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte pour σ'.

4. Si $\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ contenant une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, alors l'algèbre dérivée $\mathfrak{r}'$ est semi-simple; c'est une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}'$ au sens de [15; 2.11] et on lui associe un sous-groupe algébrique connexe R de G qui conjugue les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{r}$. En particulier, si $\mathfrak{r}$ est Γ-stable, le sous-groupe $R^\Gamma = R \cap K$ est transitif sur les sous-algèbres de Cartan maximalement compactes (resp. maximalement déployées) Γ-stables de $\mathfrak{r}$.

5. Si $\mathfrak{g}$ est affine, d'après le dernier alinéa de 1.4 on a :

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'} \times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')^{\sigma'} \text{ et } \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^\Gamma \times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')^\Gamma.$$

D'autre part $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ stabilise toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. Ainsi les classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan sont les mêmes sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^\Gamma$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^\Gamma$

1.13. Groupes de Cartan.

1) Le groupe H associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est le tore algébrique $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(P, \mathbb{C}^*)$ où P est le réseau des poids, dual sur $\mathbb{Z}$ de $Q\check{} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i\check{}$ [15; page 133]. Si on identifie le groupe $\tilde{H}$ de 1.4 à son image $\mathrm{Ad}(\tilde{H})$, on a $\mathrm{Ad}(H) \subset \tilde{H} = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q, \mathbb{C}^*)$, où $Q = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ est le réseau des racines [15; page 137]. Il y a un homomorphisme naturel de Q dans P, on note Q' son image. Ainsi $\mathrm{Ad}(H) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q', \mathbb{C}^*)$ et le centre $Z(G)$ de G est $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(P/Q', \mathbb{C}^*) \subset H$, cf. [17]. Si $\mathfrak{g}$ est affine, $Q' = Q/\mathbb{Z}\delta$, où δ est la plus petite racine imaginaire positive.

Toute semi-involution de Cartan ω' stabilisant $\mathfrak{h}$ induit moins l'identité sur P, Q et Q' et on peut décomposer les tores algébriques H, $\tilde{H}$ et $\mathrm{Ad}(H)$ en produit direct de deux sous-groupes (non algébriques sur $\mathbb{C}$). Par exemple, si on pose $H_t = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(P, S^1)$ et $H_v = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(P, \mathbb{R}_+^*)$, on a $H = H_t \times H_v$; on dit que H_t (resp. H_v) est la partie *torique* ou *compacte* (resp. *vectorielle* ou *déployée*) de H. Il est clair que $H_t = H^{\omega'} = H \cap U$.

Notons ici, avec les notations de 1.2, la *décomposition d'Iwasawa* du groupe de Kac-Moody G (cf. [17] ou [13]) :

$$G = G^{\omega'} H_v V_\pm = U H_v V_\pm \quad \text{(unique)}.$$

2) Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan Γ-stable de $\mathfrak{g}$ (cf. 1.12.1) le groupe $H_\mathbb{R} = H^{\sigma'}$ se décompose : $H_\mathbb{R} = H_\mathbb{R}^+ \times H_\mathbb{R}^-$, où $H_\mathbb{R}^+ = H_\mathbb{R} \cap H_t$ et $H_\mathbb{R}^- = H_\mathbb{R} \cap H_v$ sont associés à $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+$ et $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$. De même on a, avec des notations évidentes, $\tilde{H}_\mathbb{R} = \tilde{H}^{\sigma'} = \tilde{H}_\mathbb{R}^+ \times \tilde{H}_\mathbb{R}^-$.

Proposition 1.14. *Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}')$. Alors l'algèbre $\mathfrak{z}$ est réduite à $\mathfrak{h}$ si $\mathfrak{g}$ n'est pas affine. Dans le cas contraire, $\mathfrak{z}$ est une algèbre de Heisenberg affine au sens où :*
si $\mathfrak{z}' = [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]$ est l'algèbre dérivée de $\mathfrak{z}$, alors $[\mathfrak{z}', \mathfrak{z}']$ est contenue dans le centre $\mathfrak{c}(\mathfrak{z})$ de $\mathfrak{z}$, il existe un supplémentaire abélien $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{z}'$ dans $\mathfrak{z}$ qui est $\mathrm{ad}_{\mathfrak{z}}$-diagonalisable, le centre $\mathfrak{c}(\mathfrak{z}')$ de $\mathfrak{z}'$ est le centralisateur $\mathfrak{z}'_0$ de $\mathfrak{d}$ dans $\mathfrak{z}'$ et, pour tout poids non nul χ de $\mathfrak{d}$ dans $\mathfrak{z}'$, $[\mathfrak{z}'_\chi, \mathfrak{z}']$ est de dimension 1.
De plus, $\mathfrak{h} = \mathfrak{d} + \mathfrak{c}(\mathfrak{z})$ est l'ensemble des éléments $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisables de $\mathfrak{z}$.

Remarque . L'algèbre $\mathfrak{h}$ est la seule sous-algèbre de Cartan $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable de $\mathfrak{z}$, mais il peut y avoir d'autres sous-algèbres de Cartan : par exemple, avec les notations classiques d'algèbres de lacets (cf. [4; 1.5]) on peut avoir $\mathfrak{z} = \mathfrak{l}(\mathbb{C}) = \left(\underset{i\in\mathbb{Z}}{\oplus} \mathbb{C}t^i\right) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ et $\mathfrak{h}_1 = \mathbb{C}1 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}(d+t)$ en est une sous-algèbre de Cartan.

Démonstration. Si $\mathfrak{g}$ n'est pas affine, alors $\mathfrak{z}$=$\mathfrak{h}$, cf. [10; 4.7]. Dans le cas contraire, $\mathfrak{z} = \mathfrak{h} \oplus (\underset{k\in\mathbb{Z}^*}{\oplus} \mathfrak{g}_{k\delta})$ où δ est la plus petite racine imaginaire positive de Δ. La première assertion, avec $\mathfrak{h} = \mathfrak{d} + \mathfrak{c}(\mathfrak{z})$, résulte alors de [10; 8.4].
Soit z un élément $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable de $\mathfrak{z}$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}' + \mathbb{C}z$ est une sous-algèbre commutative $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}'$; d'après [15; 1.31], $\mathfrak{a}$ est contenue dans $\mathfrak{h}$ et donc $z \in \mathfrak{h}$. ■

Corollaire 1.15. *Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, elle contient le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ et c'est la seule sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$. De plus la sous-algèbre $\mathfrak{h}'$ (resp. $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{h}'/\mathfrak{c}$) est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$) et toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$) est ainsi obtenue. On obtient donc ainsi des bijections entre les ensembles de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.*

Démonstration. La première assertion est claire d'après 1.14. La deuxième assertion résulte de [15; 1.22]. Enfin, ces deux assertions prouvent que les applications obtenues entre ensembles de sous-algèbres de Cartan sont bien des bijections. ■

2. Formes presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines

2.1. Dans ce paragraphe on suppose $\mathfrak{g}$ affine et l'involution σ' de seconde espèce, c'est-à-dire la forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ presque compacte.

Théorème 2.2. *Il existe une semi-involution de Cartan ω' de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ'. De plus ω' est unique à conjugaison près par un automorphisme de première espèce de $\mathfrak{g}'$ commutant à σ' (i.e. par un $\phi \in \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$).*
N.B. : On a alors un groupe commutatif $\Gamma = \{1, \omega', \sigma', \sigma = \sigma'\omega'\}$ et on dit que σ est l'*involution de Cartan* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est une involution de première espèce.

Démonstration. On a déjà vu la première assertion (1.10). La suite du théorème est l'un des résultats principaux de [4] mais avec $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$. Or

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'} \times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ (1.4), donc, en conjuguant par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$, on peut supposer que deux semi-involutions de Cartan ω'_1 et ω'_2 (commutant à σ') et σ' stabilisent la même sous-algèbre de Cartan et, d'après 1.10.2, ω'_1 et ω'_2 sont conjuguées par un $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$. Enfin, il existe une involution de seconde espèce $\omega = \omega'\sigma'_n$ qui commute à Γ, il suffit de définir σ'_n par un supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$ qui est Γ-stable et les générateurs $\pm e_i$, $\pm f_i$ eux aussi globalement stables par Γ, cf. [4; 2.11] ou 2.4.4 ci-dessous. En modifiant ϕ par ω, on peut supposer $\phi \in \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$. ∎

Corollaire 2.3. *Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan σ'-stable de $\mathfrak{g}$ (i.e. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$) il existe $\phi \in \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ telle que $\phi(\mathfrak{h})$ soit stable par Γ.*

Démonstration. C'est une conséquence de 1.10 et 2.2. ∎

2.4. Algèbres de Kac-Moody affines.

1. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Kac-Moody affine et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, les racines imaginaires de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ sont les multiples entiers non nuls d'une racine δ. Il existe $k = 1,2$ ou 3 tel que $\Delta \cup \{0\}$ soit stable par translation par $k\delta$; on dit que $\mathfrak{g}$ est de type Aff k si k est le plus petit entier vérifiant cette propriété. L'ensemble quotient $(\Delta \cup \{0\})/k\mathbb{Z}\delta$ est fini.

On ne rappellera pas ici la réalisation de $\mathfrak{g}$ comme algèbre de lacets non tordue (type Aff 1) ou tordue (types Aff 2 et Aff 3); voir pour cela [10] ou [4].

2. Le noyau $\mathrm{Ker}(\delta)$ est l'intersection $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \oplus \mathbb{C}\alpha_i\check{}$ de $\mathfrak{h}$ avec l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$. Le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 engendré par un élément canonique $c = \sum a_i\check{}\alpha_i\check{}$, où les $a_i\check{}$ sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. On note $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

3. Comme σ est de première espèce, il fixe c et induit l'identité sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. En particulier, si $\mathfrak{h}$ est σ-stable, σ fixe δ, et la sous-algèbre des points fixes $\mathfrak{h}^+$ contient le centre de $\mathfrak{g}$ et un supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$. Ainsi, il existe un nombre fini de racines de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ qui s'annulent sur $\mathfrak{h}^+$ et le centralisateur $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^+)$ de $\mathfrak{h}^+$ dans $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, plus précisément, c'est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{z}$ n'est pas commutative (i.e. $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{h}$) l'algèbre dérivée $\mathfrak{z}'$ est semi-simple; c'est une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}'$ (cf. 1.12.4) et on lui associe un sous-groupe algébrique connexe de G qui fixe $\mathfrak{h}^+$.

4. D'après [16; III.1.1], voir aussi [2; II.3.2] et [18; 3.13.b], il existe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ et une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ contenue dans $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{b}$ soit stable par σ et $\mathfrak{h}$ stable par σ et ω'. On note Δ^+ le système de racines associé à $\mathfrak{b}$ et $\Pi = \{\alpha_i;\ i \in I\}$ la base correspondante de Δ qui sont donc stables par σ. Il est possible de choisir les générateurs de Chevalley e_i, f_i de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}''$ de façon qu'ils soient stables par σ et que ω' soit décrite comme en 1.8, 1.4 et 1.5 par rapport à cette base. Alors σ est le produit commutatif $\sigma = \rho h = h\rho$, où $\rho \in \mathrm{Aut}(A)$ est un automorphisme de diagramme et $h \in \tilde{H}^\rho$ (cf. 1.4). La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ ainsi choisie est maximalement compacte pour σ' au sens de [4; 2.7.2] puisqu'elle est stable par σ' et que $-\sigma'$ (et donc σ) stabilise une base de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. On verra ci-dessous (voir Proposition 2.6,iii) que cette définition est équivalente à celle introduite en 1.12.3.

Proposition 2.5.
1) L'algèbre $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^\sigma$ est réductive-affine au sens suivant :
Il existe $k \geq 0$ et des sous-algèbres de Kac-Moody affines $\mathfrak{g}_i$ ($1 \leq i \leq k$) de centres $\mathfrak{c}_i$ (dans le centre $\mathfrak{c}^1$ de $\mathfrak{g}^1$) telles que :
- le radical $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}^1$ est une algèbre de Heisenberg d'ordre infini (voir **N.B.**3 *ci-dessous) de centre $\mathfrak{c}^1$ (en particulier $\mathfrak{g}'_0 \subset \mathfrak{c}^1$).*
- on a : $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_k$ et $(\mathfrak{g}^1)'/\mathfrak{c}^1 = ((\mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{g}^1)')/\mathfrak{c}^1) \oplus (\mathfrak{g}'_1/\mathfrak{c}_1) \oplus .... \oplus (\mathfrak{g}'_k/\mathfrak{c}_k)$.
2) Pour le choix de $\mathfrak{h}$ de 2.4.4, il existe des sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}_i$ de $\mathfrak{g}_i$, $i = 0, 1, ..., k$, telles que $\mathfrak{h}^\sigma = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1 + ... + \mathfrak{h}_k$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^\sigma$. De plus, tout élément $ad_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable de $\mathfrak{h}^\sigma + \mathfrak{g}_0$ est dans $\mathfrak{h}^\sigma$.
3) Toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}^\sigma$ formée d'éléments $ad_{\mathfrak{g}}$-diagonalisables est conjuguée par G^σ à une sous-algèbre de $\mathfrak{h}^\sigma$.
N.B. : 1) Ce résultat est valable plus généralement pour un automorphisme σ de première espèce et d'ordre fini. Dans ce cas $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^\sigma$, on a en fait $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 = \cdots = \mathfrak{c}_k$, $(\mathfrak{g}_0)' \subset \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{g}^\sigma = \mathfrak{g}_0 + (\mathfrak{g}_1)' + \cdots + (\mathfrak{g}_k)' + \mathfrak{h}''$.
2) L'exemple fondamental d'algèbre réductive-affine est construit comme algèbre de lacets sur une algèbre réductive [4; 1.5]. Par ailleurs il résulte de la définition des algèbres réductives-affines que les $(\mathfrak{g}_i)'$, $1 \leq i \leq k$, sont les idéaux minimaux non résolubles de $\mathfrak{g}^1$
3) Une algèbre de Heisenberg d'ordre infini et de centre $\mathfrak{c}^2$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{c}^2 \oplus (\bigoplus_{j=1}^{\infty} (\mathbb{C}x_j \oplus \mathbb{C}y_j))$ telle que $0 \neq [x_j, y_j] \in \mathfrak{c}^2$ pour tout j et tous les autres crochets sont nuls, cf. [10; 2.9]. L'algèbre dérivée d'une algèbre de Heisenberg affine (1.14) de base dénombrable est de ce type et toute algèbre de Heisenberg d'ordre infini est ainsi obtenue.

Démonstration. C'est un résultat de Bausch : [3; Th.4, Prop.5], [2; V 1.1 b, IV 5.1, Ap 2.3]. On peut l'obtenir un peu plus facilement grâce à une réalisation convenable de $\mathfrak{g}$ comme algèbre de lacets [4; 3.7]. Par ailleurs, l'énoncé 3) est légèrement différent de celui de [3] (qui n'utilise pas G^σ); c'est un résultat de Kac et Wang [15; 4.13]. ■

Proposition 2.6. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable.*
i) On suppose qu'il existe une sous-algèbre de Cartan ${}^1\mathfrak{h}$ $\Gamma-$stable telle que $\mathfrak{h}^+ \subset {}^1\mathfrak{h}^+$; alors il existe $k \in Z_K(\mathfrak{h}^+)$ tel que ${}^1\mathfrak{h}^- \subset k\mathfrak{h}^-$. En particulier, si $\mathfrak{h}^+ = {}^1\mathfrak{h}^+$, on a ${}^1\mathfrak{h}^- = k\mathfrak{h}^-$.
ii) Il existe une sous-algèbre de Cartan ${}^c\mathfrak{h}$ $\Gamma-$stable et maximalement compacte pour σ' telle que $\mathfrak{h}^+ \subset {}^c\mathfrak{h}^+$; de plus ${}^c\mathfrak{h}$ est unique à conjugaison près par $Z_K(\mathfrak{h}^+)$.
iii) La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est maximalement compacte si et seulement si il existe une base de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ stable par σ et alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^+)$.

Démonstration. Le centralisateur $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^+)$ de $\mathfrak{h}^+$ dans $\mathfrak{g}$ est une algèbre réductive, cf. 2.4.3. Le centre $\mathfrak{z}_0$ de $\mathfrak{z}$ est contenu dans $\mathfrak{h}$, il est Γ-stable et on a $\mathfrak{z}_0^\Gamma = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+$. Si $\mathfrak{z}$ est commutative, alors $\mathfrak{z} = \mathfrak{h} = {}^1\mathfrak{h}$; sinon, l'algèbre dérivée $\mathfrak{z}'$ de $\mathfrak{z}$ est semi-simple et $\Gamma-$stable. Soit Z' le sous-groupe algébrique connexe de G associé à $\mathfrak{z}'$ (cf. 1.12.4 et 2.4.3). La forme réelle $\mathfrak{z}'_{\mathbb{R}} := (\mathfrak{z}')^{\sigma'}$ est déployée et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^- \cap \mathfrak{z}'_{\mathbb{R}}$ (resp. ${}^1\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^- \cap \mathfrak{z}'_{\mathbb{R}}$) en est une sous-algèbre torique déployée maximale (resp. sous-algèbre torique déployée). En conjuguant par un élément k de $(Z')^\Gamma \subset Z_K(\mathfrak{h}^+)$, on peut supposer ${}^1\mathfrak{h}^-_\mathbb{R} \cap \mathfrak{z}'_\mathbb{R} \subset \mathfrak{h}^-_\mathbb{R} \cap \mathfrak{z}'_\mathbb{R}$. Comme $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$ contiennent toutes les deux le centre de $\mathfrak{z}$, on a ${}^1\mathfrak{h}^-_\mathbb{R} \subset \mathfrak{h}^-_\mathbb{R}$ et donc ${}^1\mathfrak{h}^- \subset \mathfrak{h}^-$; d'où i).

Soit ${}^c\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{z}$ qui est $\Gamma-$stable et maximalement compacte pour σ', alors ${}^c\mathfrak{h}$ est également une sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}^+$ et est maximalement compacte pour σ'. Deux choix possibles de ${}^c\mathfrak{h}$ sont contenus dans $\mathfrak{z}$ et sont donc conjugués par $(Z')^\Gamma \subset Z_K(\mathfrak{h}^+)$; d'où ii).

Compte tenu de la définition 1.12.3, l'assertion iii) résulte immédiatement de [15; 4.10 et 4.12]. ■

Proposition 2.7. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan Γ-stable et maximalement compacte pour σ'. Soit Π une base de racines σ-stable de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Alors, avec les notations de 1.2, on a :*

i) $G^\sigma = V^\sigma_\pm N^\sigma V^\sigma_+$.

ii) $G^\sigma = U^\sigma H^\sigma_v V^\sigma_\pm$ (unique).

Démonstration. L'involution σ stabilise les groupes U, H, H_v, N et $V_\pm$ et donc elle respecte les décompositions de Bruhat, de Birkhoff et d'Iwasawa de G (cf. 1.2 et 1.13). D'où i) (voir aussi [15; 4.9]) et ii). ■

Proposition 2.8. *Le groupe $K = G^\Gamma = U^\sigma$ est transitif sur l'ensemble des sous-algèbres de Cartan maximalement compactes Γ-stables de $\mathfrak{g}$. En particulier, si $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est la décomposition de Cartan suivant l'involution de Cartan σ, les sous-algèbres de Cartan $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-diagonalisables de $\mathfrak{k}$ sont conjuguées par le groupe K.*

N.B. : Le cas particulier $\sigma = 1$ est déjà connu [18; 4.4]. Il signifie que toutes les sous-algèbres de Cartan d'une forme réelle compacte sont conjuguées par $G_\mathbb{R} = K$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ deux sous-algèbres de Cartan maximalement compactes $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$. Les sous-algèbres $\mathfrak{h}^+$ et $\mathfrak{h}_1^+$ sont deux sous-algèbres de Cartan $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-diagonalisables et ω'-stables de $\mathfrak{g}^\sigma$. D'après [15; 4.13], il existe $g \in G^\sigma$ tel que $\mathfrak{h}_1^+ = g\mathfrak{h}^+$ et donc $\mathfrak{h}_1 = g\mathfrak{h}$. Ainsi, les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ et $g\mathfrak{h}$ sont stables par ω' et $n := g^{-1}\omega'(g)$ normalise $\mathfrak{h}$; en particulier $n \in N^\sigma$. D'autre part, en écrivant $g = khu$ selon la décomposition de 2.7.ii), on obtient $n = u^{-1}h^{-2}\omega'(u)$. D'après l'unicité de n dans la décomposition de Birkhoff du groupe G (cf. 1.2) on a $n = h^{-2}$ et $u = 1$. Ainsi on a $\mathfrak{h}_1 = g\mathfrak{h} = k\mathfrak{h}$. ■

Lemme 2.9. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$; alors, avec les notations de 1.13, on a :*

$$\tilde{H}^-_\mathbb{R} = \mathrm{Ad}(H^-_\mathbb{R}).$$

N.B. : $H^-_\mathbb{R} \cap Z(G) = \{1\}$ et donc $\mathrm{Ad}(H^-_\mathbb{R})$ est isomorphe à $H^-_\mathbb{R}$.

Démonstration. On a :

$$\tilde{H}^-_\mathbb{R} = \tilde{H}_\mathbb{R} \cap \tilde{H}_v = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(Q,\mathbb{R}^*_+)^{\sigma'} = \mathrm{Hom}(Q,\mathbb{R}^*_+)^{-\sigma} = \mathrm{Hom}(Q/(1+\sigma)Q,\mathbb{R}^*_+)$$

et

$$H_{\mathbb{R}}^{-} = \mathrm{Hom}(P/(1+\sigma)P, \mathbb{R}_{+}^{*}),$$

donc

$$\mathrm{Ad}(H_{\mathbb{R}}^{-}) = \mathrm{Hom}(Q'/Q' \cap (1+\sigma)P, \mathbb{R}_{+}^{*}) = \mathrm{Hom}(Q/(\mathbb{Z}\delta + (1+\sigma)Q), \mathbb{R}_{+}^{*}) \ ,$$

car $Q' = Q/\mathbb{Z}\delta$, d'où

$$\tilde{H}_{\mathbb{R}}^{-}/\mathrm{Ad}(H_{\mathbb{R}}^{-}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\delta + (1+\sigma)Q/(1+\sigma)Q, \mathbb{R}_{+}^{*}) = 1,$$

car $[\mathbb{Z}\delta + (1+\sigma)Q]/(1+\sigma)Q$ est fini [puisque $2\delta \in (1+\sigma)Q$] et tout sous-groupe fini de $\mathbb{R}_{+}^{*}$ est trivial. ■

Proposition 2.10. *Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ deux sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$; alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ sont conjuguées par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ (resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$) si et seulement si elles le sont par K^* (resp. $\tilde{K}$).*

Démonstration. Les conditions suffisantes étant claires, on montre les conditions nécessaires. Soit $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ tel que $u(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}$, d'après 1.12.5 et le raisonnement de 2.2 on peut supposer $u \in \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$; on pose $\omega'_1 = u\omega' u^{-1}$. Alors ω' et ω'_1 sont deux semi-involutions de Cartan qui stabilisent $\mathfrak{h}$ et commutent à σ'. D'après 1.10, il existe $h = h^+h^- \in \tilde{H}_{\mathbb{R}} = \tilde{H}_{\mathbb{R}}^{+} \times \tilde{H}_{\mathbb{R}}^{-}$ tel que $\omega' = h\omega'_1 h^{-1} = h^-\omega'_1(h^-)^{-1} = (h^-u)\omega'(h^-u)^{-1}$ (car h^+ commute à ω'). Ainsi h^-u commute à ω' et $(h^-u)\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$. D'après le lemme 2.9, on a $\mathrm{Ad}(\tilde{H}_{\mathbb{R}}^{-}) = \mathrm{Ad}(H_{\mathbb{R}}^{-})$ et donc h^-u est dans le même groupe que u et commute à ω'. ■

Corollaire 2.11. (= Théorème A).
1) Les classes de conjugaison sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ des sous-algèbres de Cartan σ'-stables de $\mathfrak{g}$ correspondent bijectivement aux classes de conjugaison sous K^* des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$.
2) L'ensemble des classes de conjugaison sous $\tilde{K}$ des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$ s'identifie à un sous-ensemble de l'ensemble des classes de conjugaison sous $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ des sous-algèbres de Cartan σ'-stables de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Cela résulte de 2.10 et 2.3. ■

Remarque . Dans la suite, on ne considère que des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire des sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ stables par l'involution de Cartan σ, et on se fixe une sous-algèbre de Cartan ${}^c\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est Γ-stable et maximalement compacte pour σ' (il n'y a qu'un seul choix modulo K d'après 2.8). Pour $X = K, \tilde{K}$ ou K^*, on note $N_X = N_X({}^c\mathfrak{h})$ le normalisateur de ${}^c\mathfrak{h}$ dans X et W_X son quotient par le centralisateur de ${}^c\mathfrak{h}$ dans X. On note $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, {}^c\mathfrak{h})$ et on rappelle, avec les notations de 1.12.2, que Δ_c et Δ_{nc} sont contenus dans Δ^{re}.

Proposition 2.12. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan Γ-stable. Avec les notations de 1.12.1, il existe $k \in K$ tel que $k\mathfrak{h}^+ \subset {}^c\mathfrak{h}^+$ et ${}^c\mathfrak{h}^- \subset k\mathfrak{h}^-$.*

Définition . Une sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}^+ \subset {}^c\mathfrak{h}^+$ est dite *standard relativement à* ${}^c\mathfrak{h}$ (on abrégera en standard dans la suite de ce paragraphe 2). Elle est dite *spéciale* si de plus ${}^c\mathfrak{h}^- \subset \mathfrak{h}^-$. D'après la proposition 2.12, toute sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable est conjuguée par K à une sous-algèbre de Cartan spéciale (donc standard). La sous-algèbre ${}^c\mathfrak{h}$ est l'unique sous-algèbre de Cartan maximalement compacte standard (ou spéciale) cf. 2.6iii.

Démonstration. Cela résulte de 2.6 et 2.8. ■

Lemme 2.13. *Soient* ${}^1\mathfrak{h}$ *et* ${}^2\mathfrak{h}$ *deux sous-algèbres de Cartan standard. Alors* ${}^1\mathfrak{h}$ *et* ${}^2\mathfrak{h}$ *sont conjuguées par* K^* *(resp.* $\tilde{K}$, K*) si et seulement si* ${}^1\mathfrak{h}^+$ *et* ${}^2\mathfrak{h}^+$ *sont conjuguées par* W_{K^*} *(resp.* $W_{\tilde{K}}$, W_K*).*

Définition . Un sous-espace $\mathfrak{t}^+$ de ${}^c\mathfrak{h}^+$ est dit *admissible* s'il existe une sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}^+ = \mathfrak{t}^+$.

Démonstration. Soit $k \in K^*$ (resp. $\tilde{K}$, K) tel que ${}^2\mathfrak{h} = k.{}^1\mathfrak{h}$. alors ${}^c\mathfrak{h}$ et $k.{}^c\mathfrak{h}$ sont deux sous-algèbres de Cartan Γ-stables et maximalement compactes de $\mathfrak{g}$ contenant ${}^2\mathfrak{h}^+$. D'après 2.6.ii, il existe $k' \in K$, k' fixant ${}^2\mathfrak{h}^+$, tel que $k'(k.{}^c\mathfrak{h}) = {}^c\mathfrak{h}$. Ainsi $k'k \in N_{K^*}$ (resp. $N_{\tilde{K}}$, N_K) et ${}^2\mathfrak{h}^+ = k'k.{}^1\mathfrak{h}^+$.
Pour la réciproque, on peut supposer, quitte à conjuguer, que ${}^2\mathfrak{h}^+ = {}^1\mathfrak{h}^+$. D'après 2.6.i, il existe $k \in K$, k fixant ${}^1\mathfrak{h}^+$, tel que $k.{}^1\mathfrak{h} = {}^2\mathfrak{h}$; d'où le résultat.■

Proposition 2.14. *Les classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan* Γ*-stables sous* K^* *(resp.* $\tilde{K}$, K*) correspondent bijectivement aux classes de conjugaison des sous-espaces admissibles de* ${}^c\mathfrak{h}^+$ *sous* W_{K^*} *(resp.* $W_{\tilde{K}}$, W_K*).*

Démonstration. Cela résulte de 2.12 et 2.13. ■

Corollaire 2.15. *Les classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan maximalement déployées pour* σ' *sous* K^* *(resp.* $\tilde{K}$, K*) correspondent bijectivement aux classes de conjugaison des sous-espaces admissibles de dimension minimale de* ${}^c\mathfrak{h}^+$ *sous* W_{K^*} *(resp.* $W_{\tilde{K}}$, W_K*).*

Démonstration. Les sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ont la même dimension [4; 4.8]; par conséquent, une sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée si et seulement si $\mathfrak{h}^+$ est un sous-espace admissible de dimension minimale de ${}^c\mathfrak{h}^+$. Le corollaire découle de la proposition 2.14. ■

Lemme 2.16. *Soit* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Cartan spéciale telle que* $\mathfrak{h} \neq {}^c\mathfrak{h}$. *Soit* $\mathfrak{r} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^+ \oplus {}^c\mathfrak{h}^-)$ *et* $\mathfrak{r}'$ *l'algèbre dérivée de* $\mathfrak{r}$. *Alors* $\mathfrak{r}$ *est une sous-algèbre réductive* Γ*-stable de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h}^+ \oplus {}^c\mathfrak{h}^-$ *en est le centre. De plus, la forme réelle* $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}} := (\mathfrak{r}')^{\sigma'}$ *est une algèbre de Lie semi-simple déployée intérieure (i.e.* $\mathrm{rang}(\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}) = \mathrm{rang}(\mathfrak{r}')^{\Gamma}$*) .*

Démonstration. Il est clair que $\mathfrak{r}$ est réductive (cf. 2.4.3 ou 2.6) et que le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{r}$ contient $\mathfrak{h}^+ \oplus {}^c\mathfrak{h}^-$; mais $\mathfrak{h}$ et ${}^c\mathfrak{h}$ sont deux sous-algèbres de Cartan Γ-stables de $\mathfrak{r}$, donc $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{h} \cap {}^c\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^+ \oplus {}^c\mathfrak{h}^-$.
Comme $\mathfrak{h} \neq {}^c\mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}} \neq \{0\}$, c'est donc une algèbre de Lie semi-simple déployée de rang $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^-) - \dim_{\mathbb{C}}({}^c\mathfrak{h}^-)$. Il est clair que $(\mathfrak{r}')^{\Gamma}$ est de rang $\dim_{\mathbb{C}}({}^c\mathfrak{h}^+) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^+)$ qui est égal à $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^-) - \dim_{\mathbb{C}}({}^c\mathfrak{h}^-)$; donc $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ est intérieure. ■

2.17. Transformation de Cayley. On considère $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ avec ses générateurs $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note σ' (resp. ω') la semi-involution normale (resp. la semi-involution de Cartan) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ associée à la forme déployée (resp. compacte) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{su}(2)$) et $\sigma = \omega = \sigma'\omega'$. L'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(1,1)$ est une forme réelle déployée de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. La *transformation de Cayley* est un automorphisme privilégié C de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ qui transforme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ en $\mathfrak{su}(1,1)$ et induit la transformation conforme $z \mapsto i\frac{z-i}{z+i}$ entre les espaces symétriques hermitiens correspondants (notations de [11] §7) :

$$C = \mathrm{Ad}(\exp - i\frac{\pi}{4}(e+f)) = \mathrm{Ad}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{Ad}(SU(2)).$$

On pose : $E = -iC(e) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$, $H = C(h) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $F = iC(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. Alors (E,H,F) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet et on a :

$$\sigma(E) = -E, \quad \sigma(H) = H, \quad \sigma(F) = -F$$

$$\sigma'(E) = F, \quad \sigma'(H) = -H, \quad \sigma'(E) + E = E + F = h.$$

Les deux sous-algèbres $\mathfrak{a} = \mathbb{C}h$ et $\mathfrak{t} = C(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}H$ sont stables par σ' et σ. La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}$ est maximalement déployée pour σ' alors que $\mathfrak{t}$ est maximalement compacte et les deux racines de $\Delta(\mathfrak{t}, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ sont non compactes.

Lemme 2.18. *Soit $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle déployée intérieure de rang s (égal au rang de sa sous-algèbre compacte maximale $(\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}})^\sigma$ où σ est une involution de Cartan). Si $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $(\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}})^\sigma$, il existe dans $\Delta(\mathfrak{t}, \mathfrak{r}')$ un système ϕ de racines non compactes fortement orthogonales de rang s ; en particulier $\cap_{\alpha\in\phi} \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\}$.*

Démonstration. C'est le lemme III 1.1 de Carmona [7]. ■

Remarque . Ce lemme est essentiellement équivalent à la proposition 11 de Sugiura [22], voir aussi [Ko; Lemma 1]. Le lien entre les deux se fait par la transformation de Cayley: Soient $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{r}')^{-\sigma}$ une sous-algèbre de Cartan et ϕ un système de racines fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{a}, \mathfrak{r}')$ de rang s. On choisit pour chaque racine $\alpha \in \phi$ un $\mathfrak{sl}_2$-triplet $\{e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha\}$ tel que $f_\alpha = -\omega'(e_\alpha)$. On note $\mathfrak{r}'(\alpha) = \mathbb{C}e_\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathbb{C}f_\alpha$ (qu'on identifie à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$) et C_α la transformation de Cayley correspondante (cf. 2.17) prolongée de manière évidente à $\mathfrak{r}'$ (ou à toute algèbre contenant $\mathfrak{r}'$). On pose $H_\alpha = C_\alpha(h_\alpha)$, $E_\alpha = -iC_\alpha(e_\alpha)$, $F_\alpha = iC_\alpha(f_\alpha)$ et $C = \prod_{\alpha\in\phi} C_\alpha$ (produit commutatif). Ainsi $\mathfrak{t} := C(\mathfrak{a}) = \bigoplus_{\alpha\in\phi} \mathbb{C}H_\alpha$ est une sous-algèbre de Cartan de $(\mathfrak{r}')^\sigma$ et, comme $\sigma(E_\alpha) = -E_\alpha$, l'image de ϕ définit un système de racines non compactes fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{t}, \mathfrak{r}')$ de rang s. La construction inverse est essentiellement indiquée à la fin de la démonstration du théorème 2.19.

Théorème 2.19. *Soit $\mathfrak{t}^+$ un sous-espace de ${}^c\mathfrak{h}^+$. Alors $\mathfrak{t}^+$ est admissible si et seulement si il existe dans Δ_{nc} un système ϕ de racines (non compactes) fortement orthogonales tel que*

$$\mathfrak{t}^+ = \Big(\underset{\alpha\in\phi}{\oplus}\mathbb{C}\alpha\check{}\Big)^{\perp} \cap {}^c\mathfrak{h}^+ = \underset{\alpha\in\phi}{\cap}\mathrm{Ker}(\alpha)\cap {}^c\mathfrak{h}^+.$$

où $\Big(\underset{\alpha\in\phi}{\oplus}\mathbb{C}\alpha\check{}\Big)^{\perp}$ désigne l'orthogonal, dans ${}^c\mathfrak{h}$, de $\underset{\alpha\in\phi}{\oplus}\mathbb{C}\alpha\check{}$ par rapport à la forme bilinéaire invariante de 1.7.

Démonstration. La condition est nécessaire : tout sous-espace admissible de ${}^c\mathfrak{h}^+$ est la partie compacte $\mathfrak{h}^+$ d'une sous-algèbre de Cartan spéciale $\mathfrak{h}$ (cf. 2.12); on peut alors appliquer 2.16 et 2.18 avec $\mathfrak{t} = \mathfrak{r}'_{\mathbb{R}} \cap {}^c\mathfrak{h}$. Si la racine α est dans le système ϕ de 2.18, elle se prolonge à ${}^c\mathfrak{h}$ par 0 sur $\mathfrak{h}^+ \oplus {}^c\mathfrak{h}^-$; donc $\cap_{\alpha\in\phi}\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathfrak{h}^+ \oplus {}^c\mathfrak{h}^-$ i.e. $\mathfrak{h}^+ = (\cap_{\alpha\in\phi}\mathrm{Ker}(\alpha)) \cap {}^c\mathfrak{h}^+$.
Montrons que la condition est suffisante. Pour $\alpha \in \phi$, soit $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ et soit $a_\alpha = x_\alpha + \sigma'(x_\alpha)$. Comme α est une racine non compacte, $a_\alpha \in \mathfrak{p}$ est $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$-diagonalisable à valeurs propres réelles et ${}^c\mathfrak{h}^- \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$. Ainsi $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^+ \oplus [{}^c\mathfrak{h}^- \oplus (\oplus_{\alpha\in\phi}\mathbb{C}a_\alpha)]$ est une sous-algèbre commutative $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$-diagonalisable et Γ-stable de $\mathfrak{g}$ de même dimension que ${}^c\mathfrak{h}$; c'est donc une sous-algèbre de Cartan Γ-stable de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}^+ = \mathfrak{t}^+ \subset {}^c\mathfrak{h}^+$. Donc $\mathfrak{h}$ est standard et $\mathfrak{t}^+$ est admissible. ■

Remarque . On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des systèmes de racines non compactes fortement orthogonales de Δ_{nc} par : $\phi\,\mathcal{R}\,\psi$ si et seulement si ϕ et ψ engendrent le même sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{h}$. D'après 2.19, deux systèmes de racines non compactes fortement orthogonales ϕ et ψ de Δ_{nc} correspondent au même sous-espace admissible de ${}^c\mathfrak{h}^+$ si et seulement si ils sont $\mathcal{R}$-équivalents; d'où le résultat suivant :

Proposition 2.20. *Les classes de conjugaison des sous-espaces admissibles de ${}^c\mathfrak{h}^+$ sous W_{K^*} (resp. $W_{\tilde{K}}$, W_K) correspondent bijectivement à celles des systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{nc} modulo $\mathcal{R}$.*
N.B. : La classe de ${}^c\mathfrak{h}^+$ correspond au système vide de Δ_{nc}. La classe d'un sous-espace admissible de dimension minimale $\mathfrak{t}^+$ de ${}^c\mathfrak{h}^+$ (i.e. $\mathfrak{t}^+$ est la partie compacte d'une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée standard) correspond à la classe d'un système de racines fortement orthogonales de rang maximal dans Δ_{nc} modulo $\mathcal{R}$.

Théorème 2.21. (première partie du théorème B). *Les classes de conjugaison sous K^* (resp. $\tilde{K}$, K) des sous-algèbres de Cartan Γ-stables correspondent bijectivement aux classes de conjugaison sous W_{K^*} (resp. $W_{\tilde{K}}$, W_K) des systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{nc} modulo $\mathcal{R}$.*

Démonstration. Cela résulte de 2.14 et 2.20. ■

Corollaire 2.22. *Les classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan maximalement déployées $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$ sous K^* (resp. $\tilde{K}$, K) correspondent bijectivement aux classes de conjugaison des systèmes de racines fortement orthogonales de rang maximal de Δ_{nc} modulo $\mathcal{R}$ sous W_{K^*} (resp. $W_{\tilde{K}}$, W_K).*

Conséquence. Le rang maximal m d'un système de racines fortement orthogonales de Δ_{nc} est égal à $\mathrm{rang}(\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}})+\mathrm{rang}(\mathfrak{k})-n$, avec n le rang de $\mathfrak{g}$. En particulier, lorsque σ est intérieure, $m=\mathrm{rang}(\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}})$.

Démonstration. Cela résulte de 2.15 et 2.20. ∎

2.23. Systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{nc}.
1) Soit $\mathcal{T}$ l'*application translation* de la réalisation standard de $\mathfrak{g}''$, cf. [4; 1.6], [1] ou [19]. Il existe $\epsilon\in\{-1,1\}$ tel que $\sigma\mathcal{T}\sigma=\epsilon\mathcal{T}$, cf. [4; 2.3] (on notera que d'après [4; 2.13] cet ϵ est le ϵ^k de [4]). On suppose que $\mathfrak{g}$ est de type Aff k et on pose $k'=ppcm(2,k)$. Soit δ la plus petite racine imaginaire positive de $\Delta=\Delta(\mathfrak{g},{}^c\mathfrak{h})$. On rappelle que $\Delta\cup\{0\}$, Δ^{re}, $\Delta_u\cup\{0\}$ et Δ_u^{re} ($=\Delta_c\cup\Delta_{nc}$) sont invariants par translation par $k\delta$, puisque σ fixe δ, cf. 1.12.2 et 2.4. L'action de $\mathcal{T}$ sur les espaces radiciels de $\mathfrak{g}''$ induit la translation par $k\delta$ sur $\Delta\cup\{0\}$, i.e. $\mathcal{T}\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}_{\alpha+k\delta}$.
2) Une réflexion r_α du groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g},{}^c\mathfrak{h})$ admet un représentant m_α dans $N^{\omega'}\subset U$, cf. [1; 4.6]; pour un générateur r_i de W c'est :

$$m_{\alpha_i}=\exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i)=\exp(-f_i)\exp(e_i)\exp(-f_i),\ \ \forall i\in I.$$

De plus, si $\alpha\in\Delta_c$, $m_\alpha\in N_K$ et si $\alpha\in\Delta_{nc}$, on a $\sigma m_\alpha\sigma=m_\alpha\exp[i\pi\check{\alpha}]$.
3) Soit $(p_i)_{i\in I}$ une base de ${}^c\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ duale de $\Pi=(\alpha_i)_{i\in I}$. L'ensemble d'indices I est de la forme $\{0,1,...,N\}$ et il existe $d\in{}^c\mathfrak{h}$ (unique modulo le centre) dont l'image dans ${}^c\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ est p_0, cf. [10] ou [4]. On a $\delta(d)=1$ et, pour tout $M\geq 0$, l'ensemble $\mathcal{D}_M=\{\alpha\in\Delta;|\langle\alpha,d\rangle|\leq M\}$ est fini.

Lemme 2.24.
1) Si $\epsilon=1$, alors $\Delta_c+k\delta=\Delta_c$ et $\Delta_{nc}+k\delta=\Delta_{nc}$.
2) Si $\epsilon=-1$, alors $\Delta_c+k\delta=\Delta_{nc}$ et $\Delta_{nc}+k\delta=\Delta_c$.
Conséquence. Si $k=2$, alors $\epsilon=1$, d'après [4; 2.13]; donc dans tous les cas Δ_c et Δ_{nc} sont invariants par translation par $k'\delta$ et σ commute à $\mathcal{T}^{\frac{k'}{k}}$.

Démonstration. On a $\mathfrak{g}_{\alpha+k\delta}=\mathcal{T}\mathfrak{g}_\alpha$ et $\sigma\mathcal{T}\sigma=\epsilon\mathcal{T}$. D'où le résultat. ∎

Lemme 2.25. *Soit $\alpha\in\Delta_{nc}$.*
1) Si $\epsilon=1$, alors $t_{k\alpha}:=r_\alpha r_{k\delta-\alpha}$ est dans $W_{\tilde{K}}$ et $(t_{k\alpha})^2=t_{2k\alpha}$ est dans W_K.
2) Si $\epsilon=-1$, alors $r_{k\delta+\alpha}$ et $r_{k\delta-\alpha}$ sont dans W_K.

Remarques. 1) Si $\epsilon=1$, alors $t_{k\alpha}(\beta)=\beta+\langle\beta,\check{\alpha}\rangle k\delta,\ \forall\beta\in Q$. En particulier $t_{k\alpha}(\alpha)=\alpha+2k\delta$.
2) Si $\epsilon=-1$, alors $k\neq 2$, donc $k'=2k$ et $t_{k'\alpha}:=r_{k\delta+\alpha}r_{k\delta-\alpha}\in W_K$.
De plus, $t_{k'\alpha}(\beta)=\beta+\langle\beta,\check{\alpha}\rangle k'\delta,\ \forall\beta\in Q$; $t_{k'\alpha}(\alpha)=\alpha+2k'\delta$ et $r_{k\delta\pm\alpha}(\alpha)=-(\alpha\pm k'\delta)$.
3) Si $\epsilon=1$ et si $\alpha\pm r\delta\in\Delta_{nc}$ (pour un $r\in\mathbb{N}$), alors les parties 1) du lemme et de cette remarque sont encore vraies en remplaçant k par r (voir la démonstration ci-dessous).

Démonstration. Si $\epsilon=1$, $\alpha\pm k\delta\in\Delta_{nc}$, cf. 2.24. On a $(\alpha\pm k\delta)\check{}=\check{\alpha}$ modulo le centre et donc σ commute à $t_{k\alpha}$, cf. 2.23.2. Il existe $n=m_\alpha m_{k\delta-\alpha}\in$

$N^{\omega'}$ tel que $t_{k\alpha} = \mathrm{Ad}(n)$. Ainsi $\gamma_\sigma = n^{-1}\sigma(n)$ est un 1-cocycle de $\{1, \sigma\}$ dans $Z^{\omega'}$, où Z est le centre de G. Comme $H^1(\{1,\sigma\}, Z^{\omega'})$ est un groupe commutatif annulé par $|\sigma| = 2$, le 1-cocycle γ_σ^2 est un 1-cobord et donc, en modifiant n^2 par $Z^{\omega'}$, on peut supposer que $n^2 \in K$. D'où 1).
Si $\epsilon = -1$, $\alpha \pm k\delta \in \Delta_c$, cf. 2.24; d'où 2) d'après 2.23.2. ∎

Lemme 2.26. *Soit* $\alpha \in \Delta_{nc}$.
1) Si $\epsilon = 1$, *il existe* $w_\alpha \in W_{\tilde{K}}$ *(resp.* W_K*) tel que* $w_\alpha(\alpha) \in \mathcal{D}_k$ *(resp.* $\mathcal{D}_{2k}$*) cf. 2.23.3.*
2) Si $\epsilon = -1$, *il existe* $w_\alpha \in W_K$ *tel que* $w_\alpha(\alpha) \in \mathcal{D}_{k'} = \mathcal{D}_{2k}$.

Démonstration. Si $\epsilon = 1$, d'après le lemme 2.25, $t_{2k\alpha}$ (resp. $t_{k\alpha}$) est dans W_K (resp. $W_{\tilde{K}}$) et agit sur α par translation par $4k\delta$ (resp. $2k\delta$). En faisant agir $t_{2k\alpha}$ (ou $t_{k\alpha}$ dans le premier cas) , on peut ramener α dans $\mathcal{D}_{2k}$ (ou $\mathcal{D}_k$). Si $\epsilon = -1$, on a le résultat avec $w_\alpha = t_{k'\alpha} \in W_K$. ∎

Proposition 2.27. *Soit* ϕ *un système de racines fortement orthogonales de* Δ_{nc}. *Alors il existe* $w_\phi \in W_K$ *tel que* $w_\phi(\phi)$ *soit contenu dans* $\mathcal{D}_{2k}$.

Conséquence. Il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{nc}, modulo $\mathcal{R}$, sous W_{K^*}, $W_{\tilde{K}}$ ou W_K.

Démonstration. Si α et β sont deux racines fortement orthogonales, alors α et $\beta \pm k\delta$ le sont aussi. D'après 2.26, il existe, pour toute racine $\alpha \in \phi$, un élément $w_\alpha \in W_K$ tel que $w_\alpha(\alpha) \in \mathcal{D}_{2k}$. Ainsi, le produit commutatif $w_\phi = \prod_{\alpha\in\phi} w_\alpha$ envoie ϕ dans $\mathcal{D}_{2k}$ qui est fini. ∎

Théorème 2.28. (seconde partie du théorème B). *Il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan* Γ*-stables de* $\mathfrak{g}$ *sous* K^*, $\tilde{K}$ *ou* K.

Démonstration. Cela résulte de 2.21 et 2.27. ∎

2.29. Sous-algèbres toriques déployées de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

1) Toute sous-algèbre torique déployée $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, cf. [4; 4.2]. D'après 2.3, on peut supposer, quitte à conjuguer par $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$, que $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ est stable par σ. Ainsi, $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est contenue dans $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^- \oplus i\mathbb{R}c$, cf. [4; 4.4]. En particulier, $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est contenue dans $\mathfrak{g}'_\mathbb{R}$ (cf. [4; 4.3]) et est stable par σ si elle contient le centre. Si de plus $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est une sous-algèbre torique déployée maximale, alors $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée et on a $\mathfrak{a}_\mathbb{R}^- = \mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$ et $\mathfrak{a}_\mathbb{R}^+ = i\mathbb{R}c$. Ainsi, la sous-algèbre torique déployée maximale σ-stable $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est entièrement déterminée par $\mathfrak{a}_\mathbb{R}^-$ ou $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

2) Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$. A l'aide d'une réalisation adaptée à σ, cf. [4; 3.5], on voit facilement, puisque $\mathfrak{h}^- \subset \mathfrak{h}'$, que le centralisateur ${}^a\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}^-)$ de $\mathfrak{h}^-$ dans $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre réductive-affine $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$. Soit $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, alors $\alpha(\mathfrak{h}^-) = 0$ si et seulement si $\sigma(\alpha) = \alpha$. Ainsi ${}^a\mathfrak{z} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\sigma\alpha=\alpha} \mathfrak{g}_\alpha)$. Le sous-groupe ${}^aZ$ de G engendré par les V_α pour $\alpha \in \Delta_{re}^\sigma$, conjugue les sous-algèbres de Cartan $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-diagonalisables de ${}^a\mathfrak{z}$. Les sous-algèbres de

Cartan ω'-stables de ${}^a\mathfrak{z}$ sont conjuguées par ${}^aZ^{\omega'} = {}^aZ \cap U \subset Z_U(\mathfrak{h}^-)$, cf. [18; 4.4] ou Proposition 2.8 ci-dessus.
3) Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée $\Gamma-$stable, toute racine réelle α nulle sur $\mathfrak{h}^-$ est compacte (d'après le raisonnement de 2.19). Ainsi ${}^aZ^{\omega'} = {}^aZ \cap K \subset Z_K(\mathfrak{h}^-)$. Les sous-algèbres de Cartan maximalement déployées Γ-stables de $\mathfrak{g}$ contenant la sous-algèbre torique déployée maximale $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^- \oplus i\mathbb{R}c$ sont contenues dans ${}^a\mathfrak{z}$ et donc elles sont conjuguées par $Z_K(\mathfrak{h}^-) = Z_K(\mathfrak{h}^- \oplus i\mathbb{R}c)$. Enfin, notons qu'une sous-algèbre de Cartan σ'-stable de ${}^a\mathfrak{z}$ est $\Gamma-$stable.

Proposition 2.30. *Toute sous-algèbre torique déployée maximale σ-stable $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée $\Gamma-$stable $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. De plus $\mathfrak{h}$ est unique à conjugaison près par $Z_K(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre torique déployée σ-stable, elle est contenue dans une sous-algèbre de Cartan ω'-stable ${}^1\mathfrak{h}$ [4; 4.2] et donc dans ${}^1\mathfrak{h}'$. L'algèbre ${}^a\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})$ est réductive-affine (cf. 2.5) de centre contenant $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ et $\Gamma-$stable; son radical $\mathfrak{g}_0$ est contenu dans $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}({}^1\mathfrak{h}')$. Il est clair que la restriction de ω' à chacun des facteurs $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_k$ de ${}^a\mathfrak{z}$ est une semi-involution de Cartan. D'après 2.3, il existe une sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable $\mathfrak{h}'_i$ dans chaque $\mathfrak{g}'_i$ stable par σ; si $\sigma(\mathfrak{g}'_i) = \mathfrak{g}'_j$, on choisit les sous-algèbres de Cartan σ'-stables $\mathfrak{h}'_i$ et $\mathfrak{h}'_j$ telles que $\sigma(\mathfrak{h}'_i) = \mathfrak{h}'_j$; enfin on note $\mathfrak{h}'_0$ la seule sous-algèbre de Cartan $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable de $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}'$ (1.14). Alors $\mathfrak{h}'_0, \mathfrak{h}'_1, \cdots, \mathfrak{h}'_k$ engendrent une sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable $\mathfrak{h}'$ de ${}^a\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}'$ et donc de $\mathfrak{g}'$. D'après 1.15 $\mathfrak{h}'$ est contenue dans une unique sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est donc $\Gamma-$stable; de plus $\mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ et est donc une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée si $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre torique déployée maximale. La dernière assertion de la proposition résulte de 2.29. ■

Proposition 2.31. *Soient $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ deux sous-algèbres toriques déployées maximales σ-stables de $\mathfrak{g}$; alors $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ sont conjuguées par* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ *ou* $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ *(resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$) si et seulement si elles le sont par K^* (resp. $\tilde{K}$).*

Démonstration. Les conditions suffisantes étant claires, on montre les conditions nécessaires. Soit $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ tel que $u(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$; d'après 2.29.1 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ sont dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$, on peut donc supposer $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ (cf. 1.12.5). Soit ${}^a\mathfrak{h}$ (resp. ${}^t\mathfrak{h}$) une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée Γ-stable contenant $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$), cf. 2.30. La sous-algèbre de Cartan $u({}^a\mathfrak{h})$ est σ'-stable et contient $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$, donc elle est stable par Γ, cf. 2.29.3. D'après 2.30, on peut supposer, en conjuguant encore par $Z_K(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})$, que $u({}^a\mathfrak{h}) = {}^t\mathfrak{h}$. D'après 2.10, il existe k dans K^* ou $\tilde{K}$ tel que $k({}^a\mathfrak{h}) = {}^t\mathfrak{h}$ et donc $k(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$. ■

Corollaire 2.32.
1) Les classes de conjugaison sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ *ou* $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ *des sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ correspondent bijectivement aux classes de conjugaison sous K^* des sous-algèbres toriques déployées maximales σ-stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.*
2) L'ensemble des classes de conjugaison sous $\tilde{K}$ des sous-algèbres toriques déployées maximales σ-stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ s'identifie à un sous-ensemble de l'ensemble

des classes de conjugaison sous $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ des sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Cela résulte de 2.29.1 et 2.31. ∎

Remarque . Dans la suite, on ne considère que des sous-algèbres toriques déployées maximales σ-stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.33. *Les classes de conjugaison des sous-algèbres toriques déployées maximales σ-stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous K^* (resp. $\tilde{K}$, K) correspondent bijectivement à celles des sous-algèbres de Cartan maximalement déployées Γ-stables de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Cela résulte de 2.29 et 2.30. ∎

Corollaire 2.34. *Les classes de conjugaison sous K^* (resp. $\tilde{K}$, K) des sous-algèbres toriques déployées maximales σ-stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ correspondent bijectivement aux classes de conjugaison sous W_{K^*} (resp. $W_{\tilde{K}}$, W_K) des systèmes de racines fortement orthogonales de rang maximal de Δ_{nc} modulo $\mathcal{R}$. En particulier il n'y en a qu'un nombre fini.*

Démonstration. Cela résulte de 2.33, 2.22 et 2.28. ∎

Proposition 2.35. *Soient $\mathfrak{t}_1^+$ et $\mathfrak{t}_2^+$ deux sous-espaces admissibles de dimension minimale. Alors $\mathfrak{t}_1^+ \cap {}^c\mathfrak{h}' = \mathfrak{t}_2^+ \cap {}^c\mathfrak{h}'$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan maximalement déployée Γ-stable de $\mathfrak{g}$; alors $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^-$ est une sous-algèbre torique déployée maximale σ-stable de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ (on identifie $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^-$ avec son image dans $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$). Ainsi, il y a une description de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^-$ et donc de $(\mathfrak{h}^+)''$ à l'intérieur de $\mathfrak{h}'' = \mathfrak{h}'/\mathbb{C}c$ entièrement en termes de racines et de diagramme de Tits (cf. [4; 4.6 et 6.8]). La description est la même dans toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}''$ contenant $(\mathfrak{h}^+)''$, car toutes ces sous-algèbres de Cartan sont conjuguées dans l'algèbre réductive $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}((\mathfrak{h}^+)'')$ (2.4.3). En particulier, $(\mathfrak{t}_1^+)'' = (\mathfrak{t}_2^+)''$ et donc $(\mathfrak{t}_1^+)' = (\mathfrak{t}_2^+)' = \mathfrak{t}_i^+ \cap {}^c\mathfrak{h}'$, $i = 1, 2$, puisque $(\mathfrak{t}_i^+)'$ contient le centre. ∎

Remarque 2.36. Cette proposition, largement indépendante de ce qui précède, est le point de départ d'une autre méthode (moins performante) de détermination des classes de conjugaison de sous-algèbres toriques déployées maximales, c'est-à-dire de sous-espaces admissibles de dimension minimale: il suffit d'étudier les complémentaires possibles (de dimension 1) de $\mathfrak{t}^+ \cap {}^c\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{t}^+$. Pour cela, en considérant le centralisateur de $\mathfrak{t}^+ \cap {}^c\mathfrak{h}'$, on se ramène au cas où $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est "presque compacte maximalement déployée", c'est-à-dire que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ a une sous-algèbre torique déployée maximale $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ contenue dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}'$.

Corollaire 2.37. *Pour $\alpha \in \Delta$, on note α' sa restriction à ${}^c\mathfrak{h}'$.*
Soient ϕ et ψ deux systèmes de racines fortement orthogonales de rang maximal de Δ_{nc}; alors :

$$\sum_{\alpha\in\phi} \mathbb{C}\alpha' = \sum_{\beta\in\psi} \mathbb{C}\beta'.$$

Démonstration. Cela résulte de 2.19; 2.22 et 2.35. ∎

3. Etude de quelques exemples.

On va utiliser librement dans ce dernier paragraphe des réalisations comme algèbres de lacets des algèbres de Kac-Moody affines ainsi qu'un certain nombre de notations de [4].

3.1. Les trois formes réelles presque compactes non compactes de $A_1^{(1)}$. On considère l'algèbre de Kac-Moody affine non tordue de type $A_1^{(1)}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

l'élément c est central et $d = t\frac{d}{dt}$. D'après la table de [4; §6], il existe trois classes de conjugaison de formes réelles presque compactes non compactes de $\mathfrak{g}$ correspondant aux trois semi-involutions de seconde espèce $\sigma_i' = \sigma_i\omega'$, $i = 1, 2, 3$, où ω' est la semi-involution de Cartan standard :

$$\omega'\left(\begin{pmatrix} P(t) & Q(t) \\ R(t) & -P(t) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\bar{P}(t^{-1}) & -\bar{R}(t^{-1}) \\ -\bar{Q}(t^{-1}) & \bar{P}(t^{-1}) \end{pmatrix} \quad \text{et } (-\omega') \text{ fixe } c \text{ et } d$$

et les σ_i les involutions de Cartan qui figurent dans la deuxième colonne de la table de [4] et seront rappelées ci-dessous.

Notons que pour ces trois formes, la sous-algèbre de Cartan standard :

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

est $\Gamma-$stable et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est maximalement compacte. L'ensemble des racines réelles de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est $\Delta^{re} = \{\pm\alpha + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $(\alpha_0 = \delta - \alpha, \alpha_1 = \alpha)$ est une base de racines de Δ; d'où le diagramme de Dynkin associé à $\mathfrak{g}$:

$$0 \bullet\!\Longleftrightarrow\!\bullet\ 1$$

On va déterminer, pour chacune de ces trois formes, les classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire celles des systèmes de racines réelles non compactes fortement orthogonales de Δ, modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, cf. Théorème 2.21. On rappelle que le système vide correspond à la classe de la sous-algèbre de Cartan maximalement compacte standard $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

1) La forme réelle associée à $\sigma_1' = \mathring{\tau}_1\ \omega'$: L'involution de Cartan $\sigma_1 = \mathring{\tau}_1 = \tau_0\tau_1$ agit sur $\mathfrak{g}$ par la conjugaison par $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ et fixe c et d. En particulier σ_1 commute à l'application translation $\mathcal{T}$. Ainsi, on a $\Delta_{nc} = \Delta^{re} = \{\pm\alpha + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et le rang maximal d'un système de racines non compactes fortement orthogonales est égal à 1. Pour toute racine réelle β, on a $\mathrm{Ad}(\exp(i\pi\beta^\vee)) = 1$. Ainsi, le groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ admet des représentants dans $\tilde{K}$, cf. 2.23.2. En conjuguant par $W = W_{\tilde{K}}$ on peut ramener toute racine réelle à α_0 ou α_1 (qui ne sont pas conjuguées par W). Il existe donc deux classes de conjugaison, sous $W_{\tilde{K}}$, de systèmes (de rang 1) de racines non compactes fortement orthogonales modulo $\mathcal{R}$ (à savoir la classe de α_0 et celle de α_1 qui sont échangées par l'automorphisme de diagramme involutif de $A_1^{(1)}$). Il y a donc une seule classe sous W_{K^*}, deux classes sous $W_{\tilde{K}}$ et au plus quatre classes sous W_K (car la translation par 4δ est dans W_K, cf. Lemme 2.25).

Remarque . La classe de conjugaison (sous K, $\tilde{K}$ ou K^*) de la sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable associée à la classe d'une racine non compacte $\alpha+n\delta$ (sous W_K, $W_{\tilde{K}}$ ou W_{K^*}) est celle de

$$\mathfrak{h}_n := C_{\alpha+n\delta}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & t^n \\ -t^{-n} & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}(d - \frac{n}{2}\check{\alpha})$$

qui est donc maximalement déployée pour σ'_1. D'après ce que l'on vient de voir et la proposition 2.33 (voir aussi le corollaire 2.34) il y a donc une seule classe de conjugaison de sous-algèbres toriques déployées maximales $\Gamma-$stables sous K^*, deux classes sous $\tilde{K}$ et au plus quatre classes sous K.

D'après 2.32, il y a une seule classe de conjugaison de sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'_1}$ ou $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'_1}$ et au moins deux classes sous $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ (i.e. sous $\mathrm{Ad}(G)^{\sigma'_1}$).

Dans [4; 4.9.2] on montre que, puisqu'ici $\epsilon = 1$, il y a plus d'une classe de conjugaison sous $SL_2(\mathbb{A}_1)$ de sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ (ou de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, cf. [4; 4.5]). Or G est une extension centrale de $SL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ d'après [17]; donc $\mathrm{Ad}(G_{\mathbb{R}}) \subset \mathrm{Ad}(SL_2(\mathbb{A}_1)) \subset \mathrm{Ad}(\tilde{G}_{\mathbb{R}}) = \mathrm{Ad}(G)^{\sigma'_1}$. Ce résultat de non-conjugaison est donc une conséquence de celui obtenu ci-dessus.

2) La forme réelle associée à $\sigma'_2 = \tau_0\omega'$: L'involution de Cartan $\sigma_2 = \tau_0 = \exp(\mathrm{ad} i\pi d)$ agit sur $\mathfrak{g}$ par : $M(t) \mapsto M(-t)$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ et fixe c et d. En particulier $\sigma_2\mathcal{T}\sigma_2 = -\mathcal{T}$. Dans ce cas, on a $\Delta_{nc} = \{\pm\alpha+(2n+1)\delta;\ n\in\mathbb{Z}\}$ et le rang maximal d'un système de racines non compactes fortement orthogonales est égal à 1. Les réflexions r_α et $r_{2\delta-\alpha}$ sont dans W_K (cf. Lemme 2.25.2). De plus $r_\alpha(\delta-\alpha) = \alpha+\delta$ et $r_{2\delta-\alpha}(\delta-\alpha) = \alpha-3\delta$. Il en résulte que toute racine réelle non compacte est, au signe près, conjuguée par W_K à $\alpha_0 = \delta-\alpha$. Il y a donc une seule classe de conjugaison de sous-algèbres de Cartan maximalement déployées (ou de sous-algèbres toriques déployées maximales) $\Gamma-$stables sous K (et donc K^* ou $\tilde{K}$).

Ainsi il y a une seule classe de conjugaison de sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'_2}$ ou $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'_2}$. Le résultat de [4; 4.9.2] pour $\epsilon = -1$ est un peu plus précis.

3) La forme réelle associée à $\sigma'_3 = \rho\omega'$: L'involution de Cartan $\sigma_3 = \rho$ est l'automorphisme de diagramme échangeant les deux sommets 0 et 1 du diagramme de Dynkin. L'action de ρ sur $\mathfrak{g}$ est donnée par : $M \mapsto -T({}^tM)T^{-1}$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, avec $T = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, ρ fixe c et échange d et $d+\frac{\check{\alpha}}{2}$ modulo le centre de $\mathfrak{g}$. Cette action est donc canonique sur $\mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}/\mathbb{C}c$, mais elle ne l'est pas sur $\mathfrak{g}$ (cf. 1.4). L'involution ρ ne fixe aucune racine réelle et donc Δ_{nc} est vide. Les sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$ sont donc conjuguées par K (en fait, le groupe K est "trop petit" et il n'existe qu'une seule sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$).

Toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont maximalement déployées et maximalement compactes; elles sont conjuguées entre elles par $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'_3}$ ou $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'_3}$. Toutes les sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont conjuguées entre elles par $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma'_3}$ ou $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'_3}$.

3.2. Les deux formes réelles presque compactes non compactes de $A_2^{(2)}$. On considère l'algèbre de Kac-Moody affine tordue $\mathfrak{g}$ de type $A_2^{(2)}$:

$$0 \;\bullet\!\!\Longrightarrow\!\!\bullet\; 1$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est réalisée comme étant la sous-algèbre des points fixes de l'algèbre de Kac-Moody non tordue de type $A_2^{(1)}$:

$$\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

sous l'action de l'automorphisme involutif $\tilde{\rho}$ fixant c et d et agissant sur l'algèbre de lacets $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ par :

$$M(t) \mapsto -T[\,{}^tM(-t)]T^{-1}, \quad \text{avec } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}).$$

D'après la table de [4; §6], il existe deux classes de conjugaison de formes réelles presque compactes non compactes de $\mathfrak{g}$ correspondant aux deux semi-involutions de seconde espèce $\sigma_i' = \sigma_i\omega'$, $i = 1,2$, où ω' est la semi-involution de Cartan standard (donnée sur $\mathfrak{g}^1$ par une formule analogue à celle de 3.1) et les σ_i les involutions de Cartan figurant dans la deuxième colonne de la table de [4].

1) La forme réelle associée à $\sigma_1' = \tau_1\omega'$: L'involution de Cartan $\sigma_1 = \tau_1 = \bar{\tau}_1$ fixe point par point la sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ (qui est maximalement compacte pour σ_1') et agit sur $\mathfrak{g}$ de sorte que la racine simple α_0 est compacte et α_1 est non compacte. Avec la réalisation de $\mathfrak{g}$ introduite ci-dessus, l'involution τ_1 agit également sur $\mathfrak{g}^1$ en commutant à $\tilde{\rho}$, elle fixe c et d et agit sur $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ par la conjugaison par $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
En particulier σ_1 commute à l'application translation $\mathcal{T}$ de $\mathfrak{g}$. Dans ce cas, on a $\Delta_{nc} = \{\pm\alpha_1 + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\}$ (c'est l'ensemble des racines réelles courtes) et le rang maximal d'un système de racines non compactes fortement orthogonales est égal à 1. Le groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ admet des représentants dans $\tilde{K}$ (car α_0 est compacte et $\mathrm{Ad}(\exp(i\pi\check{\alpha_1})) = 1$, cf. 2.23.2). Toute racine compacte (resp. non compacte) est conjuguée par $W = W_{\tilde{K}}$ à α_0 (resp. α_1). Il existe donc une seule orbite, sous $W_{\tilde{K}}$, de racines non compactes et au plus deux orbites, sous W_K modulo la relation $\mathcal{R}$, qui sont celles de α_1 et $2\delta - \alpha_1$ (cf. 2.25.3).
Ainsi il y a une seule classe de conjugaison de sous-algèbres toriques déployées maximales σ_1-stables de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sous K^* ou $\tilde{K}$ et au plus 2 classes de conjugaison sous K. Il y a une seule classe de conjugaison de sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sous $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma_1'}$ ou $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma_1'}$.

2) La forme réelle associée à $\sigma_2' = \tau_0\omega'$: L'involution de Cartan $\sigma_2 = \tau_0 = \exp(\mathrm{ad} i\pi d)$ agit sur $\mathfrak{g}$ (et $\mathfrak{g}^1$) par : $M(t) \mapsto M(-t)$ sur $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ et fixe c et d. En particulier σ_2 commute à l'application translation $\mathcal{T}$ de $\mathfrak{g}$. Dans ce cas, on a $\Delta_{nc} = \{\pm\alpha_1 + (2n+1)\delta;\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm 2\alpha_1 + (2n+1)\delta;\ n \in \mathbb{Z}\} = \{$ racines non compactes courtes$\} \cup \{$ racines non compactes longues$\}$ et le rang

maximal d'un système de racines non compactes fortement orthogonales est égal à 1. Le groupe de Weyl W (et donc W_K, $W_{\tilde{K}}$ ou W_{K^*}) permute les racines réelles en conservant la longueur, donc il existe au moins deux orbites de racines non compactes sous ces groupes. D'après la proposition 2.27 et le lemme 2.26 il suffit de considérer les classes, sous W_K (resp. $W_{\tilde{K}}$) de racines non compactes qui sont dans $\mathcal{D}_4$ (resp. $\mathcal{D}_2$). On voit alors facilement, en faisant agir le sous-groupe de W_K engendré par les reflexions r_{α_1} et $r_{2\delta-\alpha_1}$, qu'il existe une seule classe, sous W_K et modulo la relation $\mathcal{R}$, de racines courtes non compactes (c'est celle de $\delta-\alpha_1$). Quant aux racines longues non compactes, il existe une seule classe, sous $W_{\tilde{K}}$ et modulo la relation $\mathcal{R}$, c'est celle de $\alpha_0=\delta-2\alpha_1$, et au plus deux classes sous W_K et modulo $\mathcal{R}$ (celles de $\delta-2\alpha_1$ et $3\delta-2\alpha_1$).

Il y a donc deux classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan maximalement déployées (ou de sous-algèbres toriques déployées maximales) $\Gamma-$stables sous $\tilde{K}$ ou K^*. Et il existe exactement 2 classes de conjugaison de sous-algèbres toriques déployées maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')^{\sigma_2'}$ ou $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma_2'}$.

Références

[1] Back-Valente, V., N. Bardy-Panse, H. Ben Messaoud et G. Rousseau, *Formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody, Classification et racines relatives*, J. of Algebra **171** (1995), 43–96.

[2] Bausch, J., *Etude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines*, Revue de l'Institut Elie Cartan, Nancy **11** (1988), 5–124.

[3] —, *Automorphismes des algèbres de Kac-Moody affines*, C. R. Acad. Sci. Paris **302** (1986), 409–412.

[4] Ben Messaoud, H., et G. Rousseau, *Classification des formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines*, J. of Algebra **267** (2003), 443–513. Coquilles corrigées dans J. of Algebra **279** (2004), 850–851.

[5] Ben Messaoud, H., et G. Rousseau, *Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Kac-Moody réelles presque déployées*, à paraître au J. Math. Soc. Japan.

[6] Bruhat, F., et J. Tits, *Groupes algébriques sur un corps local III, compléments et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 671–698.

[7] Carmona, J., *Les sous-algèbres de Cartan réelles et la frontière d'une orbite ouverte dans une variété de drapeaux*, Manuscripta math. **10** (1973), 1–33.

[8] Harish-Chandra, *The characters of semisimple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 98–163.

[9] Henneaux, M., et B. Julia, *Hyperbolic billiards of pure $D=4$ supergravities*, J. High Energy Physics JHEP **05** (2003), 47.

[10] Kac, V. G., "Infinite dimensional Lie algebras," 3rd Edition, Cambridge University Press, 1990.

[11] Knapp, A. W., "Lie groups beyond an introduction," 2nd Edition. Prog. in Math., **140**, Birkhäuser Verlag, 2002.

[12] Kostant, B., *On the conjugacy of real Cartan subalgebras*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **41** (1955), 967–970.

[13] Kac, V. G., et D. H. Peterson, *Defining relations of certain infinite dimensional groups*, "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui," Lyon 1984, Astérisque n^o hors série (1985), 165–208.

[14] —, *On geometric invariant Theory of infinite dimensional groups*, in: "Algebraic groups," Utrecht 1986, Springer Lecture Notes in Math. **1271** (1987), 109–142.

[15] Kac, V. G., and S. P. Wang, *On automorphisms of Kac-Moody algebras and groups*, Advances in Math. **92** (1992), 129–195.

[16] Levstein, F., *A classification of involutive automorphisms of an affine Kac-Moody Lie algebra*, J. of Algebra **114** (1988), 489–518.

[17] Peterson, D. H., and V. G. Kac, *Infinite flag varieties and conjugacy theorems*, Proc. Natl. Acad. Sc. USA **80** (1983), 1778–1782.

[18] Rousseau, G., *Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines*, Revue de l'Institut Elie Cartan, Nancy **11** (1988), 175–205.

[19] —, *Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines*, in: "Harmonic Analysis," Luxembourg 1987, Springer Lecture Notes in Math. **1359** (1988), 252–264.

[20] —, *Almost split K-forms of Kac-Moody Algebras*, in: "Infinite dimensional Lie algebras and groups," Marseille (1988), V. G. Kac, Ed., Adv. Ser. in Math. Physics **7**, World Scientific (1989), 70–85.

[21] —, *On forms of Kac-Moody algebras*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **56** (1994), 393–399.

[22] Sugiura, M., *Conjugate classes of Cartan Subalgebras in real semi-simple algebras*, J. of the Math. Soc. of Japan **11** (1959), 374–434. Corrections in J. of the Math. Soc. of Japan **23** (1971), 379–383.

[23] Warner, G., "Harmonic Analysis on Semi-Simple Groups, I," Grundlehren. Math. Wiss. **188**, Springer-Verlag Berlin, 1972.

Hechmi Ben Messaoud
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Monastir
5019 Monastir. Tunisie.
Hechmi.BenMessaoud@fsm.rnu.tn

Guy Rousseau
Institut Elie Cartan UMR 7502
Nancy-Université, CNRS, INRIA
B.P 239
54506 Vandœuvre lès Nancy. France.
rousseau@iecn.u-nancy.fr

Received March 14, 2005
and in final form June 20, 2006