Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Kac-Moody réelles presque déployées

par

Hechmi Ben Messaoud et Guy Rousseau

Abstract. *The classification of almost split real forms of symmetrizable Kac-Moody Lie algebras is a rather straightforward infinite-dimensional generalization of the classification of real semi-simple Lie algebras in terms of the Tits index [J. of Algebra 171, 43-96 (1995)]. We study here the conjugate classes of their Cartan subalgebras under the adjoint groups or the full automorphism groups. Maximally split Cartan subalgebras of an almost split real Kac-Moody Lie algebra are mutually conjugate and one can generalize the Sugiura classification (given for real semi-simple Lie algebras) by comparing any Cartan subalgebra to a standard maximally split one. As in the classical case, we prove that the number of conjugate classes of Cartan subalgebras is always finite.*

Introduction. Les formes réelles des algèbres de Kac-Moody complexes généralisent les algèbres de Lie semi-simples réelles. Outre leur intérêt mathématique, ces formes ont des applications diverses en Physique Théorique. La non-conjugaison des sous-algèbres de Borel des algèbres de Kac-Moody fait apparaître, dans le cas indécomposable, deux types de formes réelles : les formes presque déployées et les formes presque compactes. Ces formes ont été étudiées séparément et respectivement dans [Ro1], [Ro3] et [B_3R] pour les algèbres de Kac-Moody symétrisables et dans [Ro2] et [BMR1] pour les algèbres de Kac-Moody affines (voir aussi [Ro5] pour une revue d'ensemble). On s'intéresse ici à l'étude des classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan (en abrégé *SAC*) pour les formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody symétrisables. Le cas des formes presque compactes (des algèbres affines) fait l'objet d'une étude à part [BMR2].

Au paragraphe 1, nous rappelons les résultats généraux sur les algèbres de Kac-Moody complexes, leurs groupes d'automorphismes et leurs formes réelles. Nous y fixons également les notations utilisées dans la suite. Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle presque déployée associée à une semi-involution σ' d'une algèbre de Kac-Moody complexe $\mathfrak{g}$, il existe une semi-involution de Cartan (ou compacte) ω' qui commute à σ' et on a la décomposition de

Classification AMS (2000) :17B67.

Mots clefs: Algèbre de Kac-Moody, sous-algèbre de Cartan, forme réelle presque déployée.

Cartan $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ par rapport à l'involution de Cartan $\sigma = \sigma'\omega'$ (qui est non triviale).

Le groupe commutatif Γ engendré par σ' et ω' agit sur le groupe de Kac-Moody G associé à l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$, sur le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (resp. $Int(\mathfrak{g}) = \tilde{G}$) des automorphismes (resp. des automorphismes intérieurs) de $\mathfrak{g}$ et sur le groupe $G^* = \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce de $\mathfrak{g}'$. On considère les groupes $G_\mathbb{R} = G^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\tilde{G}_\mathbb{R} = \tilde{G}^{\sigma'}$ et ${G^*}_\mathbb{R} = (G^*)^{\sigma'}$ ainsi que $K = G^\Gamma$, $\tilde{K} = \tilde{G}^\Gamma$ et $K^* = (G^*)^\Gamma$ (cf. 1.11). Le couple $(G_\mathbb{R}, K)$ est la généralisation la plus naturelle dans ce cadre de la paire symétrique associée à une algèbre de Lie semi-simple réelle; mais les couples $(\tilde{G}_\mathbb{R}, \tilde{K})$ et $({G^*}_\mathbb{R}, K^*)$ sont a priori (et a posteriori) aussi intéressants.

Au paragraphe 2, on fixe une forme presque déployée $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ d'une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ indécomposable, symétrisable et de dimension infinie. Une sous-algèbre de Cartan (en abrégé SAC) $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ correspond à une sous-algèbre de Cartan $\sigma'-$stable $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$; on montre que cette SAC est conjuguée par $\tilde{G}_\mathbb{R}$ à une SAC $\Gamma-$stable. On obtient ainsi (théorème 2.7) une correspondance bijective entre les classes de conjugaison sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, ou $G^*_\mathbb{R}$ (resp. $\tilde{G}_\mathbb{R}$) des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ et les classes de conjugaison sous K^* (resp. $\tilde{K}$) des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$ (c'est à dire des sous-algèbres de Cartan $\sigma-$stables de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$). Malheureusement, les moyens employés ne permettent pas à cette étape d'obtenir le résultat analogue pour $G_\mathbb{R}$ et K; cela nous conduit à continuer de travailler avec des sous-algèbres de Cartan quelconques de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$. Heureusement si $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ est une SAC de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, il existe une semi-involution de Cartan ω' de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ' et stabilise $\mathfrak{h}$, de plus ω' est unique modulo un automorphisme de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ qui fixe $\mathfrak{h}$ point par point (1.10); la décomposition correspondante $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$ avec $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^- = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \cap \mathfrak{p}$ est donc intrinsèque (1.12); on note $\mathfrak{h}^+$ et $\mathfrak{h}^-$ les sous-espaces complexes engendrés par $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+$ et $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$.

D'après [B$_3$R] on sait que $G_\mathbb{R}$ agit transitivement sur les sous-algèbres toriques déployées maximales ($SATDM$) de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ et aussi sur les sous-algèbres de Cartan maximalement déployées ($SACMD$) de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, qui sont les SAC contenant une $SATDM$ (i.e. telles que $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$ soit maximale). On montre que le groupe K agit transitivement sur les $SACMD$ $\sigma-$stables de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ (proposition 2.6). Comme dans le cas classique [Su], on va comparer toute SAC de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ à l'une de ces $SACMD$ ${}^d\mathfrak{h}$ que l'on fixe (parmi les $SACMD$ $\sigma-$stables).

On montre que, à conjugaison près par $G_\mathbb{R}$ (resp. K), on peut supposer que toute SAC (resp. SAC $\sigma-$stable) $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est *standard relativement à* ${}^d\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ i.e. vérifie $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^- \subset {}^d\mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$, cf. 2.10. De plus la classe de conjugaison sous le groupe $G_\mathbb{R}$ (resp. K, $\tilde{K}$ ou K^*) de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ est en correspondance bijective avec la classe de conjugaison de $\mathfrak{h}^-$ sous le normalisateur de ${}^d\mathfrak{h}$ dans $G_\mathbb{R}$ (resp. K, $\tilde{K}$ ou K^*) et donc sous l'image $W_{G_\mathbb{R}}$ (resp. W_K, $W_{\tilde{K}}$ ou W_{K^*}) de celui-ci dans le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g}, {}^d\mathfrak{h})$ (théorème 2.12). Un sous-espace de ${}^d\mathfrak{h}^-$ est dit *admissible* s'il peut s'écrire sous la forme $\mathfrak{h}^-$ avec une SAC standard $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Le centralisateur dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ d'un sous-espace admissible est une algèbre de Lie réductive réelle (2.8); on peut donc, comme dans le cas classique [Su], caractériser les sous-espaces admissibles de ${}^d\mathfrak{h}^-$ en termes de systèmes de racines réelles "déployées" fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{g}, {}^d\mathfrak{h})$ (proposition 2.15). Puis on montre que les orbites de ces systèmes de racines fortement orthogonales (à l'équivalence $\mathcal{R}$ près de 2.15) sont les mêmes sous $W_{G_\mathbb{R}}$ ou W_K (2.20) et sont en nombre fini (2.21). On obtient donc le théorème suivant, qui résume les théorèmes 2.7, 2.17, 2.20 et 2.22:

Théorème *Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ une forme réelle presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ (indécomposable, symétrisable et de dimension infinie). Les trois ensembles suivants sont finis et en correspondance bijective naturelle:*
- les classes de conjugaison sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ ou $G^*_\mathbb{R}$ (resp. $\tilde{G}_\mathbb{R}$ ou $G_\mathbb{R}$) des SAC de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$,
- les classes de conjugaison sous K^* (resp. $\tilde{K}$ ou K) des SAC σ-stables de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$,
- les classes de conjugaison sous W_{K^*} (resp. $W_{\tilde{K}}$ ou W_K) des systèmes de racines réelles déployées fortement orthogonales modulo $\mathcal{R}$.

Enfin, au paragraphe 3, nous appliquons ces résultats aux 5 formes réelles presque déployées des algèbres affines de type $A_1^{(1)}$ ou $A_2^{(2)}$: il y a 1, 2 ou 3 classes de conjugaison de SAC, selon la forme et le groupe. En particulier la forme réelle déployée de $A_2^{(2)}$ a 3 classes de conjugaison de SAC (que ce soit sous le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ ou sous le groupe $G_\mathbb{R}$), cf. 3.2.1: une classe de conjugaison de sous-algèbres de Cartan maximalement déployées et deux classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan maximalement compactes ($SACMC$ = SAC avec $\mathfrak{h}^+_\mathbb{R}$ maximale). Ainsi la conjugaison des $SACMC$ dans le cas classique [W; 1.3.3.3] ou dans le cas affine presque compact [BMR1], [BMR2] ne se généralise pas au cas presque déployé.

1. Automorphismes et formes réelles des algèbres de Kac-Moody

1.1. On considère une algèbre de Kac-Moody complexe symétrisable $\mathfrak{g}$ que l'on suppose construite comme dans [K] et avec toutes ses composantes de dimension infinie. Pour les résultats standard suivants, on renvoie à [K] et [PK] ou parfois à [KP_1], [KP_2], [Ro2], [Ro3] ou [B_3R]. Il existe une matrice de Cartan généralisée (encore appelée matrice de Kac-Moody) $A = (a_{i,j})_{i,j\in I}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ soit engendrée par l'*algèbre de Cartan standard* $\mathfrak{h}$ et des éléments e_i, f_i pour $i \in I$. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha\big)$, où Δ désigne le système de racines $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$. On note $\Pi = \{\alpha_i, i \in I\}$ la base (standard) de Δ. L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est $\Delta^+ = \Delta \cap \big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{N}\alpha_i\big)$ (resp. $\Delta^- = -\Delta^+$).

Les coracines $\alpha_i^\vee$ dans $\mathfrak{h}$ sont telles que $a_{i,j} = \alpha_j(\alpha_i^\vee)$ pour tout i, j. Le *groupe de Weyl* W de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est engendré par l'ensemble S des réflexions fondamentales r_i définies par $r_i(h) = h - \alpha_i(h)\alpha_i^\vee$ pour $h \in \mathfrak{h}$. Une *racine réelle* est une racine conjuguée par W à une racine dans Π, leur ensemble est noté Δ^{re}. Les éléments de $\Delta^{im} = \Delta \setminus \Delta^{re}$ sont les *racines imaginaires*. Le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{c} = \{h \in \mathfrak{h}; \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Pi\}$, il est contenu dans $\mathfrak{h}' = \underset{i \in I}{\oplus} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$ qui est l'intersection de $\mathfrak{h}$ avec l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$.

1.2. On définit un groupe G (ne dépendant que de l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$) agissant sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Il est engendré par des sous-groupes V_α, pour α racine réelle, chacun isomorphe au groupe additif $\mathfrak{g}_\alpha$ par un isomorphisme exp tel que $\mathrm{Ad} \circ \exp = \exp \circ \mathrm{ad}$. On note V_+ (resp. V_-) le sous-groupe de G engendré par les V_α pour $\alpha \in (\Delta^{re})^+$(resp. $(\Delta^{re})^-$).

Le groupe H associé à la sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}'$ est l'ensemble des $g \in G$ qui agissent sur $\mathfrak{g}_\alpha$ (pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$) par multiplication par un scalaire $\alpha(g)$ dépendant multiplicativement de α (en particulier H fixe $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$). Ainsi, pour $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, on a $h \exp(X) h^{-1} = \exp(\alpha(h)X)$ et donc H normalise V_α, en particulier H normalise V_+ et V_-. On note $B^+ = HV_+$ et $B^- = HV_-$; ce sont les *sous-groupes de Borel standard positif et négatif.*

Soit N le normalisateur de H dans G. Le groupe N/H s'identifie au groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On a les décompositions suivantes du groupe G (cf. [PK] ou [KP1]) :

Décomposition de Bruhat : $G = B^+WB^+ = V_+NV_+$.

Décomposition de Birkhoff : $G = B^-WB^+ = V_-NV_+$.

Dans les deux décompositions, la composante suivant N est unique et tout élément g de G s'écrit de manière unique $g = vnu$, avec $u \in V_+$, $n \in N$ et $v \in V_\pm \cap nV_-n^{-1}$.

1.3. Une *sous-algèbre de Cartan* (*SAC* en abrégé) de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$−diagonalisable (pour des valeurs propres complexes) maximale. Les *SAC* de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par G.

Si $\mathfrak{h}$ est une *SAC* de $\mathfrak{g}$, elle contient le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ et c'est la seule *SAC* de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$. De plus la sous-algèbre $\mathfrak{h}'$ (resp. $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{h}'/\mathfrak{c}$) est une *SAC* de $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$) et toute *SAC* de $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$) est ainsi obtenue. On obtient donc ainsi des bijections entre les ensembles de *SAC* de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$, cf. [BMR2; 1.15].

Une *sous-algèbre de Borel* (*SAB*) de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie complètement résoluble maximale de $\mathfrak{g}$. C'est le cas des sous-algèbres $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha\big)$ [ou $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha\big)$] appelées respectivement sous-algèbre de Borel standard positive ou négative. Ces sous-algèbres de Borel $\mathfrak{b}^+$ et $\mathfrak{b}^-$ ne sont pas conjuguées par G; leurs stabilisateurs respectifs dans G sont les sous-groupes de Borel B^+ et B^-. Les sous-algèbres de Borel conjuguées par G à $\mathfrak{b}^+$(resp. $\mathfrak{b}^-$) sont dites *positives* (resp. *négatives*). Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable, toute *SAB* est positive ou négative. On a la même correspondance que pour les sous-algèbres de Cartan entre les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

Une *sous-algèbre parabolique positive* (resp. *négative*) est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant une sous-algèbre de Borel positive (resp. négative).

Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de $\mathfrak{g}$ agit de manière compatible à Ad sur G et donc transforme deux SAB conjuguées en deux SAB conjuguées; il est dit de *première espèce* (resp. *seconde espèce*) s'il transforme une SAB positive en une SAB positive (resp. négative). Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable, tout automorphisme est de première ou de seconde espèce.

1.4. Automorphismes de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{h}$ la SAC standard de $\mathfrak{g}$. On définit dans [PK] un groupe $\tilde{H}$ qui agit sur G et $\mathfrak{g}$ et qui vérifie $\mathrm{Ad}(\tilde{H}) = \exp \mathrm{ad}(\mathfrak{h})$. L'*involution de Cartan* ω de $\mathfrak{g}$ est définie par $\omega(e_i) = -f_i$, $\omega(f_i) = -e_i$ et $\omega(h) = -h$ pour $h \in \mathfrak{h}$; elle dépend donc du choix de l'épinglage $(\mathfrak{h}, \Pi, (e_i, f_i)_{i\in I})$ de 1.1. Le *groupe des automorphismes intérieurs* de $\mathfrak{g}$ est l'image $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Ad}(\tilde{H} \ltimes G)$ du produit semi-direct de $\tilde{H}$ et G. Son groupe dérivé est le *groupe adjoint* $\mathrm{Ad}(G)$ (noté aussi $\mathrm{Int}'(\mathfrak{g})$ ou $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$) ou groupe des automorphismes intérieurs de l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$. Ces groupes sont intrinsèquement définis par $\mathfrak{g}$ (cf. [Ro2]).

On considère le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des permutations ρ de I telles que $a_{\rho i, \rho j} = a_{i,j}$ pour $i, j \in I$. On en déduit une action fidèle de $\mathrm{Aut}(A)$ sur $\mathfrak{g}'$ en posant $\rho(e_i) = e_{\rho i}$ et $\rho(f_i) = f_{\rho i}$; cette action commute à ω, et $\rho(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$, où $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \oplus \mathbb{C}\check{\alpha_i}$; plus précisément, $\rho(\check{\alpha_i}) = \check{\alpha_{\rho i}}$. D'après [PK], le groupe $\mathrm{Aut}(A) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $(\mathrm{Aut}(A) \ltimes \Omega) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, où Ω désigne le groupe commutatif engendré par les involutions de Cartan des composantes de $\mathfrak{g}$, avec $\Omega = \{1, \omega\}$ dans le cas indécomposable) est le groupe $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce (resp. le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ de tous les automorphismes) de $\mathfrak{g}'$ (ou $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$). On peut prolonger l'action de $\mathrm{Aut}(A)$ de $\mathfrak{h}'$ à $\mathfrak{h}$, et donc de $\mathfrak{g}'$ à $\mathfrak{g}$, par le choix d'un supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$. On peut ainsi considérer $\mathrm{Aut}(A)$ comme un groupe d'automorphismes (dits *de diagramme*) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, commutant à ω et normalisant $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ et Ω, et considérer $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ comme un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$, mais ces définitions ne sont pas intrinsèques (cf. [Ro2]).

Le sous-groupe $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ des *transvections* de $\mathfrak{g}$ (noté $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ dans [KW; 4.20]) est formé des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui induisent l'identité sur $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$); il commute à $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ et ω, et est isomorphe au groupe additif des applications $\mathbb{C}-$linéaires de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{c}$ (cf. [Ro2]). Le groupe des automorphismes (resp. des automorphismes de première espèce) de $\mathfrak{g}$ est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}') \ltimes \mathrm{Tr}$ (resp. $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}') \ltimes \mathrm{Tr}$).

1.5. Automorphismes semi-linéaires.

On note $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont soit $\mathbb{C}$-linéaires soit *semi-linéaires* (ou antilinéaires i.e. $\phi(\lambda x) = \bar{\lambda}\phi(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathfrak{g}$). Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est distingué dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ et d'indice 2. On appelle *semi-involution* de $\mathfrak{g}$ un automorphisme semi-linéaire d'ordre 2. Pour toute semi-involution σ', on a la décomposition en produit semi-direct :

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1, \sigma'\} \ltimes \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Si σ' est une semi-involution de $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, au sens où l'application évidente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes; de plus, σ' est la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On obtient ainsi une correspondance bijective entre semi-involutions et formes réelles. La forme réelle *normale* (ou *déployée*) standard est la sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{g}$ engendrée par les $e_i, f_i, \check{\alpha_i}$, et $\mathfrak{h}''_{\mathbb{R}}$, où $\mathfrak{h}''_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}''$ sur laquelle $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ prend des valeurs réelles. La semi-involution correspondante σ'_n est la *semi-involution normale.*

1.6. Structure de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$.

La semi-involution normale σ'_n commute à Ω et $\mathrm{Aut}(A)$, elle normalise $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ et $Tr(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ mais ne commute pas avec eux. La décomposition suivante de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$) se déduit donc de celle de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$) :

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = (\{1, \sigma'_n\} \times (\Omega \rtimes \mathrm{Aut}(A))) \ltimes \Big(\mathrm{Ad}(G.\tilde{H}) \ltimes Tr\Big).$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}') = (\{1, \sigma'_n\} \times (\Omega \rtimes \mathrm{Aut}(A))) \ltimes \mathrm{Ad}\Big(G.\tilde{H}\Big).$$

Les groupes Ω et $\mathrm{Aut}(A)$ commutent dès que $\mathfrak{g}$ est indécomposable.

On note $\mathrm{Int}_{Tr}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G.\tilde{H}) \ltimes Tr$ le groupe des automorphismes "*presque intérieurs*" et $\mathrm{Ext}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1, \sigma'_n\} \times (\Omega \rtimes \mathrm{Aut}(A))$.

La classe de conjugaison d'un élément ϕ de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ détermine donc un élément ϕ_1 de $\{1, \sigma'_n\}$, un élément Φ de $\mathrm{Aut}(A)$, et une orbite $cl(\phi_2)$ dans Ω. On a $\phi_1 = 1$ (resp. σ'_n) si et seulement si ϕ est linéaire (resp. semi-linéaire). Lorsque $\mathfrak{g}$ est indécomposable, on a $\phi_2 = 1$ (resp. ω) si et seulement si ϕ est de première (resp. seconde) espèce. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est affine et si ϕ est linéaire de première (resp. seconde) espèce, ϕ induit l'identité (resp. moins l'identité) sur $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{g}'}$ et le centre $\mathfrak{c}$.

1.7. Forme bilinéaire invariante.

Le choix fait en 1.4 d'un supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$ permet de définir une forme $(.\,,\,.)$ $\mathbb{C}$-bilinéaire invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ comme dans [K; Chap 2]. Elle est invariante sous l'action de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$.

1.8. Semi-involutions de Cartan.

La *semi-involution de Cartan standard* ω' de $\mathfrak{g}$ est le produit commutatif $\omega' = \omega\sigma'_n = \sigma'_n\omega$. On appelle *semi-involution de Cartan* (SIC) de $\mathfrak{g}$ tout conjugué de ω' par un automorphisme de $\mathfrak{g}$; c'est donc une semi-involution de seconde espèce.

Dans [Ro2], on caractérise comme suit les semi-involutions de Cartan: une semi-involution σ' de $\mathfrak{g}$ est de Cartan si et seulement si il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ stable par σ', et une forme bilinéaire invariante B fixée par σ' (i.e. $B(\sigma'x, \sigma'y) = \bar{B}(x, y)$, $x, y \in \mathfrak{g}$) telles que la forme bilinéaire $B_{\sigma'}$, définie par $B_{\sigma'}(X, Y) = -B(X, \sigma'Y)$, soit hermitienne non dégénérée et définie positive sur la somme $\oplus\mathfrak{g}_\alpha$ des espaces radiciels correspondants (pour ω' la forme B associée est celle choisie en 1.7). L'orthogonal, pour $B_{\sigma'}$, de $\mathfrak{g}'$ est le centre $\mathfrak{c}$ et, si $\mathfrak{g}$ est affine, la forme hermitienne induite sur $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ est définie positive [K; 11.7].

Ces semi-involutions sont aussi appelées *semi-involutions compactes* et les formes réelles correspondantes sont appelées *formes réelles compactes.* D'après ce que l'on vient de dire, toute algèbre de Kac-Moody symétrisable a une forme compacte unique à conjugaison près.

On sait [Ro2; 4.4] que deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ stables par une SIC ω' sont conjuguées par $U = G^{\omega'}$. Ainsi les couples $(\omega', \mathfrak{h})$ formés d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ stable par une SIC ω' sont conjugués.

1.9. Formes réelles presque déployées ou presque compactes.

La forme réelle correspondant à une semi-involution de première espèce ($SI1$) (resp. de seconde espèce ($SI2$)) est dite *presque déployée* (resp. *presque compacte*).

D'après [Ro2; 3.6], toute semi-involution de $\mathfrak{g}$ est conjuguée par $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ à une semi-involution contenue dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$. D'après [KW; 4.39], toute involution de seconde espèce de $\mathfrak{g}$ est conjuguée par Tr à une involution contenue dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$.

Dans la suite de cet article on supposera donc que *toutes les involutions ou semi-involutions qui interviendront seront dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ *ou* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$. Si l'on ne veut pas faire cette restriction, il faudra rajouter le groupe $\mathrm{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ dans les théorèmes de conjugaison qui vont suivre.

Proposition 1.10.

1) Toute semi-involution de $\mathfrak{g}$ *stabilise une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

2) Soit σ' *une semi-involution de* $\mathfrak{g}$ *(dans* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$*). Pour toute sous-algèbre de Cartan* σ'*-stable* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$*, il existe une* SIC θ' *(dans* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$*) stabilisant* $\mathfrak{h}$ *et commutant à* σ'*. De plus* θ' *est unique à conjugaison près par un élément de* $\tilde{H}^{\sigma'}$*, c'est à dire par un automorphisme intérieur de* $\mathfrak{g}$ *qui fixe* $\mathfrak{h}$ *(point par point) et commute à* σ'*.*

3) Deux SIC *qui commutent et stabilisent une même sous-algèbre de Cartan sont égales.*

Démonstration.

C'est une conséquence directe des résultats 3.11, 3.12, 4.5 et 4.6 b de [Ro2]; on peut voir aussi [KP2].

□

1.11. Définitions.

1) Une semi-involution de Cartan ω' de $\mathfrak{g}$ est dite *adaptée* à σ' si elle commute à σ'. On considère une *SIC* ω' adaptée à σ' et on note $\sigma = \sigma'\omega' = \omega'\sigma'$ et $\Gamma = \langle\sigma', \omega'\rangle = \{1, \sigma', \omega', \sigma\}$.

2) La forme réelle $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ admet une *décomposition de Cartan* (associée à σ ou ω'):

$$\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

où $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_\mathbb{R}^\sigma$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_\mathbb{R}^{-\sigma}$, $\mathfrak{k}_\mathbb{C} = \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^\sigma$, $\mathfrak{p}_\mathbb{C} = \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^{-\sigma}$.

Plus généralement les notations $\mathfrak{e}_\mathbb{R}$ et $\mathfrak{e}$ pour des sous-espaces de $\mathfrak{g}$ signifient que $\mathfrak{e}_\mathbb{R} = \mathfrak{e}^{\sigma'}$ et $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$.

On note $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\omega'} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ la forme compacte associée à ω'.

3) On associe à ces sous-algèbres plusieurs sous-groupes des groupes de 1.2 et 1.4 :

$$G_\mathbb{R} = G^{\sigma'}; \quad U = G^{\omega'}; \quad K = G^\Gamma = U \cap G_\mathbb{R} = U^\sigma = G_\mathbb{R}^\sigma.$$

$$\tilde{G} := \mathrm{Int}(\mathfrak{g}); \quad \tilde{G}_\mathbb{R} = \tilde{G}^{\sigma'}; \quad \tilde{K} = \tilde{G}^\Gamma$$

$$G^* := \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}'); \quad G^*_\mathbb{R} = (G^*)^{\sigma'}; \quad K^* = (G^*)^\Gamma.$$

On a:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ad}(K) & \subset & \tilde{K} & \subset & K^* \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathrm{Ad}(G_\mathbb{R}) & \subset & \tilde{G}_\mathbb{R} & \subset & G^*_\mathbb{R} \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathrm{Ad}(G) & \subset & \tilde{G} & \subset & G^*. \end{array}$$

1.12. Sous-algèbres de Cartan.

1) Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan σ'-stable de $\mathfrak{g}$, on dit que la sous-algèbre $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathfrak{h}^{\sigma'}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

Avec les notations de 1.11, on considère maintenant une sous-algèbre de Cartan σ-stable $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, c'est-à-dire une sous-algèbre de Cartan Γ-stable $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$, où $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{h}_\mathbb{R}^\sigma$ (resp. $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^- = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h}_\mathbb{R}^{-\sigma}$) est la *partie compacte ou torique* (resp.*déployée ou vectorielle*) de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. On note $\mathfrak{h}^+ = \mathfrak{h}^\sigma$ et $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{h}^{-\sigma}$.

2) Considérons le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$, il est stable par Γ. Pour $\alpha \in \Delta$, $-\alpha = \omega'(\alpha) = \mathrm{conj} \circ \alpha \circ \omega'$, où conj est la conjugaison complexe, ainsi α prend des valeurs imaginaires pures sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$; c'est-à-dire que α est réelle sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ et imaginaire pure sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}$; ceci justifie les termes "compacte" et "déployée" ci-dessus. En particulier $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ est une *sous-algèbre torique déployée* ($SATD$) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ est commutative et l'action adjointe de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est diagonalisable. Le centre $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une $SATD$.

Les *racines déployées* (on dit "réelles" dans le cas classique) de Δ sont celles de $\Delta_d = \{\alpha \in \Delta;\ \alpha(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}) = 0\} = \{\alpha \in \Delta;\ \sigma'(\alpha) = \alpha = -\sigma(\alpha)\}$, elles prennent des valeurs réelles sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Les *racines unitaires* (on dit "imaginaires" dans le cas classique) de Δ sont celles de $\Delta_u = \{\alpha \in \Delta;\ \alpha(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}) = 0\} = \{\alpha \in \Delta;\ \sigma(\alpha) = \alpha = -\sigma'(\alpha)\}$, elles prennent des valeurs imaginaires pures sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Ces racines nous intéressent peu ici.

Les *racines complexes* sont celles de $\Delta_{\mathbb{C}} = \Delta \setminus (\Delta_d \cup \Delta_u)$.

Si α est une racine déployée, $\mathfrak{g}_\alpha$ est stable par σ' et $(\mathfrak{g}_\alpha)^{\sigma'}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}_\alpha$. On note Δ_{dr} l'ensemble des racines déployées de Δ^{re}, i.e. $\Delta_{dr} = \Delta_d^{re}$.

3) La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est dite *maximalement déployée* ($SACMD$) si $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-} + \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ est une *sous-algèbre torique déployée maximale* ($SATDM$), c'est-à-dire $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; on dit aussi alors que $\mathfrak{h}$ est une SAC maximalement déployée pour σ'.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est dite *maximalement compacte* ($SACMC$) ou *fondamentale* (cf. [W; page 99]) si $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$, c'est-à-dire si $\mathfrak{h}^{+}$ est une sous-algèbre $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable maximale de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$; on dit aussi alors que $\mathfrak{h}$ est une SAC maximalement compacte pour σ'.

4) Remarque: Si $\mathfrak{h}$ est une SAC $\sigma'-$stable de $\mathfrak{g}$, il existe une SIC ω' de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ' et stabilise $\mathfrak{h}$; de plus ω' est unique modulo le groupe $\tilde{H}^{\sigma'}$ qui fixe point par point $\mathfrak{h}$ (cf. 1.10). Toutes les définitions précédentes sont donc possibles sans présupposer l'existence de la semi-involution ω' et indépendamment du choix de celle-ci.

5) Si $\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ contenant une SAC de $\mathfrak{g}$, alors l'algèbre dérivée $\mathfrak{r}'$ est semi-simple; c'est une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}'$ au sens de [KW; 2.11] et on lui associe un sous-groupe algébrique connexe R de G qui conjugue les SAC de $\mathfrak{r}$. En particulier, si $\mathfrak{r}$ est Γ-stable, le sous-groupe $R^\Gamma = R \cap K$ est transitif sur les $SACMC$ (resp. $SACMD$) Γ-stables de $\mathfrak{r}$.

6) Puisque Γ est supposé dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$, la décomposition de 1.4 donne $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'} \ltimes \mathrm{Tr}^{\sigma'}$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\Gamma} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\Gamma} \ltimes \mathrm{Tr}^{\Gamma}$. D'autre part Tr stabilise toutes les SAC de $\mathfrak{g}$. Ainsi les classes de conjugaison de SAC sont les mêmes sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\Gamma}$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\Gamma}$.

1.13. Groupes de Cartan.

1) Le groupe H associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est le tore algébrique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{C}^*) = Q\check{} \otimes \mathbb{C}^*$ où P est le *réseau des poids* dual sur $\mathbb{Z}$ de $Q\check{} = \underset{i\in I}{\oplus} \mathbb{Z}\alpha_i\check{}$ [KW; page 133]. Si on identifie le groupe $\tilde{H}$ de 1.4 à son image $\mathrm{Ad}(\tilde{H})$, on a $\mathrm{Ad}(H) \subset \tilde{H} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q, \mathbb{C}^*) = P\check{} \otimes \mathbb{C}^*$, où $Q = \underset{i\in I}{\oplus} \mathbb{Z}\alpha_i$ est le *réseau des racines* [KW; page 137] et $P\check{}$ son dual. Il y a un homomorphisme naturel de Q dans P, on note Q' son image et P' le dual de celle-ci (contenu sans cotorsion dans $P\check{}$). Ainsi $\mathrm{Ad}(H) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q', \mathbb{C}^*) = P' \otimes \mathbb{C}^*$. Le centre $Z(G)$ de G est $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P/Q', \mathbb{C}^*) = (\mathfrak{c} \cap Q\check{}) \otimes \mathbb{C}^* \subset H$, cf. [PK]. Si $\mathfrak{g}$ est affine, $Q' = Q/\mathbb{Z}\delta$, où δ est la plus petite racine imaginaire positive.
2) Si Y est un supplémentaire de P' dans $P\check{}$, on a $\tilde{H} = (Y \otimes \mathbb{C}^*) \times \mathrm{Ad}(H)$ donc $\tilde{G} = \mathrm{Ad}(\tilde{H} \ltimes G) = (Y \otimes \mathbb{C}^*) \ltimes G/Z(G)$. Toute SIC ω' stabilisant $\mathfrak{h}$ stabilise cette décomposition puisqu'elle induit moins l'identité sur P, Q et Q'. Le tore algébrique H correspondant à $\mathfrak{h}$ est stable par ω' et si on pose $H_t = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, S^1) = H^{\omega'}$ et $H_v = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{R}_+^*)$, on a $H = H_t \times H_v$; on dit que H_t (resp. H_v) est la partie *torique* ou *compacte* (resp. *vectorielle* ou *déployée*) de H.
Notons ici, avec les notations de 1.2, la *décomposition d'Iwasawa* du groupe de Kac-Moody G (cf. [PK] ou [KP$_1$]) :

$$G = G^{\omega'} H_v V_{\pm} = U H_v V_{\pm} \quad \text{(unique)}.$$

3) Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan Γ-stable de $\mathfrak{g}$ (cf. 1.12.1) le groupe $H_{\mathbb{R}} = H^{\sigma'}$ se décompose : $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}^+ \times H_{\mathbb{R}}^-$, avec une partie torique ou compacte $H_{\mathbb{R}}^+ = H_{\mathbb{R}} \cap H_t$ et une partie vectorielle ou déployée $H_{\mathbb{R}}^- = H_{\mathbb{R}} \cap H_v$ associées respectivement à $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+$ et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^-$. De même on a, avec des notations évidentes, $\tilde{H}_{\mathbb{R}} = \tilde{H}^{\sigma'} = \tilde{H}_{\mathbb{R}}^+ \times \tilde{H}_{\mathbb{R}}^-$.

2. Formes presque déployées des algèbres de Kac-Moody symétrisables.

Dans ce paragraphe, on suppose $\mathfrak{g}$ indécomposable et symétrisable et on fixe une forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ presque déployée c'est-à-dire une semi-involution σ' de première espèce . Pour les principaux résultats sur ces formes, on renvoie à [Ro3], [Ro4] et [B$_3$R; §2 et §4].

2.1. a) Si $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est une $SATDM$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, il existe une SAC $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ contenant $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$. Le centralisateur $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{g}$ est une algèbre réductive σ'-stable contenant $\mathfrak{h}$. Pour un bon choix du système de racines positives de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, l'espace $\mathfrak{p}^{\epsilon} = \mathfrak{z} + \mathfrak{b}^{\epsilon}$ est une sous-algèbre parabolique σ'-stable minimale.

b) Une SAC σ'-stable $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est contenue dans une sous-algèbre parabolique σ'-stable minimale si et seulement si elle contient une $SATDM$ $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ [B$_3$R; remarque 2.2], c'est-à-dire si et seulement si c'est une $SACMD$. Et alors la $SATDM$ $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est unique: $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{h}^- + \mathfrak{c})^{\sigma'}$.

c) Le groupe $G_{\mathbb{R}}$ est transitif sur les couples $(\mathfrak{h}, \mathfrak{p}^{\epsilon})$ formés d'une SAC σ'-stable $\mathfrak{h}$ contenue dans une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^{\epsilon}$ σ'-stable minimale et de même signe ϵ, [B$_3$R; 4.2.2] et donc sur les triplets $(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{h}, \mathfrak{p}^{\epsilon})$ comme en a), ou sur les $SACMD$, cf. b).

Théorème 2.2. [B$_3$R; 4.4]. *On considère :*
(1) Les semi-involutions de première espèce σ' *de* $\mathfrak{g}$
(2) Les involutions de seconde espèce θ *de* $\mathfrak{g}$
(3) La relation $\sigma' \sim \theta$ *si et seulement si*
 (a) $\omega' = \sigma'\theta = \theta\sigma'$ *est une SIC,*
 (b) σ' *et* θ *stabilisent une même SAC* $\mathfrak{h}$*,*
 (c) $\mathfrak{h}$ *est contenue dans une sous-algèbre parabolique positive* σ'*-stable minimale.*
Alors cette relation induit une bijection entre les classes de conjugaison sous $\tilde{G} = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *(resp.* $Aut(\mathfrak{g}')$*) des semi-involutions de première espèce et celles des involutions de seconde espèce.*

Proposition 2.3. *Il existe une SIC* ω' *de* $\mathfrak{g}$ *qui est adaptée à* σ'*. De plus* ω' *est unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur de* $\mathfrak{g}'$ *commutant à* σ' *(i.e. par un* $\phi \in \tilde{G}_{\mathbb{R}} = \tilde{G}^{\sigma'}$*). Pour toute SIC* ω' *adaptée à* σ'*, on a* $\sigma' \sim \sigma'\omega'$ *au sens de 2.2 .*
N.B. : On a alors un groupe commutatif $\Gamma = \{1, \omega', \sigma', \sigma = \sigma'\omega'\}$ et on dit que σ est l'*involution de Cartan* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est une involution de seconde espèce. Dans la suite on fixe ainsi ω' et Γ.

Démonstration.

Soit $\mathfrak{h}$ une *SAC* $\sigma'-$stable contenue dans une sous-algèbre parabolique positive $\mathfrak{p}$ $\sigma'-$stable minimale, cf. 2.1. Soit ω' une *SIC* qui stabilise $\mathfrak{h}$ et commute à σ', cf 1.10. Il suffit de montrer que toute *SIC* θ' adaptée à σ' est conjuguée à ω' par $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$. La sous-algèbre $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \theta'(\mathfrak{p})$ est de dimension finie et stable par σ' et θ'. D'après [BM; 7.6], l'automorphisme involutif $\theta := \sigma'\theta' = \theta'\sigma'$ stabilise une *SAC* $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{q}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{q}^{\sigma'}$ (qui est aussi une *SAC* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$). D'après 2.1.c, on peut supposer $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ en conjuguant par $N_{G_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{p})$. Ainsi, les deux *SIC* θ' et ω' sont adaptées à σ' et stabilisent la même *SAC* $\mathfrak{h}$, elles sont donc conjuguées par un automorphisme intérieur commutant à σ' et fixant $\mathfrak{h}$ (cf. 1.10); d'où le résultat.

□

Corollaire 2.4. *Si* $\mathfrak{h}$ *est une SAC* σ'*-stable de* $\mathfrak{g}$ *(i.e.* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ *est une SAC de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$*) il existe* $\phi \in \tilde{G}_{\mathbb{R}}$ *tel que* $\phi(\mathfrak{h})$ *soit stable par* Γ*.*

Démonstration.

C'est une conséquence de 1.10 et 2.3.

□

Proposition 2.5. *Soient* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{h}_1$ *deux SAC* Γ*-stables de* $\mathfrak{g}$*; alors* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{h}_1$ *sont conjuguées par* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ *ou* $G^*_{\mathbb{R}}$ *(resp.* $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$*) si et seulement si elles le sont par* K^* *(resp.* $\tilde{K}$*).*

Démonstration.

Les conditions suffisantes étant claires, on montre les conditions nécessaires. Soit $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ tel que $u(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}$, d'après 1.12.6 on peut supposer u dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $G^*_{\mathbb{R}}$

(resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$); on pose $\omega'_1 = u\omega' u^{-1}$. Alors ω' et ω'_1 sont deux SIC qui stabilisent $\mathfrak{h}$ et commutent à σ'. D'après 1.10, il existe $h \in \tilde{H}_{\mathbb{R}}$ tel que $\omega' = h\omega'_1 h^{-1} = (hu)\omega'(hu)^{-1}$. Ainsi, l'automorphisme hu est dans le même groupe que u, il commute à ω' et envoie $\mathfrak{h}_1$ sur $\mathfrak{h}$. Si $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$, alors $hu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\Gamma}$ et, quitte à multiplier hu par σ, on peut supposer $hu \in K^*$.

□

Proposition 2.6. *Le groupe $K = U^\sigma = G^\Gamma$ est transitif sur les $SACMD$ Γ-stables de $\mathfrak{g}$. En particulier, les $SATDM$ $\sigma-$stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont conjuguées par K.*

Démonstration.

Si $\mathfrak{h}$ est une $SACMD$ $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique positive $\sigma'-$stable minimale contenant $\mathfrak{h}$, alors pour toute sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ contenue dans $\mathfrak{p}$ et contenant $\mathfrak{h}$, la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est $\sigma-$déployée au sens de [KW, 5.15]. Le groupe G^σ est transitif sur les paires $\sigma-$déployées [KW, 5.32]; il en résulte que deux $SACMD$ $\Gamma-$stables sont conjuguées par G^σ. Soit $g \in G^\sigma$ tel que $\mathfrak{h}$ et $g(\mathfrak{h})$ soient deux $SACMD$ $\Gamma-$stables; on écrit $g = uhv$ selon la décomposition d'Iwasawa du groupe G (cf. 1.13.2). Le fait que $\mathfrak{h}$ et $g(\mathfrak{h})$ soient stables par ω' entraine $n := g^{-1}\omega'(g) \in N$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G. Par ailleurs, on a $n = g^{-1}\omega'(g) = v^{-1}h^{-2}\omega'(v)$ et d'après l'unicité de n dans la décomposition de Birkhoff du groupe G (cf. 1.2) on a $n = h^{-2}$, $v = 1$ et donc $g = uh = \sigma(u)\sigma(h) = \sigma(g)$. Comme σ stabilise $U = G^{\omega'}$ et $H_v = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{R}^*_+)$, on a d'après l'unicité de la décomposition d'Iwasawa $u = \sigma(u) \in K$ et $g(\mathfrak{h}) = u(\mathfrak{h})$.
Toute $SATDM$ $\sigma-$stable $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est contenue dans une $SACMD$ $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$ (unique à conjugaison près par $Z_K(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})$). D'après ce que l'on vient de voir, en conjuguant par K, on peut supposer que deux $SATDM$ $\sigma-$stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont contenues dans une même $SACMD$ $\sigma-$stable et donc sont égales, cf. 2.1; d'où le cas particulier.

□

Théorème 2.7. *Les classes de conjugaison sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $G^*_{\mathbb{R}}$ (resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$) des sous-algèbres de Cartan σ'-stables de $\mathfrak{g}$ correspondent bijectivement aux classes de conjugaison sous K^* (resp. $\tilde{K}$) des sous-algèbres de Cartan Γ-stables de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration.

Cela résulte de 2.4 et 2.5.

□

Remarque. On verra plus loin (cf. 2.10 et 2.20) qu'on peut remplacer $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{K}$ par $G_{\mathbb{R}}$ et K dans 2.4, 2.5 et 2.7.

Lemme 2.8. *Soit $\mathfrak{h}$ une SAC $\sigma'-$stable de $\mathfrak{g}$; alors le centralisateur $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^-)$ de $\mathfrak{h}^-$ dans $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration.

D'après 1.12.4 on peut supposer $\mathfrak{h}$ $\Gamma-$stable. Soient Π une base de racines de $\Delta =$

$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ et $\alpha\in\Delta^+$; alors $\langle\alpha,\mathfrak{h}^-\rangle=0$ si et seulement si $\sigma(\alpha)=\alpha$, en particulier $\alpha\in\Delta^+\cap\sigma(\Delta^+)$. Mais σ est de seconde espèce, donc $\Delta^+\cap\sigma(\Delta^+)$ est fini. Ainsi $\mathfrak{z}=\mathfrak{h}\oplus\left(\underset{\sigma\alpha=\alpha}{\oplus}\mathfrak{g}_\alpha\right)$ est de dimension finie.

□

Proposition 2.9. *Soit $\mathfrak{h}$ une SAC σ'-stable de $\mathfrak{g}$.*
i) On suppose qu'il existe une SAC ${}^1\mathfrak{h}$ σ'-stable de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h}^-\subset{}^1\mathfrak{h}^-$ (cf. 1.12.4); alors il existe $g\in Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$ tel que ${}^1\mathfrak{h}^+\subset g\mathfrak{h}^+$. En particulier, si $\mathfrak{h}^-={}^1\mathfrak{h}^-$, on a ${}^1\mathfrak{h}^+=g\mathfrak{h}^+$.

Si ${}^1\mathfrak{h}$ est Γ-stable, on peut supposer de plus $g\mathfrak{h}$ $\Gamma-$stable.

Si $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$ sont Γ-stables, on peut supposer de plus $g\in K$ (donc $g\mathfrak{h}$ $\Gamma-$stable).

ii) Il existe une SAC ${}^d\mathfrak{h}$ σ'-stable (resp. Γ-stable si $\mathfrak{h}$ est Γ-stable) et maximalement déployée pour σ' telle que $\mathfrak{h}^-\subset{}^d\mathfrak{h}^-$; de plus ${}^d\mathfrak{h}$ est unique à conjugaison près par $Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$ (resp. $Z_K(\mathfrak{h}^-)$).

Démonstration.

i) Le centralisateur $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}^-)$ de $\mathfrak{h}^-$ dans $\mathfrak{g}$ est une algèbre réductive, cf. 2.8. Le centre $\mathfrak{z}_0$ de $\mathfrak{z}$ est σ'-stable et contenu dans $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{z}$ est commutative, alors $\mathfrak{z}=\mathfrak{h}={}^1\mathfrak{h}$ et donc $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est déployée ou quasi-déployée; sinon, l'algèbre dérivée $\mathfrak{z}'$ de $\mathfrak{z}$ est semi-simple et stable par σ'. Soit Z' le sous-groupe algébrique connexe de G associé à $\mathfrak{z}'$ (cf. 1.12.5). La forme réelle $\mathfrak{z}'_\mathbb{R}:=(\mathfrak{z}')^{\sigma'}$ est intérieure car $\mathfrak{h}^+_\mathbb{R}\cap\mathfrak{z}'_\mathbb{R}$ en est une SAC compacte (pour toute SIC θ' de $\mathfrak{g}$ adaptée à σ' et stabilisant $\mathfrak{h}$). En conjuguant par un élément g de $(Z')^{\sigma'}\subset Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$, on peut supposer ${}^1\mathfrak{h}^+_\mathbb{R}\cap\mathfrak{z}'_\mathbb{R}\subset g\mathfrak{h}^+_\mathbb{R}\cap\mathfrak{z}'_\mathbb{R}$ (cf. 1.12.5). Comme $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$ contiennent toutes les deux le centre de $\mathfrak{z}$, on a ${}^1\mathfrak{h}^+_\mathbb{R}\subset g\mathfrak{h}^+_\mathbb{R}$ et donc ${}^1\mathfrak{h}^+\subset g\mathfrak{h}^+$.

Si $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$ sont Γ-stables, ${}^1\mathfrak{h}^+_\mathbb{R}\cap\mathfrak{z}'_\mathbb{R}$ est $\mathbb{C}-$diagonalisable dans $\mathfrak{k}$, on peut donc supposer $g\in K$.

Si ${}^1\mathfrak{h}$ est Γ-stable, alors ω' vaut moins l'identité sur ${}^1\mathfrak{h}^-_\mathbb{R}$, donc stabilise $\mathfrak{h}^-_\mathbb{R}$, $\mathfrak{h}^-$, $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}$'. En conjuguant par $(Z')^{\sigma'}\subset Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$, on peut supposer $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ (et donc $\mathfrak{h}$) $\Gamma-$stable et on conclut avec l'alinéa précédent.

ii) Soit ${}^d\mathfrak{h}$ une SAC de $\mathfrak{z}$ qui est σ'-stable (resp. Γ-stable si $\mathfrak{h}$ est Γ-stable) et maximalement déployée pour σ', alors ${}^d\mathfrak{h}$ est également une SAC de $\mathfrak{g}$ (qui est σ'-stable (resp. Γ-stable) et maximalement déployée pour σ') qui contient $\mathfrak{h}^-$. Deux choix possibles de ${}^d\mathfrak{h}$ sont contenus dans $\mathfrak{z}$ et sont donc conjugués par $(Z')^{\sigma'}\subset Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$ (resp. $(Z')^\Gamma\subset Z_K(\mathfrak{h}^-)$).

□

2.10. Définitions. Dans la suite, en plus de la SIC ω', on se fixe une $SACMD$ ${}^d\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est Γ-stable; il n'y a qu'un seul choix modulo K, d'après 2.6. On note $\Delta=\Delta(\mathfrak{g},{}^d\mathfrak{h})$.

Une SAC σ'-stable $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}^-\subset{}^d\mathfrak{h}^-$ est dite *standard.* Elle est dite *spéciale* si de plus elle est $\Gamma-$stable et vérifie ${}^d\mathfrak{h}^+\subset\mathfrak{h}^+$.

D'après la proposition 2.9 et 2.1c (resp. et 2.6), toute SAC σ'-stable (resp. Γ-stable) est conjuguée par $G_{\mathbb{R}}$ (resp. K) à une SAC spéciale (donc standard et $\Gamma-$stable). On obtient ainsi un résultat plus précis que celui du corollaire 2.4.

Un sous-espace $\mathfrak{a}^-$ de ${}^d\mathfrak{h}^-$ est dit *admissible* s'il existe une SAC standard $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{a}^-$. D'après 2.9.i, tout sous-espace admissible de ${}^d\mathfrak{h}^-$ est la partie déployée d'une SAC spéciale.
Pour $X = K$, $\tilde{K}$, K^* ou $G_{\mathbb{R}}$, on note $N_X = N_X({}^d\mathfrak{h})$ le normalisateur de ${}^d\mathfrak{h}$ dans X et W_X son quotient par le centralisateur de ${}^d\mathfrak{h}$ dans X.

Lemme 2.11. *Soient $X = G_{\mathbb{R}}$ (resp. $X = K$, $\tilde{K}$ ou K^*) et ${}^1\mathfrak{h}$, ${}^2\mathfrak{h}$ deux SAC standard (resp. et $\Gamma-$stables). Alors ${}^1\mathfrak{h}$ et ${}^2\mathfrak{h}$ sont conjuguées par X si et seulement si ${}^1\mathfrak{h}^-$ et ${}^2\mathfrak{h}^-$ sont conjuguées par W_X.*

Démonstration.

Soit $g \in X$ tel que ${}^2\mathfrak{h} = g.{}^1\mathfrak{h}$, donc ${}^2\mathfrak{h}^- = g.{}^1\mathfrak{h}^-$. Alors ${}^d\mathfrak{h}$ et $g.{}^d\mathfrak{h}$ sont deux $SACMD$ σ'-stables (resp. Γ-stables) de $\mathfrak{g}$ contenant ${}^2\mathfrak{h}^-$. D'après 2.9.ii, il existe $g' \in G_{\mathbb{R}}$ (resp. $g' \in K$), g' fixant ${}^2\mathfrak{h}^-$, tel que $g'(g.{}^d\mathfrak{h}) = {}^d\mathfrak{h}$. Ainsi $g'g \in N_X$ et ${}^2\mathfrak{h}^- = g'g.{}^1\mathfrak{h}^-$.

Pour la réciproque, on peut supposer, quitte à conjuguer, que ${}^2\mathfrak{h}^- = {}^1\mathfrak{h}^-$. D'après 2.9.i, il existe $g \in G_{\mathbb{R}}$ (resp. $g \in K$), g fixant ${}^1\mathfrak{h}^-$, tel que $g.{}^1\mathfrak{h} = {}^2\mathfrak{h}$; d'où le résultat.

□

Théorème 2.12. *Soit $X = G_{\mathbb{R}}$ (resp. $X = K$, $\tilde{K}$ ou K^*). Les classes de conjugaison des SAC $\sigma'-$stables (resp. $\Gamma-$stables) de $\mathfrak{g}$ sous X correspondent bijectivement aux classes de conjugaison des sous-espaces admissibles de ${}^d\mathfrak{h}^-$ sous W_X.*

Démonstration.

Cela résulte de 2.10 et 2.11.

□

Lemme 2.13. *Soit $\mathfrak{h}$ une SAC spéciale différente de ${}^d\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{r} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+)$ et $\mathfrak{r}'$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{r}$. Alors $\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre réductive Γ-stable de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+$ en est le centre. De plus, la forme réelle $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}} := (\mathfrak{r}')^{\sigma'}$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée intérieure (i.e. $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ a même rang que sa sous-algèbre compacte maximale $(\mathfrak{r}')^{\Gamma}$) .*

Démonstration.

Il est clair que $\mathfrak{r}$ est réductive (cf. 2.8) et que le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{r}$ contient $\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+$; mais $\mathfrak{h}$ et ${}^d\mathfrak{h}$ sont deux SAC Γ-stables de $\mathfrak{r}$, donc $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{h} \cap {}^d\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+$ et on a égalité.
Comme $\mathfrak{h} \neq {}^d\mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}} \neq \{0\}$; de plus ${}^d\mathfrak{h} =^d \mathfrak{h}^- + \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c} \cap^d \mathfrak{h}^- = \mathfrak{h}^-$, donc $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée de rang $\dim_{\mathbb{C}}({}^d\mathfrak{h}^-) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^-)$. Il est clair que $(\mathfrak{r}')^{\Gamma}$ est de rang au moins $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^+) - \dim_{\mathbb{C}}({}^d\mathfrak{h}^+)$ qui est égal à $\dim_{\mathbb{C}}({}^d\mathfrak{h}^-) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^-)$; il y a donc égalité et $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ est intérieure.

□

Lemme 2.14. *Soit $\mathfrak{h}$ une SAC spéciale telle que $\mathfrak{h} \neq {}^d\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{r} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+)$ et soit s le rang commun de l'algèbre dérivée $\mathfrak{r}'$ et de $(\mathfrak{r}')^\sigma$, cf. 2.13. Alors il existe dans $\Delta({}^d\mathfrak{h}, \mathfrak{r}')$ $(\subset \Delta^{re}({}^d\mathfrak{h}, \mathfrak{g}))$ un système ϕ de racines déployées fortement orthogonales de rang s tel que*

$$\mathfrak{h}^- = \Big(\underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}\Big)^{\perp} \cap {}^d\mathfrak{h}^- = \underset{\alpha\in\phi}{\cap} \mathrm{Ker}(\alpha) \cap {}^d\mathfrak{h}^-$$

où $\Big(\underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}\Big)^{\perp}$ désigne l'orthogonal, dans ${}^d\mathfrak{h}$, de $\underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}$ par rapport à la forme bilinéaire invariante de 1.7. En particulier $(\mathfrak{h}^-)^\perp \cap {}^d\mathfrak{h}^-$ est un sous-espace de racines de ${}^d\mathfrak{h}^-$ au sens de [Su; Def. 7 p. 390].

N.B. Deux racines α et β sont *fortement orthogonales* si ni $\alpha + \beta$ ni $\alpha - \beta$ ne sont des racines.

Démonstration.

D'après 2.13, l'algèbre de Lie semi-simple réelle déployée $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ est intérieure. Pour toute SAC $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{r}'$, il existe, d'après [Su; Prop. 11 p. 393], un système de racines fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{t}, \mathfrak{r}')$ de rang s. La sous-algèbre $\mathfrak{a} = {}^d\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}'$ est une $SACMD$ Γ-stable de $\mathfrak{r}'$ et $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{a}^-_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$. En particulier $\Delta(\mathfrak{a}, \mathfrak{r}')$ est formé de racines réelles déployées de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, {}^d\mathfrak{h})$. Soit ϕ un système de racines fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{a}, \mathfrak{r}')$ de rang s. Ainsi, on a $\mathfrak{a} = \underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}$ et le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{r}$ est $\mathfrak{c} = \underset{\alpha\in\phi}{\cap} \mathrm{Ker}(\alpha)$ qui est aussi, d'après 2.13, $(\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+)$; d'où $\mathfrak{h}^{-\sigma} = \mathfrak{h}^- = \cap_{\alpha\in\phi} \mathrm{Ker}(\alpha) \cap {}^d\mathfrak{h}^-$. □

Proposition 2.15. *Soit $\mathfrak{a}^-$ un sous-espace de ${}^d\mathfrak{h}^-$. Alors $\mathfrak{a}^-$ est admissible si et seulement si il existe dans Δ_{dr} un système ϕ de racines (réelles déployées) fortement orthogonales tel que*

$$\mathfrak{a}^- = \Big(\underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}\Big)^{\perp} \cap {}^d\mathfrak{h}^- = \underset{\alpha\in\phi}{\cap} \mathrm{Ker}(\alpha) \cap {}^d\mathfrak{h}^-.$$

N.B. *Si ϕ est un système de racines réelles fortement orthogonales, alors $\mathfrak{t} := \underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}(e_\alpha + \omega(e_\alpha))$ est une sous-algèbre torique de $\mathfrak{g}'$ qui ne rencontre pas $\mathfrak{c}$. En particulier* $|\phi| \leq \mathrm{rg}(\mathfrak{g}'/\mathfrak{c})$.

Démonstration.

La condition est nécessaire : tout sous-espace admissible de ${}^d\mathfrak{h}^-$ est la partie déployée d'une SAC spéciale (cf. 2.10) puis on se ramène à 2.14.

Montrons que la condition est suffisante. Pour $\alpha \in \phi$, soit $x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R},\alpha} \backslash \{0\} := (\mathfrak{g}_\alpha)^{\sigma'} \backslash \{0\}$ (cf. 1.12.2) et soit $t_\alpha = x_\alpha + \sigma(x_\alpha)$. Alors $t_\alpha \in \mathfrak{k}$ est $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures et ${}^d\mathfrak{h}^+ \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$. Ainsi $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}^- \oplus [{}^d\mathfrak{h}^+ \oplus (\oplus_{\alpha\in\phi} \mathbb{C}t_\alpha)]$ est une sous-algèbre commutative $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable et Γ-stable de $\mathfrak{g}$ de même dimension que ${}^d\mathfrak{h}$; c'est donc une *SAC* Γ-stable de $\mathfrak{g}$ et on a $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{a}^- \subset {}^d\mathfrak{h}^-$. Donc $\mathfrak{h}$ est standard et $\mathfrak{a}^-$ est admissible.

□

Remarque. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur l'ensemble des systèmes de racines réelles déployées de Δ_{dr}, définie par :

$$\phi \mathcal{R} \psi \text{ si et seulement si } \bigoplus_{\alpha\in\phi} \mathbb{C}\alpha = \bigoplus_{\beta\in\psi} \mathbb{C}\beta.$$

D'après 2.15, deux systèmes de racines fortement orthogonales ϕ et ψ de Δ_d correspondent au même sous-espace admissible de ${}^d\mathfrak{h}^-$ si et seulement si ils sont $\mathcal{R}$-équivalents; d'où le résultat suivant :

Proposition 2.16. *Soit $X = K$, $\tilde{K}$, K^* ou $G_{\mathbb{R}}$. Les classes de conjugaison des sous-espaces admissibles de ${}^d\mathfrak{h}^-$ sous W_X correspondent bijectivement à celles des systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{dr} modulo $\mathcal{R}$.*
N.B : La classe de ${}^d\mathfrak{h}^-$ correspond au système vide de Δ_{dr}.

Théorème 2.17. *Soit $X = G_{\mathbb{R}}$ (resp. $X = K$, $\tilde{K}$ ou K^*). Les classes de conjugaison des SAC σ'−stables (resp. Γ−stables) de $\mathfrak{g}$ sous X correspondent bijectivement aux classes de conjugaison des systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{dr} modulo $\mathcal{R}$ sous W_X.*

Démonstration.

Cela résulte de 2.12 et 2.16.

□

Proposition 2.18. *Les groupes W_K , $W_{\tilde{K}}$ et $W_{G_{\mathbb{R}}}$ induisent sur la SATDM $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = ({}^d\mathfrak{h}^- + \mathfrak{c})^{\sigma'}$ le groupe de Weyl relatif W'. Le groupe W_{K^*}, induit sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ une extension de W' par certains automorphismes du diagramme de Dynkin relatif.*

Démonstration.

D'après 2.1c et [Ro4; 3.11] le groupe induit par $W_{G_{\mathbb{R}}}$ est égal à W' et est engendré par les réflexions par rapport aux racines relatives réelles. De plus le groupe $\tilde{G}$ (resp. G^*) agit sur l'ensemble des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ en conservant (resp. permutant) les types. Si l'on admet provisoirement que W_K induit sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ le groupe W', le raisonnement de la démonstration de [Ro4; 3.11] montre donc que $W_{\tilde{K}}$ (resp. W_{K^*}) induit sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ le groupe W' (resp. une extension de W' par certains automorphismes du diagramme de Dynkin relatif). Il reste donc à voir que les réflexions par rapport aux racines relatives réelles sont induites par des éléments de W_K.

Soit $\alpha' \in \Delta' = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ une racine relative réelle non multipliable et $\mathfrak{g}_{\alpha'} = \{x \in \mathfrak{g} \;/\; [h, x] = \alpha'(h)x, \forall h \in \mathfrak{a}\,\}$ l'espace propre correspondant. On note $\mathfrak{g}(\alpha')$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}_{\alpha'} \oplus {}^d\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha'}$ et $G(\alpha')$ le groupe semi-simple simplement connexe correspondant, cf.

[Bp2; §9] et [B_3R; 4.6]. L'espace propre $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ est stable par σ' et $\mathfrak{g}(\alpha')$ est stable par Γ. Ainsi $\mathfrak{g}(\alpha')^{\sigma'}$ est une algèbre de Lie semi-simple réelle de rang relatif 1, de $SATDM$ $\mathbb{R}h_{\alpha'}$ (si $h_{\alpha'}$ est la coracine relative de α'), de $SACMD$ ${}^d\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}(\alpha')$ et de SIC ω'. Il est connu [H; VII 2.4] qu'il existe $k \in G(\alpha')^\Gamma$ tel que $\mathrm{Ad}(k).h_{\alpha'} = -h_{\alpha'}$. Mais, par construction de $G(\alpha')$ et de G, l'inclusion de $\mathfrak{g}(\alpha')$ dans $\mathfrak{g}$ s'intègre en un morphisme canonique $\pi : G(\alpha') \to G$, qui est donc $\Gamma-$équivariant. Ainsi $\pi(k)$ est dans $G^\Gamma = K$ et il induit la réflexion $r_{\alpha'} \in W'$ sur $\mathfrak{a}$ (puisque $G(\alpha')$ centralise $Ker(\alpha')$ dans $\mathfrak{a}$). D'après 2.9i, en modifiant $\pi(k)$ par un élément de $Z_K({}^d\mathfrak{h}^-) = Z_K(\mathfrak{a})$, on peut supposer $\pi(k)$ dans N_K. D'où la proposition.

□

Proposition 2.19. *Si $\alpha \in \Delta_{dr}$, sa restriction α' à $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est une racine relative réelle et la restriction est une application $\mathbb{C}-$linéaire injective de $\sum_{\alpha\in\Delta_{dr}} \mathbb{C}\alpha$ dans le dual $\mathfrak{a}^*$.*

Remarque. Δ_{dr} est un sous-système de racines réelles clos de Δ_{re}, éventuellement vide et non forcément clos dans Δ. Son image Δ'_{dr} dans l'ensemble Δ'_{re} des racines relatives réelles est réunion d'orbites de W', d'après 2.18. On constate sur les tables de [B_3R] que, dans le cas affine, Δ'_{dr} est clos dans Δ'_{re}.

Démonstration.

On a $\sum_{\alpha\in\Delta_{dr}} \mathbb{C}\alpha \subset \{\chi \in \mathfrak{h}^* \ / \ \chi(\mathfrak{h}^+) = 0\}$; il est donc clair que l'application restriction à $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}^- + \mathfrak{c}$ est linéaire injective.

Si $\alpha \in \Delta_{dr}$, $\sigma'(\alpha) = \alpha$; donc $\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C}\check{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ est une sous-algèbre $\Gamma-$stable isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Comme $\sigma'(\check{\alpha}) = \check{\alpha} = -\omega'(\check{\alpha})$, il existe e_α dans $\mathfrak{g}_\alpha^{\sigma'}$ tel que $f_\alpha = -\omega'(e_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\sigma'}$ vérifie $[e_\alpha, f_\alpha] = \check{\alpha}$. Alors l'élément $m_\alpha = \exp(e_\alpha)\exp(-f_\alpha)\exp(e_\alpha) = \exp(-f_\alpha)\exp(e_\alpha)\exp(-f_\alpha)$ est dans N_K, induit r_α sur ${}^d\mathfrak{h}$ et stabilise $\mathfrak{a}$. Sa restriction $w_{\alpha'}$ à $\mathfrak{a}$ est dans W' et $w_{\alpha'}(\alpha') = -\alpha'$. Il en résulte que α' est réelle d'après [Ro4; 3.11.2] ou car on sait que l'orbite sous le groupe de Weyl d'une racine imaginaire positive est entièrement formée de racines positives, cf. [Bp1; 2.4.1, 2.3.1 et 1.1.15] (ou [K; 5.4] pour les systèmes de racines non relatives).

□

Théorème 2.20. *Les classes de conjugaison de systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{dr} modulo $\mathcal{R}$ sous W_K, $W_{\tilde{K}}$ ou $W_{G_\mathbb{R}}$ sont les mêmes. En particulier les classes de conjugaison de SAC (resp. SAC $\sigma-$stable) de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sous $\tilde{G}_\mathbb{R}$ ou $G_\mathbb{R}$ (resp. $\tilde{K}$ ou K) sont les mêmes.*

Démonstration.

D'après 2.19 les systèmes ϕ sont déterminés par leur restriction à $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$. On déduit donc la première assertion de 2.18, puis la seconde de 2.17 et 2.7.

□

Proposition 2.21. *Tout système de racines réelles déployées fortement orthogonales est conjugué par W_K à un sous-système de Δ de la forme $\Delta^m(J) = \Delta \cap (\oplus_{i\in J}\, \mathbb{Z}\alpha_i)$ pour $J \subset I$ de type fini (i.e. $\Delta^m(J)$ fini). Ainsi il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison sous W_K de tels systèmes de racines.*

Démonstration.

Soit ϕ un système de racines fortement orthogonales de Δ_{dr}. Le produit w des r_α pour $\alpha \in \phi$ est d'ordre 2 dans W et vérifie $w(\alpha) = -\alpha$, $\forall \alpha \in \phi$. D'après 2.19 et sa démonstration, w stabilise $\mathfrak{a}_\mathbb{R} = ({}^d\mathfrak{h}^- + \mathfrak{c})^{\sigma'}$, sa restriction w' à $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est dans W' et w' est la symétrie par rapport au sous-espace (admissible) $\mathfrak{a}_\phi = \big(\cap_{\alpha\in\phi} \operatorname{Ker}(\alpha)\big) \cap \mathfrak{a}_\mathbb{R}$, qui est de codimension $\mid \phi \mid$ d'après 2.19. Mais, dans $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ le cône de Tits ouvert positif (associé à Δ') est un ouvert convexe, non vide, $W'-$stable et il est réunion de facettes (facette de $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ = facette relative = $\mathbb{R}-$facette) de type fini [Bp1; 4.4]. Ainsi $\mathfrak{a}_\phi$ rencontre (donc contient) une facette de type fini. Par ailleurs toute facette de type fini dans $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est conjuguée par le groupe de Weyl W' à une des facettes de type fini de la chambre fondamentale fermée de $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$. Or cette chambre est l'intersection avec $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ de la chambre fondamentale fermée $\mathcal{C}$ de ${}^d\mathfrak{h}$ et chacune de ses facettes de type fini est l'intersection avec $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ d'une facette de type fini $\mathcal{C}_J$ de $\mathcal{C}$ associée à une partie de type fini J de I, cf. [Ro3; §4] ou [Ro4; §3]. Ainsi, à conjugaison près par W' ou W_K (cf. 2.18), le système ϕ est contenu dans l'ensemble $\Delta^m(J) = \Delta \cap (\oplus_{i\in J}\, \mathbb{Z}\alpha_i)$ des racines nulles sur $\mathcal{C}_J$, qui est fini, cf. [Ro4; 1.2] ou [B$_3$R; 1.2].

Comme il n'y a qu'un nombre fini de parties de type fini J de I et qu'un nombre fini de racines dans $\Delta^m(J)$, il est clair que le nombre de classes de conjugaison de systèmes ϕ est fini.

□

Théorème 2.22. *Il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de SAC $\Gamma-$stables (resp. $\sigma'-$stables) de $\mathfrak{g}$ sous K^*, $\tilde{K}$ ou K (resp. $G_\mathbb{R}$).*

Démonstration.

Cela résulte aussitôt de 2.17 et 2.21.

□

§3. Étude de quelques exemples.

On va utiliser librement dans ce dernier paragraphe des réalisations comme algèbres de lacets des algèbres de Kac-Moody affines ainsi qu'un certain nombre de notations de [B$_3$R].

3.1. Les trois formes réelles presque déployées de $A_1^{(1)}$. On considère l'algèbre de Kac-Moody affine non tordue de type $A_1^{(1)}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

l'élément c est central et $d = t\frac{d}{dt}$. D'après la table de [B$_3$R; §6], il existe trois classes de conjugaison de formes réelles presque déployées de $\mathfrak{g}$ correspondant aux trois semi-involutions de première espèce $\sigma_i' = \sigma_i\omega'$, $i = 1, 2, 3$, où ω' est la semi-involution de Cartan standard :

$$\omega'\left(\begin{pmatrix} P(t) & Q(t) \\ R(t) & -P(t) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\bar{P}(t^{-1}) & -\bar{R}(t^{-1}) \\ -\bar{Q}(t^{-1}) & \bar{P}(t^{-1}) \end{pmatrix} \quad \text{et } (-\omega') \text{ fixe } c \text{ et } d$$

et les σ_i les involutions de Cartan qui seront explicitées ci-dessous. La sous-algèbre de Cartan standard est $\mathfrak{h} = \mathbb{C}\check{\alpha} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ où $\check{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{C}c$ est le centre $\mathfrak{c}$. On note δ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ nulle sur $\check{\alpha}$ et c, telle que $\delta(d) = 1$; c'est la plus petite racine imaginaire positive. La racine positive α de $\mathfrak{sl}_2$ (telle que $\alpha(\check{\alpha}) = 2$) est prolongée par 0 sur c et d. L'ensemble des racines réelles de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est $\Delta^{re} = \{\pm\alpha + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $(\alpha_0 = \delta - \alpha, \alpha_1 = \alpha)$ est une base de racines de Δ. Les coracines correspondantes sont $\check{\alpha_0} = c - \check{\alpha}$ et $\check{\alpha_1} = \check{\alpha}$. Les copoids fondamentaux sont $p_0 = d$ et $p_1 = d + \frac{\check{\alpha}}{2}$ (modulo le centre). Le diagramme de Dynkin associé à $\mathfrak{g}$ est donc:

$$0 \bullet\!\!\Longleftrightarrow\!\!\bullet\ 1$$

Pour chacune des trois formes presque déployées, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est $\Gamma-$stable et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est maximalement déployée. On va déterminer, les classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire celles des systèmes de racines réelles déployées fortement orthogonales de Δ, modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, cf. Théorème 2.17. On rappelle que le système vide correspond à la classe de la sous-algèbre de Cartan maximalement déployée standard $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

1) La forme réelle déployée $A_{1,2}^{(1)}$ associée à $\sigma_1' = \omega\omega' = \sigma_n'$: L'involution de Cartan $\sigma_1 = \omega$ agit sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ par $M(t) \mapsto -{}^tM(t^{-1})$ et $(-\omega)$ fixe c et d. Dans ce cas, on a $\Delta_{dr} = \Delta^{re} = \{\pm\alpha + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et le rang maximal d'un système de racines réelles déployées fortement orthogonales est égal à 1. De plus le groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ admet des représentants dans K (2.18). Ainsi il existe dans $\Delta_{dr} = \Delta^{re}$ deux classes de conjugaison, sous W_K, de systèmes (de rang 1) de racines fortement orthogonales modulo $\mathcal{R}$ (à savoir la classe de α_0 et celle de α_1 qui sont échangées par l'automorphisme de diagramme involutif de $A_1^{(1)}$). Il y a donc une seule classe de conjugaison de tel système sous W_{K^*} et deux classes sous W_K ou $W_{\tilde{K}}$.

Remarque : La classe de conjugaison (sous K ou K^*) de la sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable associée à la classe d'une racine non compacte $\alpha + n\delta$ (sous W_K ou W_{K^*}) est celle de

$$\mathfrak{h}_n := \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & t^n \\ -t^{-n} & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}(d - \frac{n}{2}\check{\alpha})$$

qui est donc maximalement compacte pour σ'_1. D'après ce que l'on vient de voir, il y a une seule classe de conjugaison de $SACMC$ $\Gamma-$stables sous K^* et deux classes sous $\tilde{K}$ ou K. D'après 2.7 et 2.20 il y a une seule classe de conjugaison de $SACMC$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $G^*_{\mathbb{R}}$ et deux classes sous $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ ou $G_{\mathbb{R}}$. Les autres SAC de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont maximalement déployées, elles sont donc conjuguées par $G_{\mathbb{R}}$ (cf. 2.1c).

2) La forme réelle presque déployée $A^{(1)3}_{1,1}$ associée à $\sigma'_2 = r_1\omega\omega' = r_1\sigma'_n$: L'involution de Cartan est $\sigma_2 = r_1\omega$, avec r_1 la réflexion par rapport à la racine α_1 (prolongée en une involution de $\mathfrak{g}$) qui agit par : $M(t) \mapsto -{}^tM(t)$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ et fixe c et d. Dans ce cas Δ_{dr} est vide (car $r_1$ne fixe aucune racine réelle) et il y a une seule classe de conjugaison de SAC $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$ sous K^* ou K. D'après 2.7, toutes les SAC de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont à la fois maximalement déployées et maximalement compactes, elles sont donc toutes conjuguées par $G_{\mathbb{R}}$ (cf. 2.1c).

3) La forme réelle quasi-déployée ${}^2A^{(1)}_{1,1}$ associée à $\sigma'_3 = \rho\omega\omega' = \rho\sigma'_n$:
L'involution de Cartan est $\sigma_3 = \rho\omega$, avec ρ l'automorphisme de diagramme échangeant les deux sommets 0 et 1 du diagramme de Dynkin. L'action de ρ sur $\mathfrak{g}$ est donnée par : $M \mapsto -T({}^tM)T^{-1}$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, avec $T = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, ρ fixe c et échange $p_0 = d$ et $p_1 = d + \frac{\alpha\check{}}{2}$ modulo le centre de $\mathfrak{g}$. Cette action est donc canonique sur $\mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}/\mathbb{C}c$, mais elle ne l'est pas sur $\mathfrak{g}$ (cf. 1.4). L'involution ρ ne fixe aucune racine réelle et donc Δ_{dr} est vide. Les sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$ sont donc conjuguées par K. D'après 2.7, toutes les SAC de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont à la fois maximalement déployées et maximalement compactes, elles sont donc toutes conjuguées par $G_{\mathbb{R}}$ (cf. 2.1c).
4) **Remarque :** En fait, pour cette forme réelle quasi-déployée ${}^2A^{(1)}_{1,1}$, les groupes $G_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ sont petits, réduits à $H_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{H}_{\mathbb{R}}$; il n'y a donc qu'une seule SAC dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$:
D'après [PK] le groupe G est extension centrale par $\mathbb{C}^*$ du groupe $SL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$; donc $G/Z(G) = SL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])/\{\pm 1\}$ et $H/Z(G)$ est représenté par des matrices diagonales. Le copoids $\alpha\check{}$ (resp. $\frac{\alpha\check{}}{2}$) détermine un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans $G/Z(G)$ qui à $z \in \mathbb{C}^*$ associe la classe $\alpha\check{}\otimes z$ de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. la classe $\frac{\alpha\check{}}{2}\otimes z$ de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \sqrt{z} & 0 \\ 0 & (\sqrt{z})^{-1} \end{pmatrix}$).
D'après 1.13.2, on a $\tilde{G} = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}^* \ltimes (G/Z(G) = (\mathbb{Z}d \otimes \mathbb{C}^*) \ltimes (G_1/Z(G_1))$ où $G_1 = \{\, g \in GL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \;/\; det(g) \in \mathbb{C}^* \,\}$ et $Z(G_1) = \mathbb{C}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dans G_1, on a $\sigma'_3(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = T \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix}^{-1} T^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{D} & t^{-1}\bar{C} \\ t\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ dans $G_1/Z(G_1)$. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\sigma'_3(d \otimes z) = (d + \frac{\alpha\check{}}{2}) \otimes \bar{z} = (d \otimes \bar{z}).\begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\tilde{G}$. Donc si $(d \otimes z).\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est

dans $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$, il existe $z, z' \in \mathbb{C}^*$ tels que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{D} & t^{-1}\bar{C} \\ t\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ dans G_1; ainsi $D = z'\bar{A}$ et $C = z't\bar{B}$. On a donc $AD - BC = z'(A\bar{A} - tB\bar{B}) \in \mathbb{C}^*$. Mais $A\bar{A}$ et $B\bar{B}$ sont des polynômes de Laurent dont les plus bas et plus hauts degrés sont pairs; donc $A \in \mathbb{C}^*$, $B = 0$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H$. On obtient bien $\tilde{G}_{\mathbb{R}} = \tilde{H}_{\mathbb{R}}$ et de même $G_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}$.
Cette situation de $G_{\mathbb{R}}$ petit pour une forme quasi-déployée est contraire à l'intuition du cas classique, mais déjà connue [Re; 13.4]. Ici $G_{\mathbb{R}}$ est particulièrement petit car toutes les racines se restreignent à $\mathfrak{a}$ en des racines relatives imaginaires.

3.2. Les deux formes réelles presque déployées de $A_2^{(2)}$.
On considère l'algèbre de Kac-Moody affine tordue $\mathfrak{g}$ de type $A_2^{(2)}$:

$$0 \bullet\!\!\Rrightarrow\!\!\bullet\ 1$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est réalisée comme étant la sous-algèbre des points fixes de l'algèbre de Kac-Moody non tordue de type $A_2^{(1)}$:

$$\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

sous l'action de l'automorphisme involutif $\tilde{\rho}$ fixant c et d et agissant sur $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ par

$$M(t) \mapsto -T[\,^tM(-t)]T^{-1}, \quad \text{avec } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}).$$

D'après la table de [B$_3$R; §6], il existe deux classes de conjugaison de formes réelles presque déployées de $\mathfrak{g}$ correspondant aux deux semi-involutions de première espèce $\sigma_i' = \sigma_i\omega'$, $i = 1, 2$, où ω' est la semi-involution de Cartan standard et les σ_i les involutions de Cartan.

1) La forme réelle déployée $A_{2,2}^{(2)}$ associée à $\sigma_1' = \omega\omega' = \sigma_n'$: L'involution de Cartan est $\sigma_1 = \omega$ et $\Delta_{dr} = \Delta^{re} = \{\pm\alpha_1 + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm 2\alpha_1 + (2n+1)\delta;\ n \in \mathbb{Z}\} = \{$ racines réelles courtes$\} \cup \{$ racines réelles longues$\}$ où $\delta = 2\alpha_0 + \alpha_1$ est la plus petite racine imaginaire positive. Le rang maximal d'un système de racines réelles déployées fortement orthogonales est égal à 1. De plus le groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ admet des représentants dans K et il existe donc dans $\Delta_{dr} = \Delta^{re}$ deux classes de conjugaison, sous W_K, de systèmes (de rang 1) de racines fortement orthogonales modulo $\mathcal{R}$, à savoir la classe de α_0 (les racines réelles longues) et celle de α_1 (les racines réelles courtes). Il y a donc deux classes de conjugaison de $SACMC$ σ_1-stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous K^* ou K et aussi deux classes de conjugaison de $SACMC$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$, $G^*_{\mathbb{R}}$, $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ ou $G_{\mathbb{R}}$. Les autres SAC sont maximalement déployées, elles sont conjuguées par $G_{\mathbb{R}}$.

2) La forme réelle presque déployée $A_{2,1}^{(2)3}$ associée à $\sigma_2' = r_1\omega\omega' = r_1\sigma_n'$: L'involution de Cartan est $\sigma_2 = r_1\omega$ avec r_1 la reflexion par rapport à la racine α_1 (prolongée en une involution de $\mathfrak{g}$). Dans ce cas Δ_{dr} est vide (car $r_1$ne fixe aucune racine réelle) et il y a une seule classe de conjugaison de SAC σ_2-stables de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sous K^* ou K. D'après 2.7, toutes les SAC de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sont à la fois maximalement déployées et maximalement compactes, elles sont donc conjuguées par $G_\mathbb{R}$ (cf. 2.1c).

Index

Notations :

Définitions :

Références

[B$_3$R] V. Back-Valente, N. Bardy-Panse, H. Ben Messaoud et G. Rousseau; Formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody, Classification et racines relatives. J. of Algebra 171 (1995), 43-96.

[Bp1] N. Bardy-Panse; Systèmes de racine infinis. Mémoire de la S.M.F 65 (1996).

[Bp2] N. Bardy-Panse; Sous algèbres birégulières d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds, Nagoya Math. J. 156 (1999), 1-83.

[BMR1] H. Ben Messaoud et G. Rousseau; Classification des formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines, J. of Algebra 267 (2003) 443-513. Coquilles corrigées dans J. of Algebra 279 (2004) 850-851.

[BMR2] H. Ben Messaoud et G. Rousseau; Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Kac-Moody affines réelles presque compactes, preprint Nancy (2004).

[BM] A. Borel et G.D. Mostow; On semi-simple automorphisms of Lie algebras. Ann. Math. 61 (1955), 389-405.

[H] S. Helgason; Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. Academic Press, New York, 1978.

[K] V.G. Kac; Infinite dimensional Lie algebras. Troisième édition, Cambridge University Press (1990).

[KP1] V.G. Kac et D.H. Peterson; Defining relations of certain infinite dimensional groups. "Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui" Lyon 1984, Astérisque n^o hors série (1985), 165-208.

[KP2] V.G. Kac et D.H. Peterson; On geometric invariant Theory of infinite dimensional groups. In "Algebraic groups" Utrecht 1986, Springer lecture note in Math. 1271 (1987), 109-142.

[KW] V.G. Kac et S.P. Wang; On automorphisms of Kac-Moody algebras and groups. Advances in Math. 92 (1992), 129-195.

[PK] D.H. Peterson et V.G. Kac; Infinite flag varieties and conjugacy theorems. Proc. Natl. Acad. Sc. USA 80 (1983), 1778-1782.

[Re] B. Rémy; Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés. Astérisque 277 (2002).

[Ro1] G. Rousseau; Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines. In "Harmonic Analysis" Luxembourg 1987, Springer lecture note in Math. 1359 (1988), 252-264.

[Ro2] G. Rousseau; Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines. Revue de l'Institut Élie Cartan 11, Nancy (1988), 175-205.

[Ro3] G. Rousseau; Almost split K-forms of Kac-Moody Algebras. In "Infinite dimensional Lie algebras and groups" Marseille (1988), V.G. Kac éditeur, Adv. Ser. in Math. Physics 7, World Scientific (1989), 70-85.

[Ro4] G. Rousseau; L'immeuble jumelé d'une forme presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody. Bull. Soc. Math. Belg. 42 (1990), 673-694.

[Ro5] G. Rousseau; On forms of Kac-Moody algebras.

Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 56 part 2 (1994), 393-399.

[Su] M. SUGIURA; Conjugate classes of Cartan Subalgebras in real semi-simple algebras. J. of the Math. Soc. of Japan 11 (1959), 374-434.
Corrections dans J. of the Math. Soc. of Japan 23 (1971), 379-383.

[W] G. WARNER; Harmonic analysis on semi-simple groups, I, Grundlehren. Math. Wiss. 188, Springer Verlag Berlin (1972).

Adresses:

HECHMI BEN MESSAOUD
Département de Mathématiques.
Faculté des Sciences de Monastir.
5019. MONASTIR.
TUNISIE.

E-mail :
Hechmi.BenMessaoud@fsm.rnu.tn

GUY ROUSSEAU
Institut Élie Cartan.
Unité Mixte de Recherche 7502.
Université Henri Poincaré Nancy 1.
B.P 239.
54506 VANDŒUVRE LÈS NANCY.
FRANCE.

rousseau@iecn.u-nancy.fr