STUDIA MATHEMATICA * (*) (200*)

Généralisation d'un théorème de Haagerup

par

FERDAOUS KELLIL (Monastir) et GUY ROUSSEAU (Nancy)

Abstract. Let G be a group of automorphisms of a tree X (with set of vertices S) and H a kernel on $S \times S$ invariant under the action of G. We want to give an estimate of the l^r-operator norm $(1 \leq r \leq 2)$ of the operator associated to H in terms of a norm for H. This was obtained by U. Haagerup when G is the free group acting simply transitively on a homogeneous tree.

Our result is valid when X is a locally finite tree and one of the orbits of G is the set of vertices at even distance from a given vertex; a technical hypothesis, always true when G is discrete, is also assumed.

As an application we prove the invertibility of an l^r-operator on S.

Introduction. Dans un arbre la *valence* $v(s)$ d'un sommet est le nombre de ses voisins ; on suppose ici toujours $v(s) \geq 1$ pour tout s et presque toujours $v(s)$ finie (arbre localement fini). Si $d(-,-)$ désigne la distance sur l'ensemble S des sommets, la relation "$d(s,t)$ paire" sur $S \times S$ est d'équivalence et partage S en deux classes S' et S''. L'arbre est dit *homogène* (respectivement *semi-homogène*) si v est constant sur S (respectivement constant sur S' et S''); si v vaut $q+1$ (respectivement $q+1$ et $l+1$) l'arbre est bien déterminé et noté X_q (respectivement $X_{q,l}$). On peut transformer un arbre homogène d'ensemble de sommets S' en un arbre semi-homogène en rajoutant l'ensemble S'' des milieux des arêtes (donc $l = 1$).

On considèrera un groupe G d'automorphismes de l'arbre. Ce groupe est dit *transitif* (respectivement *presque transitif*) sur S ou S' si S ou S' est contenu dans une orbite (respectivement la réunion d'un nombre fini d'orbites) de G.

Dans beaucoup de travaux d'analyse harmonique sur les arbres, on suppose l'existence de G simplement transitif sur S (ou S') [B-P], [C]. Alors les fonctions sur l'arbre peuvent être considérées comme des fonctions sur G

2000 *Mathematics Subject Classification*: 43A85, 20E08, 47A10.

Key words and phrases: trees, group, operator.

Le comité Mixte Franco-Tunisien de Coopération Universitaire nous a facilité nos rencontres et nous a aidé à l'élaboration de cet article ; qu'il en soit remercié.

et elles opèrent sur l'espace des fonctions par convolution. Ici les opérateurs sont d'une autre nature.

Un *noyau complexe* sur l'arbre (ou sur S') est une application H de $S\times S$ (ou $S'\times S'$) dans $\mathbb{C}$. Il est dit *probabiliste* si $H(s,t)\geq 0$ pour tous s,t et $\sum_s H(s,t)=1$ pour tout t ; il correspond alors à une marche aléatoire sur S [Ft-S]. La formule $H*f(s)=\sum_{t\in S}H(s,t)f(t)$ permet de faire opérer (par convolution) ce noyau sur certaines classes de fonctions sur S (ou S'). Notons que tout opérateur linéaire borné $\mathcal{L}$ sur $l^r(S)$ (ou $l^r(S')$) doit être de cette forme : les fonctions δ_t, pour $t\in S$ (ou S'), définies par $\delta_t(s)=1$ si $t=s$ et $\delta_t(s)=0$ sinon, forment une "base" de l^r et il suffit de prendre $H(s,t)=\mathcal{L}(\delta_t)(s)$.

Le noyau H est dit *à sauts de longueurs dans* $L\subset\mathbb{N}$ si $H(s,t)=0$ quand s et t sont à distance non dans L. Nous supposerons toujours l'opérateur H invariant par un groupe G d'automorphismes de l'arbre :

$$H(g(s),g(t))=H(s,t),\qquad \forall s,t\in S \text{ et } \forall g\in G.$$

On donne dans cet article une estimation de la norme l^r de l'opérateur associé à H en fonction d'une norme pour H. Pour cela on considère un arbre localement fini avec un groupe d'invariance G transitif sur S' plus une hypothèse technique toujours vérifiée si G est discret. Ce résultat a été obtenu par U. Haagerup [H] (dans le cas du groupe libre G agissant simplement transitivement sur un arbre homogène) sous la forme d'une inégalité pour la norme l^2 du produit de convolution de certaines fonctions sur G. Sous cette forme ce résultat a été déjà généralisé, sous le nom d'inégalité de Haagerup ou propriété (RD) pour le groupe G (voir [dlH; §5], [Jo]) ; en particulier dans [Ft-S; §2], [F] et [V] ce genre d'inégalité est étudié pour des groupes de Coxeter ou des groupes agissant sur des arbres ou des immeubles. Par contre le cas présent d'un noyau sur un espace non homogène sous G semble inexploré.

L'inégalité de Haagerup que nous généralisons ici est très liée à la notion de propriété (d'approximation) de Haagerup (Gromov's a-T-menability, introduite aussi par Haagerup dans [H]) et à celle de moyennabilité faible, toutes deux détaillées dans [C_2J_2V]. Pour des groupes de Coxeter ou des produits libres on peut en particulier lire [B-S], [B-J-S], [Ja] et [M].

Comme application, on introduit au §3 un cas particulier de noyau (à sauts de longueur 1, asymétrique et très anisotrope) et on montre qu'il est inversible comme opérateur l^r.

1. Groupe opérant sur un arbre

1.1. On considère un arbre localement fini X, et la décomposition de son ensemble S de sommets en deux parties S' et S'' selon la parité de la distance. On note A l'ensemble des arêtes de X et $\Sigma(s,n)$ la sphère de centre $s \in S$ et de rayon n formée des sommets à distance n de s.

On rappelle que le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ des automorphismes de X est un groupe localement compact tel que les sous-groupes fixateurs de sommets soient des sous-groupes compacts et ouverts [Tr].

On considère un sous-groupe G de $\mathrm{Aut}(X)$ qui stabilise S' et S'' (on peut s'y ramener en passant à un sous-groupe d'indice 2 de G) et qui est transitif sur S'. Alors tout sommet de S' a un nombre fixe $q+1$ de voisins. On choisit un sommet s_0 dans S' et on note G_0 son fixateur dans G.

Toute orbite de G rencontre l'ensemble $\Sigma(s_0,1)$ des $(q+1)$ voisins de s_0 ; le nombre d'orbites de G dans S'' est $k \leq q+1$. On choisit dans $\Sigma(s_0,1)$ des représentants $s_1,\dots,s_k$ de chacune de ces orbites. On a alors

$$S' = Gs_0, \qquad S'' = Gs_1 \amalg \cdots \amalg Gs_k.$$

On note $l_i + 1 = v(s_i)$, $l = \max(l_1,\dots,l_k)$ et G_i le fixateur dans G de s_i.

1.2. *Les conditions* $(*)$ *et* (U). Dans [B.K; §1.3] on a montré qu'un groupe G d'automorphismes de l'arbre X (stabilisant S') est transitif sur S' si et seulement si il existe une partie G_2 de G qui vérifie, relativement à un sommet s_0 de S', la condition :

$(*)$ l'application $G_2 \to S$, $g \mapsto gs_0$, est une bijection de G_2 sur $\Sigma(s_0,2)$.

Sous cette condition on montre que tout sommet s de S' à distance $2n$ de s_0 s'écrit d'une seule manière sous la forme $s = g_1 \cdots g_n s_0$ avec $g_1,\dots,g_n \in G_2$.

Si le groupe G est fermé dans $\mathrm{Aut}(X)$, donc localement compact (et transitif sur S'), on montre [B.K; §3.1] que le groupe G est unimodulaire si et seulement si il vérifie la condition suivante (pour un sommet $s_0 \in S'$) :

(U) Il existe une partie G_2 de G telle que G_2 et G_2^{-1} vérifient $(*)$.

Si $s \in \Sigma(s_0,2)$ et si $g \in G$ est tel que $s = gs_0$, alors $s' = g^{-1}s_0 \in \Sigma(s_0,2)$ et il est facile de voir que l'orbite G_0s' ne dépend que de l'orbite G_0s ; on la note $(G_0s)^{-1}$. La démonstration de [B.K, §3.1] prouve que, même si G n'est pas fermé, la condition (U) est équivalente à

(U′) $\forall s \in \Sigma(s_0,2)$ les orbites G_0s et $(G_0s)^{-1}$ ont même cardinal.

En fait pour un groupe G transitif sur S', les conditions (U) et (U′) équivalent à l'unimodularité de l'adhérence de G, comme on peut aussi le deduire de [Tr] ou de [Sc; lemma 1]. En tout cas un groupe discret agissant transitivement sur S' vérifie automatiquement U et (U′).

2. Généralisation d'un théorème de Haagerup. On considère un groupe G d'automorphismes de l'arbre, transitif sur S' et vérifiant la condition (U). Tous les noyaux sont supposés invariants par G.

On définit la norme droite de classe r, $\|H\|_{dr}$, du noyau H par

$$\|H\|_{dr}^r = \sum_{i=0}^{k} \sum_{u \in S} |H(u, s_i)|^r, \qquad r \geq 1.$$

Ainsi on a $\sum_{u \in S} |H(u, s)|^r \leq \|H\|_{dr}^r$ pour tout $s \in S$.

LEMME 2.1. *Soient n, m, p trois entiers. On suppose que H est à support dans $\{(s, t) \in S \times S \mid d(s, t) = n\}$, c'est-à-dire que H est à sauts de longueur n.*

(i) *La norme $\|H\|_{dr}^r$ est finie.*

(ii) *Soit g une fonction dans $l^r(S)$ à support dans la sphère $\Sigma(s_0, p)$; on note $(H * g)\chi_{s_0,m} = (H * g)\chi_m$ la restriction de $H * g$ à $\Sigma(s_0, m)$. On a alors*

$$\|(H * g)\chi_m\|_r^r \leq (q + 1) \sup(1, l - 1) \|g\|_r^r \|H\|_{dr}^r \qquad \text{si } 1 \leq r \leq 2.$$

De plus $(H * g)\chi_m$ n'est pas nul si et seulement si $n + p - m$ est pair et $|n - p| \leq m \leq n + p$.

REMARQUE. 1) Si les sommets de S'' sont de valence 1 et si H est à support dans $S' \times S'$, alors n, p et m doivent être pairs et $n + p - m$ doit être multiple de 4.

2) Pour $r > 2$ la démonstration ci-dessous ne donne pas un résultat intéressant à cause d'une constante qui intervient lors de la majoration.

Démonstration. La première assertion est claire. Pour $s \in \Sigma(s_0, m)$, on a

$$(H * g)\chi_m(s) = H * g(s) = \sum_u H(s, u) g(u),$$

où la somme est étendue aux $u \in S$ tels que $d(s, u) = n$ et $d(u, s_0) = p$.

Les géodésiques $[s_0, s], [s_0, u]$ et $[u, s]$ de l'arbre ont un unique sommet t en commun. Si on note $j = d(u, t)$, on a $j \leq n$, $j \leq p$ et $m = n + p - 2j$, d'où la dernière assertion.

Il reste à majorer la norme

$$\|(H * g)\chi_m\|_r^r = \sum_{d(s_0, s) = m} \Big| \sum_u H(s, u) g(u) \Big|^r,$$

où la dernière somme porte sur les u à distance n de s et p de s_0.

1^{er} *cas* : $j = \frac{1}{2}(n + p - m) = 0$. Alors $u = t$ est bien déterminé par s, donc

$$\|(H * g)\chi_m\|_r^r = \sum_{d(s, s_0) = m} |H(s, u)|^r |g(u)|^r = \sum_{d(s_0, u) = p} |g(u)|^r \Big(\sum_s |H(s, u)|^r \Big);$$

la dernière somme porte sur les s tels que $d(s_0, s) = m$ et u appartient au segment $[s_0, s]$, en particulier cette somme est majorée par $\|H\|_{dr}^r$ et donc $\|(H * g)\chi_m\|_r^r \leq \|H\|_{dr}^r \|g\|_r^r$.

$2^{ème}$ *cas* : $j > 0$. Alors

$$\|(H * g)\chi_m\|_r^r \leq \sum_{d(s,s_0)=m} \Big(\sum_u |H(s,u)|^{r/(r-1)}\Big)^{r-1} \Big(\sum_{u'} |g(u')|^r\Big).$$

Comme $1 \leq r \leq 2$, on a

$$\Big(\sum_u |H(s,u)|^{r/(r-1)}\Big)^{r-1} \leq \sum_u |H(s,u)|^r$$

et donc

$$\|(H * g)\chi_m\|_r^r \leq \sum_{d(s,s_0)=m} \Big(\sum_u |H(s,u)|^r\Big)\Big(\sum_{u'} |g(u')|^r\Big),$$

(où les sommes portent sur les u, u' à distance n de s et p de s_0)

$$\leq \sum_{d(s_0,t)=p-j} \sum_{d(s,t)=n-j} \Big(\sum_{d(t,u)=j} |H(s,u)|^r\Big)\Big(\sum_{d(t,u')=j} |g(u')|^r\Big)$$

$$\leq \sum_{d(s_0,t)=p-j} \sum_{d(t,u')=j} |g(u')|^r \Big(\sum_{d(s,t)=n-j} \sum_{d(t,u)=j} |H(s,u)|^r\Big);$$

les sommets s, u, u' intervenant dans les sommes des deux lignes précédentes sont supposés tels que les segments $[t, s_0], [t, s]$ et $[t, u]$ (resp. et $[t, u']$) sont deux à deux d'intersection réduite à $\{t\}$.

On note $B(t, n, j) = \{(s, u) \in S \times S \mid d(s,t) = n - j,\ d(u,t) = j,\ d(u,s) = n\}$. On va montrer que

$$\sum_{(s,u)\in B(t,n,j)} |H(s,u)|^r \leq \sup(1, l-1)(q+1)\|H\|_{dr}^r.$$

On en déduit aussitôt l'inégalité de l'énoncé.

Pour montrer cette inégalité portant sur $B(t, n, j)$, on considère quatre cas selon la parité de j et p.

1^{er} *cas* : j et p pairs. Alors $t \in S'$ et il existe $g_0 \in G$ tel que $g_0(t) = s_0$. L'application $(s, u) \mapsto (g_0(s), g_0(u))$ est une bijection de $B(t, n, j)$ sur $B(s_0, n, j)$ qui laisse invariante H ; on peut donc supposer que $t = s_0$, c'est-à-dire $p = j$. Par l'hypothèse (U) sur G il existe $\delta_1, \ldots, \delta_{j/2} \in G_2$ uniques tels que $u = \delta_1 \cdots \delta_{j/2} s_0$ [B.K; prop. 1.7]. C'est-à-dire $s_0 = g_u(u)$, où $g_u = \delta_{j/2}^{-1} \cdots \delta_1^{-1}$. On définit alors une application de $B(s_0, n, j)$ dans la sphère $\Sigma(s_0, n)$ par $(s, u) \mapsto g_u(s)$. Cette application est injective : en effet, si $g_u(s) = g_{u'}(s')$, comme $g_u(u) = g_{u'}(u')$ on a aussi $g_u(s_0) = g_{u'}(s_0)$; l'hypothèse faite sur G_2^{-1} prouve alors que $g_u = g_{u'}$, donc $u = u'$ et $s = s'$.

D'autre part, par invariance de H sous G, on a $H(s,u) = H(g_u(s), s_0)$. Donc

$$\sum_{(s,u)\in B(t,n,j)} |H(s,u)|^r \leq \sum_{s':d(s',s_0)=n} |H(s',s_0)|^r \leq \|H\|_{dr}^r.$$

$2^{\text{ème}}$ *cas* : j pair et p impair. Alors $t \in S''$ et $l > 1$. Grâce à G on peut supposer que t est l'un des voisins de s_0, i.e. $p = j+1$. On note v l'unique voisin de u dans $[s_0,u]$; on a $v \in S'$. Il existe alors $\delta_1, \ldots, \delta_{j/2} \in G_2$ uniques tels que $v = \delta_1 \cdots \delta_{j/2} s_0$, c'est-à-dire $s_0 = g_v(v)$ avec $g_v = \delta_{j/2}^{-1} \cdots \delta_1^{-1}$. On définit ainsi une application $\Phi_{t,n,j}$ de $B(t,n,j)$ dans $B(s_0,n,1)$ par $(s,u) \mapsto (g_v(s), g_v(u))$. Le sommet $g_v(s_0)$ est l'un des voisins du sommet $g_v(t)$ qui est l'unique sommet de $[g_v(s), g_v(u)]$ à distance j de $g_v(u)$. De plus $g_v(s_0) \notin [g_v(s), g_v(u)]$, il y a donc, $g_v(s)$ et $g_v(u)$ étant fixés, au plus $l-1$ possibilités pour $g_v(s_0)$ et donc pour g_v, s et u ; autrement dit, les fibres de $\Phi_{t,n,j}$ ont au maximum $l-1$ éléments. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{(s,u)\in B(t,n,j)} |H(s,u)|^r &\leq (l-1) \sum_{(s',u')\in B(s_0,n,1)} |H(s',u')|^r \\
&\leq (l-1) \sum_{u'':d(s_0,u')=1} \ \sum_{s':d(s',u')=n} |H(s',u')|^r \\
&\leq (q+1)(l-1)\|H\|_{dr}^r.
\end{aligned}$$

$3^{\text{ème}}$ *cas* : j impair et p pair. Alors $t \in S''$ et on se ramène comme au $2^{\text{ème}}$ cas à t voisin de s_0, i.e. $p = j+1$, puis, par une application dont les fibres ont au plus $l-1$ éléments à $u = s_0$. On obtient

$$\sum_{(s,u)\in B(t,n,j)} |H(s,u)|^r \leq (l-1)\|H\|_{dr}^r.$$

$4^{\text{ème}}$ *cas* : j et p impairs. Alors $t \in S''$ et on se ramène comme au 1^{er} cas à $t = s_0$, i.e. $p = j$, puis par une application injective à u voisin de s_0. Finalement, par le même raisonnement qu'à la fin du $2^{\text{ème}}$ cas on obtient

$$\sum_{(s,u)\in B(t,n,j)} |H(s,u)|^r \leq (q+1)\|H\|_{dr}^r.$$

Lemme 2.2. *On reprend les mêmes hypothèses sur H qu'au lemme* 2.1. *Si $g \in l^r(S)$ $(1 \leq r \leq 2)$, alors $H * g \in l^r(S)$ et*

$$\|H*g\|_r^r \leq (n+1)^r (q+1) \sup(1, l-1) \|g\|_r^r \|H\|_{dr}^r.$$

Démonstration. Notons $g_p = g\chi_p$ la restriction de g à $\Sigma(s_0,p)$. On a alors $g = \sum_{p=0}^{+\infty} g_p$ et $H * g = \sum_{p=0}^{+\infty} H * g_p$ (sommes localement finies). Donc

$$
\begin{aligned}
\|H*g\|_r^r &= \sum_{m=0}^{+\infty} \|(H*g)\chi_m\|_r^r = \sum_{m=0}^{+\infty} \Big\| \sum_{p=0}^{+\infty} (H*g_p)\chi_m \Big\|_r^r \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \Big\| \sum_{p} (H*g_p)\chi_m \Big\|_r^r,
\end{aligned}
$$

où la dernière somme porte sur les p tels que $|n-m| \leq p \leq n+m$ et $n+p-m$ est pair. Par Hölder on a encore

$$
\begin{aligned}
\|H*g\|_r^r &\leq \sum_{m=0}^{+\infty} (n+1)^{r-1} \sum_{p=|n-m|}^{n+m} \|(H*g_p)\chi_m\|_r^r \\
&\leq \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{m} (n+1)^{r-1} \|(H*g_p)\chi_m\|_r^r \\
&\leq \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{m} (n+1)^{r-1} (q+1) \sup(1, l-1) \|H\|_{dr}^r \|g_p\|_r^r,
\end{aligned}
$$

où les deux dernières sommes portent sur les m avec $|n-p| \leq m \leq n+p$ et $n+p-m$ pair. Ainsi

$$
\|H*g\|_r^r \leq (n+1)^r (q+1) \sup(1, l-1) \|H\|_{dr}^r \|g\|_r^r.
$$

N.B. : Si les sommets de S'' sont de valence 1, si H est à support dans $S' \times S'$, on peut remplacer $n+1$ par $n/2+1$ dans l'inégalité du lemme.

Théorème 2.3. *Soit H un noyau sur un arbre localement fini X ; on suppose H invariant par un groupe G transitif sur S' et vérifiant la condition* (U). *On note H_n la restriction de H à $\{(s,t) \in S \times S \mid d(s,t) = n\}$. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\|H_n\|_{dr} < +\infty$ alors H est un convoluteur de $l^r(S)$ dans $l^r(S)$ $(1 \leq r \leq 2)$, de norme $\leq [(q+1)\sup(1, l-1)]^{1/r} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\|H_n\|_{dr}$.*

Remarques. 1) Pour $r = 1$, le résultat n'est pas optimal : on montre facilement que $\|H\|_{cv1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|H_n\|_{d1}$.

2) Le résultat de U. Haagerup concerne le cas d'un arbre homogène et un noyau invariant par un groupe libre simplement transitif sur S. La majoration de la norme de convoluteur est alors plus précise.

Démonstration. Pour $m \geq 0$, soit $H^m = \sum_{n=0}^{m} H_n$. On a alors, pour $f \in l^r(S)$,

$$
\|(H^m - H^{m+p}) * f\|_r \leq \sum_{n=m+1}^{m+p} (n+1)[(q+1)\sup(1, l-1)]^{1/r} \|H_n\|_{dr} \|f\|_r.
$$

La convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\|H_n\|_{dr}$ montre que la suite $(H^m * f)_m$

est de Cauchy dans $l^r(S)$ et converge vers $H * f$. Par passage à la limite on obtient la majoration de la norme de convoluteur.

Remarque 2.4. Dans le cas où H' est un noyau défini sur $S' \times S'$, on peut le prolonger par 0 sur $S \times S$; l'invariance sous G de H' est équivalente à celle de son prolongé. La norme droite de H' est alors

$$\|H\|_{dr}^r = \sum_{s \in S'} |H(s, s_0)|^r, \qquad s_0 \text{ fixé dans } S'.$$

Les raisonnements faits ci-dessus se simplifient, il n'y a que deux cas à considérer dans le lemme 2.1 et la conclusion est

$$\|(H * g)\chi_m\|_r^r \leq \sup(1, l-1)\|H\|_{dr}^r \|g\|_r^r \qquad (1 \leq r \leq 2).$$

Ainsi dans le théorème 2.3 on a alors $H_n = 0$ pour n impair et, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\|H_{2n}\|_{dr}$ est convergente, on a

$$\|H\|_{cvr} \leq [\sup(1, l-1)]^{1/r} \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\|H_{2n}\|_{dr}.$$

Si de plus $l = 1$, on peut d'après le N.B. précédent et le théorème 2.3 remplacer ci-dessus $2n+1$ par $n+1$, et on retrouve le résultat de U. Haagerup pour les arbres homogènes.

3. Exemple d'application

3.1. On se place dans la situation d'un arbre homogène X_q avec un groupe G transitif sur S' et S'', vérifiant la condition (U) ; on suppose l'existence d'un ensemble (stable sous G) d'arêtes dites “spéciales” telles que tout sommet soit contenu dans une unique arête spéciale.

On choisit une arête spéciale $\{s', s''\}$ avec s' dans S' et on note G' (resp. G'') le fixateur de s' (resp. s'') dans G.

3.2. Il est facile de construire un couple (G, X) satisfaisant à ces conditions avec la notion de graphe de groupes de [S] :

On se donne deux groupes G', G'' et p groupes $G_1, \ldots, G_p$ munis d'injections $\alpha_i : G_i \to G'$ et $\beta_i : G_i \to G''$. Le groupe G est alors engendré par les groupes G', G'' et des éléments t_i $(1 \leq i \leq p)$ soumis aux relations $t_1 = 1$ et, pour tout i, pour tout g dans G_i, $\alpha_i(g) = t_i\beta_i(g)t_i^{-1}$. On pose $S' = G/G'$, $S'' = G/G''$, et on note s' (resp. s'') le sommet correspondant à la classe triviale de G/G' (resp. G/G''). L'ensemble des arêtes (non orientées) est $A = \bigsqcup_{i=1,p} G/\alpha_i(G_i)$; l'arête associée à $g \cdot \alpha_i(G_i)$ a pour extrémités gs' dans S' et gs_i dans S'', où $s_i = (t_i)s''$, $1 \leq i \leq p$. Les arêtes $a_i = \{s', s_i\}$ forment un système de représentants des classes de conjugaison sous G d'arêtes. On a $\Sigma(s', 1) = G' \cdot \{s_1, \ldots, s_p\}$, plus précisément $q + 1 = \text{card}(\Sigma(s', 1)) =$

$\sum_{i=1}^{p}(G' : \alpha_i(G_i))$. La condition de 3.1 sur les arêtes spéciales se traduit par $G' = \alpha_1(G_1)$ et $G'' = \beta_1(G_1)$.

On peut montrer que la condition (U) équivaut à $(G' : \alpha_i(G_i))/(G'' : \beta_i(G_i))$ indépendant de i, $1 \leq i \leq p$; en tout cas les deux sont vérifiés si G' et G'' sont finis. Compte tenu de la condition sur G_1, on doit donc avoir $(G' : \alpha_i(G_i)) = (G'' : \beta_i(G_i))$ pour tout i. En particulier on a bien

$$\operatorname{card}(\Sigma(s'',1)) = \sum_{i=1}^{p}(G'' : \beta_i(G_i)) = \sum_{i=1}^{p}(G' : \alpha_i(G_i)) = q+1.$$

3.3. Sous les conditions de 3.1 on note $\Sigma(s',1) = \{s_1'' = s'', \ldots, s_{q+1}''\}$ et $\Sigma(s'',1) = \{s_1' = s', \ldots, s_{q+1}'\}$. Un noyau G-invariant K à sauts de longueur 1 est déterminé par des nombres complexes $p_1', \ldots, p_{q+1}'$ et $p_1'', \ldots, p_{q+1}''$ au moyen des formules

$$K(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } d(s,t) \neq 1, \\ p_i' & \text{si } t \in S',\ s \in S'' \text{ et } \{s,t\}\ G\text{-conjuguée à } \{s_i'', s'\}, \\ p_i'' & \text{si } t \in S'',\ s \in S' \text{ et } \{s,t\}\ G\text{-conjuguée à } \{s_i', s''\}. \end{cases}$$

Bien entendu, il faut supposer $p_i' = p_j'$ (resp. $p_i'' = p_j''$) si les arêtes $\{s_i'', s'\}$ et $\{s_j'', s'\}$ (resp. $\{s_i', s''\}$ et $\{s_j', s''\}$) sont G-conjuguées, i.e. si $G's_i'' = G's_j''$ (resp. $G''s_i' = G''s_j'$).

Il est clair que K définit un opérateur linéaire borné sur $l^r(S)$. On va définir son inverse en supposant p_1' et p_1'' non nuls (en fait grands).

3.4. On définit le noyau H sur $S \times S$ en posant d'abord $H(s,t) = 0$ si $d(s,t)$ est paire.

Si $d(s,t) = 2n+1$, on note $[t,s] = (s_0 = s, \ldots, s_{2n+1} = t)$ la géodésique de s à t et on pose $H(s,t) = 0$ si au moins une des arêtes $\{s_{2k}, s_{2k+1}\}$ n'est pas spéciale pour $0 \leq k \leq n$.

Si toutes ces arêtes $\{s_{2k}, s_{2k+1}\}$ sont spéciales, alors aucune des arêtes $\{s_{2k+1}, s_{2k+2}\}$ n'est spéciale pour $0 \leq k \leq n-1$. Il y a alors deux cas :

- Si $t \in S'$, alors $s_{2k+2} \in S'$ et on note i_k, $2 \leq i_k \leq q+1$, le nombre tel que $\{s_{2k+1}, s_{2k+2}\}$ soit G-conjuguée à $\{s'', s_{i_k}'\}$ et on pose

$$H(s,t) = \frac{(-1)^n}{p_1''} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{p_{i_k}''}{p_1''}.$$

- Si $t \in S''$, alors $s_{2k+2} \in S''$ et on note i_k, $2 \leq i_k \leq q+1$, le nombre tel que $\{s_{2k+1}, s_{2k+2}\}$ soit G-conjuguée à $\{s', s_{i_k}''\}$ et on pose

$$H(s,t) = \frac{(-1)^n}{p_1'} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{p_{i_k}'}{p_1'}.$$

Lemme 3.4. *H est un inverse formel de K, i.e. $H * K$ et $K * H$ sont égaux au noyau identité.*

Démonstration. Laissée au lecteur.

Lemme 3.5. *Pour $1 \leq r \leq 2$ et n un entier positif, on a*

$$\sum_{s \in \Sigma(s', 2n+1)} |H(s,s')|^r = \frac{1}{|p_1''|^r} \left(\sum_{i=2}^{q+1} \left| \frac{p_i''}{p_1''} \right|^r \right)^n .$$

Le résultat analogue en échangeant les $'$ et les $''$ est également vrai.

Démonstration. Un $s \in \Sigma(s', 2n+1)$ tel que $H(s,s') \neq 0$ est déterminé par la géodésique $(s_0 = s', \ldots, s_{2n+1} = s)$ et nécessairement s_1 est le voisin spécial s'' de s' ; de même quand s_{2k} est déterminé, s_{2k+1} est son voisin spécial. Par contre, pour s_{2k+1} déterminé, s_{2k+2} est l'un quelconque de ses q voisins non spéciaux. Ainsi

$$\sum_{s \in \Sigma(s', 2n+1)} |H(s,s')|^r = \frac{1}{|p_1''|^r} \sum \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{p_{i_k}''}{p_1''} \right|^r = \frac{1}{|p_1''|^r} \left(\sum_{i=2}^{q+1} \left| \frac{p_i''}{p_1''} \right|^r \right)^n ,$$

où la seconde somme porte sur les $(i_1, \ldots, i_n) \in \{2, \ldots, q+1\}^n$.

D'où le lemme par des calculs faciles ou analogues.

Proposition 3.6. *Supposons $1 \leq r \leq 2$. Alors H est un opérateur l^r si et seulement si*

$$|p_1''|^r > \sum_{i=2}^{q+1} |p_i''|^r \quad \text{et} \quad |p_1'|^r > \sum_{i=2}^{q+1} |p_i'|^r .$$

En particulier sous ces conditions K est un opérateur l^r inversible.

Démonstration. D'après 3.4 la dernière assertion résulte de la première. Si H est un opérateur l^r alors $H * \delta_{s'}$ et $H * \delta_{s''}$ sont dans $l^r(S)$ et d'après le lemme 3.5 les inégalités ci-dessus sont vérifiées. La réciproque résulte du lemme 3.5 et du théorème 2.3.

Remarque 3.7. On généralise ainsi un résultat de [Ft-S; §2] , qui suppose entre autres K symétrique. On trouvera aussi dans cette référence l'origine de la définition de H.

Références

[B-P] W. Betori and M. Pagliacci, *Harmonic analysis for groups acting on trees*, Boll. Un. Mat. Ital. B (6) 3 (1984), 333–349.

[B.K] F. Bouaziz-Kellil, *Représentations sphériques des groupes agissant transitivement sur un arbre semi-homogène*, Bull. Soc. Math. France 116 (1988), 255–278.

[B-J-S] M. Bożejko, T. Januszkiewicz and R. J. Spatzier, *Infinite Coxeter groups do not have Kazhdan's property*, J. Operator Theory 19 (1988), 63–67.

[B-S] M. Bożejko and R. Speicher, *Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces*, Math. Ann. 300 (1994), 97–120.

[C] P. Cartier, *Fonctions harmoniques sur un arbre*, Sympos. Math. 9 (1972), 203–270.

[C_2J_2V] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg and A. Valette, *Groups with the Haagerup Property. Gromov's A-T-menability*, Progr. Math. 197, Birkhäuser, 2001.

[dlH] P. de la Harpe, *Operator algebras, free groups and other groups*, Astérisque 232 (1995), 121–153.

[F] G. Fendler, *Simplicity of the reduced C^*-algebras of certain Coxeter groups*, Illinois J. Math. 47 (2003), 883–887.

[Ft-S] A. Figà-Talamanca and T. Steger, *Harmonic analysis for anisotropic random walks on homogeneous trees*, Mem. Amer. Math. Soc. 531 (1994).

[H] U. Haagerup, *An example of a nonnuclear C^*-algebra which has the metric approximation property*, Invent. Math. 50 (1979), 279–293.

[Ja] T. Januszkiewicz, *For Coxeter groups $z^{|g|}$ is a coefficient of a uniformly bounded representation*, Fund. Math. 174 (2002), 79–86.

[Jo] P. Jolissaint, *Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 317 (1990), 167–196.

[M] W. Młotkowski, *Irreducible representations of free products of infinite groups*, Colloq. Math. 69 (1995), 193–211.

[Sc] G. Schlichting, *Polynomidentitäten und Permutationsdarstellungen lokalkompakten Gruppen*, Invent. Math. 55 (1979), 97–106.

[S] J. P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque 46 (1977).

[Tr] V. I. Trofimov, *Automorphism groups of graphs as topological groups*, Math. Notes 38 (1986), 717–720.

[V] A. Valette, *On the Haagerup inequality and groups acting on $\widetilde{A}_n$-buildings*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47 (1997), 1195–1208.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Monastir
5000 Monastir, Tunisie
E-mail: kellilferdaous@yahoo.fr

Institut Elie Cartan
Unité mixte de Recherche 7502
Université Henri Poincaré
Nancy 1, B.P. 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France
E-mail: rousseau@iecn.u-nancy.fr

Received 22 May 2003
Revised version 18 January 2005 (5212)