

Classification des formes réelles presque compactes des algèbres de Kac–Moody affines

Hechmi Ben Messaoud^a et Guy Rousseau^{b,*}

^a *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Monastir, 5019, Monastir, Tunisie*

^b *Institut Elie Cartan, Unité mixte de recherche 7502, Université Henri Poincaré Nancy I,
BP 239, 54506 Vandoeuvre Lès Nancy, France*

Reçu le 5 septembre 2000

Communiqué par J. Tits

Résumé

Real forms of affine Kac–Moody Lie algebras are either almost split or almost compact. Almost split ones have been already classified [J. Algebra 171, 43–96]. We give here a complete classification of almost compact real forms. Among other results this involves a study à la Borel–Tits of these forms.

© 2003 Elsevier Inc. All rights reserved.

Introduction

Les algèbres de Kac–Moody affines sont les généralisations les plus utiles en dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples complexes et il est logique de s’intéresser à leurs formes réelles, c’est-à-dire à des algèbres de Lie réelles qui, une fois tensorisées par \mathbb{C} , deviennent isomorphes à une algèbre de Kac–Moody affine [27]. Il se trouve que ces formes se répartissent naturellement en deux classes : les formes presque déployées et les formes presque compactes. Nous avons déjà étudié et entièrement classifié les premières [2,7] et nous nous intéressons ici aux secondes ; elles ont déjà été étudiées dans certains cas particuliers [1,9] et de manière plus générale dans [23].

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : hechmi.benmessaoud@fsm.rnu.tn (H. Ben Messaoud), rousseau@iecn.u-nancy.fr (G. Rousseau).

L'idée de [23] pour classifier ces formes presque compactes est de les comparer aux formes compactes, définies par exemple dans [15]. Plus précisément, si la forme $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (presque compacte, mais non compacte) correspond à une conjugaison σ' de l'algèbre de Kac–Moody affine \mathfrak{g} , il existe une conjugaison ω' compacte (i.e., correspondant à une forme compacte) de \mathfrak{g} qui commute à σ' ; ainsi $\sigma = \sigma'\omega'$ est une involution linéaire de \mathfrak{g} , dite de Cartan qui est «de première espèce» (1.3). Malheureusement, cela ne se passe pas aussi bien que dans le cas classique ou le cas presque déployé [2,7] et on obtient ainsi dans [23] uniquement une bijection entre les classes de conjugaison d'involutions de première espèce de \mathfrak{g} et les classes de conjugaison de paires $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ formées d'une forme réelle presque compacte non compacte et d'une involution de Cartan (2.8 et 2.9). Ainsi, la classification par F. Levstein [19] et J. Bausch [6] des involutions de première espèce fournit une liste complète (reproduite ici dans une table) des formes presque compactes non compactes d'algèbres de Kac–Moody affines; mais il était à priori possible que deux formes de cette liste soient isomorphes. On montre dans cet article que ce n'est pas le cas (Théorème 7.6).

Pour cela nous introduisons des invariants à isomorphismes près de ces formes réelles. Le premier est classique (formes intérieures ou formes extérieures), c'est la classe de conjugaison de l'automorphisme de diagramme ρ associé à σ ou σ' . Pour les autres il faut réaliser l'algèbre affine comme algèbre de lacets, tordue ou non tordue. Plus précisément, le quotient \mathfrak{g}'' de l'algèbre dérivée de \mathfrak{g} par son centre est, dans le cas non tordu, de la forme $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie simple complexe; de manière générale \mathfrak{g}'' est l'algèbre des points fixes d'un automorphisme, d'ordre $k = 1, 2$ ou 3 , de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. La forme réelle $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ de \mathfrak{g}'' qui nous intéresse admet des quotients simples de dimension finie qui sont soit une forme réelle de \mathfrak{g} , soit \mathfrak{g} considérée comme algèbre de Lie réelle; on montre que l'on obtient ainsi un invariant (2.15, 3.10 et 3.11).

L'algèbre associative $\mathbb{A} = \mathbb{C}[t^k, t^{-k}]$ est canoniquement associée à \mathfrak{g} (1.10) et \mathfrak{g}'' est une \mathbb{A} -algèbre de Lie. En particulier, la conjugaison σ' de \mathfrak{g} par rapport à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ induit un automorphisme σ' de \mathbb{A} , qui détermine un signe ε^k tel que $\sigma'(t^k) \in \mathbb{R}_+^* \varepsilon^k t^{-k}$ (cf. 2.4 et 2.13). Par comparaison avec l'invariant précédent, on affine cet invariant en un nouvel invariant: le signe ε (6.6).

Une autre voie d'approche est de comparer ces formes réelles aux formes presque déployées. Plus précisément, on cherche les sous-algèbres toriques déployées maximales (SATDM) de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire les sous-algèbres commutatives de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ qui sont diagonalisables à valeurs propres réelles pour la représentation adjointe et maximales pour cette propriété. Malheureusement ces SATDM ne sont, en général, pas conjuguées (4.9); on montre cependant (4.8) qu'elles ont toutes la même dimension: le rang relatif de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ qui est le quatrième invariant. Pour cela on se ramène aux résultats de Borel et Tits [11] pour les groupes réductifs sur les corps: $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ est une $\mathbb{A}^{\sigma'}$ -algèbre de Lie, et en tensorisant par le corps de fractions $\mathbb{K}_{\varepsilon} = \mathbb{C}(t^k)^{\sigma'}$ de $\mathbb{A}^{\sigma'}$, on obtient une algèbre de Lie simple sur \mathbb{K}_{ε} qui est en fait une forme de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}(t)$ et est canoniquement associée à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Si $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$, on montre (Théorème 4.7) que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_{\varepsilon}$ est une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$; la dimension de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est donc bien un invariant. De plus, l'indice de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$, au sens de Tits [30], est un cinquième invariant, plus fin que le précédent mais à peine plus discriminant en fait (Table).

La table du paragraphe 6 indique tous ces invariants pour les formes déduites de la liste de Bausch. On s'aperçoit qu'il reste encore un très petit nombre de cas particuliers où

on ne sait pas encore décider si les formes sont ou non isomorphes. On est alors conduit à regarder de plus près ces cas résiduels : on détermine la structure comme $\mathbb{A}^{\sigma'}$ -module (libre ou non libre, mais de rang 1) de certains espaces radiciels de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ par rapport à $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$. Ceci permet de lever l'incertitude : il n'y a donc aucun isomorphisme entre les formes réelles presque compactes décrites dans la table (Théorème 7.6) et en conséquence, il y a bijection entre formes réelles presque compactes non compactes de \mathfrak{g} et involutions de première espèce de \mathfrak{g} ; les involutions de Cartan d'une forme réelle presque compacte sont conjuguées (Corollaires 7.7 et 7.8).

Pour arriver à ce résultat, nous avons été amenés à développer une théorie à la Borel–Tits des formes réelles presque compactes, qui a beaucoup moins de ressemblance avec le cas classique que pour les formes presque déployées [2]. Nous espérons approfondir cette étude ultérieurement.

Le paragraphe 1 est consacré aux généralités sur les algèbres de Kac–Moody affines et leurs réalisations comme algèbres de lacets. Nous y introduisons aussi, dans le cas non tordu, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{C(I)} = \tilde{\mathfrak{g}}$ et y étudions des propriétés des sous-algèbres paraboliques (fractionnaires) de celle-ci. Au paragraphe 2, nous parlons de formes réelles en rappelant les résultats de [23] et nous étudions les quotients simples de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$. Le paragraphe 3 introduit la notion de réalisation adaptée, ce qui permet une démonstration simple d'un certain nombre de résultats. L'étude théorique du rang relatif de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ est effectuée au paragraphe 4, tandis que le principe de son calcul effectif est montré au paragraphe 5. La table des formes réelles presque compactes non compactes occupe avec ses explications le paragraphe 6. Enfin, au paragraphe 7, on étudie les cas particuliers résiduels pour énoncer enfin les résultats principaux. Un index récapitule les principales notations et définitions.

Cet article reprend (surtout au paragraphe 3 et paragraphe 5) une partie des résultats de la thèse [7] du premier auteur. Par ailleurs, nous remercions le Comité Mixte Franco-Tunisien de Coopération Universitaire qui, en facilitant nos rencontres, a grandement aidé à l'élaboration de cet article.

1. Algèbres de Kac–Moody affines

1.1. On considère une algèbre de Kac–Moody complexe \mathfrak{g} que l'on suppose construite comme dans [15] et avec toutes ses composantes de dimension infinie. Pour les résultats standard suivants, on renvoie à [15] et [20] ou parfois à [16,17,23,25] ou [2]. Il existe une matrice de Cartan généralisée (encore appelée matrice de Kac–Moody) $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ soit engendrée par l'algèbre de Cartan standard \mathfrak{h} et des éléments e_i, f_i pour $i \in I$. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha})$, où Δ désigne le système de racines $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$. On note $\Pi = \{\alpha_i ; i \in I\}$ la base (standard) de Δ . L'ensemble des racines positives (respectivement négatives) est $\Delta^+ = \Delta \cap (\bigoplus_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i)$ (respectivement $\Delta^- = -\Delta^+$).

Les coracines $\alpha_i^{\check{}}$ dans \mathfrak{h} sont telles que $a_{i,j} = \alpha_j(\alpha_i^{\check{}})$ pour tout i, j . Le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est engendré par l'ensemble S des réflexions fondamentales r_i définies par $r_i(h) = h - \alpha_i(h)\alpha_i^{\check{}}$ pour $h \in \mathfrak{h}$. Une racine réelle est une racine conjuguée par W à une racine dans Π , leur ensemble est noté Δ^{re} . Les éléments de $\Delta^{\text{im}} = \Delta \setminus \Delta^{\text{re}}$ sont les racines imaginaires. Le centre de \mathfrak{g} est $\mathfrak{c} = \{h \in \mathfrak{h} ; \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Pi\}$.

1.2. On définit un groupe G (ne dépendant que de l'algèbre dérivée \mathfrak{g}') agissant sur \mathfrak{g} par la représentation adjointe $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$. Il est engendré par des sous-groupes U_α , pour α racine réelle, isomorphes aux groupes additifs \mathfrak{g}_α par un isomorphisme \exp tel que $\text{Ad} \circ \exp = \exp \circ \text{ad}$. Le groupe H associé à la sous-algèbre de Cartan standard \mathfrak{h} est l'ensemble des $g \in G$ qui agissent sur \mathfrak{g}_α (pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$) par multiplication par un scalaire $\alpha(g)$ dépendant multiplicativement de α (en particulier H fixe $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$). Ainsi, pour $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, on a $h \exp(X) h^{-1} = \exp(\alpha(h)X)$, et donc H normalise U_α .

1.3. Une *sous-algèbre de Cartan* (SAC en abrégé) de \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie $\text{ad}_\mathfrak{g}$ -diagonalisable (pour des valeurs propres complexes) maximale. Les SAC de \mathfrak{g} sont conjuguées par G . Une *sous-algèbre de Borel–Iwahori*¹ (SABI) de \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie complètement résoluble maximale de \mathfrak{g} . C'est le cas des sous-algèbres $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha)$ [ou $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha)$] appelées respectivement sous-algèbre de Borel–Iwahori standard positive ou négative. Ces sous-algèbres de Borel–Iwahori \mathfrak{b}^+ et \mathfrak{b}^- ne sont pas conjuguées par G . Les sous-algèbres de Borel–Iwahori conjuguées par G à \mathfrak{b}^+ (respectivement \mathfrak{b}^-) sont dites *positives* (respectivement *négatives*). Si \mathfrak{g} est indécomposable, toute SABI est positive ou négative.

Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de \mathfrak{g} agit de manière compatible à Ad sur G et donc transforme deux SABI conjuguées en deux SABI conjuguées; il est dit de *première espèce* (respectivement *seconde espèce*) s'il transforme une SABI positive en une SABI positive (respectivement négative). Si \mathfrak{g} est indécomposable, tout automorphisme est de première ou de seconde espèce.

1.4. Automorphismes de \mathfrak{g}

Soit \mathfrak{h} la SAC standard de \mathfrak{g} . On définit dans [20] un groupe \tilde{H} qui agit sur G et \mathfrak{g} et qui, dans le cas complexe, vérifie $\text{Ad}(\tilde{H}) = \exp \text{ad}(\mathfrak{h})$. L'*involution de Cartan* ω de \mathfrak{g} est définie par $\omega(e_i) = -f_i$, $\omega(f_i) = -e_i$ et $\omega(h) = -h$ pour $h \in \mathfrak{h}$; elle dépend donc du choix de l'épinglage $(\mathfrak{h}, \Pi, (e_i, f_i)_{i \in I})$ de 1.1. Le *groupe des automorphismes intérieurs* de \mathfrak{g} est l'image $\text{Int}(\mathfrak{g}) := \text{Ad}(\tilde{H} \times G)$ du produit semi-direct de \tilde{H} et G . Son groupe dérivé est le *groupe adjoint* $\text{Ad}(G)$ (noté aussi $\text{Int}'(\mathfrak{g})$ ou $\text{Int}(\mathfrak{g}')$) ou groupe des automorphismes intérieurs de l'algèbre dérivée \mathfrak{g}' . Ces groupes sont intrinsèquement définis par \mathfrak{g} (cf. [23]). On considère le groupe $\text{Aut}(A)$ des permutations ρ de I telles que $a_{\rho i, \rho j} = a_{i, j}$ pour $i, j \in I$. On en déduit une action fidèle de $\text{Aut}(A)$ sur \mathfrak{g}' en posant $\rho(e_i) = e_{\rho i}$ et $\rho(f_i) = f_{\rho i}$; cette action commute à ω , et $\rho(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$, où $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \bigoplus \mathbb{C} \alpha_i^\vee$; plus précisément, $\rho(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\rho i}^\vee$. D'après [20], le groupe $\text{Aut}(A) \times \text{Int}(\mathfrak{g})$ (respectivement $(\text{Aut}(A) \times \Omega) \times \text{Int}(\mathfrak{g})$, où Ω désigne le groupe commutatif engendré par les involutions de Cartan des composantes de \mathfrak{g} , avec $\Omega = \{1, \omega\}$ dans le cas affine) est le groupe $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce (respectivement le groupe $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ de tous les automorphismes) de \mathfrak{g}' (ou $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$). On peut prolonger l'action de $\text{Aut}(A)$

¹ Le nom usuel, en théorie de Kac–Moody, est sous-algèbre de Borel, mais dans le cadre des algèbres de Kac–Moody affines on rencontrera ici des sous-algèbres de Borel en un sens plus classique. Ce nom permettra d'éviter la confusion et se justifie aussi par le fait que ces sous-algèbres sont (dans le cas affine) liées aux sous-groupes d'Iwahori des groupes réductifs sur les corps « locaux » d'égale caractéristique 0.

de \mathfrak{h}' à \mathfrak{h} , et donc de \mathfrak{g}' à \mathfrak{g} , par le choix d'un supplémentaire de \mathfrak{h}' dans \mathfrak{h} . On peut ainsi considérer $\text{Aut}(A)$ comme un groupe d'automorphismes (dits *de diagramme*) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, commutant à ω et normalisant $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ et Ω , et considérer $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ comme un groupe d'automorphismes de \mathfrak{g} , mais ces définitions ne sont pas intrinsèques (cf. [23]). Le sous-groupe $\text{Tr} = \text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ des *transvections* de \mathfrak{g} (noté $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ dans [18, 4.20]) est formé des automorphismes de \mathfrak{g} qui induisent l'identité sur \mathfrak{g}' (respectivement $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$); il commute à $\text{Int}(\mathfrak{g})$ et ω , et est isomorphe au groupe additif des applications \mathbb{C} -linéaires de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ dans \mathfrak{c} (cf. [23]). Le groupe des automorphismes (respectivement des automorphismes de première espèce) de \mathfrak{g} est $\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}(\mathfrak{g}') \ltimes \text{Tr}$ (respectivement $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}) = \text{Aut}_1(\mathfrak{g}') \ltimes \text{Tr}$).

1.5. Réalisations des algèbres affines

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie complexe réductive, θ_0 un automorphisme de \mathfrak{g} d'ordre divisant m , $\varepsilon_m = e^{2i\pi/m}$ une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité, et (\cdot, \cdot) une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur \mathfrak{g} invariante sous $\text{ad}(\mathfrak{g})$ et θ_0 (lorsque \mathfrak{g} est semi-simple on prendra pour (\cdot, \cdot) la forme de Killing).

Pour $j \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathfrak{g}_j := \{x \in \mathfrak{g} ; \theta_0(x) = (\varepsilon_m)^j x\}$; ce sous-espace de \mathfrak{g} ne dépend que de la classe de j modulo m , et $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathfrak{g}_j$. D'après Borel–Mostow [10], θ_0 fixe un élément semi-simple régulier R de \mathfrak{g} . Notons \mathfrak{h} le centralisateur de R dans \mathfrak{g} ; alors \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan θ_0 -stable de \mathfrak{g} , et $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}_0 := (\mathfrak{h})^{\theta_0} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 . On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie infinie :

$$l(\mathfrak{g}, \theta_0, \varepsilon_m) := \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{g}_j \otimes t^j) \right) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

La structure d'algèbre de Lie sur \mathfrak{g} est telle que c est central et

$$[x \otimes t^i + \alpha d, y \otimes t^j] = [x, y] \otimes t^{i+j} + i\delta_{i,-j}(x, y)c + j\alpha y \otimes t^j.$$

L'élément d agit diagonalement sur \mathfrak{g} (via la représentation adjointe) avec des valeurs propres entières et induit la \mathbb{Z} -graduation évidente sur $l(\mathfrak{g}, \theta_0, \varepsilon_m)$; on dit que d est l'*élément de graduation* de $l(\mathfrak{g}, \theta_0, \varepsilon_m)$. Ainsi, la sous-algèbre $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \otimes 1) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} que l'on appelle standard (pour un choix standard de \mathfrak{h}).

Remarques.

- (1) On note $\mathfrak{g}^1 = (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{g}_j \otimes t^j)) \oplus \mathbb{C}c$: c'est une sous-algèbre de \mathfrak{g} qui contient l'algèbre dérivée \mathfrak{g}' (et lui est égale si \mathfrak{g} est semi-simple). De même $\mathbb{C}c$ est contenu dans le centre de \mathfrak{g}^1 ou \mathfrak{g}' (et leur est égal si \mathfrak{g} est semi-simple).
- (2) Lorsque \mathfrak{g} est simple, on retrouve la réalisation des algèbres de Kac–Moody affines au sens de Kac [15]. Lorsque \mathfrak{g} est commutative, \mathfrak{g} est une algèbre de Heisenberg infinie. Lorsque \mathfrak{g} se décompose en produit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ d'algèbres de Lie stables par θ_0 ,

l'algèbre \mathfrak{g}^1 ainsi obtenue est le quotient de $\mathfrak{g}_1^1 \oplus \mathfrak{g}_2^1$ par le sous-espace $\mathbb{C}(c_1 - c_2)$ de son centre. Pour ces raisons, on peut dire que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} ci-dessus définie est presque un produit d'algèbres de Kac–Moody affines ; on l'appellera l'algèbre réductive-affine associée au couple $(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta_0)$ (cf. [22]).

Une réalisation d'une algèbre (réductive-) affine \mathfrak{g} est un isomorphisme de \mathfrak{g} sur une algèbre $l(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_m)$.

Notation. On note $\hat{\Delta} = \Delta(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\mathfrak{h}})$ le système de racines de $\mathring{\mathfrak{g}}$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathring{\mathfrak{h}}$, et $\hat{\Pi} = \{\hat{\alpha}_i ; i \in \hat{I}\}$ la base de $\hat{\Delta}$ déterminée par R . L'automorphisme θ_0 permute $\hat{\Delta}$ en stabilisant $\hat{\Pi}$. Ainsi $\bar{\Delta} = \Delta(\mathring{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{h}}) = \{\bar{\alpha} = \hat{\alpha}|_{\bar{\mathfrak{h}}} ; \hat{\alpha} \in \hat{\Delta}\}$ est le système de racines de $\mathring{\mathfrak{g}}$ par rapport à $\bar{\mathfrak{h}}$, et $\bar{\Pi} = \{\bar{\alpha} ; \hat{\alpha} \in \hat{\Pi}\}$ sa base. On a donc $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathring{\mathfrak{h}} \oplus (\bigoplus_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}} \mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{\alpha}})$. On note $(\hat{p}_i)_{i \in \hat{I}}$ la base duale de $\hat{\Pi}$ dans $\mathring{\mathfrak{h}}$ dont les éléments sont les poids fondamentaux. Cette base est permutée par θ_0 . La base duale de $\bar{\Pi}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}$ est donc formée des $\bar{p}_i = \sum \hat{p}_j$, où la somme porte sur les j tels que $\bar{\alpha}_j = \bar{\alpha}_i$. Dans la suite, on identifie un élément x de $\mathring{\mathfrak{g}}$ avec son image $x \otimes 1$ dans \mathfrak{g} (ou \mathfrak{g}^1 ou \mathfrak{g}'' , cf. ci-dessous). En particulier, les \bar{p}_i sont des éléments de \mathfrak{h} , et $\bar{\mathfrak{h}}$ est une partie de \mathfrak{h} .

1.6. L'application translation (cf. [2] ou [24])

On note :

- (1) $\mathfrak{g}'' = l''(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta_0, \varepsilon_m)$ le \mathfrak{g}^1 -module $\mathfrak{g}^1/\mathbb{C}c$ (c'est aussi une algèbre de Lie, identifiée avec la sous-algèbre $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\mathring{\mathfrak{g}}_j \otimes t^j)$ de $\mathring{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$), et \mathcal{T} l'application translation de \mathfrak{g}'' définie par $\mathcal{T}(x \otimes t^j) = x \otimes t^{j+m}$. L'application \mathcal{T} ainsi définie est un automorphisme de \mathfrak{g}^1 -modules.
L'application $\phi : \mathfrak{g}''/(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}'' \rightarrow \mathring{\mathfrak{g}}$, définie par $\phi(x \otimes t^j) = (\varepsilon_m)^j x$, est un isomorphisme d'algèbres de Lie et permet d'identifier ces deux algèbres ; on peut en fait remplacer ε_m par n'importe quelle racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, mais on fixera ce choix pour la suite.
- (2) \mathbb{A} l'algèbre (parfois appelée *centroïde*) des endomorphismes linéaires de \mathfrak{g}'' commutant à l'action adjointe de \mathfrak{g}' (ou \mathfrak{g}''). Pour tout polynôme de Laurent $P \in \mathbb{C}[t^m, t^{-m}]$, la multiplication par P est un endomorphisme linéaire de \mathfrak{g}'' qui appartient à \mathbb{A} ; donc $\mathbb{C}[t^m, t^{-m}] \subset \mathbb{A}$, et en particulier $\mathcal{T} \in \mathbb{A}$.

1.7. Changement de réalisation d'une algèbre

Soient h un élément de $\mathring{\mathfrak{h}}_0$ à valeurs propres entières (pour la représentation adjointe de $\mathring{\mathfrak{g}}$), $p \in \mathbb{N}^*$, et $\varepsilon_{mp} = e^{2i\pi/(mp)}$ une racine $p^{\text{ième}}$ de ε_m . Alors $H := \exp(\frac{2i\pi}{mp} \text{ad } h)$ est un automorphisme de $\mathring{\mathfrak{g}}$ tel que $H(x) = (\varepsilon_{mp})^N x$ pour $x \in \mathring{\mathfrak{g}}$ tel que $[h, x] = Nx$. Cet automorphisme commute à θ_0 , et $\theta := \theta_0 H$ est un automorphisme de $\mathring{\mathfrak{g}}$ d'ordre divisant mp . On considère donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 = l(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_{mp})$ et on note C, D et \mathcal{T}_1 les analogues pour \mathfrak{g}_1 de c, d et \mathcal{T} pour \mathfrak{g} .

Proposition 1.8 (cf. [24] ou [2]). *L'application $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_1$ définie par :*

$$\begin{aligned} \psi(x \otimes t^j) &= x \otimes t^{pj+N} + \delta_{j,0}(h, x)C ; \quad \text{pour } x \in \mathfrak{g}_j \text{ tel que } [h, x] = Nx, \\ \psi(c) &= pC, \quad \psi(d) = (D - h)/p, \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie qui commute aux applications translations de \mathfrak{g}'' et \mathfrak{g}_1'' (i.e., $\psi T \psi^{-1} = T_1$). Cet isomorphisme induit un isomorphisme entre les sous-algèbres de Cartan standard de \mathfrak{g} et \mathfrak{g}_1 associées à \mathfrak{h} .

Remarque. En particulier, lorsque $h = 0$, on trouve que $l(\mathfrak{g}, \theta_0, \varepsilon_m)$ est isomorphe à $l(\mathfrak{g}, \theta_0, \varepsilon_{mp})$.

Corollaire 1.9. *Lorsque \mathfrak{g} est simple, l'algèbre $\mathfrak{g} = l(\mathfrak{g}, \theta_0, \varepsilon_m)$ ne dépend (à un isomorphisme près) que de \mathfrak{g} et du plus petit entier k tel que $(\theta_0)^k$ soit intérieur. Il existe alors un automorphisme de diagramme ξ de \mathfrak{g} d'ordre k tel que \mathfrak{g} soit isomorphe à $l(\mathfrak{g}, \xi, \varepsilon_k)$.*

Définition [15]. Dans ce cas, l'algèbre de Kac–Moody affine \mathfrak{g} est dite *de type Aff k* . Elle est dite *tordue* si $k > 1$ (donc = 2, 3) et *non tordue* si $k = 1$ (on a alors en particulier $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$). Si le nom de \mathfrak{g} est X_n , alors le nom de \mathfrak{g} est $X_n^{(k)}$. La réalisation $l(\mathfrak{g}, \xi, \varepsilon_k)$ de \mathfrak{g} est dite *standard*.

Démonstration. Il est connu et assez facile de démontrer (en adaptant la démonstration de [4,19] ou [5]) que tout automorphisme d'ordre fini de \mathfrak{g} est de la forme $\theta_0 H$ ci-dessus, avec θ_0 un automorphisme de diagramme, et il est alors clair que θ_0 est déterminé (à un isomorphisme près) par k . \square

Proposition 1.10. *On conserve les notations de 1.6(2), et on suppose que \mathfrak{g} est simple. Alors :*

- (1) $\mathbb{A} = \mathbb{C}[t^m, t^{-m}]$ est l'algèbre engendrée par T et T^{-1} .
- (2) *Tout automorphisme T du $\text{ad}(\mathfrak{g}'')$ -module \mathfrak{g}'' tel que $(\text{Id} - T)\mathfrak{g}''$ soit un idéal maximal de \mathfrak{g}'' est de la forme aT ou aT^{-1} avec $a \in \mathbb{C}^*$.*

N.B. :

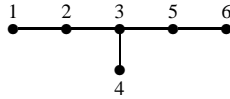
- (i) Ainsi, l'application translation T est canoniquement déterminée par l'algèbre de Lie \mathfrak{g}'' au changement près de T en $aT^{\pm 1}$, avec $a \in \mathbb{C}^*$.
- (ii) Si \mathfrak{g} n'est pas simple, ceci peut ne plus être vrai.

Démonstration. D'après le Corollaire 1.9, on peut se ramener au cas où $\theta_0 = \xi$ est un automorphisme de diagramme de \mathfrak{g} d'ordre $m = k$. Ainsi, l'assertion (2) est l'énoncé de la Proposition 5.6 de [2]; le début de la démonstration de cette proposition prouve l'assertion (1). \square

1.11. On suppose dans la suite de ce paragraphe 1 que $\hat{\mathfrak{g}}$ est simple, et donc que \mathfrak{g} définie en 1.5 est une algèbre affine.

(1) On considère la réalisation standard $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, \varepsilon_k)$ de \mathfrak{g} . Fixons $(\check{e}_i, \check{f}_i)_{i=1,2,\dots,n}$ un système de générateurs de Chevalley de $\hat{\mathfrak{g}}$ sur lequel ξ agit comme un automorphisme de diagramme d'ordre k . Soit $\hat{\omega}$ l'involution de Cartan de $\hat{\mathfrak{g}}$ ($\hat{\omega}(\check{e}_i) = -\check{f}_i$, et $(\hat{\omega})^2 = \text{Id}$) et posons $\check{\alpha}_i = [\check{e}_i, \check{f}_i]$; ces coracines simples forment une base de $\check{\mathfrak{h}}$.

(2) On numérote \hat{I} par $\{1, 2, \dots, n\}$ de manière qu'un système de représentants des orbites de ξ dans \hat{I} soit $J = \{1, 2, \dots, l\}$. Pour cela on choisit la numérotation de Bourbaki [12] sauf dans le cas $\hat{\mathfrak{g}}$ de type E_6 , et ξ d'ordre 2, où l'on choisit la numérotation suivante :



Pour $i = 1, \dots, l$, on note :

- (i) n_i le cardinal de l'orbite de $\check{\alpha}_i$ ou de i ;
- (ii) $e_i = \check{e}_i + \xi(\check{e}_i) + \dots + \xi^{n_i-1}(\check{e}_i)$ sauf dans le cas de $A_{2l}^{(2)}$ où $e_l = \sqrt{2}(\check{e}_l + \check{e}_{l+1})$;
- (iii) $f_i = \hat{\omega}(e_i)$;
- (iv) $\alpha_i = [e_i, f_i]$.

Ainsi $(e_i, f_i)_{i=1,\dots,l}$ est un système de générateurs de Chevalley de l'algèbre de Lie simple $\hat{\mathfrak{g}}_0$.

(3) Il existe un unique poids $\bar{\theta}_0 \in (\bar{\mathfrak{h}})^*$ du $\hat{\mathfrak{g}}_0$ -module $\hat{\mathfrak{g}}_1$ qui soit de hauteur maximale (cf. [15] ou [4]). On choisit $E_0 \in (\hat{\mathfrak{g}}_1)_{-\bar{\theta}_0}$ et on pose $F_0 = -\hat{\omega}(E_0)$, $e_0 = t \otimes E_0$, $f_0 = t^{-1} \otimes F_0$ et $\alpha_0 = [e_0, f_0]$. On normalise de façon convenable E_0 et la forme invariante sur $\hat{\mathfrak{g}}$ (cf. [15]). Alors $(\mathfrak{h}, e_i, f_i ; i = 0, 1, \dots, l)$ est un système générateur (dit *standard*) de \mathfrak{g} associé à une matrice de Cartan généralisée (cf. 1.1). La numérotation de ces générateurs est la même que celle de Kac [15] sauf dans le cas $A_{2l}^{(2)}$ où elle est inversée.

(4) RACINES : L'ensemble $\bar{\Delta}_j$ des poids du $\bar{\mathfrak{h}}$ -module $\hat{\mathfrak{g}}_j$ ne dépend de j que modulo k . On prolonge un élément $\alpha \in \bar{\Delta}_j$ à $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}} \oplus (\mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d)$, en posant $\alpha(\mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d) = 0$.

On définit $\delta \in \mathfrak{h}^*$, en posant $\delta(d) = 1$, et $\delta(\bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c) = 0$. Alors on a la description suivante du système Δ des racines de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, en séparant racines réelles et imaginaires, $\Delta^{\text{re}} = \{j\delta + \alpha ; j \in \mathbb{Z}, \alpha \in \bar{\Delta}_j\}$, $\Delta^{\text{im}} = \{j\delta ; j \in \mathbb{Z}^*\}$ avec pour espaces radiciels $\mathfrak{g}_{j\delta+\alpha} = (\hat{\mathfrak{g}}_j)_\alpha \otimes t^j$ et $\mathfrak{g}_{j\delta} = (\hat{\mathfrak{h}}_j) \otimes t^j$.

(5) BASE : Pour $i = 1, \dots, l$, $\bar{\alpha}_i$ est un poids de $\bar{\mathfrak{h}}$ dans $\hat{\mathfrak{g}}_0$, son prolongement α_i à \mathfrak{h} est donc dans Δ . On a en fait $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}e_i$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbb{C}f_i$. Le poids $\bar{\theta}_0$ se prolonge à \mathfrak{h} , et $\alpha_0 = \delta - \bar{\theta}_0$ est aussi une racine de Δ . On a en fait $\mathfrak{g}_{\alpha_0} = \mathbb{C}e_0$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_0} = \mathbb{C}f_0$. La famille $\Pi = (\alpha_i)_{i=0,1,\dots,l}$ est une base de racines de Δ .

Soient $(a_i)_{i=1,\dots,l}$ les coordonnées de $\bar{\theta}_0$ dans la base des $\bar{\alpha}_i$, et si on pose $a_0 = 1$, alors la plus petite racine imaginaire positive δ de Δ est $\delta = \sum_{i=0}^l a_i \alpha_i$ (les coefficients a_0, a_1, \dots, a_l sont ceux figurant sur le diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} (voir, par exemple, [15, 4.8]) si on tient compte de la numérotation choisie pour $A_{2l}^{(2)}$).

Si on pose $p_0 = d$, et $p_i = \bar{p}_i + a_i d$ pour $i = 1, \dots, l$, on obtient une famille libre $(p_i)_{i=0,1,\dots,l}$ d'éléments de \mathfrak{h} vérifiant $\langle \alpha_i, p_j \rangle = \delta_{i,j}$, $i, j = 0, 1, \dots, l$; les éléments p_i sont les *poids fondamentaux*, ils ne constituent pas une base duale à cause du centre sur lequel tous les α_i s'annulent.

Si $\hat{\omega}$ est l'involution de Cartan de $\hat{\mathfrak{g}}$ telle que $\hat{\omega}(\hat{e}_i) = -\hat{f}_i$, $i = 1, \dots, n$, l'involution de Cartan ω de \mathfrak{g} induit sur \mathfrak{g}'' le même automorphisme que $\hat{\omega} \otimes \iota$ de $\hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, où $\iota(P(t)) = P(t^{-1})$.

1.12. Algèbre de Lie simple associée sur un corps de fractions rationnelles

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Kac–Moody affine et $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathbb{C}c$. On associe à \mathfrak{g} l'algèbre \mathbb{A} des endomorphismes $\text{ad}(\mathfrak{g}'')$ -linéaires de \mathfrak{g}'' (cf. 1.6); ceci signifie que \mathfrak{g}'' est une \mathbb{A} -algèbre de Lie. Si \mathbb{K} est le corps des fractions de \mathbb{A} , on peut donc considérer la \mathbb{K} -algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{g}'' \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{K}$ qui est canoniquement attachée à \mathfrak{g} .

Considérons une réalisation $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_m)$; alors $\mathfrak{g}'' = (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\mathfrak{g}}_j \otimes t^j)$ est une sous-algèbre de $\hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Avec ces notations, l'algèbre \mathbb{A} et le corps \mathbb{K} s'identifient respectivement à $\mathbb{C}[t^m, t^{-m}]$ et à $\mathbb{C}(t^m)$ (cf. Proposition 1.10). Il est alors clair que \mathfrak{g}'' est un \mathbb{A} -module libre de base une base sur \mathbb{C} de $\bigoplus_{1 \leq j \leq m} \hat{\mathfrak{g}}_j \otimes t^j$, et donc de rang la dimension sur \mathbb{C} de $\hat{\mathfrak{g}}$.

Soit γ_m l'automorphisme \mathbb{C} -linéaire, d'ordre m , de $\mathbb{C}(t)$ défini par $\gamma_m f(t) = f(\varepsilon_m^{-1} t)$. Le groupe Γ engendré par γ_m est le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{C}(t)/\mathbb{K}$; de plus Γ stabilise $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$, et $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^{\Gamma} = \mathbb{A}$.

On note $\tilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t)$; c'est une algèbre de Lie simple déployée sur le corps $\mathbb{C}(t)$. On fait agir le groupe Γ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ par $\gamma_m(x \otimes f(t)) = \theta(x) \otimes \gamma_m(f(t))$. Ainsi, la \mathbb{K} -forme $\tilde{\mathfrak{g}}^{\Gamma}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie simple sur \mathbb{K} . Cette forme est quasi-déployée car $\mathcal{B}_0 = \mathfrak{b} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t)$ est une sous-algèbre de Borel Γ -stable de $\tilde{\mathfrak{g}}$, si on note \mathfrak{b} la sous-algèbre de Borel de $\hat{\mathfrak{g}}$ correspondant au système de racines positives stable par θ .

Il est clair que Γ stabilise $\hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ et on a par définition $\mathfrak{g}'' = (\hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}])^{\Gamma}$. On va voir que $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = \tilde{\mathfrak{g}}^{\Gamma}$.

Lemme 1.13. On conserve les notations de 1.12.

- (i) On a $\tilde{\mathfrak{g}} = (\hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \otimes_{\mathbb{C}[t, t^{-1}]} \mathbb{C}(t)$.
- (ii) Un élément \tilde{X} de $\tilde{\mathfrak{g}}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\tilde{X} = X \otimes \frac{P(t)}{Q(t)}$, avec $P(t), Q(t) \in \mathbb{C}[t]$ premiers entre eux tels que : $P(0) = Q(0) = 1$, et $X \in \hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ indivisible (c'est-à-dire que si l'on écrit X dans une base de $\hat{\mathfrak{g}}$ sur \mathbb{C} , le pgcd dans $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ des coordonnées de X est 1).

Démonstration. Laissez au lecteur. \square

Lemme 1.14. On a $(\tilde{\mathfrak{g}})^{\Gamma} = \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$, et la décomposition de tout $\tilde{X} \in (\tilde{\mathfrak{g}})^{\Gamma}$, selon le Lemme 1.13, s'écrit avec $X \in \mathfrak{g}''$ et $P, Q \in \mathbb{C}[t^m] \subset \mathbb{A}$.

Démonstration. On a un plongement évident de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{g}'' \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{K}$ dans $(\tilde{\mathfrak{g}})^{\Gamma}$. Le groupe Γ agissant sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ respecte la décomposition décrite en 1.13. Donc, si $\tilde{X} \in (\tilde{\mathfrak{g}})^{\Gamma}$, l'unicité de

la décomposition prouve que $X \in (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}])^{\Gamma} = \mathfrak{g}''$, et $P, Q \in \mathbb{C}[t]^{\Gamma} = \mathbb{C}[t^m] \subset \mathbb{A}$; en particulier, $\tilde{X} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$. \square

Proposition 1.15. *L'application $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est une injection de l'ensemble des SAC de l'algèbre de Kac–Moody \mathfrak{g}'' dans l'ensemble des \mathbb{K} -SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$.*

De plus, \mathfrak{h} est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ dont les valeurs propres, pour la représentation adjointe sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$, sont dans \mathbb{C} .

Définitions.

- (1) De manière générale, pour une algèbre de Lie \mathfrak{m} sur un corps K , une K -sous-algèbre torique déployée, en abrégé K -SATD ou SATD (respectivement une K -sous-algèbre torique déployée maximale, en abrégé K -SATDM ou SATDM) est une sous algèbre de Lie \mathfrak{t} de \mathfrak{m} qui est diagonalisable à valeurs propres dans K pour la représentation adjointe (respectivement et maximale pour cette propriété). Avec cette définition, une SATDM contient toujours le centre de \mathfrak{m} . Pour les algèbres de Lie qu'on étudiera ici, une sous-algèbre de Cartan (en abrégé SAC) de \mathfrak{m} est une sous-algèbre de Lie \mathfrak{t} de \mathfrak{m} telle que $\mathfrak{t} \otimes \bar{K}$ soit une SATDM de $\mathfrak{m} \otimes \bar{K}$ si \bar{K} est une clôture algébrique de K .
- (2) Dans la situation de la Proposition 1.15, une \mathbb{K} -SATDM de l'image est dite *entière*.

Remarque. L'application n'est pas surjective : pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $m = 1$ (donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}(t)$), l'élément $H = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}(t)) = \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ engendre une SAC (c'est aussi une SATDM) $\mathbb{K}H$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$, puisque H est ad $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ -diagonalisable avec comme valeurs propres $0, \pm 2 \in \mathbb{C}$. Mais $\mathbb{K}H \cap \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) = \mathbb{C}[t, t^{-1}](1+t)H$ ne contient pas d'élément non nul dont les \mathbb{K} -valeurs propres dans la représentation adjointe sont complexes, donc $\mathbb{K}H$ ne peut être entière.

Démonstration. La sous-algèbre de Cartan standard \mathfrak{h}_0 de \mathfrak{g}'' est en fait égale à $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}_0$: l'ensemble des points fixes de $\bar{\mathfrak{h}}$ sous θ . Mais $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ est quasi-déployée et $\bar{\mathfrak{h}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K} \subset (\bar{\mathfrak{h}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t))^{\Gamma}$ en est une SATDM. En particulier, le rang de \mathfrak{g}'' est égal au rang relatif de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$. Si \mathfrak{h} est une SAC de \mathfrak{g}'' , il est clair que $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est une SATD de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ de dimension le rang relatif de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ (d'après ce que l'on vient de voir) donc $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$.

Si \mathfrak{h} est une SAC de \mathfrak{g}'' , il est clair que \mathfrak{h} est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ dont les \mathbb{K} -valeurs propres dans la représentation adjointe sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ sont complexes. L'application $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est donc injective. \square

1.16. Sous-algèbres de Borel fractionnaires dans le cas non tordu

On considère une algèbre de Lie simple complexe \mathfrak{g} et l'on note \mathcal{G} le groupe algébrique connexe simple et simplement connexe associé (vu comme schéma en groupe). L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ est associée à une algèbre de Kac–Moody affine non tordue \mathfrak{g} ; dans ce cas on a $\mathbb{A} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}(t)$. Le groupe $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ agit sur \mathfrak{g}'' par une représentation notée Ad, et $\text{Ad}(\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]))$ est le groupe adjoint $\text{Ad}(G)$ agissant sur \mathfrak{g}'' (cf. [20]). L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est simple sur \mathbb{K} ; on considère ses sous-algèbres

de Borel (on les appellera *sous-algèbres de Borel fractionnaires*, en abrégé *SABF*, pour ne pas les confondre avec les sous-algèbres de Borel–Iwahori de l’algèbre de Kac–Moody \mathfrak{g}). Si \mathfrak{b} est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ une SAC, alors $\mathfrak{B} := \mathfrak{b} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est une sous-algèbre de Borel fractionnaire de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ contenant la \mathbb{K} -sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} := \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$. Si \mathfrak{u} est le radical nilpotent de \mathfrak{b} , alors $\mathfrak{U} := \mathfrak{u} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{K}$ est le radical nilpotent de \mathfrak{B} sur \mathbb{K} . On note respectivement $\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{U}$ le sous-groupe de Borel, le tore, le sous-groupe unipotent de \mathcal{G} correspondant à $\mathfrak{b}, \mathfrak{h}$ et \mathfrak{u} . Dans la suite, on choisit une paire $(\mathfrak{b}, \mathfrak{h})$ dans \mathfrak{g} dite « standard » et on note $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{U}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{H}_0$ et \mathcal{U}_0 les objets standard associés.

Lemme 1.17. *Soit R un anneau unitaire intègre et noethérien de corps de fractions K . Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) R est principal.
- (ii) $SL_2(R)$ agit transitivement sur l’espace projectif $\mathbb{P}_1(K)$.
- (iii) $SL_2(R)$ agit transitivement sur l’ensemble des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{sl}_2(K)$.

Démonstration. Une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{sl}_2(K)$ est le stabilisateur d’une unique droite de K^2 , d’où l’équivalence entre (ii) et (iii).

(ii) \Rightarrow (i) La conjugaison par $SL_2(R)$ d’un élément quelconque $(a, b) \in R^2 \setminus \{0\}$ à un élément de la forme $(c, 0) \in R^2 \setminus \{0\}$ montre que les idéaux de R engendrés par (a, b) et c sont les mêmes ; par récurrence, tous les idéaux de type fini (et donc tous les idéaux) de R sont principaux.

(i) \Rightarrow (ii) Un élément quelconque de $\mathbb{P}_1(K)$ est la classe d’un élément $(a, b) \in R^2 \setminus \{0\}$. D’après le théorème des diviseurs élémentaires, il existe $\phi \in GL_2(R)$ tel que $\phi(a, b) = (c, 0)$, avec $c \in R \setminus \{0\}$. Il est facile de modifier ϕ pour qu’il appartienne à $SL_2(R)$, et donc tous les éléments de $\mathbb{P}_1(K)$ sont conjugués par $SL_2(R)$ à la classe de $(1, 0)$. \square

Proposition 1.18. *Avec les notations de 1.16, Le groupe $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ permute transitivement les sous-algèbres de Borel fractionnaires de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t)$.*

Démonstration. Soit \mathfrak{B} une SABF quelconque de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$, alors $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}_0$ contient une \mathbb{K} -sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} . L’algèbre \mathfrak{B} est la transformée de \mathfrak{B}_0 par un élément w du groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}, \mathfrak{h})$ et on raisonne par récurrence sur la longueur de w que l’on note $d(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B})$. C’est clair pour $d(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}) = 0$. Si $d(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}) \geq 1$, il existe \mathfrak{B}' SABF de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ contenant \mathfrak{h} telle que $d(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}') = d(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}) - 1$ et $d(\mathfrak{B}', \mathfrak{B}) = 1$. L’hypothèse de récurrence s’applique à \mathfrak{B}' , et donc en conjuguant par un élément de $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, on peut supposer que $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_0$ et $d(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}) = 1$. Il existe alors une racine simple α par rapport à \mathfrak{B}_0 telle que $\mathfrak{B} = r_{\alpha}(\mathfrak{B}_0)$; en particulier, \mathfrak{B}_0 et \mathfrak{B} sont contenues dans la même sous-algèbre parabolique $\mathfrak{P} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})_{-\alpha} \oplus \mathfrak{B}_0$ qui vérifie $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{P}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{B}_0) + 1$. Si l’on regarde maintenant la SAC \mathfrak{h}_0 de $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$, on a la même description de \mathfrak{P} par rapport à \mathfrak{h}_0 et le système de racines $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}, \mathfrak{h}_0)$: $\mathfrak{P} = \mathbb{K}\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{B}_0$, où α est une racine simple de $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}, \mathfrak{h}_0)$ relativement à \mathfrak{B}_0 . Un facteur de Levi de \mathfrak{P} est $\mathfrak{s}_{\alpha} = \mathbb{K}\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbb{K}\alpha' \oplus \mathbb{K}\mathfrak{g}_{\alpha}$ et l’on sait que les SABF de \mathfrak{P} sont en correspondance bijective avec les SABF de \mathfrak{s}_{α} (qui est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$). D’après le Lemme 1.17, ces SABF sont conjuguées par

$SL_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. Mais il existe un monomorphisme entre $SL_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ et $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ et donc \mathfrak{B} et \mathfrak{B}_0 sont conjuguées par $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. \square

Remarque. Le lecteur familier avec le langage des immeubles aura reconnu un raisonnement typique de cette théorie. En fait, cette proposition permet de montrer que l'immeuble (sphérique) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ est l'immeuble sphérique à l'infini que Mark Ronan [21] associe à l'immeuble affine jumelé de \mathfrak{g} [26,31]. Cet immeuble sphérique est contenu dans les deux immeubles sphériques à l'infini (ceux de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((t))$ et de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((t^{-1}))$) des immeubles affines constituant l'immeuble jumelé.

1.19. *Sous-algèbres paraboliques fractionnaires standard*

On se place toujours dans les conditions de 1.16.

Soit \mathfrak{p} une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{b} . Si $(\alpha_i)_{i \in J}$ est la base de $\mathring{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ correspondant à \mathfrak{b} , il existe une partie $J \subset I$ telle que

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_J = \mathfrak{b} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathring{\Delta}^- \cap \mathbb{Z}J} \mathfrak{g}_{\alpha} \right).$$

Le radical nilpotent de \mathfrak{p} est $\mathfrak{u} = (\bigoplus_{\alpha \in \mathring{\Delta}^+ \setminus \mathbb{N}J} \mathfrak{g}_{\alpha})$, et $\mathring{\mathfrak{l}} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \mathring{\Delta} \cap \mathbb{Z}J} \mathfrak{g}_{\alpha})$ est un facteur de Levi de \mathfrak{p} .

Le centre de $\mathring{\mathfrak{l}}$ est $\mathfrak{h}_J = \{h \in \mathfrak{h} ; \alpha_j(h) = 0, \forall j \in J\}$. On note \mathcal{P}, \mathcal{U} les sous-groupes de \mathcal{G} correspondant à \mathfrak{p} et \mathfrak{u} . La sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ notée $\mathfrak{P} := \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$ est appelée *sous-algèbre parabolique fractionnaire (SAPF)*.

Proposition 1.20. *Avec les notations de 1.19, on a :*

- (1) $\mathcal{U}(\mathbb{C}(t))$ agit simplement transitivement sur les centres de facteurs de Levi de la sous-algèbre parabolique fractionnaire $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$.
- (2) $\mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ agit simplement transitivement sur les SATD \mathfrak{t} de \mathfrak{g} contenues dans $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ et telles que $\mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t)$ soit le centre d'un facteur de Levi de \mathfrak{P} .
- (3) Plus généralement, si \mathfrak{t} est une SATD de \mathfrak{g} contenue dans $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ et telle que $\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}(t)$ soit contenue dans le centre d'un facteur de Levi de $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$, alors il existe $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ tel que $u(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{h}_J$.

Démonstration. (1) On sait que $\mathcal{U}(\mathbb{C}(t))$ permute transitivement les facteurs de Levi de \mathfrak{P} et donc leurs centres. D'autre part, le normalisateur de \mathfrak{h}_J ne rencontre pas \mathcal{U} , d'où le résultat.

(2) Il est clair que $\mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ agit sur l'ensemble de ces SATD. Soit \mathfrak{t} une telle SATD, montrons qu'elle est conjuguée de \mathfrak{h}_J par un unique élément de $\mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. D'après (1), il existe $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}(t))$ tel que $\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}(t) = u(\mathfrak{h}_J \otimes \mathbb{C}(t))$. D'après la Proposition 1.15, on a alors $\mathfrak{t} = u(\mathfrak{h}_J)$, et réciproquement cette relation implique $\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}(t) = u(\mathfrak{h}_J \otimes \mathbb{C}(t))$, d'où l'unicité de u . Voyons maintenant que $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. On a un isomorphisme de variétés algébriques complexes $\exp: \mathfrak{u} \rightarrow \mathcal{U}$. Ainsi $\mathcal{U}(\mathbb{C}(t)) = \exp(\mathfrak{u} \otimes \mathbb{C}(t))$ et

$\mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) = \exp(\mathfrak{u} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}])$. On note $v = \exp^{-1}(u) \in \mathfrak{u} \otimes \mathbb{C}(t)$. Par hypothèse, on a donc $\text{Ad}(\exp(v))\mathfrak{h}_J \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, ou encore $\exp(\text{ad } v)\mathfrak{h}_J \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

Soit $H \in \mathfrak{h}_J$ tel que $\alpha(H) \in \mathbb{C}^*$, $\forall \alpha \in \mathring{\Delta}^+ \setminus \mathbb{N}J$; on a

$$\exp(\text{ad } v)H = H + [v, H] + \frac{1}{2}[v, [v, H]] + \dots \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}].$$

On voit alors facilement, par récurrence sur la hauteur de $\alpha \in \mathring{\Delta}^+ \setminus \mathbb{N}J$, que la composante de v dans $\mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathbb{C}(t)$ est en fait dans $\mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, et donc $v \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$; d'où le résultat.

(3) Il existe une SAC \mathfrak{h} de \mathfrak{g} qui contient \mathfrak{t} . Soit \mathfrak{z} le centralisateur de \mathfrak{t} dans $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, alors le centralisateur $(\mathfrak{z} \otimes_{\mathbb{C}[t, t^{-1}]} \mathbb{C}(t))$ de \mathfrak{t} dans $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t)$ a pour centre $\mathfrak{t}' \otimes \mathbb{C}(t)$, où $\mathfrak{t}' = \{x \in \mathfrak{h} ; \alpha(x) = 0, \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \text{ tel que } \alpha(\mathfrak{t}) = 0\}$ est une \mathbb{C} -SATD de l'algèbre de Kac–Moody \mathfrak{g} .

Il existe une SAC \mathfrak{h}_1 de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}(t)$ qui contient $\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}(t)$ et qui est contenue dans une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$. Ainsi $\mathfrak{z} \otimes \mathbb{C}(t) + \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$ est une sous-algèbre parabolique fractionnaire de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}(t)$ contenant $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$; elle s'écrit donc $\mathfrak{p}_{J'} \otimes \mathbb{C}(t)$, avec $J \subset J'$. Ainsi \mathfrak{t}' est une \mathbb{C} -SATD de \mathfrak{g} , avec $\mathfrak{t}' \otimes \mathbb{C}(t)$ centre de $\mathfrak{z} \otimes \mathbb{C}(t)$ qui est un facteur de Levi de $\mathfrak{p}_{J'} \otimes \mathbb{C}(t)$. D'après (2), il existe $u \in \mathcal{U}_{J'}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ tel que $u(\mathfrak{t}) \subset u(\mathfrak{t}') = \mathfrak{h}_{J'} \subset \mathfrak{h}_J$. Comme $\mathcal{U}_{J'} \subset \mathcal{U}_J$, on a le résultat. \square

2. Formes réelles

On rappelle que, depuis 1.11, l'algèbre \mathfrak{g} est supposée affine.

2.1. Définitions et notations

On note $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} qui sont soit \mathbb{C} -linéaires soit *semi-linéaires* (ou antilinéaires, i.e., $\phi(\lambda x) = \bar{\lambda}\phi(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, et $x \in \mathfrak{g}$). Le groupe $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ est distingué dans $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ et d'indice 2. On appelle *semi-involution* de \mathfrak{g} un automorphisme semi-linéaire d'ordre 2. Pour toute semi-involution σ' , on a la décomposition en produit semi-direct

$$\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1, \sigma'\} \ltimes \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Si σ' est une semi-involution de \mathfrak{g} , l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ est une forme réelle de \mathfrak{g} , au sens où l'application évidente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans \mathfrak{g} est un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes; de plus, σ' est la conjugaison de \mathfrak{g} par rapport à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On obtient ainsi une correspondance bijective entre semi-involutions et formes réelles. La forme réelle *normale* (ou *déployée*) standard est la sous-algèbre de Lie réelle de \mathfrak{g} engendrée par les $e_i, f_i, \alpha_i^{\check{}}$, et d . La semi-involution correspondante σ'_n est la *semi-involution normale*.

2.2. Structure de $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$

La semi-involution normale σ'_n commute à ω et $\text{Aut}(A)$, elle normalise $\text{Int}(\mathfrak{g})$ et $\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ mais ne commute pas avec eux. La décomposition suivante de $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ se déduit donc de celle de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$:

$$\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = (\{1, \sigma'_n\} \times \{1, \omega\} \times \text{Aut}(A)) \times (\text{Ad}(G.\tilde{H}) \times \text{Tr}).$$

On note $\text{Int}_{\text{Tr}}(\mathfrak{g}) = \text{Ad}(G.\tilde{H}) \times \text{Tr}$ le groupe des automorphismes « presque intérieurs » et $\text{Ext}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1, \sigma'_n\} \times \{1, \omega\} \times \text{Aut}(A)$.

La classe de conjugaison d'un élément ϕ de $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ détermine donc un élément ϕ_1 de $\{1, \sigma'_n\}$, un élément ϕ_2 de $\{1, \omega\}$, et une classe de conjugaison Φ dans $\text{Aut}(A)$. On a $\phi_1 = 1$ (respectivement σ'_n) si et seulement si ϕ est linéaire (respectivement semi-linéaire).

On a $\phi_2 = 1$ (respectivement ω) si et seulement si ϕ est de première (respectivement seconde) espèce, c'est à dire si et seulement si ϕ transforme la sous-algèbre de Borel–Iwahori positive standard \mathfrak{b}^+ en une conjuguée (par G) de \mathfrak{b}^+ (respectivement de la sous-algèbre de Borel–Iwahori négative standard \mathfrak{b}^-). Si de plus ϕ est linéaire, ϕ induit l'identité (respectivement moins l'identité) sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ et le centre \mathfrak{c} .

2.3. Automorphismes et application translation

L'algèbre \mathbb{A} associée à l'algèbre affine \mathfrak{g} contient « une application translation \mathcal{T} » unique au changement $\mathcal{T} \mapsto a\mathcal{T}^{\pm 1}$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$) près (cf. 1.10).

Pour une réalisation $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta, \varepsilon_m)$, on a $\mathbb{A} = \mathbb{C}[t^m, t^{-m}]$, et \mathcal{T} est la multiplication par t^m . On voit alors facilement (cf. [23]) que :

$$\begin{aligned} G \text{ et } \text{Tr} &\text{ commutent à } \mathbb{A}, \text{ donc à } \mathcal{T}; \\ \omega &\text{ est } \mathbb{C}\text{-linéaire sur } \mathbb{A}, \text{ et } \omega\mathcal{T}\omega^{-1} = \mathcal{T}^{-1}. \end{aligned}$$

Un élément $\phi = \exp i\pi \text{ad}(h) \in \tilde{H}$ ($h \in \mathfrak{h}$) est \mathbb{C} -linéaire sur \mathbb{A} , et $\phi\mathcal{T}\phi^{-1} = e^{i\pi m\delta(h)}\mathcal{T}$, où δ est la plus petite racine imaginaire positive de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$.

La semi-involution σ'_n est antilinéaire sur \mathbb{A} , et $\sigma'_n\mathcal{T}\sigma'_n = \mathcal{T}$; dans la réalisation standard, sur \mathfrak{g}'' , σ'_n est la restriction de $\check{\sigma}'_n \otimes \text{conj}$, où $\check{\sigma}'_n$ est une semi-involution normale de \mathfrak{g} et $\text{conj}(P(t)) = \overline{P(t)}$.

L'action de $\text{Aut}(A)$ est \mathbb{A} -linéaire, sauf dans le cas $A_{2l}^{(1)}$ où l'automorphisme de diagramme ρ_1 d'ordre 2 (unique à conjugaison près) vérifie $\rho_1(P(t)x) = P(-t)\rho_1(x)$ (cf. [4] ou [5]).

Lemme 2.4. *Si ϕ est une semi-involution de seconde espèce et \mathcal{T} est une application translation de \mathfrak{g} , on a $\phi\mathcal{T}\phi^{-1} = a_\phi\mathcal{T}^{-1}$, avec $a_\phi \in \mathbb{R}^*$. Le signe de a_ϕ ne dépend pas de \mathcal{T} et est un invariant par conjugaison de ϕ sous $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. D'après la relation d'unicité de \mathcal{T} (cf. Proposition 1.10), on a bien $\phi\mathcal{T}\phi^{-1} = a_\phi\mathcal{T}^{\pm 1}$, avec $a_\phi \in \mathbb{C}^*$. Si ϕ est de seconde espèce, on a, d'après 2.2 et 2.3,

$\phi T \phi^{-1} = a_\phi T^{-1}$, et $T = \phi(a_\phi T^{-1})\phi^{-1} = \bar{a}_\phi \phi T^{-1} \phi^{-1} = \frac{\bar{a}_\phi}{a_\phi} T$; donc $a_\phi = \bar{a}_\phi$, et $a_\phi \in \mathbb{R}^*$.

On a $\phi(bT)\phi^{-1} = \bar{b}\phi T\phi^{-1} = \bar{b}a_\phi T^{-1} = \bar{b}ba_\phi(bT)^{-1}$, et $\phi(T^{-1})\phi^{-1} = (a_\phi T^{-1})^{-1} = a_\phi^{-1}(T^{-1})^{-1}$; le signe de a_ϕ ne dépend donc pas du choix de T .

D'autre part, pour $g \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, $T' = g^{-1}Tg$ est une autre application translation, et on a donc $\phi(T')\phi^{-1} = a'_\phi(T')^{-1}$, où a'_ϕ est de même signe que celui de a_ϕ ; par conséquent, $(g\phi g^{-1})T(g\phi^{-1}g^{-1}) = g(\phi T' \phi^{-1})g^{-1} = a'_\phi g(T')^{-1}g^{-1} = a'_\phi T^{-1}$; d'où le résultat. \square

2.5. Semi-involutions de Cartan

La *semi-involution de Cartan standard* ω' de \mathfrak{g} est l'unique semi-involution de \mathfrak{g} telle que $\omega'(e_i) = -f_i$, et $\omega'(d) = -d$. On a donc $\omega' = \omega\sigma'_n = \sigma'_n\omega$. Dans la réalisation standard de \mathfrak{g} , ω' induit sur \mathfrak{g}'' la restriction de $\bar{\omega}' \otimes t'$, où $\bar{\omega}'$ est une semi-involution de Cartan de $\hat{\mathfrak{g}}$ et $t'(P(t)) = \bar{P}(t^{-1})$. On appelle *semi-involution de Cartan (SIC)* de \mathfrak{g} tout conjugué de ω' ; c'est donc une semi-involution de seconde espèce. Dans [23], on caractérise comme suit les semi-involutions de Cartan : une semi-involution σ' de \mathfrak{g} est de Cartan si et seulement si il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} stable par σ' , et une forme bilinéaire invariante B fixée par σ' (i.e., $B(\sigma'x, \sigma'y) = \bar{B}(x, y)$, $x, y \in \mathfrak{g}$) telles que la forme bilinéaire $B_{\sigma'}$, définie par $B_{\sigma'}(X, Y) = -B(X, \sigma'Y)$, soit hermitienne non dégénérée et définie positive sur la somme $\bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$ des espaces radiciels correspondants. L'orthogonal, pour $B_{\sigma'}$, de \mathfrak{g}' est le centre \mathfrak{c} , et la forme hermitienne induite sur $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ est définie positive [15, 11.7]. Ces semi-involutions sont aussi appelées *semi-involutions compactes* et les formes réelles correspondantes sont appelées *formes réelles compactes*. D'après ce que l'on vient de dire, toute algèbre de Kac–Moody affine a une forme compacte unique à conjugaison près.

2.6. Formes réelles presque compactes

La forme réelle correspondant à une semi-involution de première espèce (S1) (respectivement de seconde espèce (S2)) est dite *presque déployée* (respectivement *presque compacte*). On a classifié (à conjugaison près) les formes presque déployées dans [2]. On va classifier ici les formes presque compactes. Il s'agit donc de déterminer les classes de conjugaison de semi-involutions de seconde espèce dans $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. D'après [23, 3.6], les classes de conjugaison de S2 sous $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ sont les mêmes pour \mathfrak{g} , \mathfrak{g}' , $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$. D'après 2.2 ci-dessus, une telle classe de conjugaison détermine une unique classe de conjugaison d'automorphisme de diagramme d'ordre 1 ou 2.

2.7. Involutions de Cartan

Soit σ' une S2 de \mathfrak{g} , et soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ la forme réelle presque compacte correspondante.

- (1) une SIC θ' qui commute à σ' est dite *adaptée* à σ' ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. L'involution $\sigma = \sigma'\theta'$ (respectivement sa restriction $\theta'_{\mathbb{R}}$ à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ou $\sigma'_{\mathbb{R}}$ à $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\theta'}$) est dite *involution de Cartan* de σ' (respectivement de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ou de \mathfrak{u}). L'algèbre de points fixes $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{u}^{\sigma}$

est dite *sous-algèbre compacte maximale* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On a aussi des décompositions de Cartan (en sous-espaces propres de σ) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$; $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$. Ces décompositions sont orthogonales pour la forme hermitienne $B_{\theta'}$ de 2.5.

- (2) Une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est dite *maximalement compacte pour σ'* (ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$) si elle est stable par σ' et si $-\sigma'$ stabilise une base de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Les deux propositions suivantes sont les résultats principaux de [23].

Proposition 2.8. *Soit σ' une SI2 de \mathfrak{g} , et soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$.*

- (i) *Il existe des SIC θ' adaptées à σ' et des sous algèbres de Cartan \mathfrak{h} maximalement compactes pour σ' .*
- (ii) *Pour toute sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} maximalement compacte pour σ' , il existe une SIC θ' adaptée à σ' qui stabilise \mathfrak{h} , et celle-ci est unique à un automorphisme presque intérieur fixant \mathfrak{h} et commutant à σ' près.*
- (iii) *Pour toute SIC θ' adaptée à σ' , il existe une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte pour σ' stable par θ' , et celle-ci est unique à un automorphisme presque intérieur commutant à σ' et θ' près.*

Conséquence. Les classes de conjugaison sous $\text{Int}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ des sous algèbres de Cartan maximalement compactes pour σ' sont en bijection avec les classes de semi-involutions de Cartan adaptées à σ' , avec les classes d'involutions de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, et avec les classes de sous-algèbres compactes maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

On va finalement montrer dans cet article qu'il n'y a dans chaque cas qu'une seule classe de conjugaison sous $\text{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$.

Proposition 2.9. *On considère :*

- (1) *les involutions de première espèce de \mathfrak{g} .*
- (2) *les paires (σ', \mathfrak{h}) formées d'une semi-involution de seconde espèce σ' , qui n'est pas de Cartan, et d'une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte pour σ' .*
- (3) *la relation $(\sigma', \mathfrak{h}) \sim \sigma$ si et seulement si σ commute à σ' , stabilise \mathfrak{h} et est telle que $\sigma\sigma'$ est une semi-involution de Cartan de \mathfrak{g} .*

Cette relation induit une bijection entre les classes de conjugaison (sous $\text{Int}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{g})$ ou $\text{Aut}(\mathfrak{g})$) des involutions de première espèce et des paires (σ', \mathfrak{h}) .

Autrement dit, pour toute paire (σ', \mathfrak{h}) , il existe une involution σ de première espèce (unique à conjugaison près par un automorphisme stabilisant \mathfrak{h} et commutant à σ') telle que $(\sigma', \mathfrak{h}) \sim \sigma$; et pour toute involution de première espèce σ , il existe une paire (σ', \mathfrak{h}) (unique à conjugaison près par un automorphisme commutant à σ) telle que $(\sigma', \mathfrak{h}) \sim \sigma$.

2.10. Classification

On connaît la classification des involutions de première espèce de \mathfrak{g} (cf. [4] ou [6] qui corrige des erreurs de [19]) on en déduit donc la classification des paires (σ', \mathfrak{h}) .

La liste de [6], reproduite dans le paragraphe 6, énumère donc toutes les semi-involutions de seconde espèce possibles des algèbres de Kac–Moody affines (en dehors des SIC qui forment une unique classe de conjugaison). On va montrer que deux semi-involutions distinctes de cette liste ne sont pas conjuguées. Pour cela on a déjà vu deux invariants des classes de conjugaisons de *SI2* : la classe de conjugaison associée dans $\text{Aut}(A)$ (2.3) et le signe qui apparaît en conjuguant \mathcal{T} (2.4). On va voir maintenant comment calculer ce signe.

2.11. Soient σ' une *SI2* non de Cartan de \mathfrak{g} , \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan maximale compacte pour σ' , et σ l'involution de première espèce correspondant à la paire (σ', \mathfrak{h}) (cf. 2.8). En conjuguant par un automorphisme intérieur, on peut supposer que \mathfrak{h} est la sous-algèbre de Cartan standard et que $\omega' = \sigma\sigma'$ est la semi-involution de Cartan standard de \mathfrak{g} . Il existe alors une base de racines Π de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur laquelle σ agit par un automorphisme de diagramme ρ d'ordre 1 ou 2 ; par conséquent, σ s'écrit sous la forme $\sigma = \rho H$, avec $H = \exp i\pi \text{ad}(h)$, où $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} = \{x \in \mathfrak{h} ; \alpha(x) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta\}$. On peut écrire $h = \eta d + h'$, avec $\eta \in \mathbb{Z}$ et $h' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \cap \mathfrak{g}'$, et on peut supposer que h est fixe par ρ (cf. [4] ou [19]), donc $\sigma = \rho H = H\rho$. En particulier, σ fixe le centre de \mathfrak{g} , donc $\sigma'(c) = -c$, et le centre de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est $i\mathbb{R}c$.

Proposition 2.12. Avec les notations de 2.11, on a :

- (i) Si η est pair ou $k = 2$ (i.e., \mathfrak{g} est de type Aff2) alors l'involution intérieure H respecte la \mathbb{Z} -graduation de $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi, \varepsilon_k)$ et commute à l'application translation sur \mathfrak{g}'' . De plus, il existe une involution intérieure \hat{H} de \mathfrak{g} commutant à ξ et telle que $H = (\xi^\eta \hat{H}) \otimes 1$ sur $\mathfrak{l}''(\mathfrak{g}, \xi, \varepsilon_k) = \mathfrak{g}''$.
- (ii) Si η est impair et $k \neq 2$, alors l'involution intérieure H induit sur \mathfrak{g}'' une application \mathbb{A} -semi-linéaire (par rapport à l'automorphisme $t^k \mapsto -t^k$ de cette algèbre).
- (iii) Tout automorphisme de diagramme de \mathfrak{g} est \mathbb{A} -linéaire, sauf dans le cas $A_{2l}^{(1)}$ où l'automorphisme de diagramme ρ_1 (défini par $\rho_1(0) = 0$, et $\rho_1(i) = 2l - i + 1$ pour $1 \leq i \leq 2l$) est \mathbb{A} -semi-linéaire (par rapport à l'automorphisme $t \mapsto -t$ de cette algèbre).

N.B. : On verra au paragraphe 3 que dans les cas (ii) (respectivement (iii)) l'involution H (respectivement ρ_1) regardée sur la réalisation $\mathfrak{l}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta, \varepsilon_{2k})$, avec $\theta(x, y) = (y, \xi(x))$, s'écrit sous la forme $\hat{\sigma} \otimes 1$, où $\hat{\sigma}$ est une involution permutant les deux composantes simples de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ (cf. Proposition 3.4 et Théorème 3.5).

Démonstration. L'involution H fixe d et respecte donc la \mathbb{Z} -graduation de $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi, \varepsilon_k)$. L'élément d agit sur le \mathfrak{g}' -module \mathfrak{g}'' et on a $[d, T] = kT$, par conséquent $HTH^{-1} = (-1)^{k\eta}T$. Dans le cas $k = 2$, il est clair que $\exp i\pi \text{ad}(d) = \xi \otimes 1$. Soit \hat{h} la classe de h' modulo le centre ; en identifiant \hat{h} avec un élément de \mathfrak{h} qu'on note encore \hat{h} , et en notant

\hat{H} l'involution $\exp i\pi \operatorname{ad}(\hat{h})$ de $\hat{\mathfrak{g}}$, on a $\exp i\pi \operatorname{ad}(h') = \hat{H} \otimes 1$; d'où les assertions (i) et (ii). L'assertion (iii) est un résultat de Bausch [4]. \square

2.13. Conséquence

On a vu en 2.11 que toute involution de première espèce s'écrit $\sigma = \rho H$ avec $H = \exp i\pi \operatorname{ad}(h)$ et $h \in \mathfrak{h}^\rho$. Si $h = \eta d + h'$, avec $\eta \in \mathbb{Z}$ et $h' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \cap \mathfrak{g}'$, on pose $\varepsilon = +1$ si η est pair et $\varepsilon = -1$ si η est impair, sauf lorsque \mathfrak{g} est de type $A_{2l}^{(1)}$ et $\rho \neq \operatorname{Id}$, auquel cas on fait la convention opposée.

Avec ces notations et pour $\sigma' = \sigma \omega'$, on a $\sigma \mathcal{T} \sigma^{-1} = \varepsilon^k \mathcal{T}$, et comme $\omega' \mathcal{T} \omega'^{-1} = \mathcal{T}^{-1}$ (cf. 2.3) le signe de $a_{\sigma'}$ (Lemme 2.4) est ε^k (toujours égal à 1 si $k = 2$).

Il se trouve que, d'après la liste de Bausch [6], H est toujours de l'une des deux formes suivantes :

$$H = \tau_j = \exp i\pi \operatorname{ad}(p_j) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq l,$$

$$H = \bar{\tau}_j = \exp i\pi \operatorname{ad}(\bar{p}_j) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq l.$$

Comme, d'après 1.11(5), $p_j = \bar{p}_j + a_j d$, on a $\tau_j = \bar{\tau}_j$ si a_j est pair et $\tau_j = \tau_0 \bar{\tau}_j$ sinon. Il est facile de calculer ε dans tous les cas; le résultat est indiqué dans la quatrième colonne du tableau du paragraphe 6.

N.B. : On utilisera aussi les automorphismes de $\hat{\mathfrak{g}}$ définis par $\hat{\tau}_j = \exp i\pi \operatorname{ad}(\hat{p}_j)$, $1 \leq j \leq n$.

2.14. Quotients simples de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$

On considère toujours une algèbre de Kac–Moody affine \mathfrak{g} de type $\operatorname{Aff} k$ et une réalisation $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_m)$, avec $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie simple.

D'après la Proposition 1.10, l'algèbre \mathbb{A} s'identifie à $\mathbb{C}[t^m, t^{-m}]$ et l'on vient de voir (modulo le changement de \mathcal{T}) que σ' (respectivement σ) induit sur \mathbb{A} l'automorphisme involutif semi-linéaire (respectivement linéaire) tel que $\sigma'(t^m) = t'_\varepsilon(t^m) = \varepsilon^k t^{-m}$ (respectivement $\sigma(t^m) = \varepsilon^k t^m$). D'après [15, 8.6], tout idéal de \mathfrak{g}'' est de la forme $\mathcal{I}\mathfrak{g}''$, où \mathcal{I} est un idéal de \mathbb{A} . Un idéal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ correspond à un idéal de \mathfrak{g}'' stable par σ' , donc à un idéal \mathcal{I} de \mathbb{A} stable par t'_ε . On s'intéresse aux quotients simples de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$, donc aux idéaux maximaux de $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{A}^{t'_\varepsilon}$, c'est à dire aux idéaux t'_ε -stables maximaux de \mathbb{A} .

Proposition 2.15. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ admet des quotients simples qui sont des algèbres de Lie pseudo-complexes isomorphes à $\hat{\mathfrak{g}}$.*

Si $\varepsilon = -1$ et $k \neq 2$, il n'y a pas d'autre quotient simple.

Si $\varepsilon = 1$ ou $k = 2$, les seuls autres quotients simples sont des formes réelles de $\hat{\mathfrak{g}}$ associés (avec les notations ci-dessus) aux idéaux de \mathbb{A} engendrés par $(1 - ut^m)$ pour $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$.

Remarques et définition.

- (1) Une algèbre de Lie réelle est dite *pseudo-complexe* si elle possède une structure complexe, i.e., si elle est obtenue à partir d’une algèbre de Lie complexe par restriction des scalaires.
- (2) On verra au paragraphe 3 que dans le second cas (i.e., si $\varepsilon^k = 1$) tous les idéaux maximaux de \mathfrak{g}'' stables par σ' sont conjugués par un automorphisme de \mathfrak{g} commutant avec σ' (cf. 3.10). On associe donc à $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ un unique quotient simple $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ qui est $\hat{\mathfrak{g}}$ si $\varepsilon^k = -1$ et sinon une forme réelle de $\hat{\mathfrak{g}}$ (que l’on calculera, à partir des résultats du paragraphe 3, dans les tables du paragraphe 6).
- (3) Si $\varepsilon^k = -1$, on considérera en 3.10 les quotients simples associés à des idéaux engendrés par $(1 - u^2 t^{2m})$, avec $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$; ce sont les seuls invariants à la fois pour σ' et σ .

Démonstration. Les idéaux σ' -stables maximaux de \mathbb{A} sont de deux sortes :

- ceux engendrés par $(1 - ut^m)$ si $\sigma'(1 - ut^m) \in \mathbb{C}^* t^{\mathbb{Z}}(1 - ut^m)$, avec $u \in \mathbb{C}^*$;
- ceux engendrés par $(1 - ut^m)\sigma'(1 - ut^m)$ si $\sigma'(1 - ut^m) \notin \mathbb{C}^* t^{\mathbb{Z}}(1 - ut^m)$, avec $u \in \mathbb{C}^*$.

Mais $\sigma'(1 - ut^m) = (1 - \bar{u}\varepsilon^k t^{-m}) = -\bar{u}\varepsilon^k t^{-m}(1 - \frac{\varepsilon^k}{u} t^m)$, donc $\sigma'(1 - ut^m) \in \mathbb{C}^* t^{\mathbb{Z}}(1 - ut^m)$ si et seulement si $|u|^2 = \varepsilon^k$. Cela n’est possible que si $\varepsilon^k = 1$, et alors on a $|u| = 1$. Il reste donc à voir la nature du quotient simple $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$. Dans le premier cas, $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}'' / (1 - ut^m)\mathfrak{g}''$. Mais, si α est une racine $m^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{u}$, l’homomorphisme de \mathfrak{g}'' dans $\hat{\mathfrak{g}}$, qui envoie $X_j \otimes t^j$, avec $X_j \in \hat{\mathfrak{g}}_j$, sur $\alpha^j X_j$, est surjectif de noyau $(1 - ut^m)\mathfrak{g}''$. Ainsi $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à $\hat{\mathfrak{g}}$, et $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de $\hat{\mathfrak{g}}$.

Dans le second cas, $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}'' / (1 - ut^m)(1 - vt^m)\mathfrak{g}''$, avec $u \neq v$. Mais on a un isomorphisme d’algèbres associatives de $\mathbb{A} / (1 - ut^m)(1 - vt^m)$ sur l’algèbre produit $\mathbb{A} / (1 - ut^m) \times \mathbb{A} / (1 - vt^m)$, d’où un isomorphisme d’algèbres de Lie de $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ sur l’algèbre de Lie produit $(\mathfrak{g}'' / (1 - ut^m)\mathfrak{g}'') \times (\mathfrak{g}'' / (1 - vt^m)\mathfrak{g}'')$, et donc aussi sur $\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}$. L’algèbre de Lie réelle simple $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$, telle que $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \simeq \hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}$, est pseudo-complexe isomorphe à $\hat{\mathfrak{g}}$. \square

3. Réalisations adaptées

3.1. Automorphismes d’ordre fini et de première espèce

Soit σ un automorphisme de première espèce de \mathfrak{g} d’ordre s . D’après Levstein [19], σ stabilise une paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_+)$ formée d’une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} et d’une sous-algèbre de Borel–Iwahori positive \mathfrak{b}_+ contenant \mathfrak{h} . Ainsi \mathfrak{h}^σ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}^σ , et deux telles sous algèbres de Cartan (dites *maximalement fixées*) sont conjuguées par un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} commutant avec σ (cf. [23] ou [18]). Quitte à changer l’identification de \mathfrak{g} à sa réalisation standard, on peut supposer que $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_+)$ est la paire standard.

Proposition 3.2. *Soit σ un automorphisme d'ordre fini et de première espèce de \mathfrak{g} et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan maximale fixée pour σ , alors il existe une réalisation de \mathfrak{g} sur laquelle σ préserve la \mathbb{Z} -graduation et pour laquelle \mathfrak{h} est la sous-algèbre de Cartan standard.*

N.B. : Une telle réalisation sera dite *presque adaptée* à (σ, \mathfrak{h}) .

Démonstration. On regarde σ sur la réalisation standard de \mathfrak{g} . Comme il est de première espèce, il induit l'identité sur le centre $\mathbb{C}c$ de \mathfrak{g} et sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ (identifiée avec $\mathbb{C}d$), cf. [23, Lemme 2.8] ; par conséquent, il existe $h' \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ tel que $\sigma(d) = d + h'$ (car \mathfrak{h} est σ -stable et \mathfrak{h} contient d). L'automorphisme σ est d'ordre s , et la relation $(\sigma^s(d) = d)$ équivaut à la relation suivante :

$$h' + \sigma(h') + \dots + \sigma^{s-1}(h') = 0. \tag{1}$$

Compte tenu de la relation (1), σ fixe $sd + \sum_{i=0}^{s-2} (s-i-1)\sigma^i(h')$. Comme d est à valeurs propres entières (via la représentation adjointe) il en est de même pour $\sigma(d)$ et h' et donc pour $h := \sum_{i=0}^{s-2} (s-i-1)\sigma^i(h')$. L'action adjointe de h ne dépend que de la classe \bar{h} de h dans $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}')/\mathbb{C}c$ (identifiée à une sous-algèbre de Cartan de $(\hat{\mathfrak{g}})^\xi$:= la sous-algèbre de points fixes de ξ). Soient ε_{sk} une racine $s^{\text{ième}}$ de ε_k , et $H := \exp(\frac{2i\pi}{sk} \text{ad } h)$. On pose $\theta := \xi H$, $m := sk$, et $\varepsilon_m := \varepsilon_{sk}$.

D'après la Proposition 1.8, la réalisation $l(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_m) := (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\hat{\mathfrak{g}}_j \otimes t^j)) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ est isomorphe à la réalisation standard de \mathfrak{g} , avec la même sous-algèbre de Cartan standard. En tenant compte du fait que σ fixe $sd + h$, on s'aperçoit que l'automorphisme σ regardé sur la réalisation $l(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_m)$ fixe D modulo le centre ; comme par ailleurs il fixe le centre et est d'ordre fini, il fixe D et donc il respecte la \mathbb{Z} -graduation. \square

Proposition 3.3. *Soit $l(\hat{\mathfrak{g}}, \theta_0, \varepsilon_m)$ une réalisation de \mathfrak{g} , où $\hat{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie simple sur \mathbb{C} , θ_0 est un automorphisme de $\hat{\mathfrak{g}}$ d'ordre divisant m , et $\varepsilon_m = e^{2i\pi/m}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, η une racine $n^{\text{ième}}$ de ε_m , et θ_n l'automorphisme de $(\hat{\mathfrak{g}})^n$ défini par*

$$\theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \theta_0(x_1)), \quad x_i \in \hat{\mathfrak{g}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

On note (\cdot, \cdot) [respectivement $(\cdot, \cdot)_n$] la forme de Killing de $\hat{\mathfrak{g}}$ [respectivement $(\hat{\mathfrak{g}})^n$], ${}_n\mathfrak{g}$ l'algèbre réductive-affine associée au triplet $((\hat{\mathfrak{g}})^n, \theta_n, \eta)$; $c_n, d_n, {}_n\mathfrak{g}'', {}_n\mathfrak{g}^1$ et \mathcal{T}_n les éléments, sous-quotients ou application relatifs à ${}_n\mathfrak{g}$ analogues à $c, d, \mathfrak{g}'', \mathfrak{g}^1$ et \mathcal{T} pour \mathfrak{g} .

Alors l'application $\phi_n : \mathfrak{g} \rightarrow {}_n\mathfrak{g}$ définie par :

$$\begin{aligned} \phi_n(x \otimes t^j) &= (x, \eta^j x, \dots, \eta^{(n-1)j} x) \otimes t^j, \\ \phi_n(c) &= nc_n, \\ \phi_n(d) &= d_n \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie, et on a : $\phi_n T^n \phi_n^{-1} = \mathcal{T}_n$.

Cet isomorphisme induit un isomorphisme entre les sous-algèbres de Cartan standard de \mathfrak{g} et ${}_n\mathfrak{g}$.

Démonstration. Pour $j \in \mathbb{Z}$, on pose : $(\hat{\mathfrak{g}})_j^n := \{x \in (\hat{\mathfrak{g}})^n ; \theta_n(x) = \eta^j x\}$. De la définition de θ_n , on déduit :

$$(\hat{\mathfrak{g}})_j^n = \{(x, \eta^j x, \eta^{2j} x, \dots, \eta^{(n-1)j} x) ; x \in \hat{\mathfrak{g}}_j\} \tag{I}$$

où $\hat{\mathfrak{g}}_j = \{(x \in \hat{\mathfrak{g}} ; \theta_0(x) = (\varepsilon_m)^j x)\}$; par conséquent, ϕ_n est bien définie. Il est clair que ϕ_n est bijective, vérifie $\phi_n \mathcal{T}^n \phi_n^{-1} = \mathcal{T}_n$, et envoie la sous-algèbre de Cartan standard de \mathfrak{g} sur celle de ${}_n\mathfrak{g}$. Il reste donc à montrer que ϕ_n est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Soit $(x, y) \in \hat{\mathfrak{g}}_i \times \hat{\mathfrak{g}}_j$ ($i, j \in \mathbb{Z}$), et posons $z = [x, y]$, $X_n = (x, \eta^i x, \dots, \eta^{(n-1)i} x)$, $Y_n = (y, \eta^j y, \dots, \eta^{(n-1)j} y)$, et $Z_n = (z, \eta^{i+j} z, \dots, \eta^{(n-1)(i+j)} z)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \phi_n([x \otimes t^i, y \otimes t^j]) &= \phi_n(z \otimes t^{i+j} + i \delta_{i,-j}(x, y)c) \\ &= Z_n \otimes t^{i+j} + i \delta_{i,-j}(x, y)(n.c_n) \end{aligned} \tag{1}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} [\phi_n(x \otimes t^i), \phi_n(y \otimes t^j)] &= [X_n \otimes t^i, Y_n \otimes t^j] \\ &= Z_n \otimes t^{i+j} + i \delta_{i,-j}(X_n, Y_n)_n.c_n \end{aligned} \tag{2}$$

comme $\delta_{i,-j}(X_n, Y_n)_n = n \delta_{i,-j}(x, y)$, on a l'égalité entre (1) et (2). De même

$$\text{(ii)} \quad \phi_n([d, x \otimes t^i]) = i \phi_n(x \otimes t^i) = i X_n \otimes t^i, \tag{1'}$$

$$[\phi_n(d), \phi_n(x \otimes t^i)] = [d_n, X_n \otimes t^i] = i X_n \otimes t^i \tag{2'}$$

d'où l'égalité entre (1') et (2'), et par conséquent ϕ_n est un homomorphisme d'algèbres de Lie. \square

Proposition 3.4. Soit σ un automorphisme d'ordre fini et de première espèce de \mathfrak{g} (respectivement et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan maximale fixée par σ) ; alors il existe une réalisation de \mathfrak{g} sur laquelle σ respecte la \mathbb{Z} -graduation et commute à l'application translation (respectivement et pour laquelle \mathfrak{h} est la sous-algèbre de Cartan standard).

Définition. Une telle réalisation sera dite *adaptée* à σ (respectivement à (σ, \mathfrak{h})).

Au paragraphe 6, on donne la liste des involutions de première espèce et une réalisation adaptée pour chacune de ces involutions.

Démonstration. Soit

$$l(\hat{\mathfrak{g}}, \theta_0, \varepsilon_m) := \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\hat{\mathfrak{g}}_j \otimes t^j) \right) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

une réalisation presque adaptée de \mathfrak{g} (cf. Proposition 3.2) et soit \mathcal{T} son application translation. On regarde σ sur cette réalisation. L'application $\sigma\mathcal{T}\sigma^{-1}$ est un automorphisme de \mathfrak{g}' -module de \mathfrak{g}'' . Comme $\hat{\mathfrak{g}}$ est simple, alors $(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ est un idéal maximal de \mathfrak{g}'' , et donc $(\text{Id} - \sigma\mathcal{T}\sigma^{-1})\mathfrak{g}''$ l'est aussi. Par conséquent, il existe $(\alpha, a) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{C}$ tel que $\sigma\mathcal{T}\sigma^{-1} = a\mathcal{T}^\alpha$ (cf. Proposition 1.10). Comme σ est de première espèce et d'ordre s , on a nécessairement $\alpha = 1$ (cf. [24]) et $a^s = 1$. Soit n le plus petit entier tel que $a^n = 1$. D'après la Proposition 3.3, et en conservant les mêmes notations, l'automorphisme σ , regardé sur la réalisation associée au couple $((\hat{\mathfrak{g}})^n, \theta_n)$, respecte la graduation et commute à l'application translation. \square

Théorème 3.5. *Soit σ un automorphisme d'ordre fini et de première espèce de \mathfrak{g} , alors il existe une réalisation $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{s}}, \theta, \varepsilon_m)$ de \mathfrak{g} adaptée à σ (où $\hat{\mathfrak{s}}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, θ un automorphisme, d'ordre m , permutant les facteurs simples de $\hat{\mathfrak{s}}$, et $\varepsilon_m = e^{2i\pi/m}$).*

De plus, pour toute réalisation $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{s}}, \theta, \varepsilon_m)$ adaptée à σ , il existe un automorphisme $\hat{\sigma}$, d'ordre s , de $\hat{\mathfrak{s}}$ qui commute à θ et tel que σ soit égal à $\hat{\sigma} \otimes 1$ sur cette réalisation.

Démonstration. D'après la Proposition 3.4, il existe une réalisation adaptée à σ sur laquelle σ fixe le sous-espace $\mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ et commute à l'application translation. Pour une telle réalisation adaptée, σ induit, par passage au quotient, un automorphisme $\hat{\sigma}$ de $\hat{\mathfrak{s}}$ d'ordre $s = |\sigma|$. L'automorphisme $\hat{\sigma}$ respecte la $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ -graduation de $\hat{\mathfrak{s}}$, il commute donc à θ , et on a nécessairement $\sigma = \hat{\sigma} \otimes 1$. \square

Corollaire 3.6. *Soit σ un automorphisme d'ordre fini et de première espèce de \mathfrak{g} ; alors il existe une réalisation $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_m)$ de \mathfrak{g} (avec $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie simple complexe) un automorphisme d'ordre fini $\hat{\sigma}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ commutant à θ , et $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ d'ordre fini tels que $\sigma = \hat{\sigma} \otimes \gamma_\varepsilon$ sur la réalisation $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_m)$, avec $\gamma_\varepsilon(P(t)) = P(\varepsilon^{-1}t)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 3.2, il existe une réalisation $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, \varepsilon_m)$ (avec $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie simple) sur laquelle σ fixe l'élément de graduation d (c'est donc une réalisation presque adaptée à (σ, \mathfrak{h}) pour une certaine SAC \mathfrak{h} de \mathfrak{g} contenant d). Soit \mathcal{T} l'application presque translation de cette réalisation. Il existe $\eta \in \mathbb{C}^*$ d'ordre fini tel que $\sigma\mathcal{T}\sigma^{-1} = \eta\mathcal{T}$. Ainsi, l'automorphisme $\tilde{\sigma} := \sigma \exp[-\frac{i}{m} \arg(\eta) \text{ad}(d)]$ est d'ordre fini, fixe d et commute à \mathcal{T} . D'après le Théorème 3.5, $\tilde{\sigma}$ est de la forme $\hat{\sigma} \otimes 1$. Ainsi, on a $\sigma = \tilde{\sigma} \exp[\frac{i}{m} \arg(\varepsilon) \text{ad}(d)]$, et par conséquent $\sigma(x \otimes P(t)) = \hat{\sigma}(x) \otimes P(\varepsilon^{-1}t)$, avec $\varepsilon^m = \eta^{-1}$. D'où le résultat. \square

Corollaire 3.7. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Kac–Moody affine, et soit σ un automorphisme de \mathfrak{g} d'ordre fini et de première espèce. Alors la sous-algèbre \mathfrak{g}^σ des points fixes de \mathfrak{g} sous σ est une algèbre réductive-affine.*

Remarque. On obtient ainsi assez facilement et d'une manière plus précise l'un des résultats les plus techniques de [4].

Démonstration. D’après le Théorème 3.5, il existe une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{s} et deux automorphismes d’ordre fini σ_0 et θ qui commutent entre eux tels que $l(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_{|\theta|})$ soit une réalisation adaptée de \mathfrak{g} sur laquelle σ agit comme $\sigma_0 \otimes 1$. Ainsi $(\mathfrak{s})^{\sigma_0}$ est une algèbre de Lie réductive, et on a $\mathfrak{g}^\sigma = l((\mathfrak{s})^{\sigma_0}, \theta, \varepsilon_{|\theta|})$; d’où le résultat. \square

3.8. Réalisation adaptée à une semi-involution de deuxième espèce

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Kac–Moody affine, σ' une semi-involution de deuxième espèce de \mathfrak{g} , \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan maximale compacte pour σ' , et σ l’involution de première espèce de \mathfrak{g} associée à la paire (σ', \mathfrak{h}) [cf. Proposition 2.9].

Proposition 3.9. Dans ces conditions, il existe une réalisation $l(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_m)$ adaptée à (σ, \mathfrak{h}) qui vérifie de plus :

- (i) Il existe une involution $\hat{\sigma}$ et une semi-involution $\hat{\sigma}'$ de \mathfrak{s} commutant à θ et telles que $\hat{\sigma}\hat{\sigma}'$ est une semi-involution de Cartan de \mathfrak{s} , $\sigma = \hat{\sigma} \otimes 1$ et $\sigma' = \hat{\sigma}' \otimes \iota'$ sur la réalisation $l'(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_m)$; enfin, $\sigma'(c) = -c$ et $\sigma'(d) = -d$.
- (ii) Notons \mathcal{T} l’application translation de la réalisation $l(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_m)$, alors σ et σ' stabilisent l’idéal $(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ de \mathfrak{g}'' et induisent respectivement, par passage au quotient, l’involution $\hat{\sigma}$ et la semi-involution $\hat{\sigma}'$ de $\mathfrak{g}''/(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ identifiée avec \mathfrak{s} .
- (iii) Soit $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ (respectivement $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$) la forme réelle de \mathfrak{g}'' (respectivement \mathfrak{s}) associée à σ' (respectivement $\hat{\sigma}'$). Alors $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ s’identifie naturellement à $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}/((\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}'')^{\sigma'}$ et si $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) \leq \inf(\text{rang}(\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}), \text{rang}(\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}})).$$

N.B. : Une réalisation adaptée à (σ, \mathfrak{h}) vérifiant les conditions du (i) est dite *adaptée* à $(\sigma', \sigma, \mathfrak{h})$. Plus généralement, une réalisation est dite *adaptée* à σ' (respectivement (σ', \mathfrak{h})) si elle est adaptée à $(\sigma', \sigma, \mathfrak{h})$ pour un certain choix de (σ, \mathfrak{h}) (respectivement de \mathfrak{h}).

Démonstration. On choisit une réalisation adaptée à (σ, \mathfrak{h}) (cf. Proposition 3.4). Alors $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ est maximale fixée par σ , donc pour un choix de l’épinglage $(\mathfrak{h}, (e_i, f_i)_{i \in I})$, la semi-involution de Cartan standard ω' commute à σ . Ainsi, d’après la Proposition 2.9, il existe un automorphisme ϕ commutant à σ et stabilisant \mathfrak{h} tel que $\sigma' = \phi(\sigma\omega')\phi^{-1}$. En modifiant l’identification de \mathfrak{g} à $l(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_m)$, on peut supposer $\sigma' = \sigma\omega'$ sans changer les autres propriétés. Ainsi, l’assertion (i) résulte du Théorème 3.5 et de la description de ω' en 2.5. Comme (ii) est immédiat, il reste à montrer (iii).

Soit π_0 la projection canonique sur $\mathfrak{g}''/(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$. On a $\pi_0(\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$. La restriction de π_0 à la sous-algèbre de Cartan standard de \mathfrak{g}'' est injective ; comme \mathcal{T} est un automorphisme de \mathfrak{g}' -module, et d’après le théorème de conjugaison des sous-algèbres de Cartan (cf. [20]),

π_0 est injective sur toute sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}'' , et en particulier sur les SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$. L'image par π_0 d'une SATD de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$, de dimension $l (\leq \text{rang}(\mathfrak{g}''))$, est une SATD de $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ de même dimension ; d'où le résultat. \square

Remarque. Dans la démonstration de l'assertion (i) de la Proposition 3.9, on peut considérer (au lieu d'une réalisation adaptée) une réalisation presque adaptée à (σ, \mathfrak{h}) (cf. 3.2) ; grâce au Corollaire 3.6, le résultat de (i) reste valable à condition de remplacer l' par $l'_\varepsilon := l' \circ \gamma_\varepsilon$, avec $\varepsilon = \pm 1$, et on définit alors de la même façon une réalisation *presque adaptée* à $(\sigma', \sigma, \mathfrak{h})$. Ceci a l'avantage de pouvoir se limiter à des réalisations $l(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_m)$ de \mathfrak{g} avec \mathfrak{s} une algèbre de Lie simple complexe.

Proposition 3.10. *Considérons plus précisément la réalisation $l(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_m)$ de \mathfrak{g} construite au long des numéros 3.1 à 3.7 à partir de $\sigma, \sigma', \mathfrak{h}$ et la réalisation standard $l(\mathfrak{g}, \xi, \varepsilon_k)$ de \mathfrak{g} ; alors, avec les notations de 2.14 et 2.15 :*

- si $\varepsilon^k = -1$, \mathfrak{s} est l'algèbre semi-simple complexe $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, et $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ est l'algèbre de Lie réelle simple pseudo-complexe \mathfrak{g} ;
- si $\varepsilon^k = 1$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$, et la forme réelle $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ de \mathfrak{g} est, à isomorphisme près, l'unique quotient absolument simple de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. L'identification de \mathfrak{s} à \mathfrak{g} ou $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ résulte des démonstrations de 3.1 à 3.7.

Si $\varepsilon^k = -1$, la forme réelle $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est soit pseudo-complexe égale à \mathfrak{g} soit produit de deux formes réelles de \mathfrak{g} . Or on a vu en 2.15 que dans ce cas $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ n'a pas de quotient absolument simple, donc seul le premier cas peut se produire.

Si $\varepsilon^k = 1$, alors $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ est la forme réelle de $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$ quotient de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ par l'idéal $((1 - t^m)\mathfrak{g}'')^{\sigma'}$. Tout quotient absolument simple de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ est, d'après 2.15, quotient de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ par l'idéal $((1 - ut^m)\mathfrak{g}'')^{\sigma'}$, avec $|u| = 1$. D'après 2.3, cet idéal est conjugué de $((1 - t^m)\mathfrak{g}'')^{\sigma'}$ par $\phi = \exp \frac{i}{m} \arg(u) \text{ad}(d)$ qui est un automorphisme commutant à σ' donc stabilisant $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$. \square

Proposition 3.11. *Soient σ'_1 et σ'_2 deux semi-involutions de deuxième espèce de \mathfrak{g} qui sont $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ -conjuguées. On suppose qu'il existe une réalisation $l(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_m)$ de \mathfrak{g} qui soit adaptée aux deux semi-involutions à la fois ; alors σ'_1 et σ'_2 induisent sur \mathfrak{s} deux formes réelles isomorphes.*

Démonstration. On a $\text{Aut}(\mathfrak{g}') = (\{1, \omega\} \times \text{Aut}(A)) \rtimes \text{Ad}(\tilde{H} \rtimes G)$; $\text{Ad}(\tilde{H}) = \text{Ad}(H) \times E$, où $H \subset G$ et E est le sous-groupe à un paramètre $\{\text{exp ad}(\lambda d) ; \lambda \in \mathbb{C}\}$, d étant l'élément de graduation de la réalisation $l(\mathfrak{s}, \theta, \varepsilon_m)$; on note T l'application translation de cette réalisation.

Soient $E_i := \{\text{exp ad}(i\lambda d) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $E_r := \{\text{exp ad}(\lambda d) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$; on a $E = E_i \times E_r$.

Les semi-involutions σ'_1 et σ'_2 fixent l'élément id de \mathfrak{g} , elles commutent donc à E_i ; comme elles transforment toutes deux T en T^{-1} , elles ne peuvent être conjuguées par un élément de $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ dont la composante suivant E_r est non triviale (cf. 2.3) ; par conséquent, on peut supposer que σ'_1 et σ'_2 sont conjuguées par le sous-groupe $\tilde{G} := (\{1, \omega\} \times \text{Aut}(A)) \rtimes \text{Ad}(G)$. Par ailleurs, le sous-groupe \tilde{G} de $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ stabilise l'idéal $(\text{Id} - T)\mathfrak{g}''$ de \mathfrak{g}'' et induit par passage au quotient un sous-groupe d'automorphismes

de $\hat{\mathfrak{s}}$, sauf peut-être dans le cas de $A_{2l}^{(1)}$ et $\hat{\mathfrak{s}}$ est simple où il existe un automorphisme de diagramme de \mathfrak{g} qui transforme $(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ en $(\text{Id} + \mathcal{T})\mathfrak{g}''$. Mais quitte à considérer la réalisation $l(\hat{\mathfrak{s}} \times \hat{\mathfrak{s}}, \tilde{\theta}, \sqrt{\varepsilon_m})$, avec $\tilde{\theta}(x, y) = (y, \theta(x))$ (qui est également adaptée à σ'_i , $i = 1, 2$) on peut supposer que $\text{Aut}(A)$ stabilise $(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ quel que soit le type de \mathfrak{g} ; dans ce cas les deux semi-involutions σ'_i , $i = 1, 2$, induisent sur $\hat{\mathfrak{s}}$ deux formes réelles isomorphes; d'où le résultat. \square

Remarques 3.12.

- (1) La réciproque de la Proposition 3.11 est fautive; en effet, pour $\mathfrak{g} = A_1^{(1)}$, $\sigma'_1 = \omega' \tau_1$ et $\sigma'_2 = \rho \omega'$ (voir les tables du paragraphe 6 pour les notations) la réalisation $l(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \tau_1, -1)$ de \mathfrak{g} est adaptée aux deux semi-involutions. Ainsi σ'_1 et σ'_2 ne sont pas $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ -conjuguées et elles induisent toutes les deux la forme réelle déployée de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
- (2) Soient σ'_1 et σ'_2 deux semi-involutions de deuxième espèce de \mathfrak{g} qui correspondent à deux involutions de première espèce de la liste de [6], reproduite au paragraphe 6, qui induisent le même automorphisme de diagramme et qui correspondent au même signe ε . Soient d l'élément de graduation de la réalisation standard de \mathfrak{g} et \mathcal{T} son application translation. Alors on a : $\sigma'_1(d) = \sigma'_2(d)$ et $\sigma'_1 \mathcal{T} \sigma'_1 = \sigma'_2 \mathcal{T} \sigma'_2$. En particulier, une réalisation de \mathfrak{g} qui est adaptée à σ'_1 est également adaptée à σ'_2 , et on peut appliquer la Proposition 3.11 pour tester si elles peuvent être conjuguées. Ce même test peut se déduire de la Proposition 3.10.

4. Rang relatif

4.1. Situation

On considère une forme réelle presque compacte $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ de l'algèbre de Kac–Moody affine \mathfrak{g} et on reprend les conventions et les notations de 2.7 et 2.11; en particulier σ' est la semi-involution de seconde espèce associée à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Lemme 4.2.

- (1) Une \mathbb{R} -SATD $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} stable par σ' .
- (2) Si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} stable par σ' , alors l'action de σ' sur le système de racines $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ transforme toute racine imaginaire en son opposée. On peut supposer de plus que \mathfrak{h} est stable par une involution de Cartan σ_1 de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, et alors σ_1 fixe toutes les racines imaginaires.

N.B. : Dans les conditions de (2), $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}^{\sigma'}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (cf. 1.15.1). Si $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ contient une \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, on dit qu'elle est *maximalement déployée*.

Démonstration. (1) On considère le groupe $\Gamma = \exp \text{ad}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) \times \{1, \sigma'\}$ d'automorphismes de \mathfrak{g} . D'après [23, Théorème 3.8] voir aussi [19, III, 1.1], il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} stable par Γ . Ainsi \mathfrak{h} est stable par l'action adjointe de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$; elle est donc somme de ses composantes homogènes pour cette action. Mais \mathfrak{h} est elle-même \mathbb{C} -diagonalisable pour ad , elle est donc contenue dans le centralisateur de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$. Alors $\mathfrak{h} + \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -diagonalisable, et par maximalité de \mathfrak{h} pour cette propriété, on a $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{h}$.

(2) σ' agit sur $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et préserve l'ensemble des racines imaginaires $\Delta^{\text{im}} = \mathbb{Z}^* \delta$. Comme σ' est une semi-involution de seconde espèce, on a $\sigma'(\delta) = -\delta$. Soit ω'_1 une SIC stabilisant \mathfrak{h} ; la possibilité de modifier ω'_1 de façon que ω'_1 commute à σ' est prouvée en [23, 4.5], voir aussi [13, III.7.1]. On pose alors $\sigma_1 = \sigma' \omega'_1$; comme $\omega'_1 = -\text{Id}$ sur Δ , on a $\sigma_1 = \text{Id}$ sur Δ^{im} . \square

Lemme 4.3. Soit $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est diagonalisable pour la représentation adjointe dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$;
- (ii) X est diagonalisable pour la représentation adjointe dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$;
- (iii) X est diagonalisable pour la représentation adjointe dans $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/i\mathbb{R}c$.

Sous ces conditions X est contenu dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$.

Remarque. D'après [20, Corollaire 9], les assertions sur \mathbb{C} sont aussi équivalentes.

Démonstration. Il est clair que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) et il suffit de montrer que (iii) \Rightarrow (i). Si X est diagonalisable pour $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$, il est \mathbb{C} -diagonalisable pour \mathfrak{g} d'après la remarque. Mais $\text{ad}(X)$ annule le centre $i\mathbb{R}c$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et envoie \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}' , donc les valeurs propres sur \mathfrak{g} sont réelles, et X est \mathbb{R} -diagonalisable.

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan σ' -stable de \mathfrak{g} contenant X (cf. Lemme 4.2). Si δ est la plus petite racine imaginaire positive de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on a $\sigma'(\delta) = -\delta$. Comme $\sigma'(X) = X$, on a $\delta(X) = \delta(\sigma'(X)) = \sigma'(\delta)(X) = -\delta(X) = 0$, et $X \in \mathfrak{g}'$. \square

Lemme 4.4. Avec les notations de 2.7 on a :

- (1) les éléments $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables de \mathfrak{k} ont des valeurs propres imaginaires pures et sont contenus dans le centre si ces valeurs propres sont nulles ;
- (2) les éléments $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables et non nuls de \mathfrak{p} ont des valeurs propres réelles non toutes nulles.

Remarque. Contrairement au cas classique, un élément de \mathfrak{k} ou \mathfrak{p} n'est pas $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable en général (cf. 4.9.3).

Démonstration. La forme hermitienne $B_{\omega'}$ est définie positive sur $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathbb{C}c$ (cf. 2.5).

- (1) Soit X un élément $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable de \mathfrak{k} , on a deux cas :

- (i) Si $X \in i\mathbb{R}c$, alors $\text{ad}(X) = 0$, et le résultat est trivial.

(ii) Si $X \notin i\mathbb{R}c$, alors il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} contenant X et vérifiant $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}'$. Par conséquent $\text{ad}(X)$ induit sur \mathfrak{g}'' un homomorphisme non trivial, diagonalisable et antihermitien. En particulier, $\text{ad}(X)$ a toutes ses valeurs propres imaginaires pures et l'une d'entre elles est non nulle. D'où l'assertion (1).

(2) Soit X un élément $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable non nul de \mathfrak{p} , alors $\text{ad}(X)$ induit sur \mathfrak{g}'' un homomorphisme non trivial (car \mathfrak{p} ne rencontre pas le centre) et autoadjoint par rapport à $B_{\omega'}$; par suite X agit sur \mathfrak{g}'' avec des valeurs propres réelles non toutes nulles. D'où l'assertion (2) grâce au Lemme 4.3. \square

Proposition 4.5. Les \mathbb{R} -SATDM (respectivement \mathbb{R} -SATDM σ -stables) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (ou $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$) sont contenues dans $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$ et sont en bijection avec les \mathbb{R} -SATDM (respectivement \mathbb{R} -SATDM σ -stables) de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}/i\mathbb{R}c$.

Les \mathbb{R} -SATDM σ -stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont contenues dans $\mathfrak{p} \oplus i\mathbb{R}c$.

Toute \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (ou $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$) est stable par une involution de Cartan.

Démonstration. Cela résulte aussitôt des Lemmes 4.2, 4.3 et 4.4. Si $\pi : \mathfrak{g}'_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ est la projection canonique, les bijections inverses entre \mathbb{R} -SATDM sont données par $\mathfrak{t} \mapsto \pi(\mathfrak{t})$ et $\mathfrak{t}'' \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{t}'')$. Une \mathbb{R} -SATDM $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (cf. Lemme 4.2). D'après le même lemme, il existe une involution de Cartan θ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ qui stabilise $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. D'après le Lemme 4.4, $(-\theta)$ fixe $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ modulo le centre. D'où la dernière assertion. \square

4.6. On reprend les notations de 1.12, et on considère une semi-involution $\hat{\sigma}'$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ commutant avec θ , et $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. On définit une semi-involution de seconde espèce σ' de \mathfrak{g}'' par $\sigma'(X \otimes P(t)) = \hat{\sigma}'(X) \otimes \overline{P}(\varepsilon t^{-1})$. D'après la remarque de la Proposition 3.9, toute semi-involution de seconde espèce de \mathfrak{g}'' peut s'écrire ainsi. On étend par cette même formule σ' à $\hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t)$, on a alors $\sigma' = \hat{\sigma}' \otimes \iota'_{\varepsilon}$, avec $\iota'_{\varepsilon} f(t) = \overline{f}(\varepsilon t^{-1})$.

On considère le groupe produit $\Gamma' = \Gamma \times \{1, \iota'_{\varepsilon}\} \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, c'est le groupe de Galois de $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(t)^{\Gamma'}$, avec $\mathbb{C}(t)^{\Gamma'} = \mathbb{C}(t^m)^{\iota'_{\varepsilon}} =: \mathbb{K}_{\varepsilon}$. Ce groupe Γ' agit sur $\tilde{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t)$ en stabilisant $\hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, avec pour points fixes $(\hat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}])^{\Gamma'} = (\mathfrak{g}'')^{\sigma'} = \mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$, et $(\tilde{\mathfrak{g}})^{\Gamma'} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{K}})^{\sigma'} = \mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$. L'action de σ' sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ est canoniquement associée à l'action de σ' sur \mathfrak{g}'' , donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$ ne dépend que de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$.

On note $\mathbb{A}_{\varepsilon} = \mathbb{K}_{\varepsilon} \cap \mathbb{C}[t, t^{-1}] = (\mathbb{C}[t, t^{-1}])^{\Gamma'}$.

Théorème 4.7. Si $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une \mathbb{R} -SATDM de la forme réelle presque compacte $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$, alors $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_{\varepsilon}$ est une \mathbb{K}_{ε} -SATDM de l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$ sur \mathbb{K}_{ε} .

De plus, toute sous-algèbre parabolique fractionnaire minimale de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$ contient une \mathbb{K}_{ε} -SATDM de la forme $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_{\varepsilon}$, avec $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ une \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. (a) Soit $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ une \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$. Alors $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_{\varepsilon}$ est une \mathbb{K}_{ε} -SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$. Soit \mathfrak{I} une \mathbb{K}_{ε} -SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$ contenant $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_{\varepsilon}$ et \mathfrak{P} une sous algèbre parabolique minimale de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}$ contenant \mathfrak{I} . On va montrer qu'il existe une \mathbb{R} -SATDM $\mathfrak{t}'_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ telle que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{t}'_{\mathbb{R}}) = \dim_{\mathbb{K}_{\varepsilon}}(\mathfrak{I})$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{t}'_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{P}$. Ceci permet de montrer les deux assertions du théorème.

(b) D’après la Proposition 1.18, grâce à une conjugaison par un élément de $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, on peut supposer la sous-algèbre $\mathfrak{P} \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t)$ standard, c’est-à-dire (avec les notations de 1.19) $\mathfrak{P} \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t) = \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$.

Après ce changement, l’action de Γ' est inconnue à ceci près qu’il fixe $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ et stabilise $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$. La sous-algèbre $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ de \mathfrak{g}'' est une \mathbb{C} -SATD de $\mathfrak{g}'' \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ contenue dans $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \cap \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$, et $\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}(t) \subset \mathfrak{T} \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t)$ est contenue dans un centre de Levi de $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$. D’après la Proposition 1.20, quitte à conjuguer, on peut supposer que $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}_J$.

(c) On veut montrer qu’il existe $v \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ tel que $v(\mathfrak{h}_J)$ soit stable par Γ' et contienne \mathfrak{t} . On remarque d’abord que $\mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) = \mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \cap \mathcal{U}(\mathbb{C}(t))$ est stable par Γ' . Si $\gamma \in \Gamma'$, $\gamma(\mathfrak{h}_J)$ est, comme \mathfrak{h}_J , une SATD de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ telle que $\gamma(\mathfrak{h}_J) \otimes \mathbb{C}(t)$ est le centre d’un facteur de Levi de $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}(t)$. D’après la Proposition 1.20, il existe un unique $u_\gamma \in \mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ tel que $\gamma(\mathfrak{h}_J) = u_\gamma^{-1}(\mathfrak{h}_J)$. On a alors $u_{\gamma'\gamma}^{-1}(\mathfrak{h}_J) = \gamma'\gamma(\mathfrak{h}_J) = \gamma'(u_\gamma^{-1}(\mathfrak{h}_J))$, donc par unicité

$$u_{\gamma'\gamma} = u_{\gamma'}\gamma'(u_\gamma), \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma'.$$

Ainsi u_γ est un 1-cocycle dans $\mathcal{U}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. Mais $\forall \gamma \in \Gamma'$, $u_\gamma^{-1}(\mathfrak{h}_J) = \gamma(\mathfrak{h}_J)$ contient $\gamma(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$; donc $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}_J \cap u_\gamma^{-1}(\mathfrak{h}_J)$. Si l’on écrit u_γ^{-1} comme l’exponentielle d’un élément $X \in \mathfrak{u} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ on voit facilement que X n’a pas de composantes sur les racines α telles que $\alpha(\mathfrak{t}) \neq 0$. Le 1-cocycle u_γ prend donc ses valeurs dans $\mathcal{V}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, où \mathcal{V} est le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g}_\alpha)$ pour $\alpha \in \Delta^+ \setminus \mathbb{N}J$, $\alpha(\mathfrak{t}) = 0$.

On considère la filtration de \mathcal{U} par la suite centrale descendante $\mathcal{U}^{(n)}$; les quotients $\mathcal{U}^{(n)}/\mathcal{U}^{(n+1)}$ sont des groupes commutatifs isomorphes à la somme directe de certains \mathfrak{g}_α . Les groupes $\mathcal{U}^{(n)}(\mathbb{C}(t))$ sont stables par Γ' ainsi que les groupes $(\mathcal{U}^{(n)} \cap \mathcal{V})(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. On obtient ainsi une filtration de $\mathcal{V}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ stable par Γ' et telle que les quotients soient isomorphes à $(\mathbb{C}[t, t^{-1}])^N$ (donc soient des groupes commutatifs divisibles par $|\Gamma'|$). D’après [28, VII annexe et VIII, paragraphe 2, Corollaire 1], le 1-cocycle u_γ est un 1-cobord d’un $v \in \mathcal{V}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, c’est à dire $u_\gamma = v^{-1}\gamma(v)$. On a donc $\gamma(v(\mathfrak{h}_J)) = \gamma(v)u_\gamma^{-1}(\mathfrak{h}_J) = v(\mathfrak{h}_J)$. Comme v fixe \mathfrak{t} , on a $\mathfrak{t} \subset v(\mathfrak{h}_J)$.

(d) En reconjuguant par v , on peut supposer $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}_J$ et $\mathfrak{h}_J \otimes \mathbb{C}(t)$ stable par Γ' .

Soit \mathfrak{T}' le centre du centralisateur \mathfrak{Z} de \mathfrak{T} dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$. Par construction de \mathfrak{P} , $\mathfrak{Z} \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t)$ est un facteur de Levi de $\mathfrak{P} \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t)$. D’après la Proposition 1.20, il existe un unique $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}(t))$ tel que $u(\mathfrak{T}' \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t)) = \mathfrak{h}_J \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t)$. Mais $\mathfrak{h}_J \otimes \mathbb{C}(t)$ et $\mathfrak{T}' \otimes \mathbb{C}(t)$ sont tous les deux stables par Γ' , donc, par unicité, u est fixe par Γ' [i.e., $u \in \mathcal{U}(\mathbb{C}(t))^{\Gamma'}$]. Ainsi $u(\mathfrak{T})$ est une \mathbb{K}_ε -SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$ contenue dans $\mathfrak{h}_J \otimes \mathbb{C}(t)$. En particulier, $u(\mathfrak{T}) \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}_J \otimes \mathbb{C}(t)$ défini par des équations qui sont des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{Z} des restrictions des racines à $\mathfrak{h}_J \otimes \mathbb{C}(t)$. Soit \mathfrak{t}' le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de \mathfrak{h}_J vérifiant les mêmes équations; alors $\mathfrak{t}' \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t) = u(\mathfrak{T}) \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t)$. En particulier, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}') = \dim_{\mathbb{K}_\varepsilon}(\mathfrak{T})$. Comme $u(\mathfrak{T})$ est la partie déployée de $(\mathfrak{h}_J \otimes \mathbb{C}(t))^{\Gamma'}$ (qui contient $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$) on a $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{t}'$. Mais $\mathfrak{t}' = \{X \in u(\mathfrak{T}) \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t); \text{ad}(X) \text{ a des valeurs propres dans } \mathbb{C}\}$ est stable par Γ' . On note $\mathfrak{t}'_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{t}')^{\Gamma'}$. Pour $X \in \mathfrak{t}'_{\mathbb{R}}$, $\text{ad}(X)$ a ses valeurs propres dans $\mathbb{C} \cap \mathbb{K}_\varepsilon = \mathbb{R}$, donc $\mathfrak{t}'_{\mathbb{R}}$ est une \mathbb{R} -SATD de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ qui contient $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$.

Il reste à voir que $\mathfrak{t}'_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{t}'$. Pour cela il suffit de montrer que \mathfrak{t}' est fixe (point par point) par Γ . Soit \mathfrak{t}'_j l'espace propre de γ_m dans \mathfrak{t}' associé à la valeur propre $(\varepsilon_m)^j$. On a $\mathfrak{t}' = \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathfrak{t}'_j$ et $u(\mathfrak{T}) \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t^m) = (u(\mathfrak{T}) \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t))^\Gamma = (\mathfrak{t}' \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t))^\Gamma = \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathfrak{t}'_j \otimes t^{-j} \mathbb{C}(t^m)$. Pour $j \neq 0$, soit $X \in \mathfrak{t}'_j \otimes t^{-j} \mathbb{C}(t^m)$, alors $\text{ad}(X)$ a ses valeurs propres [pour la représentation adjointe dans $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}(t)$] contenues dans $t^{-j} \mathbb{C}(t^m)$; mais $X \in u(\mathfrak{T}) \otimes_{\mathbb{K}_\varepsilon} \mathbb{C}(t^m)$, donc ces valeurs propres sont dans $\mathbb{C}(t^m)$. Ainsi, toutes les valeurs propres de $\text{ad}(X)$ sont nulles, et comme \mathfrak{g} est simple, $X = 0$: On a bien $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}'_0$. \square

4.8. Conséquences

Toutes les \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ ont même dimension. Cette dimension est le rang relatif de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$ sur \mathbb{K}_ε , on l'appelle aussi le rang relatif de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ sur \mathbb{R} ; c'est un invariant de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ (vis-à-vis des isomorphismes).

De même, à la \mathbb{K}_ε -algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$ est associé son indice (cf. Tits [30] ou [2, 2.5]) que l'on calcule avec une paire $(\mathfrak{T}, \mathfrak{P})$ d'une \mathbb{K}_ε -SATDM \mathfrak{T} de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$ contenue dans une sous-algèbre parabolique fractionnaire minimale \mathfrak{P} de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$. D'après la Proposition 4.7, cet indice peut donc se calculer à partir d'une \mathbb{R} -SATDM $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ (et d'une sous-algèbre parabolique fractionnaire minimale la contenant) et c'est un invariant de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$.

Comme on va le voir dans le paragraphe 7, cet indice ne peut cependant caractériser $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ à isomorphisme près. En effet, même si les espaces radiciels de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ associés à $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ sont sur un certain anneau (\mathbb{A}_ε) des modules sans torsion de rang fini et si ce rang peut se déduire de l'indice, il y a encore plusieurs classes d'isomorphismes possibles pour ces modules (libres, non libres).

4.9. Contre-exemple

On considère $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \text{Id}, 1)$ (de type $A_1^{(1)}$), $\varepsilon = \pm 1$, et σ' la semi-involution normale de $\mathfrak{g} : (\mathfrak{g})^{\sigma'} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathbb{A} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}(t)$, \mathbb{K}_ε le sous corps de \mathbb{K} formé des points fixes de la semi-involution $\iota'_\varepsilon : P(t) \rightarrow \overline{P}(\varepsilon t^{-1})$, et $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{A} \cap \mathbb{K}_\varepsilon$. On a alors $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{A})$ et on considère la forme réelle $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}, \varepsilon} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$ de \mathfrak{g}'' associée à la semi-involution $\sigma'_\varepsilon = \sigma' \otimes \iota'_\varepsilon$.

On va regarder les \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}, \varepsilon}$ et montrer que pour $\varepsilon = -1$ elles sont conjuguées par $SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon) = SL_2(\mathbb{A})^{\sigma'_\varepsilon}$, et qu'elles ne le sont pas pour $\varepsilon = 1$.

Lemme 4.9.1. *L'anneau quotient $\mathbb{A}_\varepsilon = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 4\varepsilon)$ (avec $X = t + \varepsilon t^{-1}$ et $Y = i(t - \varepsilon t^{-1})$) est unitaire, intègre et noethérien; il est principal si et seulement si $\varepsilon = -1$.*

Démonstration. La vérification des premières assertions est simple. Montrons la dernière.

Un idéal \mathcal{I} de \mathbb{A}_ε détermine un idéal ι'_ε -stable $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}$ de l'anneau principal $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Soit P un générateur de $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}$.

Pour $\varepsilon = -1$, l'ensemble $\mathcal{P} = \{(t - z), -(t^{-1} + \bar{z}) ; z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0 \text{ ou } z \in \mathbb{R}_+^*\}$ est un système de représentants des éléments premiers de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$, modulo les éléments inversibles, qui est stable par l'_ε . On peut supposer que P est un produit d'éléments de \mathcal{P} , et comme $l'_\varepsilon(P)/P$ est inversible, on a en fait $l'_\varepsilon(P) = P$, et donc P est un générateur de \mathcal{I} .

Pour $\varepsilon = 1$, on n'a pas de tel système \mathcal{P} . En fait, si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $x^2 + y^2 = 4$, l'idéal $(X - x, Y - y)$ de \mathbb{A}_ε n'est pas principal, car aucun générateur de l'idéal correspondant de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ n'est fixe par l'_ε . \square

Proposition 4.9.2. *Le groupe $SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$ est transitif sur les SATDM de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$ si et seulement si \mathbb{A}_ε est principal.*

Conséquence. D'après le Lemme 4.9.1, il y a donc transitivité pour $\varepsilon = -1$ et non transitivité pour $\varepsilon = 1$.

Démonstration. (1) La sous-algèbre de Cartan standard \mathfrak{h}_0 de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est une \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$; donc toute \mathbb{R} -SATDM \mathfrak{h} de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$ est de dimension 1 sur \mathbb{R} , et donc une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$. Si \mathfrak{h} est une telle \mathbb{R} -SATDM, alors $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_\varepsilon$ est une sous-algèbre de Cartan déployée (i.e., aussi une \mathbb{K}_ε -SATDM) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_\varepsilon)$ considérée comme \mathbb{K}_ε -algèbre de Lie; cette sous-algèbre de Cartan détermine un unique couple $\{\mathfrak{B}^+, \mathfrak{B}^-\}$ de sous-algèbres de Borel fractionnaires (par rapport à \mathbb{K}_ε) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_\varepsilon)$ tel que $\mathfrak{B}^+ \cap \mathfrak{B}^- = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_\varepsilon$. De plus, le groupe de Weyl W de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_\varepsilon)$ par rapport à $\mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_\varepsilon$ admet des représentants dans $SL_2(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$ qui échange les deux sous-algèbres de Borel \mathfrak{B}_0^+ et \mathfrak{B}_0^- associées à \mathfrak{h}_0 . Ainsi, si \mathfrak{h} est conjuguée à \mathfrak{h}_0 par $SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$, alors les paires $\{\mathfrak{B}^+, \mathfrak{B}^-\}$ et $\{\mathfrak{B}_0^+, \mathfrak{B}_0^-\}$ sont conjuguées par $SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$.

(2) D'après le Théorème 4.7, toute sous-algèbre de Borel (sur \mathbb{K}_ε) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_\varepsilon)$ est associée, comme au (1), à une \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$. Donc si $SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$ est transitif sur les SATDM de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$, alors $SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$ est transitif sur les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_\varepsilon)$ et donc, d'après le Lemme 1.17, \mathbb{A}_ε est principal.

(3) Supposons que \mathbb{A}_ε est principal. Soit \mathfrak{h} une \mathbb{R} -SATDM de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$ qui détermine deux sous-algèbres de Borel \mathfrak{B}^+ et \mathfrak{B}^- de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_\varepsilon)$ et montrons que \mathfrak{h} est conjuguée à \mathfrak{h}_0 par $SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$. D'après le Lemme 1.17, on peut supposer que $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B}_0^+$. Mais $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_\varepsilon$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}_\varepsilon)$ contenue dans \mathfrak{B}_0^+ ; il existe donc $u = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{K}_\varepsilon)$ tel que $u(\mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_\varepsilon)u^{-1} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_\varepsilon$. Mais les éléments de \mathfrak{h}_0 (respectivement \mathfrak{h}) sont les éléments de $\mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_\varepsilon$ (respectivement $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_\varepsilon$) dont les valeurs propres pour la représentation adjointe sont dans \mathbb{R} (cf. Proposition 1.15); par conséquent $u\mathfrak{h}_0u^{-1} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$. En particulier, $u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$, donc $\alpha \in \mathbb{A}_\varepsilon$ et $u \in SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$. Donc \mathfrak{h} est conjuguée à \mathfrak{h}_0 par $SL_2(\mathbb{A}_\varepsilon)$. \square

Remarque 4.9.3. Avec les notations de 4.9, l'algèbre de Lie réelle :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, \varepsilon} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{A}_\varepsilon) \oplus i\mathbb{R}c \oplus i\mathbb{R}d$$

est une forme réelle presque compacte de \mathfrak{g} , et $\theta = \hat{\omega}\tau_0^\eta$ ($\eta \in \{0, 1\}$, $e^{i\pi\eta} = \varepsilon$) en est une involution de Cartan. La décomposition de Cartan correspondante $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},\varepsilon} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est telle que

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & P \\ -P & 0 \end{pmatrix} ; P \in \mathbb{A}_\varepsilon \right\} \oplus i\mathbb{R}c \oplus i\mathbb{R}d$$

et

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & -P \end{pmatrix} ; P, Q \in \mathbb{A}_\varepsilon \right\}.$$

Les deux sous-algèbres \mathfrak{t}_∞ et \mathfrak{a}_∞ suivantes :

$$\mathfrak{t}_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & P \\ -P & 0 \end{pmatrix} ; P \in \mathbb{R}[t + \varepsilon t^{-1}] \right\} \oplus i\mathbb{R}c,$$

$$\mathfrak{a}_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix} ; P \in \mathbb{R}[t + \varepsilon t^{-1}] \right\}$$

sont deux sous-espaces abéliens maximaux de dimension infinie de \mathfrak{k} et de \mathfrak{p} , respectivement.

Pour $P \in \mathbb{R}[t + \varepsilon t^{-1}] \setminus \mathbb{R}$, l'élément $\begin{pmatrix} 0 & P \\ -P & 0 \end{pmatrix}$ de \mathfrak{t}_∞ et l'élément $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{pmatrix}$ de \mathfrak{a}_∞ ne sont pas $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables sur \mathbb{C} . Contrairement au cas classique, un sous-espace abélien de \mathfrak{k} ou de \mathfrak{p} n'est donc pas toujours contenu dans une sous-algèbre torique de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},\varepsilon}$.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{pmatrix} ; r \in \mathbb{R} \right\} \oplus i\mathbb{R}c \oplus i\mathbb{R}d$ de \mathfrak{k} et de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},\varepsilon}$ est clairement un sous-espace abélien maximal de dimension finie de \mathfrak{k} . On en déduit alors que les sous-espaces abéliens maximaux de \mathfrak{k} n'ont pas tous la même dimension ; ils ne sont donc pas tous conjugués.

5. Calcul des rangs relatifs

Soient $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ une forme réelle presque compacte de l'algèbre de Kac–Moody \mathfrak{g} , et σ' la semi-involution de deuxième espèce de \mathfrak{g} associée à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On se fixe une sous-algèbre de Cartan maximale compacte \mathfrak{h} de \mathfrak{g} et on note σ l'involution de première espèce de \mathfrak{g} associée à la paire (σ', \mathfrak{h}) (cf. Proposition 2.9).

Notons tout de suite que si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est compacte (i.e., $\sigma = \text{Id}$, $\sigma' = \omega' = \hat{\omega}' \otimes l'$), le raisonnement de 3.7(iii) s'applique encore, mais $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ est compacte donc $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ sont de rang nul. Dans la suite, on suppose $\sigma \neq \text{Id}$.

Soit $l(\mathfrak{s}, \theta, \eta)$ une réalisation de \mathfrak{g} adaptée à $(\sigma, \sigma', \mathfrak{h})$ sur laquelle σ et σ' s'écrivent $\sigma = \hat{\sigma} \otimes 1$ et $\sigma' = \hat{\sigma}' \otimes l'$, où \mathfrak{s} est une algèbre de Lie semi-simple complexe, θ un automorphisme d'ordre fini de \mathfrak{s} , et $\hat{\sigma}'$ une semi-involution de \mathfrak{s} commutant à θ et telle que $\hat{\sigma}\hat{\sigma}'$ est une semi-involution de Cartan de \mathfrak{s} commutant à θ (cf. 3.9).

Soit $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ la forme réelle de \mathfrak{s} correspondant à $\hat{\sigma}'$, et soit $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ sa décomposition de Cartan par rapport à $\hat{\sigma}$.

Pour un sous-espace vectoriel θ -stable V de \mathfrak{s} , on note $l''(V, \theta, \eta)$ le sous-espace vectoriel : $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes V_j)$ de $\mathfrak{g}'' := \mathfrak{g}'/\mathbb{C}c$, avec $V_j = V \cap \mathfrak{s}_j$. Ainsi, si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ par rapport à σ , on a :

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = l(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \theta, \eta); \quad \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = l''(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \theta, \eta).$$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au calcul du rang relatif de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$: on le fait en construisant une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ à partir d'une SATDM de $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ que l'on choisit dans \mathfrak{p} (i.e., fixe par $-\sigma$) (cf. 4.5).

Proposition 5.1. *On considère une réalisation $l(\mathfrak{s}, \theta, \eta)$ de \mathfrak{g} .*

Soit \mathfrak{m} une sous-algèbre de Lie réductive de \mathfrak{s} stable par θ et dont le centre \mathfrak{c} est diagonalisable dans \mathfrak{s} , et soit $\mathfrak{g} \in \mathfrak{m} := l(\mathfrak{m}, \theta, \eta)$. Alors :

- (1) *Si $g \in \mathfrak{m}'$ alors $\text{ad}(g)$ est diagonalisable dans \mathfrak{m} si et seulement si $\text{ad}(g)$ est diagonalisable dans \mathfrak{g} . Sous cette dernière hypothèse, $g \in l(\mathfrak{m}', \theta, \eta) \oplus (\mathfrak{c})^{\theta} \otimes 1$.*
- (2) *Si \mathfrak{m} est semi-simple et les valeurs propres de $\text{ad}(g)$ dans \mathfrak{m} sont réelles, alors il en est de même des valeurs propres de $\text{ad}(g)$ dans \mathfrak{g} .*

Démonstration. La sous-algèbre $\mathcal{H} := (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}^*} \mathfrak{c}_j \otimes t^j) \oplus \mathbb{C}c$ est une algèbre de Heisenberg infinie et d en est l'élément de graduation. Par conséquent, les éléments de $l(\mathfrak{c}, \theta, \eta)$ ad-diagonalisables sur $\mathcal{H} = l''(\mathfrak{c}, \theta, \eta) \oplus \mathbb{C}c$ sont contenus dans $(\mathfrak{c})^{\theta} \otimes 1 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, et donc ils sont diagonalisables sur \mathfrak{g} .

Soit g un élément ad-diagonalisable de \mathfrak{m} ; il existe $(g', s) \in l(\mathfrak{m}', \theta, \eta) \times l''(\mathfrak{c}, \theta, \eta)$ tel que $g = g' + s$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (dépendant de g) tel que les actions de $\text{ad}(g)$ et $\text{ad}(s + \lambda d)$ sur $l''(\mathfrak{c}, \theta, \eta) \oplus \mathbb{C}c$ coïncident et donc sont ad-diagonalisables. Par conséquent, $s \in (\mathfrak{c})^{\theta} \otimes 1$ (donc $\text{ad}(s)$ est ad-diagonalisable dans \mathfrak{g}). Ainsi, $\text{ad}(g)$ et $\text{ad}(s)$ commutent, et g' est ad-diagonalisable dans \mathfrak{m} .

Un élément ad-diagonalisable (respectivement ad-diagonalisable à valeurs propres réelles) de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{m}')^{\theta}$ est ad-diagonalisable (respectivement ad-diagonalisable à valeurs propres réelles) dans \mathfrak{s} ; par conséquent, les éléments (respectivement les éléments à valeurs propres réelles) de la sous-algèbre de Cartan standard de $l(\mathfrak{m}', \theta, \eta)$ sont ad-diagonalisables (respectivement ad-diagonalisables à valeurs propres réelles) dans \mathfrak{g} . Grâce au théorème de conjugaison des sous-algèbres de Cartan, qui est encore valable pour $l(\mathfrak{m}', \theta, \eta)$, le résultat est vrai pour un élément g' quelconque ad-diagonalisable (respectivement ad-diagonalisable à valeurs propres réelles) de $l(\mathfrak{m}', \theta, \eta)$. D'où la proposition. \square

Lemme 5.2. *On conserve les notations introduites au début de ce paragraphe et on suppose qu'il existe un sous-espace abélien maximal θ -stable \mathfrak{a} de \mathfrak{p} tel que :*

$$C_{\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}}((\mathfrak{a})^{\theta}) = C_{\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{a}).$$

Alors la sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := (\mathfrak{a})^{\theta} \otimes 1$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$.

Démonstration. Soit \mathfrak{t} (respectivement \mathfrak{r}'') le centralisateur de la sous-algèbre \mathfrak{a} (respectivement $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$) dans \mathfrak{s} (respectivement \mathfrak{g}''). Alors $\mathfrak{r}'' = l''(\mathfrak{t}, \theta, \eta)$ et par conséquent $\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = l''(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}, \theta, \eta)$. Comme $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, on a $\mathfrak{r}'' = (\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) \oplus (\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}'')$. Soit $x \in \mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$; d'après la Proposition 5.1, $\text{ad}(x)$ est semi-simple (sur \mathfrak{g} ou $\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$) si et seulement si $x \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^{\theta} \otimes 1$. On a $[(\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}''), (\mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})] = 0$, et vu 4.4, on en déduit alors qu'un élément $x \in \mathfrak{r}'' \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ est torique déployé si et seulement si $x \in (\mathfrak{a})^{\theta} \otimes 1$; d'où le résultat. \square

Lemme 5.3. On considère une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} et Δ le système de racines associé. Soit α une racine réelle de Δ , et soit $(e, f) \in \mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[e, f] = \check{\alpha}$. On pose :

$$A = \exp(\text{ad}(f)) \exp\left(\text{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ad}(\check{\alpha})\right) \exp(\text{ad}(-e)),$$

$$A' = \exp(\text{ad}(-e)) \exp\left(\text{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ad}(-\check{\alpha})\right) \exp(\text{ad}(f)),$$

$$B = \exp(\text{ad}(-if)) \exp\left(\text{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ad}(\check{\alpha})\right) \exp(\text{ad}(-ie)).$$

Alors :

- (1) $A' = A$, $e + f = A(\check{\alpha})$ et $i(e - f) = B(\check{\alpha})$; en particulier $e + f$ et $i(e - f)$, comme $\check{\alpha}$, sont $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables à valeurs propres réelles.
- (2) Soit σ un automorphisme de \mathfrak{g} stabilisant la sous-algèbre $(\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathbb{C}\check{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$ et tel que $\sigma|_{\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}} = -1$; alors $\sigma A \sigma^{-1} = A^{-1} = A.r_{\alpha}$, et $\sigma r_{\alpha} \sigma^{-1} = r_{\alpha}^{-1}$, avec

$$\begin{aligned} r_{\alpha} &= A^2 = \exp(\text{ad}(e)) \exp(\text{ad}(-f)) \exp(\text{ad}(e)) \\ &= \exp(\text{ad}(-f)) \exp(\text{ad}(e)) \exp(\text{ad}(-f)) \end{aligned}$$

qui induit sur \mathfrak{h} la réflexion par rapport à la racine α et vérifie $r_{\alpha}^2 = \exp(i\pi \text{ad}(\check{\alpha}))$.

Démonstration. C'est un calcul dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; voir aussi [2, 4.6]. \square

Remarque. Dans les conditions du Lemme 5.3, si on suppose que \mathfrak{h} est stable par σ et σ' (par exemple \mathfrak{h} maximale compacte) et que α est fixe par σ , alors $\sigma'(\check{\alpha}) = -\check{\alpha}$, d'où $i\check{\alpha} \in \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures. Choisissons $(e, f) \in \mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[e, f] = \check{\alpha}$. Si $(-\sigma)$ fixe $\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, alors $e + f \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable à valeurs propres réelles. Si σ fixe $\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cap (\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathbb{C}\check{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) = \mathbb{R}(e - f) \oplus i\mathbb{R}\check{\alpha} \oplus i\mathbb{R}(e + f)$ est une sous-algèbre de Lie simple compacte de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Lemme 5.4. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , $\check{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $\check{\omega}$ l'involution de Cartan standard de \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h} . Alors le rang maximal d'un système Φ de racines fortement orthogonales de $\check{\Delta}$ est égal au rang r

de l'algèbre de Lie réductive $(\mathfrak{g})^{\hat{\omega}}$. Plus précisément, $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C}\check{\alpha}$ est conjuguée sous $\text{Aut}(\check{\mathfrak{g}})$ à une sous-algèbre de Cartan de $(\check{\mathfrak{g}})^{\hat{\omega}}$.

Démonstration. Soit $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\}$ un système de racines fortement orthogonales de $\mathring{\Delta}$, et soit $X_i \in \mathfrak{g}_{\beta_i}$ tel que : $\{X_i, \beta_i^\vee, Y_i = -\hat{\omega}(X_i)\}$ forme un \mathfrak{sl}_2 -triplet de \mathfrak{g} . Alors $\mathfrak{t} = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{C}(X_i - Y_i)$ est une sous-algèbre torique de $(\mathfrak{g})^{\hat{\omega}}$ (cf. Lemme 5.3) et par conséquent $l \leq r$.

D'autre part, le résultat de Sugiura [29, Théorème 2.5] appliqué à la forme déployée de \mathfrak{g} (dont l'involution de Cartan est $\hat{\omega}$) et une SATDM de celle-ci montre qu'il existe dans $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ un système Φ de racines fortement orthogonales de rang r et que $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{C}\check{\alpha}$ est une sous-algèbre de Cartan de $(\mathfrak{g})^{\hat{\omega}}$. D'où le lemme. \square

Corollaire 5.5. Si $(-\text{Id})$ est dans le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, alors il existe un système de racines fortement orthogonales de rang n , avec $n = \text{rang de } \mathfrak{g}$.

Sinon, le rang maximal r d'un système maximal de racines fortement orthogonales est la dimension de l'espace $(\mathfrak{h})^{\xi}$ des points fixes de \mathfrak{h} sous un automorphisme de diagramme ξ d'ordre 2, et le centralisateur de toute sous-algèbre de Cartan de $(\mathfrak{g})^{\hat{\omega}}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Remarque. Le premier résultat est énoncé sous forme d'exercice dans *Bourbaki*. De plus, la réciproque est clairement vraie (cf., Exercice 15, Chapitre VI, paragraphe 1 de [12]).

Démonstration. Si $(-\text{Id})$ est dans le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, alors l'involution de Cartan $\hat{\omega}$ est intérieure, et on a $\text{rang}((\mathfrak{g})^{\hat{\omega}}) = n$. Le corollaire découle donc du lemme précédent.

Dans le cas contraire, $\hat{\omega}$ est extérieure et l'assertion résulte de la description dans ce cas de $(\mathfrak{g})^{\hat{\omega}}$ que l'on trouve dans [13, Chapitre X]. \square

5.6. Cas des algèbres de type Aff 1

Lemme 5.6.1. On suppose que la réalisation standard de \mathfrak{g} est adaptée à σ' . Soit \mathfrak{a} un sous-espace abélien maximal de \mathfrak{p} ; alors la sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{a} \otimes 1$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$.

Démonstration. C'est une conséquence du Lemme 5.2. \square

Lemme 5.6.2. On suppose que la réalisation $l(\mathfrak{g}, \theta := \hat{\tau}_k, -1)$ est adaptée à σ' , avec $\hat{\tau}_k := \exp i\pi \text{ad}(\hat{p}_k)$. Dans un tel cas, on a : $\hat{\sigma}(\hat{p}_k) = -\hat{p}_k$ [i.e., $\hat{p}_k \in (\hat{\mathfrak{p}})^{\theta}$]. Soit \mathfrak{a} un sous-espace abélien maximal de $\hat{\mathfrak{p}}$ contenant \hat{p}_k ; alors la sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{a} \otimes 1$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$.

Démonstration. Une sous-algèbre torique de $\hat{\mathfrak{p}}$ contenant \hat{p}_k est contenue dans $(\hat{\mathfrak{p}})^{\theta}$; le résultat est une conséquence du Lemme 5.2. \square

Lemme 5.6.3. On suppose que σ est l'involution $\tau_0 := \exp i\pi \text{ad}(d)$ de la réalisation standard de \mathfrak{g} (qui est presque adaptée mais non adaptée à σ). Soit Φ un système de

racines fortement orthogonales maximal de $\hat{\Delta}$. Pour $\alpha \in \Phi$, soit $(e_\alpha, \check{\alpha}, f_\alpha)$ un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans la forme déployée de $\hat{\mathfrak{g}}$ associé à α ; alors la sous-algèbre de Lie :

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}(e_\alpha \otimes t + f_\alpha \otimes t^{-1})$$

est une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$.

Démonstration. Il est clair que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$. Soit δ la plus petite racine imaginaire positive de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. En appliquant 5.3 à $\{\alpha + \delta; \alpha \in \Phi\}$ qui est un système de racines fortement orthogonales de Δ , on voit que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATD de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est conjuguée de $\mathfrak{t}'_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{R}\check{\alpha}$ par le produit commutatif A des éléments A_α associés à chaque racine $\alpha + \delta$ (cf. 5.3). D’après 5.4 et 5.5, le centralisateur de $\mathfrak{t}'_{\mathbb{R}}$ dans $\hat{\mathfrak{g}}$ est réduit à $\hat{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{t}'_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) \oplus T_0$, avec $T_0 = \{h \in \hat{\mathfrak{h}}; \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Phi\}$. En retransformant par A^{-1} , on voit que le centralisateur de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ dans \mathfrak{g}' est une algèbre de Heisenberg infinie et $(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) \oplus T_0 \oplus \mathbb{C}c$ en est une sous-algèbre de Cartan. Le lemme découle alors de la Proposition 5.1. \square

Remarque 5.6.4.

- (1) Il résulte de la démonstration ci-dessus que le centralisateur de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ dans l’algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}-1}$ (cf. 4.6) est une sous-algèbre de Cartan; donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}-1}$ est quasi-déployée.
- (2) Avec les notations du Lemme 5.6.3, on suppose que $\sigma = (\hat{\sigma} \otimes 1)\tau_0$ sur la réalisation standard de \mathfrak{g} (où $\hat{\sigma}$ est une involution de $\hat{\mathfrak{g}}$). Soit \mathfrak{a} un sous-espace abélien maximal fixe par $(-\hat{\sigma})$ de la forme réelle de $\hat{\mathfrak{g}}$ associée à $\hat{\sigma}$; alors $\mathfrak{a} \otimes 1$ est fixe par τ_0 et définit une SATD de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$. En considérant le centralisateur de $\mathfrak{a} \otimes 1$ dans \mathfrak{g}'' , on se ramène aux conditions du Lemme 5.6.3.

5.7. Cas des algèbres de type Aff 2

En regardant la liste de Bausch–Rousseau des involutions de première espèce (reproduite au paragraphe 6), on constate que la réalisation standard $l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$ de \mathfrak{g} est adaptée à σ , sauf dans le cas où σ n’est pas intérieure, c’est-à-dire σ est de la forme ρH , avec $H = \exp(i\pi \text{ad}(h))$, $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ et ρ un automorphisme de diagramme non trivial de \mathfrak{g} ; dans ce cas \mathfrak{g} est nécessairement de type $A_{2l-1}^{(2)}$ ou $D_{l+1}^{(2)}$ et on verra qu’on peut ramener le calcul du rang dans une réalisation standard de type Aff 2 ou dans une algèbre de type Aff 1.

5.7.1. On suppose que \mathfrak{g} est de type $A_{2l-1}^{(2)}$, et $\sigma = \rho H$, où ρ est l’automorphisme de diagramme non trivial de $A_{2l-1}^{(2)}$. Dans ce cas $\sigma(d) = p_1 = d + \bar{p}_1$; par conséquent $\sigma(\bar{p}_1) = -\bar{p}_1$ et $\bar{p}_1 \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Soient $l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$ la réalisation standard de \mathfrak{g} , et \mathfrak{v} (respectivement \mathfrak{v}) le centralisateur de \bar{p}_1 dans \mathfrak{g} (respectivement $\hat{\mathfrak{g}}$). L’automorphisme de diagramme ξ de $\hat{\mathfrak{g}}$ fixe \bar{p}_1 , il stabilise \mathfrak{v} et on a $\mathfrak{v} = l(\mathfrak{v}, \xi, -1)$ et $\mathfrak{v} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, où \mathfrak{m} est la sous-algèbre de Lie simple $\hat{\mathfrak{g}}$ engendrée par $(\hat{\mathfrak{g}}_{\pm\hat{\alpha}_i}, i = 2, 3, \dots, 2l - 2)$. L’automorphisme ξ stabilise \mathfrak{m} , et ξ/\mathfrak{m} est un automorphisme de diagramme de \mathfrak{m} . Une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ contenant \bar{p}_1

est contenue dans \mathfrak{r} . D’après la Proposition 5.1, une telle SATDM est contenue dans $\mathbb{R}\bar{p}_1 \oplus (\mathfrak{l}(\mathfrak{m}, \xi, -1) \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$.

Une base du système de racines de $\mathfrak{l}(\mathfrak{m}, \xi, -1)$ est $(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_l)$, et un calcul dans l’algèbre de Lie simple de type A_3 , engendrée par $\{\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}; i = 0, 1, 2\}$, montre que ρ fixe $\mathfrak{g}_{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}$. Par conséquent, la restriction de ρ à $\mathfrak{l}(\mathfrak{m}, \xi, -1)$ est l’identité, et la restriction de σ à $\mathfrak{l}(\mathfrak{m}, \xi, -1)$ est intérieure. Ainsi, on se ramène au cas où la réalisation standard est adaptée à σ . \square

5.7.2. Supposons à présent que \mathfrak{g} est de type $D_{l+1}^{(2)}$, et $\sigma = \rho H$, où ρ est l’automorphisme de diagramme non trivial de $D_{l+1}^{(2)}$. Dans ce cas, on a $\sigma(d) = p_l = d + \bar{p}_l$; par conséquent $\sigma(\bar{p}_l) = -\bar{p}_l$, et $\bar{p}_l \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Soient $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi, -1)$ la réalisation standard de \mathfrak{g} et \mathfrak{t} (respectivement \mathfrak{t}) le centralisateur de \bar{p}_l dans \mathfrak{g} (respectivement \mathfrak{g}). Comme ξ fixe \bar{p}_l , il stabilise \mathfrak{t} et on a $\mathfrak{r} = \mathfrak{l}(\mathfrak{t}, \xi, -1)$ et $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, où \mathfrak{m} est la sous-algèbre de Lie simple de \mathfrak{g} engendrée par $\{\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}; i = 1, 2, 3, \dots, l-1\}$. L’automorphisme de diagramme ξ de \mathfrak{g} est trivial sur \mathfrak{m} . Une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ contenant \bar{p}_l est contenue, d’après la Proposition 5.1, dans $\mathbb{R}\bar{p}_l \oplus (\mathfrak{l}(\mathfrak{m}, \text{Id}, -1) \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$. Ainsi, on est ramené à l’algèbre $\mathfrak{l}(\mathfrak{m}, \text{Id}, -1)$ qui est de type Aff 1 (plus précisément $A_{l-1}^{(1)}$). \square

5.7.3. Cas où la réalisation standard de \mathfrak{g} est adaptée à σ

Soit $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi, -1)$ la réalisation standard de \mathfrak{g} . Ainsi ξ est un automorphisme de diagramme involutif par rapport à une sous-algèbre de Cartan $(\mathfrak{h})^1$ de $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$; il commute à $\hat{\sigma}$. D’après la table du paragraphe 6, σ s’écrit sous la forme $\sigma = \bar{\tau}_i$ ou $\sigma = \tau_0 \bar{\tau}_i$, et donc $\hat{\sigma} = \bar{\tau}_i$ ou $\xi \bar{\tau}_i$.

Soient \mathfrak{a}_0 une SATDM $\hat{\sigma}$ -stable de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\xi}$ (i.e., \mathfrak{a}_0 est contenue dans $(\mathfrak{p})^{\xi}$) et \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 ($:= (\mathfrak{g})^{\xi}$) contenant \mathfrak{a}_0 . Soit \mathfrak{h} le centralisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{h}_0 ; en conjuguant par un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} commutant avec ξ , on peut supposer que $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h})^1$ et que la base de Δ est adaptée à \mathfrak{a}_0 (cf. 7.1). Ainsi ξ est un automorphisme de diagramme involutif par rapport à \mathfrak{h} . Bien entendu, la description de $\hat{\sigma}$ par rapport à \mathfrak{h} n’est plus la même que celle par rapport à $(\mathfrak{h})^1$. Mais $\hat{\sigma}$ est toujours de la forme H, ξ ou ξH , avec H involution intérieure de \mathfrak{g}_0 stabilisant \mathfrak{h} , et ξ apparaissant si et seulement si τ_0 apparait dans la première expression (i.e., $\varepsilon = -1$). On peut déterminer $H|_{\mathfrak{h}_0}$: c’est le seul élément du groupe de Weyl dont la restriction à $\mathfrak{h}_0 = (\mathfrak{h})^{\xi}$ est la même que celle de $\hat{\sigma}$, c’est-à-dire vaut -1 sur \mathfrak{a}_0 et $+1$ sur son orthogonal (il s’exprime en général à partir des éléments de plus grande longueur des groupes de Weyl de Δ et des composantes connexes de Φ , cf. 6.5).

On pose $\mathfrak{t} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_0)$, $\mathfrak{m} = (\mathfrak{t})' = [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$, et $\Phi = \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m})$. Une des bases de Φ s’identifie à une partie ξ -stable de la base de Δ . Comme \mathfrak{a}_0 est une SATDM de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})^{\xi}$, on a $(\mathfrak{m})^{\xi} \subset (\mathfrak{m})^{\hat{\sigma}}$. On va compléter $(\mathfrak{a}_0 \otimes 1)$ en une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; une telle SATDM est de la forme $(\mathfrak{a}_0 \otimes 1) \oplus \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$, avec $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ une SATDM σ -stable de $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{l}(\mathfrak{m}, \xi, -1) \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (cf. Proposition 5.1).

Lemme 5.7.4 (cf. [8, 11.1]). *Soit \mathfrak{s} une algèbre de Lie simple complexe, et soient θ_1 et θ_2 deux automorphismes involutifs de \mathfrak{s} vérifiant $\mathfrak{s}^{\theta_2} \subset \mathfrak{s}^{\theta_1}$. Si de plus θ_1 est non trivial, on a $\theta_1 = \theta_2$.*

Lemme 5.7.5. Soit \mathfrak{s} une algèbre de Lie semi-simple complexe qui est somme de deux algèbres de Lie simples et isomorphes, et soient θ_1 et θ_2 deux automorphismes de \mathfrak{s} vérifiant :

- (i) θ_2 est involutif et échange les deux idéaux de \mathfrak{s} ;
- (ii) $\mathfrak{s}^{\theta_2} \subset \mathfrak{s}^{\theta_1}$.

Alors si $\theta_1 \neq \theta_2$, on a $\theta_1 = \text{Id}$.

Démonstration. Quitte à changer θ_1 en $\theta_2\theta_1$, on peut supposer que θ_1 stabilise les deux idéaux de \mathfrak{s} , et on déduit alors de la condition (ii) que θ_1 est l'identité de \mathfrak{s} . \square

Proposition 5.7.6. On conserve les notations et les hypothèses de 5.7.3.

La sous-algèbre $\hat{\mathfrak{m}}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ est somme directe d'idéaux $\hat{\mathfrak{m}}^k$ stables par ξ et $\hat{\sigma}$, minimaux pour cette propriété et qui sont de l'un des deux types :

- (i) $\hat{\mathfrak{m}}^k$: simple ;
- (ii) $\hat{\mathfrak{m}}^k = \hat{\mathfrak{m}}_1^k \oplus \hat{\mathfrak{m}}_2^k$: somme de deux idéaux simples échangés par ξ .

Dans ces deux cas $\hat{\sigma} = \text{Id}$ ou ξ sur $\hat{\mathfrak{m}}^k$.

Démonstration. Pour une base du système de racines Φ déterminée par un élément de $(\hat{\mathfrak{h}}_0 \cap \hat{\mathfrak{m}})$ qui est régulier dans $\hat{\mathfrak{m}}$, les deux involutions $\hat{\sigma}$ et ξ agissent sur Φ par des automorphismes de diagramme. Soient I_1, I_2, \dots, I_l les composantes connexes du diagramme de Dynkin de Φ et $\hat{\mathfrak{m}}_1, \hat{\mathfrak{m}}_2, \dots, \hat{\mathfrak{m}}_l$ les idéaux simples de $\hat{\mathfrak{m}}$ correspondants. Les automorphismes ξ et $\hat{\sigma}$ permutent les composantes connexes I_j et les idéaux $\hat{\mathfrak{m}}_j$. Comme $(\hat{\mathfrak{m}})^{\hat{\sigma}} \subset (\hat{\mathfrak{m}})^{\hat{\sigma}}$, il est clair que $\hat{\sigma}$ stabilise $(\hat{\mathfrak{m}})_j \oplus (\hat{\mathfrak{m}})_{\xi(j)}$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$.

(1) Si $\xi(j) = j$, alors $\hat{\sigma}$ et ξ stabilisent la sous algèbre de Lie simple $\hat{\mathfrak{m}}_j$ et on a, d'après le Lemme 5.7.4,

$$\hat{\sigma}/\hat{\mathfrak{m}}_j = \text{Id}_{\hat{\mathfrak{m}}_j} \quad \text{ou} \quad \hat{\sigma}/\hat{\mathfrak{m}}_j = \xi/\hat{\mathfrak{m}}_j.$$

(2) Si $\xi(j) \neq j$, alors dans ce cas ξ échange les deux idéaux $\hat{\mathfrak{m}}_j$ et $\hat{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}$; $\hat{\sigma}$ stabilise $\hat{\mathfrak{m}}_j \oplus \hat{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}$ et on a, d'après le Lemme 5.7.5,

$$\hat{\sigma}/\hat{\mathfrak{m}}_j \oplus \hat{\mathfrak{m}}_{\xi(j)} = \text{Id}_{\hat{\mathfrak{m}}_j \oplus \hat{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}} \quad \text{ou} \quad \hat{\sigma}/\hat{\mathfrak{m}}_j \oplus \hat{\mathfrak{m}}_{\xi(j)} = \xi/\hat{\mathfrak{m}}_j \oplus \hat{\mathfrak{m}}_{\xi(j)}.$$

D'où le résultat. \square

Remarque 5.7.7. En tenant compte de la proposition précédente, on se ramène à construire une SATDM σ -stable de $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ dans les quatre cas suivants :

- (i) $\hat{\mathfrak{m}} = \hat{\mathfrak{m}}_1 \times \hat{\mathfrak{m}}_1$ et l'involution $\hat{\sigma}$ agit trivialement sur $\hat{\mathfrak{m}}$; la forme réelle $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ est alors évidemment compacte et toute SATDM est triviale.

- (ii) $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_1$, où \mathfrak{m}_1 est une algèbre de Lie simple et $\xi(x, y) = \hat{\sigma}(x, y) = (y, x)$ pour $x, y \in \mathfrak{m}_1$. Dans un tel cas, la sous-algèbre $\mathfrak{m} = l(\mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_1, \xi, -1)$ est de type Aff 1 et $\sigma = \tau_0$. Ce cas a donc déjà été traité.
- (iii) \mathfrak{m} est simple et l'involution $\hat{\sigma}$ agit trivialement sur \mathfrak{m} ; la forme réelle $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ est alors évidemment compacte et toute SATDM est triviale.
- (iv) \mathfrak{m} est simple et $\hat{\sigma}/\mathfrak{m} = \xi/\mathfrak{m}$. Ce cas sera traité aux paragraphes qui suivent.

N.B. : Pour faire la différence entre les cas (i) et (ii) ou (iii) et (iv) il suffit de déterminer $\hat{\sigma}$ sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}$, ce que l'on fait d'après les indications de 5.7.3.

5.7.8. Dans ce qui suit on construit une SATDM σ -stable de $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ dans le cas où \mathfrak{m} est simple et $\hat{\sigma}/\mathfrak{m} = \xi/\mathfrak{m}$. On rappelle qu'une base du système de racines Φ de \mathfrak{m} s'identifie à une partie ξ -stable de la base de $\hat{\Delta}$ et on note τ l'automorphisme de diagramme de Φ induit par la restriction de ξ à \mathfrak{m} .

(I) Si l'automorphisme de diagramme τ de \mathfrak{m} est trivial, alors \mathfrak{m} est de type Aff 1, et l'algèbre de Lie simple \mathfrak{g} ne peut pas être de type A_{2l} . Ainsi, l'automorphisme de diagramme ξ de \mathfrak{g} fixe (point par point) les sous-espaces radiciels \mathfrak{g}_{α} qu'il stabilise. Par conséquent, ξ fixe \mathfrak{m} , et la forme réelle $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ est compacte.

(II) Si l'automorphisme de diagramme τ de \mathfrak{m} est non trivial, alors on distingue deux cas :

1. Si \mathfrak{g} est de type A_{2l} , alors la sous-algèbre de Lie simple \mathfrak{m} est nécessairement de type A_n , $n \geq 1$. Comme l'automorphisme de diagramme ξ de A_{2l} ne fixe aucune racine de la base de $\hat{\Delta}$, il en est de même pour son action par τ sur la base de racines de Φ . Par conséquent, l'algèbre de Lie simple \mathfrak{m} est de type A_{2k} , et quitte à choisir convenablement la base de Chevalley de \mathfrak{m} , on peut supposer que $\xi/\mathfrak{m} = \tau$.
2. Si \mathfrak{g} n'est pas de type A_{2l} , alors pour toute racine α de $\hat{\Delta}$ qui est fixée par ξ , l'espace radiciel correspondant \mathfrak{g}_{α} est également fixé par ξ ; d'où pour un bon choix de la base de Chevalley de \mathfrak{m} , on peut supposer $\xi/\mathfrak{m} = \tau$.

Finalement, on se ramène au cas où $\mathfrak{m} = l(\mathfrak{m}, \tau, -1)$ et $\sigma/\mathfrak{m} = \tau \otimes 1$ qui sera traité en détail dans le numéro qui suit. \square

5.7.9. Construction d'une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ dans le cas où $\mathfrak{g} = l(\mathfrak{g}, \xi, -1)$ et $\sigma = \xi \otimes 1$, avec ξ un automorphisme de diagramme involutif et non trivial de \mathfrak{g}

Ce cas correspond, avec les notations des tables du paragraphe 6, à $\sigma = \tau_0$. La construction se fait cas par cas suivant le type de l'algèbre de Lie simple \mathfrak{g} .

Lemme 5.7.9.1. Soient β_1 et β_2 deux racines réelles et orthogonales de Δ (i.e., $\beta_1(\beta_2^{\vee}) = \beta_2(\beta_1^{\vee}) = 0$) telles que : $(\beta_1 \pm \beta_2) \in \Delta$ et $\beta_1 \pm n\beta_2 \notin \Delta$ si $n > 1$.

Alors l'automorphisme r_1 , prolongement à \mathfrak{g} de la réflexion par rapport à β_1 , stabilise \mathfrak{g}_{β_2} et agit dessus par (-1) .

Démonstration. Soit $e_{\beta_1} \in \mathfrak{g}_{\beta_1}$ tel que $[e_{\beta_1}, (f_{\beta_1} := -\omega'(e_{\beta_1}))] = \beta_1^{\vee}$.

On a $r_1 = \exp(\text{ad}(e_{\beta_1})) \exp(-\text{ad}(f_{\beta_1})) \exp(\text{ad}(e_{\beta_1}))$. Il est clair que $r_1(\mathfrak{g}_{\beta_2}) = \mathfrak{g}_{r_1(\beta_2)} = \mathfrak{g}_{\beta_2}$ et on doit montrer que $(-r_1)$ fixe \mathfrak{g}_{β_2} . Soit $x \in \mathfrak{g}_{\beta_2} \setminus \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} \exp(\text{ad } e_{\beta_1})(x) &= x + [e_{\beta_1}, x], \\ \exp(-\text{ad } f_{\beta_1})(x) &= x - [f_{\beta_1}, x], \\ \exp(-\text{ad } f_{\beta_1})([e_{\beta_1}, x]) &= [e_{\beta_1}, x] - [e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]] + \frac{1}{2}[f_{\beta_1}, [e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]]]. \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{1}{2}[f_{\beta_1}, [e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]]] = \frac{1}{2}[-\beta_1 \check{[f_{\beta_1}, x]]] = [f_{\beta_1}, x],$$

d'où

$$\exp(-\text{ad } f_{\beta_1}) \exp(\text{ad } e_{\beta_1})(x) = x + [e_{\beta_1}, x] - [e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]].$$

Il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $[e_{\beta_1}, [f_{\beta_1}, x]] = \mu x$, et on a $\exp(-\text{ad } f_{\beta_1}) \exp(\text{ad } e_{\beta_1})(x) = (1 - \mu)x + [e_{\beta_1}, x]$. Par conséquent, $r_1(x) = (1 - \mu)(x + [e_{\beta_1}, x]) + [e_{\beta_1}, x] = (1 - \mu)x + (2 - \mu)[e_{\beta_1}, x]$. Comme $r_1(x) \in \mathfrak{g}_{\beta_2}$ et $\beta_1 + \beta_2$ est une racine de Δ , on a nécessairement $[e_{\beta_1}, x] \neq 0$, d'où $\mu = 2$ et $r_1(x) = -x$. \square

Lemme 5.7.9.2. *Sous les hypothèses de 5.7.9, on suppose que $\hat{\mathfrak{g}}$ est de type A_{2k} . Soit Ψ l'ensemble des racines positives de $\hat{\Delta}$ qui sont fixes par ξ . Choisissons pour chaque racine α de Ψ un élément non nul x_α de $\hat{\mathfrak{g}}_\alpha$; alors la sous-algèbre :*

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathbb{R}(x_\alpha \otimes t - \hat{\omega}'(x_\alpha) \otimes t^{-1})$$

est une SATDM σ -stable de dimension k de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$.

Démonstration. D'après le Lemme 5.4, Ψ est un système de racines fortement orthogonales maximal de A_{2k} et il est de cardinal k . Pour $\alpha \in \Psi$, $(-\xi)$ fixe $\hat{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha}$; d'après 5.3, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATD σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ de dimension k , et d'après la Proposition 3.7(iii), $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est maximale. \square

Lemme 5.7.9.3. *Sous les hypothèses de 5.7.9, on suppose que $\hat{\mathfrak{g}}$ est de type A_{2l-1} .*

Si $l = 2k$ ou $2k + 1$, on pose pour $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, $\beta_i = \alpha_{2i+1} + \delta \in \Delta$, avec $\delta = \alpha_0 + \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \dots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l$, $e_{\beta_i} \in \mathfrak{g}_{\beta_i}$, $f_{\beta_i} = -\omega'(e_{\beta_i})$, tel que $[e_{\beta_i}, f_{\beta_i}] = \beta_i \check{}$. Alors la sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{R}(e_{\beta_i} + f_{\beta_i})$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$.

Démonstration. Notons d'abord que le raisonnement se fait dans $\mathfrak{g}/\mathbb{C}c$, donc $\beta_i \check{=} \check{\alpha}_{2i+1} + \check{\alpha}_{2l-2i-1}$, $\forall i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Étape 1. Avec les notations du lemme on pose pour $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$:

- (i) $A_i = \exp(\text{ad}(f_{\beta_i})) \exp(\text{Log}(\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ad}(\beta_i^\vee)) \exp(-\text{ad}(e_{\beta_i}))$.
- (ii) $A = \prod_{i=0}^{k-1} A_i$.
- (iii) r_i la réflexion par rapport à β_i^\vee . La réflexion r_i se prolonge en un automorphisme d'ordre fini de \mathfrak{g} , qu'on note encore r_i , et qui est défini par :

$$r_i = \exp(\text{ad}(e_{\beta_i})) \exp(-\text{ad}(f_{\beta_i})) \exp(\text{ad}(e_{\beta_i})).$$

(iv) $r = \prod_{i=0}^{k-1} r_i$.

On a : $\sigma|_{\mathfrak{g}_{\beta_i} \oplus \mathfrak{g}_{-\beta_i}} = -\text{Id}$, $\sigma(\beta_i^\vee) = \beta_i^\vee$, $A_i(\beta_i^\vee) = (e_{\beta_i} + f_{\beta_i}) \in \mathfrak{p}$ (cf. Lemme 5.3). Les racines β_i , $i = 0, 1, \dots, k - 1$, sont deux à deux fortement orthogonales (en particulier A est un produit commutatif). La sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = A(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{C}\beta_i^\vee)$ définit bien une SATD σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$, et on a $\mathfrak{r}'' := C_{\mathfrak{g}''}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = A(C_{\mathfrak{g}''}(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{C}\beta_i^\vee))$.

Étape 2. Pour $i = 0, 1, \dots, k - 2$, soit γ_i la racine de $\Delta(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{h}}_0)$ définie par :

$$\gamma_i = \alpha_{2i+1} + 2(\alpha_{2i+2} + \dots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l.$$

On définit aussi,

$$\begin{aligned} \gamma_{k-1} &= \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k} & \text{si } l = 2k, \\ \gamma_{k-1} &= \alpha_{2k-1} + 2\alpha_{2k} + \alpha_{2k+1} & \text{si } l = 2k + 1, \\ \gamma_k &= \alpha_{2k+1} & \text{si } l = 2k + 1. \end{aligned}$$

Les γ_i , $i = 0, 1, \dots, [\frac{l-1}{2}]$, ainsi définies sont deux à deux fortement orthogonales.

Pour $0 \leq i \leq k - 1$, γ_i est la restriction de deux racines fortement orthogonales de $\Delta(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{h}})$ échangées par ξ .

On note l^i la sous-algèbre engendrée par $\hat{\mathfrak{g}}_{\pm\gamma_i}$, $i = 0, 1, \dots, k$ ($l^k = \{0\}$ si $l = 2k$) et $l = \bigoplus_{i=0}^k l^i$. Soit $\mathfrak{t} = C_{\hat{\mathfrak{g}}}(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{C}\beta_i^\vee)$ et notons \mathfrak{c} son centre. On a $\mathfrak{t}' = l$; par conséquent $C_{\mathfrak{g}''}(\bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbb{C}\beta_i^\vee) = l''(\mathfrak{c}, \xi, -1) \oplus l''(l, \xi, -1)$ et il s'agit d'une somme d'algèbres.

Étape 3. On considère l'action de l'involution $\sigma = \xi \otimes 1$ sur la sous-algèbre $A(l''(l, \xi, -1))$ de \mathfrak{g}'' . Il est clair que ξ fixe l^k , et donc σ fixe $l''(l^k, \xi, -1)$ [= $A(l''(l^k, \xi, -1))$]. On va montrer que σ fixe $A(l''(l^i, \xi, -1))$, $i = 0, 1, \dots, k - 1$. On va faire le calcul pour le cas $i = 0$ (c'est pareil pour les autres cas).

D'après le Lemme 5.3, on a $\sigma A \sigma^{-1} = A r$. Par conséquent, pour $x \in \mathfrak{g}$, $\sigma(Ax) = Ax$ si et seulement si $r\sigma(x) = x$, et il suffit donc de montrer que $r\sigma$ fixe $l''(l^0, \xi, -1)$. La sous-algèbre $l''(l^0, \xi, -1)$ de \mathfrak{g}'' est engendrée par $\{\mathfrak{g}_{(\pm\gamma_0+n\delta)}; n \in \mathbb{Z}\}$. Il est clair que $r\sigma$ fixe $\mathfrak{g}_{(\pm\gamma_0+2n\delta)}$, $n \in \mathbb{Z}$ (car les racines $(\beta_i)_{i=0, \dots, k-1}$ sont fortement orthogonales à $(\pm\gamma_0 + 2n\delta)$); il suffit donc de montrer que $r\sigma$ fixe $\mathfrak{g}_{\gamma_0+\delta}$. Soit $x_0 \in \mathfrak{g}_{\gamma_0+\delta} \setminus \{0\}$, comme $\gamma_0 + \delta$ est fortement orthogonale à β_i , $\forall i = 1, \dots, k - 1$, l'espace $\mathfrak{g}_{\gamma_0+\delta}$ est fixe par les r_i pour $i > 0$; mais $(\gamma_0 + \delta)$ et β_0 vérifient bien les conditions du Lemme 5.7.9.1, et on a $r\sigma(x_0) = -r(x_0) = -r_0(x_0) = x_0$.

Étape 4. On va montrer que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$.

Soit $\tau'' := C_{\mathfrak{g}''}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = A(l''(\hat{c}, \xi, -1) \oplus l''(l, \xi, -1))$. Les éléments $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables de τ'' sont contenus dans $A((\hat{c}_0 \otimes 1) \oplus l''(l, \xi, -1))$, cf. Proposition 5.1.

D'après l'étape 3, l'involution σ fixe $l''(l, \xi, -1)$, et par suite (cf. 4.4) les éléments $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables et à valeurs propres réelles de $\tau'' \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont contenus dans $(A(\hat{c}_0 \otimes 1)) \cap \mathfrak{p}$ qui est égale à $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$; d'où le lemme. \square

Lemme 5.7.9.4. *Sous les hypothèses de 5.7.9, on suppose que $\hat{\mathfrak{g}}$ est de type D_{l+1} .*

La sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}(e_0 + f_0)$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. D'après le Lemme 5.3, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATD de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ contenue dans \mathfrak{p} . On a $\dim(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = \text{rang}(\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}})$, et donc $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ [cf. Proposition 3.9(iii)]. \square

Lemme 5.7.9.5. *Sous les hypothèses de 5.7.9, on suppose que $\hat{\mathfrak{g}}$ est de type E_6 . Alors la sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}(e_0 + f_0)$ est une SATDM σ -stable de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Il est clair, d'après le Lemme 5.3, que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATD σ -stable de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$; montrons qu'elle est maximale. Soit A_0 l'automorphisme introduit en 5.3 qui transforme α_0 en $(e_0 + f_0)$, on a $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = A_0(\mathbb{R}\alpha_0)$ et $\tau := C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = A_0(\mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Phi \cup \Psi} \mathfrak{g}_{\alpha}))$, avec $\Phi = \{\pm\alpha_2 + n\delta, \pm\alpha_3 + 2n\delta, \pm\alpha_4 + 2n\delta, \pm(\alpha_2 + \alpha_3) + n\delta, \pm(\alpha_3 + \alpha_4) + 2n\delta, \pm(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + n\delta, \pm(2\alpha_2 + \alpha_3) + 2n\delta, \pm(2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + 2n\delta, \pm(2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4) + 2n\delta; n \in \mathbb{Z}\}$, et $\Psi = \{n\delta; n \in \mathbb{Z}^*\}$ [on utilise ici pour E_6 la numérotation fixée en 1.11(2)]. Il est clair que les éléments diagonalisables à valeurs propres réelles de $(\tau \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ sont contenus dans $\tilde{\tau} := A_0(\mathfrak{h}' \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}))$. Si une racine de Φ est de la forme $\pm(n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4) + 2n\delta$, on voit facilement par le calcul qu'elle est fortement orthogonale à α_0 , et par suite σ et A_0 fixent l'espace radiciel correspondant. Comparée avec α_0 , une autre racine $\alpha = \pm(\alpha_2 + n_3\alpha_3 + n_4\alpha_4) + (2n + 1)\delta$ de Φ vérifie toutes les conditions du Lemme 5.7.9.1 et on a $r_0/\mathfrak{g}_{\alpha} = -1$. De plus, $\sigma/\mathfrak{g}_{\alpha} = -1$, et par conséquent $r_0\sigma$ est l'identité sur \mathfrak{g}_{α} . D'après le Lemme 5.3, on a $\sigma A_0\sigma^{-1} = A_0r_0$, et on en déduit que σ fixe $A_0(\mathfrak{g}_{\alpha})$. Ainsi σ est l'identité sur l'algèbre dérivée $\tilde{\tau}'$ de $\tilde{\tau}$. Par conséquent, la forme réelle de $\tilde{\tau}'$ associée à la restriction de σ' est compacte. D'où le lemme. \square

5.8. Cas où \mathfrak{g} est de type Aff 3

Ce cas correspond à $D_4^{(3)}$ et on distingue, en plus de la forme compacte, deux formes réelles presque compactes de \mathfrak{g} correspondant à \tilde{e}_2 et τ_0 . Les deux formes ne sont pas isomorphes car elles ne correspondent pas au même signe ε (cf. Lemmes 2.4 et 2.13). C'est pourquoi on n'indiquera pas le calcul du rang (2 pour chaque forme); il figure dans [7].

6. Table des formes réelles presque compactes des algèbres de Kac–Moody affines

6.1. Les tables qui vont suivre indiquent dans leurs trois premières colonnes la classification par Jean Bausch [4,6] des involutions de première espèce des algèbres

de Kac–Moody affines; il y a quelques corrections par rapport à la classification de Levstein [19].

Plus précisément, dans la première colonne figure le nom $X_n^{(k)}$, selon Victor Kac [15], de l’algèbre affine \mathfrak{g} avec indication des limitations sur un éventuel paramètre l ou r . Dans la seconde colonne est reproduit le diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} avec la numérotation des sommets expliquée en 1.11(2); on indique aussi éventuellement par des flèches l’action d’un automorphisme de diagramme involutif ρ (cf. 1.4). Si ρ n’est pas mentionné, on prend $\rho = \text{Id}$ dans la suite.

L’invololution de première espèce σ est décrite dans la troisième colonne avec les limitations éventuelles sur le paramètre i qui correspond au numéro d’un sommet du diagramme de Dynkin. On utilise les notations suivantes : $\check{\tau}_i = \exp \iota \pi \text{ad}(\check{p}_i)$ et $\bar{\tau}_i = \exp \iota \pi \text{ad}(\bar{p}_i)$ (avec les notations de 1.5) et $\iota \in \mathbb{C}$, $\iota^2 = -1$, et $\tau_i = \exp \iota \pi \text{ad}(p_i)$ (avec les notations de 1.11(5)); en particulier $p_0 = d$, et pour $i \neq 0$, $p_i = \bar{p}_i + a_i d$, donc $\tau_i = \bar{\tau}_i$ ou $\bar{\tau}_i \tau_0$ selon que le coefficient a_i du diagramme de Dynkin est pair ou impair.

On peut noter que, d’après 2.3, pour $A_{2l}^{(2)}$, $\rho_1 \tau_0$ induit sur \mathfrak{g}'' l’invololution $\xi \otimes 1$, où ξ est l’automorphisme de diagramme non trivial de $(\check{\mathfrak{g}}, \check{\mathfrak{h}})$.

Remarque. Comme indiqué déjà en 2.13, σ est en fait de l’une des cinq formes suivantes : τ_{i_1} , $\tau_{i_1} \tau_{i_2}$, ρ , $\rho \tau_{i_1}$ ou $\rho \tau_{i_1} \tau_{i_2}$ (avec $i_2 = 0$ quand il existe). Les racines $\alpha = \alpha_{i_1}$ et α_{i_2} (éventuellement) sont fixées par ρ et l’espace radiciel \mathfrak{g}_α correspondant est contenu dans $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$ (notation de 2.7) : on dit que α_{i_1} et α_{i_2} sont des *racines simples non compactes*. Les racines simples α fixes par ρ mais différentes de α_{i_1} , α_{i_2} sont telles que l’espace radiciel \mathfrak{g}_α correspondant est contenu dans $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$: on dit que ce sont des *racines simples compactes*. On a $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$, avec :

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = \bigoplus_{\beta} \mathbb{R}(p_{\beta} - p_{\rho\beta})$$

et

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = \left(\bigoplus_{\alpha} i \mathbb{R} p_{\alpha} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\beta} i \mathbb{R}(p_{\beta} + p_{\rho\beta}) \right) \quad (\text{modulo le centre})$$

où les α (respectivement β) sont les racines simples fixes (respectivement non fixes) par ρ et où on note $(p_{\gamma})_{\gamma}$ une « base duale » de la base de racines. Ainsi, une racine simple fixe par ρ est imaginaire pure sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, tandis qu’une racine simple non fixe par ρ y est complexe (ni imaginaire pure ni réelle).

La description de σ peut être résumée (de manière imagée mais encombrante) par un diagramme, obtenu à partir du diagramme de Dynkin, muni des flèches figurant colonne 2 en noircissant (ou encerclant) les sommets i_1 et i_2 . Ces diagrammes, dits de Vogan, sont expliqués, dans le cas affine non tordu, par P. Batra [3]; ils sont beaucoup plus anciens, voir, par exemple, [14] ou [22].

6.2. Dans la colonne 4 figure le signe ε calculé selon les indications de 2.13.

6.3. Réalisation adaptée

Dans la colonne 5, on décrit la réalisation adaptée à σ obtenue en 3.5. Les notations sont les suivantes :

La réalisation standard de \mathfrak{g} est $l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, \varepsilon_k)$, où $\varepsilon_k = \exp(\frac{2j\pi}{k})$, $j = \varepsilon_3$, et ξ est un automorphisme de diagramme de $\hat{\mathfrak{g}}$ d'ordre k ; si $k = 1$, $\xi = \text{Id}$. On a de plus :

- (*) $\theta(x, y) = (y, x), \forall x, y \in \hat{\mathfrak{g}}$;
- (*)' $\xi_2(x, y) = (y, \xi(x)), \forall x, y \in \hat{\mathfrak{g}}$;
- (**) $(\bar{\iota}_i)^{\frac{1}{2}} = \exp \iota \frac{\pi}{2} \text{ad}(\bar{p}_i), \iota \in \mathbb{C}, \iota^2 = -1$.

6.4. La semi-involution de seconde espèce σ'

D'après [23] et le paragraphe 3, la semi-involution σ' est le produit commutatif de σ et de la semi-involution de Cartan standard ω' décrite en 2.5 avec le même épinglage $(\mathfrak{h}, (e_i, f_i)_{i \in I})$ de \mathfrak{g} . D'après [23] (cf. Proposition 2.9), on obtient ainsi la liste de toutes les classes de conjugaison des semi-involutions de seconde espèce, c'est-à-dire de formes réelles presque compactes, à condition de rajouter pour chaque algèbre la classe de conjugaison des semi-involutions de Cartan (qui correspondent aux formes compactes). On verra au paragraphe 7 que cette liste ne comporte aucune redite.

6.5. La forme réelle $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$

La colonne 6 indique l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ introduite en 3.9 et 3.10. Les notations sont celles d'Helgason [13]. Si $\varepsilon^k = -1$, $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ est $\hat{\mathfrak{g}}$ considérée comme algèbre réelle simple pseudo-complexe. Sinon $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de $\hat{\mathfrak{g}}$ déterminée par l'involution de Cartan $\hat{\sigma}$ associée à σ comme en 3.7. Voici quelques indications pour le calcul de $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ quand $\varepsilon^k = 1$.

(1) La description de σ et de la réalisation adaptée fournit une description de $\hat{\sigma}$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan standard $\hat{\mathfrak{h}}$ que $\hat{\sigma}$ stabilise. Cette description est aisée, sauf quand σ fait intervenir un automorphisme de diagramme ρ d'une algèbre de type Aff 2. Dans la plupart des cas, en fait quand $\rho(0) = 0$, on tombe sur la description standard d'une involution de Cartan comme décrite par Helgason d'après Kac [13, Chapitre X] ; on a alors aussitôt la forme $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$.

On sait que pour déterminer $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ il suffit de déterminer sa sous-algèbre compacte maximale, c'est-à-dire $(\hat{\mathfrak{g}})^{\hat{\sigma}}$. Pour cela un moyen détourné peut s'avérer utile : on cherche une involution $\hat{\tau}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ stabilisant $\hat{\mathfrak{h}}$ et commutant à $\hat{\sigma}$, pour laquelle $(\hat{\mathfrak{g}})^{\hat{\tau}}$ et $[(\hat{\mathfrak{g}})^{\hat{\tau}}]^{\hat{\sigma}}$ sont faciles à calculer. Alors $\hat{\mathfrak{g}}/(\hat{\mathfrak{g}})^{\hat{\sigma}}$ et $[(\hat{\mathfrak{g}})^{\hat{\sigma}}/[(\hat{\mathfrak{g}})^{\hat{\tau}}]]^{\hat{\sigma}}$ correspondent à des espaces symétriques ; ce qui donne un nombre très restreint de possibilités pour $(\hat{\mathfrak{g}})^{\hat{\sigma}}$. La plupart des calculs nécessaires ici ont déjà été effectués par Kabbaj [14] (voir aussi [22]).

(2) Le calcul du rang de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ (indiqué à la colonne 7) et 3.9 fournissent une inégalité pour le rang de $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ et même une égalité pour les algèbres non tordues d'après 5.6.1 et 5.6.2. Cela suffit souvent à déterminer $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$. D'autre part, en poursuivant les calculs ayant conduit à déterminer le rang de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$, il est facile de déterminer celui de $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$, d'où, presque toujours, la détermination de $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ [13, Chapitre X, Table VI].

(3) Il est en général assez facile de déterminer si l'involution $\hat{\rho}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ associée à un automorphisme de diagramme de \mathfrak{g} est intérieure ou extérieure, car il suffit de connaître $\hat{\rho}$ sur $\hat{\mathfrak{h}}$. Les trois cas difficiles sont $A_{2l-1}^{(2)}$, $D_{2r}^{(2)}$ et $D_{2r+1}^{(2)}$ pour lesquels on trouve que $\hat{\rho}$ est toujours intérieure, plus précisément :

$$\begin{aligned} \text{pour } A_{2l-1}^{(2)} \quad \hat{\rho} &= -\xi w(2, 3, \dots, 2l-2) \quad \text{sur } \hat{\mathfrak{h}}, \\ \text{pour } D_{2r}^{(2)} \quad \hat{\rho} &= -w(1, 2, \dots, 2r-2) \quad \text{sur } \hat{\mathfrak{h}}, \\ \text{pour } D_{2r+1}^{(2)} \quad \hat{\rho} &= -\xi w(1, 2, \dots, 2r-1) \quad \text{sur } \hat{\mathfrak{h}}, \end{aligned}$$

où $w(i, \dots, j)$ est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl (de type A) engendré par les réflexions $\hat{r}_i, \dots, \hat{r}_j$.

Comme \hat{r}_i ou \bar{r}_i induit un automorphisme intérieur de $\hat{\mathfrak{g}}$, tandis que τ_0 induit ξ sur $\hat{\mathfrak{g}}$, il est facile de déterminer si l'involution $\hat{\sigma}$ est intérieure ou extérieure, c'est-à-dire si la forme réelle est intérieure ou extérieure.

Dans le cas Aff 2, comme $\hat{\rho}$ est toujours intérieure, la forme réelle $\hat{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}}$ est intérieure si et seulement si $\varepsilon = 1$. Ainsi, le résultat de 2.4 et 2.13 (qui fait intervenir ε^k) se généralise :

Proposition 6.6. *Le signe ε introduit en 2.13 est un invariant par conjugaison de σ' sous $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.*

6.7. Rang de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$

Ce rang s figure dans la septième colonne. Il est calculé selon les processus décrits au paragraphe 5. En particulier, d'après 5.6.1 et 5.6.2, ce rang est le même que celui de $\hat{\mathfrak{s}}_{\mathbb{R}} = \hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ dans les cas non tordus avec $\varepsilon = 1$.

On note $[r]$ la partie entière d'un nombre rationnel r .

6.8. Indice de Tits

On a fait figurer dans la dernière colonne l'indice de Tits [30] de la forme $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$ de $\hat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}(t)$ sur le corps $\mathbb{K}_\varepsilon = \mathbb{C}(t^m)^{\prime\varepsilon}$ associée à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (cf. 4.6). Si le nom de l'algèbre de Kac–Moody est $X_n^{(k)}$, alors $\hat{\mathfrak{g}}$ est de type X_n , et si s est le rang de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$, alors le nom de l'indice de Tits est ${}^s X_{n,s}^{(d)}$, ou ${}^s X_{n,s}^d$ pour X_n exceptionnel.

Le nombre $g = 1, 2, 3$ ou 6 est le cardinal du quotient du groupe de Galois Γ' de $\mathbb{C}(t)$ sur \mathbb{K}_ε agissant sur le diagramme de Dynkin; c'est un multiple de k et un diviseur de $2m = |\Gamma'|$, où m est l'ordre de l'automorphisme de $\hat{\mathfrak{g}}$ intervenant dans la réalisation presque adaptée de \mathfrak{g} (cf. 3.9 et 4.6).

Pour $k = 3$ (i.e., $D_4^{(3)}$) on a $g = 3$, car le groupe de Galois Γ' est commutatif (cf. 4.6) et ne peut donc avoir pour quotient le groupe symétrique S_3 .

Le nombre d est déterminé par le centralisateur de la SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$. Il se trouve que pour prouver que cette SATD est bien maximale on a étudié ce centralisateur; donc d est facile à déterminer.

Tableau 1
Table des formes réelles presque compactes non compactes des algèbres de Kac–Moody affines

\mathfrak{g}	ρ	σ	ε	Réalisation adaptée	Forme réelle quotient	Rang s	Indice
$A_1^{(1)}$	$0 \rightleftarrows 1$	$\tau_0 \tau_1 = \tilde{\tau}_1$	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$	1	$A_{1,1}^{(1)}$
		τ_0	-1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	1	$A_{1,1}^{(1)}$
$A_1^{(1)}$	$0 \rightleftarrows 1 \xrightarrow{\rho}$	ρ	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \tilde{\tau}_1, -1)$	$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$	1	$A_{1,1}^{(1)}$
$A_l^{(1)}$	$0 \rightleftarrows 1 \xrightarrow{\rho}$	$\tau_0 \tau_i = \tilde{\tau}_i$	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{su}(i, l+1-i)$	i	${}^2A_{l,i}^{(1)}$
$(l > 1)$		$1 \leq i \leq \frac{l+1}{2}$					
		τ_0	-1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{sl}_2(l+1, \mathbb{C})$	$[\frac{l+1}{2}]$	${}^2A_{l,s}^{(1)}$
$A_{2r}^{(1)}$	ρ_1	$\rho_1 = \xi \tau_0$	-1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{sl}(2r+1, \mathbb{C})$	$2r$	${}^1A_{2r,2r}^{(1)}$
$(r \geq 1)$		$\rho_1 \tau_0 = \xi$	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{sl}(2r+1, \mathbb{R})$	$2r$	${}^1A_{2r,2r}^{(1)}$
$A_{2r-1}^{(1)}$	ρ_1	ρ_1	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \tilde{\tau}_{2r-1}, -1)$	$\mathfrak{sl}(2r, \mathbb{R})$	$2r-1$	${}^1A_{2r-1,s}^{(1)}$
$(r \geq 2)$							
$A_{2r-1}^{(1)}$	ρ_2	ρ_2	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{su}^*(2r)$	$r-1$	${}^1A_{2r-1,s}^{(2)}$
$(r \geq 2)$		$\rho_2 \tilde{\tau}_r$	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{sl}(2r, \mathbb{R})$	$2r-1$	${}^1A_{2r-1,s}^{(1)}$
		$\rho_2 \tau_0$	-1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{sl}(2r, \mathbb{C})$	$2r-1$	${}^1A_{2r-1,s}^{(1)}$

Tableau 1 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	ε	Réalisation adaptée	Forme réelle quotient	Rang s	Indice
$A_{2r-1}^{(1)}$ $(r \geq 2)$	$\rho_3(i) = r + 1, 0 \leq i < r$ 	ρ_3	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\tau}_r, -1)$	$\mathfrak{su}(r, r)$	r	$1A_{2r-1,r}^{(1)}$
$B_l^{(1)}$ $(l \geq 3)$		$\tau_0 \tau_1 = \hat{\tau}_1$ $\tau_i = \hat{\tau}_i$ $2 \leq i \leq l$	1 1 -1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$ $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$ $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{so}(2, 2l - 1)$ $\mathfrak{so}(2i, 2l - 2i + 1)$ $\mathfrak{so}(2l + 1, \mathbb{C})$	2 $s_{i,1}^{(1)}$ l	$B_{l,2}$ $B_{l,s}$ $B_{l,l}$
$B_l^{(1)}$ $(l \geq 3)$	ρ 	ρ $\rho \tau_i = \rho \hat{\tau}_i$ $2 \leq i \leq l$	1 1 -1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\tau}_1, -1)$ $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\tau}_1, -1)$ $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{so}(1, 2l)$ $\mathfrak{so}(2i - 1, 2l - 2i + 2)$ $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$	1 $s_{i,2}^{(2)}$ l	$B_{l,1}$ $B_{l,s}$ $C_{l,l}^{(1)}$
$C_l^{(1)}$ $(l \geq 2)$		$\tau_0 \tau_1 = \hat{\tau}_l$ $\tau_i = \hat{\tau}_i$ $1 \leq i \leq \frac{l}{2}$	1 1 -1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$ $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$ $\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$ $\mathfrak{sp}(i, l - i)$ $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$	l i l	$C_{l,l}^{(1)}$ $C_{l,i}^{(1)}$ $C_{l,l}^{(1)}$
$C_{2r-1}^{(1)}$ $(r \geq 2)$	ρ 	ρ	1	$\mathfrak{l}(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\tau}_{2r-1}, -1)$	$\mathfrak{sp}(2r - 1, \mathbb{R})$	$2r - 1$	$C_{2r-1,s}^{(1)}$

⁽¹⁾ $s_{i,1} = \inf(2i, 2l - 2i + 1)$.

⁽²⁾ $s_{i,2} = \inf(2i - 1, 2l - 2i + 2)$.

Tableau 1 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	ε	Réalisation adaptée	Forme réelle quotient	Rang s	Indice
$C_{2r}^{(1)}$		ρ	1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \mathring{t}_{2r}, -1)$	$\mathfrak{sp}(r, r)$	r	$C_{2r,r}^{(2)}$
$(r \geq 1)$		$\rho\tau_r = \rho\mathring{t}_r$	1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \mathring{t}_{2r}, -1)$	$\mathfrak{sp}(2r, \mathbb{R})$	$2r$	$C_{2r,2r}^{(1)}$
$D_4^{(1)}$		$\tau_0\tau_1 = \mathring{t}_1$	1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}(2, 6)$	2	${}^1D_{4,2}^{(1)}$
		$\tau_2 = \mathring{t}_2$	1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}(4, 4)$	4	${}^1D_{4,4}^{(1)}$
$D_4^{(1)}$		τ_0	-1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$	4	${}^1D_{4,4}^{(1)}$
		ρ_0	1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}(1, 7)$	1	${}^2D_{4,1}^{(1)}$
		$\rho_0\mathring{t}_1$	1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}(3, 5)$	3	${}^2D_{4,3}^{(1)}$
$D_4^{(1)}$		$\rho_0\tau_0$	-1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$	3	${}^2D_{4,3}^{(1)}$
		ρ_2	1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \mathring{t}_1, -1)$	$\mathfrak{so}(2, 6)$	2	${}^1D_{4,2}^{(1)}$
		$\rho_2\tau_2 = \rho_2\mathring{t}_2$	1	$\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \mathring{t}_1, -1)$	$\mathfrak{so}(4, 4)$	4	${}^1D_{4,4}^{(1)}$

Tableau 1 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	ε	Réalisation adaptée	Forme réelle quotient	Rang s	Indice
$D_l^{(1)}$		$\tau_0 \tau_1 = \check{\tau}_1$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}(2, 2l - 2)$	2	${}^s D_{l,2}^{(1)} (+)$
		$\tau_i = \check{\tau}_i$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}(2i, 2l - 2i)$	$2i$	${}^s D_{l,2i}^{(1)} (+)$
$(l \geq 5)$		$2 \leq i \leq \frac{l}{2}$					
		$\tau_0 \tau_l = \check{\tau}_l$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}^*(2l)$	$[\frac{l}{2}]$	${}^s D_{l,s}^{(2)} (+)$
		τ_0	-1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}} \times \check{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$	$2[\frac{l}{2}]$	${}^s D_{l,s}^{(1)} (+)$
$D_l^{(1)}$	ρ_0 	ρ_0	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}(1, 2l - 1)$	1	${}^s D_{l,1}^{(1)} (+)$
		$\rho_0 \tau_i = \rho_0 \check{\tau}_i$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$\mathfrak{so}(2i + 1, 2l - 2i - 1)$	$2i + 1$	${}^s D_{l,s}^{(1)} (+)$
$(l \geq 5)$		$1 \leq i \leq \frac{l-1}{2}$					
		$\rho_0 \tau_0$	-1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}} \times \check{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$	$1 + 2[\frac{l-1}{2}]$	${}^s D_{l,s}^{(1)} (+)$
$D_l^{(1)}$	ρ_2 	ρ_2	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \check{\tau}_1, -1)$	$\mathfrak{so}(2, 2l - 2)$	2	${}^s D_{l,2}^{(1)} (+)$
		$\rho_2 \tau_i = \rho_2 \check{\tau}_i$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \check{\tau}_1, -1)$	$\mathfrak{so}(2i, 2l - 2i)$	$2i$	${}^s D_{l,2i}^{(1)} (+)$
$(l \geq 5)$		$2 \leq i \leq \frac{l}{2}$					
$D_{2r-1}^{(1)}$	ρ_1 	ρ_1	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \check{\tau}_{2r-1}, -1)$	$\mathfrak{so}(2r - 1, 2r - 1)$	$2r - 1$	${}^1 D_{2r-1,s}^{(1)}$
$(r \geq 3)$							

Tableau 1 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	ε	Réalisation adaptée	Forme réelle quotient	Rang s	Indice
$D_{2r}^{(1)}$ ($r \geq 3$)		ρ_1	ρ_1	$l(\mathfrak{g}, \check{\tau}_{2r}, -1)$	$\mathfrak{so}^*(4r)$	r	${}^1D_{2r,r}^{(2)}$
$G_2^{(1)}$		$\rho_1 \tau_r = \rho_1 \check{\tau}_r$	1	$l(\mathfrak{g}, \check{\tau}_{2r}, -1)$	$\mathfrak{so}(2r, 2r)$	$2r$	${}^1D_{2r,2r}^{(1)}$
$F_4^{(1)}$		$\tau_1 = \check{\tau}_1$	1	$l(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$G_2(2)$	2	$G_{2,2}^0$
$E_6^{(1)}$		τ_0	-1	$l(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta, -1)^{(*)}$	$G_2\mathbb{C}$	2	$G_{2,2}^0$
$E_6^{(1)}$		$\tau_1 = \check{\tau}_1$	1	$l(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$F_4(4)$	4	$F_{4,4}^0$
$E_6^{(1)}$		$\tau_4 = \check{\tau}_4$	1	$l(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$F_4(-20)$	1	$F_{4,1}^{21}$
$E_6^{(1)}$		τ_0	-1	$l(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta, -1)^{(*)}$	$F_4\mathbb{C}$	4	$F_{4,4}^0$
$E_6^{(1)}$		$\tau_0 \tau_1 = \check{\tau}_1$	1	$l(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$E_6(-14)$	2	${}^2E_{6,2}^{16'}$
$E_6^{(1)}$		$\tau_6 = \check{\tau}_6$	1	$l(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$E_6(2)$	4	${}^2E_{6,4}^2$
$E_6^{(1)}$		τ_0	-1	$l(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta, -1)^{(*)}$	$E_6\mathbb{C}$	4	${}^2E_{6,4}^2$
$E_6^{(1)}$		ρ_0	1	$l(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$E_6(-26)$	2	${}^1E_{6,2}^{28}$
$E_6^{(1)}$		$\rho_0 \tau_6 = \rho_0 \check{\tau}_6$	1	$l(\mathfrak{g}, \text{id}, 1)$	$E_6(6)$	6	${}^1E_{6,6}^0$
$E_6^{(1)}$		$\rho_0 \tau_0$	-1	$l(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \theta, -1)^{(*)}$	$E_6\mathbb{C}$	6	${}^1E_{6,6}^0$

Tableau I (suite)

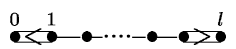
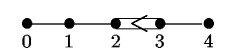

\mathfrak{g}	ρ	σ	ε	Réalisation adaptée	Forme réelle quotient	Rang s	Indice
$E_7^{(1)}$		$\tau_0 \tau_6 = \check{\tau}_6$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$E_7(-25)$	3	$E_{7,3}^{28}$
		$\tau_7 = \check{\tau}_7$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$E_7(7)$	7	$E_{7,7}^0$
		$\tau_1 = \check{\tau}_1$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$E_7(-5)$	4	$E_{7,4}^9$
		τ_0	-1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}} \times \check{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$E_{7\mathbb{C}}$	7	$E_{7,7}^0$
$E_7^{(1)}$		ρ	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \check{\tau}_6, -1)$	$E_7(-25)$	3	$E_{7,3}^{28}$
		$\rho \tau_7 = \rho \check{\tau}_7$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \check{\tau}_6, 1)$	$E_7(7)$	7	$E_{7,7}^0$
		$\tau_1 = \check{\tau}_1$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$E_8(-24)$	4	$E_{8,4}^{28}$
$E_8^{(1)}$		$\tau_7 = \check{\tau}_7$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \text{id}, 1)$	$E_8(8)$	8	$E_{8,8}^0$
		τ_0	-1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}} \times \check{\mathfrak{g}}, \theta, -1)^{(*)}$	$E_{8\mathbb{C}}$	8	$E_{8,8}^0$
$A_2^{(2)}$		$\tau_1 = \bar{\tau}_1$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$	$\mathfrak{su}(1, 2)$	1	$2A_{2,1}^{(1)}$
$A_{2l}^{(2)}$ ($l \geq 2$)		τ_0	-1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$	$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$	1	$2A_{2,1}^{(1)}$
		$\tau_i = \bar{\tau}_i$	1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$	$\mathfrak{su}(2i, 2l + 1 - 2i)$	$s_{i,3}^{(3)}$	$2A_{2l,s}^{(1)}$
		τ_0	-1	$\mathfrak{l}(\check{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$	$\mathfrak{sl}(2l + 1, \mathbb{R})$	l	$2A_{2l,l}^{(1)}$

⁽³⁾ $s_{i,3} = \inf(2i, 2l + 1 - 2i)$.

Tableau 1 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	ε	Réalisation adaptée	Forme réelle quotient	Rang s	Indice
$A_{2l-1}^{(2)}$ ($l \geq 3$)		$\bar{\tau}_i$ $1 \leq i \leq \frac{l}{2}$ $\tau_0 \tau_l = \bar{\tau}_l$ $\tau_0 \bar{\tau}_l = \tau_l$ τ_0	1 -1 -1	$l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$ $l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$ $l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$	$\mathfrak{su}(2i, 2l - 2i)$ $\mathfrak{su}(l, l)$ $\mathfrak{sl}(2l, \mathbb{R})$ $\mathfrak{su}^*(2l)$	$2i$ l l $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$	$2A_{2l-1,s}^{(1)}$ $2A_{2l-1,l}^{(1)}$ $2A_{2l-1,l}^{(1)}$ $2A_{2l-1,s}^{(2)}$
$A_{2l-1}^{(2)}$ ($l > 2$)		ρ $\rho \tau_i = \rho \bar{\tau}_i$ $2 \leq i \leq l + \frac{1}{2}$ $\rho \bar{\tau}_l \tau_0 = \rho \tau_l$	1 -1	$l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi(\bar{\tau}_1)^{1/2}, \iota)^{(**)}$ $l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi(\bar{\tau}_1)^{1/2}, \iota)^{(**)}$	$\mathfrak{su}(1, 2l - 1)$ $\mathfrak{su}(2i - 1, 2l - 2i + 1)$	1 $2i - 1$	$2A_{2l-1,s}^{(1)}$ $2A_{2l-1,l}^{(1)}$
$D_{l+1}^{(2)}$ ($l \geq 2$)		$\tau_0 \tau_i = \bar{\tau}_i$ $1 \leq i \leq l$ τ_i ($0 \leq i \leq \frac{l}{2}$)	1 -1	$l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$ $l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi, -1)$	$\mathfrak{so}(2l, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(2i, 2l + 2 - 2i)$	l $s_{i,4}^{(4)}$	$2A_{2l-1,l}^{(1)}$ $2D_{l+1,s}^{(1)}$
$D_{2r}^{(2)}$ ($r \geq 2$)		ρ ρ	1	$l(\hat{\mathfrak{g}}, \xi(\bar{\tau}_{r-1})^{\frac{1}{2}}, \iota)^{(**)}$	$\mathfrak{so}(2r, 2r)$	$2r - 1$	$2D_{2r,s}^{(1)}$
$(4) s_{i,4} = \begin{cases} \inf(2i, 2l + 2 - 2i) & \text{si } 2i \neq l + 1, \\ l & \text{si } i = \frac{l+1}{2}. \end{cases}$							
$(5) s_{i,5} = \begin{cases} 2i + 1 & \text{si } 2i < l, \\ l & \text{si } i = \frac{l}{2}. \end{cases}$							

Tableau 1 (suite)

\mathfrak{g}	ρ	σ	ε	Réalisation adaptée	Forme réelle quotient	Rang s	Indice
$D_{2r+1}^{(2)}$	ρ	ρ	1	$l(\mathfrak{g}, \xi(\bar{\tau}_{2r})^{\frac{1}{2}}, \iota)^{(**)}$	$\mathfrak{so}^*(4r+2)$	r	${}^2D_{2r+1,r}^{(1)}$
$(r \geq 1)$		$\rho \bar{\tau}_r \tau_0 = \rho \tau_r$	-1	$l(\mathfrak{g}, \xi(\bar{\tau}_{2r})^{\frac{1}{2}}, \iota)^{(**)}$	$\mathfrak{so}(2r+1, 2r+1)$	$2r$	${}^2D_{2r+1,s}^{(1)}$
$E_6^{(2)}$		$\tau_1 = \bar{\tau}_1$	1	$l(\mathfrak{g}, \xi, -1)$	$E_6(-14)$	2	${}^2E_{6,2}^{16'}$
		$\tau_4 \tau_0 = \bar{\tau}_4$	1	$l(\mathfrak{g}, \xi, -1)$	$E_6(2)$	4	${}^2E_{6,4}^2$
		$\tau_4 = \tau_0 \bar{\tau}_4$	-1	$l(\mathfrak{g}, \xi, -1)$	$E_6(6)$	4	${}^2E_{6,4}^2$
		τ_0	-1	$l(\mathfrak{g}, \xi, -1)$	$E_6(-26)$	1	${}^2E_{6,1}^{29}$
$D_4^{(3)}$		$\tau_2 \tau_0 = \bar{\tau}_2$	1	$l(\mathfrak{g}, \xi, j)$	$\mathfrak{so}(4, 4)$	2	${}^3D_{4,2}^2$
		τ_0	-1	$l(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \xi_2, \sqrt{j})^{(*)'}$	$\mathfrak{so}(8, \mathbb{C})$	2	${}^3D_{4,2}^2$

Dans le cas Aff 1, avec $\varepsilon = 1$, on a vu en 5.6.1 et 5.6.2 que la SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}''$ est dans \mathfrak{h} et est une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$. Ainsi, l'indice ${}^s X_{n,s}^d$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$ est le même que celui de la forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ qui est explicitée à la colonne 6. En particulier, si \mathfrak{g} est de type $D_l^{(1)}$, l'indice ${}^s D_{l,s}^{(d)}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}_\varepsilon}$ vérifie la même relation que dans le cas réel :

(+) $g = 1$ si $l - ds$ est pair ; $g = 2$ sinon.

7. Cas particuliers et conclusion

On connaît des invariants, à conjugaison près, des formes réelles presque compactes d'une algèbre de Kac–Moody affine : l'automorphisme de diagramme ρ à conjugaison près (2.2), le signe ε (6.5), la forme réelle quotient $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ (3.8 et 3.9), le rang s et l'indice (4.8). Si l'on regarde la table du paragraphe 6, ces invariants (les trois premiers suffisent) permettent de prouver que deux formes réelles différentes de la table ne sont pas isomorphes, sauf peut-être dans un très petit nombre de cas particuliers. Il y a un cas pour l'algèbre $A_{2l-1}^{(2)}$, $l \geq 2$ et l pair, où on a à comparer les deux formes réelles presque compactes correspondant à $\bar{\tau}_l$ et $\bar{\tau}_{\frac{l}{2}}$, puis une liste de cas pour l'algèbre $D_l^{(2)}$, $l \geq 4$, où on a à comparer, pour chaque $i = 1, \dots, [\frac{l-1}{2}]$, les deux formes réelles presque compactes correspondant à $\bar{\tau}_i$ et $\bar{\tau}_{l-i}$. On traitera le cas $D_3^{(2)}$ sous le nom $A_3^{(2)}$ contrairement à la table.

Dans toute la suite, on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{A}^1 &= \mathbb{C}[t, t^{-1}]; & \bar{K}^1 &= \mathbb{C}(t); & \varepsilon(f(t)) &= f(-t) & \text{et} & & \iota'(f(t)) &= \bar{f}(t^{-1}) \quad \forall f \in \bar{K}^1. \\ \bar{A} &= (\bar{A}^1)^\varepsilon = \mathbb{C}[t^2, t^{-2}]; & \bar{K} &= (\bar{K}^1)^\varepsilon = \mathbb{C}(t^2). \\ A^1 &= (\bar{A}^1)^\iota' = \mathbb{R}[t + t^{-1}, i(t - t^{-1})]; & K^1 &= (\bar{K}^1)^\iota'. \\ A &= \bar{A}^\iota' = \mathbb{R}[t^2 + t^{-2}, i(t^2 - t^{-2})]; & K &= \bar{K}^\iota'. \end{aligned}$$

On désignera par \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe (qui sera en fait de type A_{2l-1} ou D_l) $\hat{\rho}$ un automorphisme de diagramme d'ordre 2 de \mathfrak{g} , et $\hat{\sigma}'$ une semi-involution de \mathfrak{g} commutant à $\hat{\rho}$.

On note : \mathfrak{g}^1 l'algèbre de Kac–Moody affine non tordue $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \text{Id}, 1)$; G^1 le groupe de Kac–Moody associé à $(\mathfrak{g}^1)'$ (1.2); \mathfrak{g} l'algèbre de Kac–Moody affine tordue $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \hat{\rho}, -1)$; G le groupe de Kac–Moody associé à \mathfrak{g}' (1.2); $\tilde{\rho}$ l'automorphisme involutif $\hat{\rho} \otimes \varepsilon$ de \mathfrak{g}^1 ; σ' la semi-involution de seconde espèce $\hat{\sigma}' \otimes \iota'$ de \mathfrak{g}^1 et de \mathfrak{g} ; $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ les formes réelles presque compactes de \mathfrak{g}^1 et de \mathfrak{g} associées à σ' . Le groupe de Galois Γ de \bar{K}^1 sur K est commutatif isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; il agit sur \mathfrak{g}^1 , ses générateurs ι' et ε agissant respectivement par σ' et $\tilde{\rho}$.

La description que l'on a des formes réelles est par rapport à une sous-algèbre de Cartan maximale compacte. On va dans la suite utiliser une transformation de Cayley pour donner pour chaque forme une description par rapport à une sous-algèbre de Cartan maximale déployée, puis comparer les deux formes.

Définition 7.1. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Kac–Moody, \mathfrak{h} une sous-algèbre torique déployée de \mathfrak{g} , et \mathfrak{t} une sous-algèbre de \mathfrak{h} . Une base de racines du système $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est dite *adaptée* à \mathfrak{t} s’il existe une base $\bar{\pi}$ de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ telle que les racines positives de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ sont les restrictions non nulles des racines positives de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Lorsque $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est fini, alors pour toute sous-algèbre \mathfrak{t} de \mathfrak{h} , il existe une base de racines de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ qui est adaptée à $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$.

Proposition 7.2. Avec les notations fixées ci-dessus, on a :

- (i) $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^1)^{\tilde{\rho}}$, et $\text{Ad}(G) \subset \text{Ad}((G^1)^{\tilde{\rho}})$.
- (ii) On suppose qu’il existe deux sous-algèbres $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1}$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},2}$ de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ qui soient des SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ et de $(\mathfrak{g}^1)''$ à la fois. Alors il existe, pour $i = 1, 2$, une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_i de \mathfrak{g}'' qui est stable par σ' et contient $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},i}$ et il existe une base de racines π_i de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i)$ (adaptée à $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{t}_{\mathbb{R},i} \otimes \mathbb{C}$) et $g \in G$ tels que $g(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$, $g(\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{R},2}$, et $g(\pi_1) = \pi_2$. De plus, g échange les racines de π_1 et π_2 possédant la même numérotation, et l’élément $n := g^{-1}\sigma'(g)$ fixe \mathfrak{h}_1 et la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_1^1 de $(\mathfrak{g}^1)''$ contenant \mathfrak{h}_1 .

Démonstration. (i) On voit clairement que $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}^1)^{\tilde{\rho}}$ et que le \mathfrak{g} -module $(\mathfrak{g}^1, \text{ad})$ est intégrable et s’intègre donc en un G -module $(\mathfrak{g}^1, \text{Ad})$. D’autre part, les générateurs de $\text{Ad}(G)$ sont de la forme $\text{Ad}(\exp(e_\alpha))$ pour α racine réelle de \mathfrak{g}^1 et α , $e_\alpha \in \mathfrak{g}^1_\alpha$ fixes par $\tilde{\rho}$, ou de la forme $\text{Ad}(\exp(e_\beta)\exp(e_\gamma))$ pour β, γ racines réelles fortement orthogonales de \mathfrak{g}^1 et β, γ , $e_\beta \in \mathfrak{g}^1_\beta$ et $e_\gamma \in \mathfrak{g}^1_\gamma$ échangés par $\tilde{\rho}$. Par conséquent, on a $\text{Ad}(G) \subset \text{Ad}(G^1)^{\tilde{\rho}}$. Dans le cas $A_{2l}^{(2)}$ (qui nous intéresse peu ici) un troisième type de générateurs de $\text{Ad}(G)$ doit être envisagé ; ce qui conduit à un calcul de vérification dans SL_3 :

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 2\lambda^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (ii) D’après le Lemme 4.2, il existe, pour $i = 1, 2$, une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_i de \mathfrak{g}'' qui est stable par σ' et contient $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},i}$. La sous-algèbre $C_{(\mathfrak{g}^1)''}(\mathfrak{h}_i)$ contient une unique sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_i^1 de $(\mathfrak{g}^1)''$ qui est stable par $\tilde{\rho}$ et σ' .

L’algèbre de Lie $\mathfrak{g}'' \otimes_{\bar{A}} \bar{K}$ est une \bar{K} -forme quasi-déployée de $(\mathfrak{g}^1)'' \otimes_{\bar{A}^1} \bar{K}^1$ (identifiée à $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{K}^1$: algèbre de Lie simple déployée sur \bar{K}^1). D’après le Théorème 4.7, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},i} \otimes_{\mathbb{R}} K$, $i = 1, 2$, sont deux SATDM de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}} \otimes_A K$; elles ont donc le même indice de Tits (théorie sur les corps). L’indice de Tits de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},i} \otimes K$ peut être décrit à l’aide d’une SAPF de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \bar{K}^1$ contenant $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},i} \otimes_{\mathbb{R}} K$, qui est stable par Γ et minimale pour cette propriété. Il existe donc

une base $\Pi_i = \{\alpha_j ; j \in I\}$ de $\Delta((\mathfrak{g}^1)'' , \mathfrak{h}_i^1)$ adaptée à $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},i}$ et une partie I_0 de I stable par l'action $*$ de $\Gamma = \{1, \varepsilon, \iota', \varepsilon \iota'\}$ telles que :

$$\mathfrak{t}_i \otimes \bar{K}^1 = \{x \in \mathfrak{h}_i^1 \otimes \bar{K}^1 ; \alpha_j(x) = \alpha_k(x), \forall j = \gamma^*k \in I, \forall \gamma \in \Gamma ; \alpha_j(x) = 0, \forall j \in I_0\}.$$

On note $\bar{I} = I/\varepsilon, \bar{I}_0 = I_0/\varepsilon$ et $\pi_i = \{\bar{\alpha}_j ; j \in \bar{I}\}$, alors on a :

$$\mathfrak{t}_i \otimes \bar{K} = \{x \in \mathfrak{h}_i \otimes \bar{K} ; \bar{\alpha}_j(x) = \bar{\alpha}_k(x), \forall j = \gamma^*k \in \bar{I}, \forall \gamma \in \{1, \iota'\} ; \bar{\alpha}_j(x) = 0, \forall j \in \bar{I}_0\}.$$

D'après [20], il existe $g \in G$ tel que $g(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. En faisant agir la restriction à \mathfrak{h}_2 du groupe de Weyl de la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{h}_2 , on peut supposer que $g(\pi_1) = \pi_2$.

Si \mathcal{G} est le groupe algébrique complexe simplement connexe associé à \mathfrak{g} , on a, d'après [20], $\text{Ad}(G^1) = \text{Ad}(\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]))$. En raisonnant dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'' \otimes_{\bar{A}} \bar{K}$, on s'aperçoit que $\text{Ad}(g)$ définit un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}'' \otimes_{\bar{A}} \bar{K}$. Ainsi $\text{Ad}(g)$ échange les racines de π_1 et de π_2 possédant la même numérotation. En particulier, on a $g(\mathfrak{t}_1) = \mathfrak{t}_2$ et donc $g(\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{R},2}$ puisque $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},i}$ est l'ensemble des éléments de \mathfrak{t}_i à valeurs propres réelles pour la représentation adjointe dans \mathfrak{g}'' .

L'élément $n = g^{-1}\sigma'(g)$ normalise \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{t}_1 . La base de racines π_1 de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ étant adaptée à \mathfrak{t}_1 , il existe un élément générique t_1 de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1}$ tel que $\Delta^+ = \Delta_0^+ \cup \Delta^{++}$, avec $\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta ; \alpha(t_1) = 0\}$, $\Delta_0^+ = \Delta_0 \cap \Delta^+$ et $\Delta^{++} = \{\alpha \in \Delta^+ ; \alpha(t_1) > 0\}$.

Si $\alpha \in \Delta_0$, alors $\sigma'(\alpha) = -\alpha$ (sinon, $\sigma'(\alpha) + \alpha \in \mathfrak{g}''_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, et $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1} \oplus \mathbb{R}(\sigma'(\alpha) + \alpha)$ est une sous-algèbre torique déployée de $\mathfrak{g}''_{\mathbb{R}}$ contenant $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1}$). De même, on a $\sigma'(g\alpha) = -g\alpha$, et donc $g^{-1}\sigma'(g)\alpha = \alpha$. En particulier, on a $n(\Delta_0^+) = \Delta_0^+$.

On a $\sigma'(\Delta^{++}) = \Delta^{++}$, et même $\sigma'(g\Delta^{++}) = g\Delta^{++}$. Par conséquent, $n(\Delta^{++}) = g^{-1}\sigma'(g)(\Delta^{++}) = \Delta^{++}$, et donc $n(\Delta^+) = \Delta^+$. Soit \mathfrak{h} l'unique sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{h}_1 ; on a $n(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. L'élément n (regardé comme un élément du groupe de Weyl de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) fixe \mathfrak{h}_1 (on pourra voir ceci sur la sous-algèbre de Cartan standard de \mathfrak{g}). En particulier, n stabilise \mathfrak{h}_1^1 et fixe l'un de ses éléments réguliers ; comme n est induit par un élément de $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, il fixe \mathfrak{h}_1^1 . \square

Lemme 7.3. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe, et soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On note $\hat{\rho}$ un automorphisme de diagramme d'ordre 2 de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ si le type de \mathfrak{g} est A_n, D_{2k+1} ou E_6 , et $\hat{\rho} =$ l'identité sinon. Alors $\hat{\rho}\hat{\omega}$ est induit par un automorphisme intérieur de $(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}$. De plus, tout automorphisme σ de \mathfrak{g} qui est induit par un automorphisme intérieur de $(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}$ et qui induit $\hat{\rho}\hat{\omega}$ sur \mathfrak{h} est conjugué à $\hat{\rho}\hat{\omega}$ par un automorphisme intérieur de $(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}$ stabilisant \mathfrak{h} .

Démonstration. D'après [2, 4.9 et 4.10.2], il existe $n_0 \in \text{Int}[(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}]$ qui commute à $\hat{\omega}$ et induit $\hat{\omega}$ sur $(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}$; d'où le résultat quand $\hat{\rho}$ est l'identité. Si $\hat{\rho}$ n'est pas l'identité, n_0 induit une involution de \mathfrak{g} [2, 4.10.3] ; l'involution $n_0\hat{\omega}$ est donc triviale sur $(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}$, et d'après 5.7.4, $n_0\hat{\omega} = \text{Id}$ ou $\hat{\rho}$. Comme $\hat{\omega} \notin \text{Int}(\mathfrak{g})$, on a $n_0\hat{\omega} = \hat{\rho}$, et donc $\hat{\rho}\hat{\omega} = n_0 \in \text{Int}[(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}]$. Dans tous les cas, on peut écrire $\sigma = \hat{\rho}\hat{\omega} \text{expad}(h)$, avec $h \in (\mathfrak{h})^{\hat{\rho}}$, et en conjuguant par $\text{expad}(\frac{h}{2})$ (qui commute à $\hat{\rho}$) on peut supposer $\sigma = \hat{\rho}\hat{\omega}$. \square

Remarque. Si \mathfrak{g} est de type A_{2k-1} , on montre, comme ci-dessus, que $\rho\hat{\omega}^k$ (et donc $\rho\hat{\omega}$) est induit par un automorphisme intérieur de $(\mathfrak{g})^{\rho\hat{\omega}^k}$, puis qu'un automorphisme σ induit par un automorphisme intérieur de $(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}$ et induisant $\rho\hat{\omega}$ sur \mathfrak{h} est conjugué à $\rho\hat{\omega}$ par un automorphisme intérieur de $(\mathfrak{g})^{\rho\hat{\omega}^k}$ stabilisant \mathfrak{h} et commutant à $\hat{\omega}'$.

7.4. Cas de l'algèbre $A_{2l-1}^{(2)}$, l pair ≥ 2

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie affine de type $A_{2l-1}^{(2)}$ (l pair); on pose $\sigma_1 = \bar{\tau}_l$, $\sigma_2 = \bar{\tau}_{l/2}$, $\sigma'_i = \sigma_i\omega'$, et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i} = \mathfrak{g}^{\sigma'_i}$, $i = 1, 2$. La réalisation standard $l(\mathfrak{g}, \hat{\rho}, -1)$ de \mathfrak{g} est adaptée aux deux semi-involutions de deuxième espèce σ'_1 et σ'_2 . Ces semi-involutions induisent toutes les deux l'automorphisme de diagramme trivial de \mathfrak{g} , elles correspondent au même signe ε et induisent sur l'algèbre de Lie simple \mathfrak{g} (qui est de type A_{2l-1}) deux semi-involutions conjuguées. Les deux semi-involutions σ'_1 et σ'_2 agissent également sur l'algèbre non tordue \mathfrak{g}^1 (de type $A_{2l-1}^{(1)}$) et induisent deux formes réelles presque compactes isomorphes de \mathfrak{g}^1 ayant le même rang l , qui est aussi le rang commun des deux formes réelles $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}$.

Les deux semi-involutions σ'_1 et σ'_2 de \mathfrak{g}^1 commutent à $\tilde{\rho}$, et si on désigne respectivement par $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}^1$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}^1$ les formes réelles presque compactes correspondantes, on constate que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}^1)^{\hat{\rho}}$, $i = 1, 2$.

7.4.1. Description des deux formes

(a) Description de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}$: On considère dans l'algèbre de Lie simple \mathfrak{g} la sous-algèbre de Cartan standard \mathfrak{h} et le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ muni de sa base de racines $\tilde{\pi} = \{\check{\alpha}_1, \dots, \check{\alpha}_{2l-1}\}$. Pour un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{e, \check{\alpha}, f\}$ associé à une racine α de Δ , on note $A_\alpha = \text{expad}(f) \text{exp}[\text{Log}(\sqrt{2}/2)\text{ad}(\check{\alpha})] \text{expad}(-e)$. On rappelle que $A_\alpha(\check{\alpha}) = e + f$ et que A_α commute à $\hat{\omega}$ et à $\hat{\omega}'$ (5.3).

L'involution $\sigma_1 = \bar{\tau}_l$ de \mathfrak{g} (ou de \mathfrak{g}^1) agit sur \mathfrak{g} (identifiée avec la sous-algèbre $\mathfrak{g} \otimes 1$ de \mathfrak{g}^1). On note $\hat{\sigma}_1$ (respectivement $\hat{\sigma}'_1$) l'involution (respectivement la semi-involution) de \mathfrak{g} induite par σ_1 (respectivement σ'_1).

Pour $i = 1, 2, \dots, l$, on pose $\beta_i = \check{\alpha}_i + \check{\alpha}_{i+1} + \dots + \check{\alpha}_{2l-i}$ et on associe à chaque racine β_i un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{e_{\beta_i}, \check{\beta}_i, f_{\beta_i}\}$. Les β_i sont deux à deux fortement orthogonales, fixes par $\hat{\rho}$, et $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{R}(e_{\beta_i} + f_{\beta_i})$ est une SATDM de $(\mathfrak{g})^{\hat{\sigma}'_1}$ fixe par $\hat{\rho}$. Par conséquent, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes 1$ est une SATDM de $(\mathfrak{g}^1)''_{\mathbb{R},1}$ fixe par $\tilde{\rho}$ et définit donc une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}''$.

On considère l'automorphisme intérieur A de \mathfrak{g} défini par $A = \prod_{i=1}^l A_{\beta_i}$. On regarde A comme un automorphisme de \mathfrak{g}^1 et on constate que A commute à ω , ω' , et $\tilde{\rho}$. En particulier, on peut considérer A comme un automorphisme de \mathfrak{g} , et on a :

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = A \left(\sum_{i=1}^l \mathbb{R}\beta_i \right) = A(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^{\hat{\rho}}.$$

D'après le Lemme 5.3, on a $\sigma_1 A \sigma_1 = A \prod_{i=1}^l r_{\beta_i}$, et par conséquent $A^{-1} \sigma_1 A = (\prod_{i=1}^l r_{\beta_i}) \sigma_1$ qui commute à ω , ω' , $\hat{\rho} \otimes 1$, et $\tilde{\rho}$. Il est clair que A et σ_1 fixent $(\mathfrak{h})^{-\hat{\rho}}$ et que $A^{-1} \sigma_1 A$ agit sur \mathfrak{h} comme $\rho\hat{\omega}$. Comme $A^{-1} \sigma_1 A$ est induit par un automorphisme

intérieur de $(\hat{\mathfrak{g}})^\rho$, le Lemme 7.3 montre qu'en conjuguant par A^{-1} puis par $(\exp i \operatorname{ad} \frac{h}{2}) \otimes 1$ (qui commutent à ω' , $\hat{\rho} \otimes 1$ et $\tilde{\rho}$) on peut supposer que $\sigma_1 = (\hat{\rho}\hat{\omega}) \otimes 1$, et on voit facilement que la forme réelle de $\hat{\mathfrak{g}}$ associée à $\hat{\sigma}'_1$ est quasi-déployée.

Ainsi, grâce à cette conjugaison, on peut supposer que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^\rho \otimes 1$ est une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}^1$ et de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}^1)^\rho$.

(b) *Description de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}$* : On considère l'algèbre $A_{2l-1}^{(2)}$ ($l = 2k$ et donc $\sigma_2 = \bar{\tau}_k$) et on pose pour $i = 0, 1, \dots, k - 1$:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \alpha_{k-i} + \alpha_{k-i+1} + \dots + \alpha_{k+i} ; \\ \gamma_i &= \beta_i + 2(\alpha_{k+i+1} + \dots + \alpha_{l-1}) + \alpha_l + \delta, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, k - 2 ; \\ \gamma_{k-1} &= \beta_{k-1} + \alpha_l + \delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l + \delta, \end{aligned}$$

où δ est la plus petite racine imaginaire positive (1.11).

L'ensemble $\{\beta_i, \gamma_i ; i = 0, 1, \dots, k - 1\}$ est un système de racines fortement orthogonales, et pour toute racine α de ce système, $-\sigma_2$ et $\hat{\rho}\hat{\tau}_l \otimes 1 = \hat{\tau}_l \otimes \varepsilon$ fixent l'espace radiciel associé \mathfrak{g}_α . On associe, comme en (a), pour toute racine α de ce système un \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{e_\alpha, \check{\alpha}, f_\alpha\}$ de \mathfrak{g} . Ainsi $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{R}(e_{\beta_i} + f_{\beta_i}) \oplus \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{R}(e_{\gamma_i} + f_{\gamma_i})$ est une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}''$. On pose $B = \prod_{i=0}^{k-1} A_{\beta_i} A_{\gamma_i}$: produit commutatif commutant à $\omega, \omega', \tilde{\rho}$, et $\hat{\tau}_l \otimes \varepsilon$. On a : $B^{-1}\sigma_2 B = (\prod_{i=0}^{k-1} r_{\beta_i} r_{\gamma_i}) \bar{\tau}_k$, et $B^{-1}\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^\rho \otimes 1$. On utilisera $B^{-1}\sigma_2 B$ au lieu de σ_2 et on suppose désormais que $\sigma_2 = (\prod_{i=0}^{k-1} r_{\beta_i} r_{\gamma_i}) \bar{\tau}_k$. Ainsi $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^\rho \otimes 1$ est une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}''$, et $\sigma_2 \in \operatorname{expad}(\mathfrak{g}'')^{\hat{\tau}_l \otimes \varepsilon}$ induit $-\operatorname{Id}$ sur $(\mathfrak{h})^\rho = (\mathfrak{h})^{\hat{\rho}\hat{\tau}_l}$. La nouvelle expression de σ_2 commute à l'application translation de la réalisation standard de \mathfrak{g} (2.3), mais elle ne respecte pas la graduation ; en effet, on a $\sigma_2(d) = (\prod_{i=0}^{k-1} r_{\gamma_i})(d) = d - \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i = d - 2\hat{\rho}_l$.

Comme $\sigma_2(\hat{\rho}_l) = -\hat{\rho}_l$, σ_2 fixe $d - \hat{\rho}_l$; par conséquent, l'involution σ_2 , vue comme agissant sur la réalisation $l(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\rho} \exp i\pi \operatorname{ad} \hat{\rho}_l, -1)$, commute à l'application translation et respecte la graduation. Il existe donc une involution $\hat{\sigma}_2$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ qui commute à $\hat{\rho} \exp i\pi \operatorname{ad} \hat{\rho}_l = \hat{\rho}\hat{\tau}_l$ et qui stabilise $\hat{\mathfrak{h}}$ telle que $\sigma_2 = \hat{\sigma}_2 \otimes 1$ sur cette réalisation. L'involution $\hat{\sigma}_2$ est dans $\operatorname{expad}(\hat{\mathfrak{g}})^{\hat{\rho}\hat{\tau}_l}$ et agit comme $-\operatorname{Id}$ sur $(\mathfrak{h})^\rho$, donc elle agit comme $\hat{\rho}\hat{\omega}$ sur $\hat{\mathfrak{h}}$. D'après le Lemme 7.3, en conjuguant par un automorphisme stabilisant $\hat{\mathfrak{h}}$ et commutant à $\hat{\rho}\hat{\tau}_l, \tilde{\rho}$, et ω' , on peut supposer que $\hat{\sigma}_2 = \hat{\rho}\hat{\omega}$. Ainsi, si on note $\tilde{\rho}_1$ l'automorphisme $\hat{\rho}\hat{\tau}_l \otimes \varepsilon$ de \mathfrak{g}^1 , on constate qu'avec la nouvelle expression de σ_2 on a $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}^1 = \mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}^1$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}^1)^{\tilde{\rho}_1}$.

7.4.2. Comparaison des deux formes

Supposons les deux formes isomorphes. Alors $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1} := (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^\rho \otimes 1$ est une SATDM pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}''$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}''$, et $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_{\mathbb{R},1} \otimes \mathbb{C}$ est une SAC de \mathfrak{g}'' . Soit $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},2}$ l'image réciproque de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1}$ par l'isomorphisme de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}$. La sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},2}$ est donc une deuxième SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}''$, et $\mathfrak{t}_2 := \mathfrak{t}_{\mathbb{R},2} \otimes \mathbb{C}$ est une SAC de \mathfrak{g}'' . D'après la Proposition 7.2, il existe, pour $i = 1, 2$, une base de racines π_i de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_i)$ et il existe $g \in G$ tel que $\operatorname{Ad}(g)\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$, $g(\pi_1) = \pi_2$ et $n := g^{-1}\sigma'_1(g)$ fixe \mathfrak{t}_1 et la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_1^1 de $(\mathfrak{g}^1)''$ contenant \mathfrak{t}_1 . On sait, d'après la même proposition, que $\operatorname{Ad}(G) \subset \operatorname{Ad}(G^1)^\rho$. Par ailleurs, on sait que si \mathcal{G} est le groupe algébrique simplement connexe associé à $\hat{\mathfrak{g}}$, on a $\operatorname{Ad}(G^1) = \operatorname{Ad}(\mathcal{G}[\mathbb{C}[t, t^{-1}]])$. Ainsi, on peut regarder $\operatorname{Ad}(n)$ comme l'image par Ad d'un élément noté encore n , avec

$n \in T = \mathcal{T}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, où \mathcal{T} est le tore maximal de \mathcal{G} correspondant à la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_1^1 de $(\mathfrak{g}^1)''$. On identifie le tore T à $(\mathbb{C}[t, t^{-1}]^*)^{2l-1}$ via les coracines, où $\mathbb{C}[t, t^{-1}]^*$ désigne l'ensemble des éléments inversibles (pour la multiplication) de l'anneau $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$. On peut donc écrire

$$n = (u_1 t^{p_1}, \dots, u_{l-1} t^{p_{l-1}}, u_l t^{2p_l}, (-1)^{p_{l-1}} u_{l-1} t^{p_{l-1}}, \dots, (-1)^{p_1} u_1 t^{p_1})$$

avec $u_i \in \mathbb{C}^*$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, l$.

Par définition de n , on a $\sigma'_1(n) = n^{-1}$, ce qui équivaut à

$$(-1)^{p_i} |u_i|^2 = 1, \quad i = 1, \dots, l-1, \quad |u_l|^2 = 1$$

ou encore $|u_i| = 1$, p_i pair, $i = 1, \dots, l-1$, $|u_l| = 1$.

Par conséquent, n est de la forme :

$$n = (u_1 t^{2n_1}, \dots, u_{l-1} t^{2n_{l-1}}, u_l t^{2n_l}, u_{l-1} t^{2n_{l-1}}, \dots, u_1 t^{2n_1})$$

avec $|u_i| = 1$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, l$.

On pose $m = (v_1 t^{n_1}, \dots, v_{l-1} t^{n_{l-1}}, v_l t^{n_l}, v_{l-1} t^{n_{l-1}}, \dots, v_1 t^{n_1}) \in T$, $v_i \in \mathbb{C}^*$, $i = 1, \dots, l$.

Soit $g' \in G^1$ tel que $\text{Ad}(g') = \text{Ad}(g)\text{Ad}(m)$. On a $\sigma'_1(g') = \sigma'_1(g)\sigma'_1(m) = gn\sigma'_1(m)$ (modulo le noyau de Ad); or $n\sigma'_1(m) = (u_1 \bar{v}_1 t^{n_1}, \dots, u_l \bar{v}_l t^{n_l}, \dots, u_1 \bar{v}_1 t^{n_1})$, et si on choisit les v_i tels que $u_i \frac{\bar{v}_i}{v_i} = 1$, on aura $n\sigma'_1(m) = m$, donc $\sigma'_1(g') = g'$, et $\text{Ad}(g')\mathfrak{t}_1 = \text{Ad}(g)\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2$.

La racine $\alpha = \alpha_l$ est une racine par rapport à $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},1}$ des algèbres \mathfrak{g}^1 , $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1$, \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}$. On note $\mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}}^1$, $\mathfrak{g}_{\alpha, A^1}^1$, $\mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}}$, $\mathfrak{g}_{\alpha, A}$, et $\mathfrak{g}_{\alpha, A}^2$ les espaces radiciels correspondants.

Il est clair que $\mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}}^1$ est isomorphe à \bar{A}^1 et que l'action de $\sigma'_1 = \sigma'_2$, $\tilde{\rho}$, et $\tilde{\rho}_1$ sur cet espace est donnée par l' , ε , et $-\varepsilon$ respectivement. En particulier, $\mathfrak{g}_{\alpha, A}$ est un A -module libre tandis que $\mathfrak{g}_{\alpha, A}^2$ est isomorphe à $(t + t^{-1})A + i(t - t^{-1})A = (tA) \cap A^1$.

Les automorphismes intérieurs $\text{Ad}(g)$ et $\text{Ad}(g')$ induisent un isomorphisme de systèmes de racines entre $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}'', \mathfrak{t}_{\mathbb{R},1})$ et $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}'', \mathfrak{t}_{\mathbb{R},2})$. On a $\mathfrak{g}_{\alpha, A} = \mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}} \cap \mathfrak{g}_{\alpha, A^1}$. De même, si on note β l'image par $\text{Ad}(g)$ (ou $\text{Ad}(g')$) de α dans $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}'', \mathfrak{t}_{\mathbb{R},2})$, on a également $\mathfrak{g}_{\beta, A} = \mathfrak{g}_{\beta, \bar{A}} \cap \mathfrak{g}_{\beta, A^1}$ (avec des notations évidentes).

Les deux A -modules $\mathfrak{g}_{\beta, A}$ et $g^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta, A})$ sont de même nature, et on a :

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta, A}) &= g^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta, \bar{A}} \cap \mathfrak{g}_{\beta, A^1}) = \mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}} \cap g^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta, A^1}) = \mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}} \cap m g'^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta, A^1}) \\ &= \mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}} \cap m(\mathfrak{g}_{\alpha, A^1}) = \mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}} \cap (t^M \mathfrak{g}_{\alpha, A^1}) \end{aligned}$$

avec $M = \sum_{k=1}^l n_k \alpha_l(\bar{\alpha}_k) = \alpha_l(\sum_{k=1}^l n_k \bar{\alpha}_k)$.

On remarque que la structure du A -module $\mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}} \cap (t^M \mathfrak{g}_{\alpha, A^1})$ (qui est isomorphe, en tant que A -module, à $\bar{A} \cap t^M A^1$) ne dépend que de la parité de M ; de plus, $\mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}} \cap (t^M \mathfrak{g}_{\alpha, A^1})$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_{\alpha, \bar{A}} \cap \mathfrak{g}_{\alpha, A^1} = \mathfrak{g}_{\alpha, A}$ (c'est-à-dire à A) si et seulement si M est pair. Sinon, il est isomorphe à $(t\bar{A}) \cap A^1$.

L'automorphisme intérieur $\text{Ad}(g)$ envoie π_1 sur π_2 en respectant la numérotation ; donc les A -modules $\mathfrak{g}_{\beta,A}$ et $\mathfrak{g}_{\alpha,A}^2$ doivent être isomorphes. On s'aperçoit donc que l'entier M ci-dessus doit être impair. Mais $\sum_{i=1}^l \mathbb{Z}\tilde{\alpha}_i \subset 2\mathbb{Z}\hat{\rho}_l \oplus \sum_{i=1}^{l-1} \mathbb{Z}\tilde{\rho}_i$, ceci est donc impossible, et les deux formes réelles $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},1}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},2}$ ne sont pas isomorphes.

7.5. Cas de l'algèbre $D_l^{(2)}$

Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie affine de type $D_l^{(2)}$ ($l > 3$), on se propose de comparer, pour $i \in \{1, 2, \dots, [\frac{l-1}{2}]\}$, les deux formes presque compactes $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}$ de \mathfrak{g} associées respectivement aux deux semi-involutions $\sigma'_i := \bar{\tau}_i \omega'$ et $\sigma'_{l-i} := \bar{\tau}_{l-i} \omega'$. On note $\sigma_i = \bar{\tau}_i$, $\sigma_{l-i} = \bar{\tau}_{l-i}$. Les involutions et les semi-involutions ainsi introduites agissent également sur l'algèbre affine non tordue \mathfrak{g}^1 (de type $D_l^{(1)}$) et sur l'algèbre de Lie simple complexe $\hat{\mathfrak{g}}$ (de type D_l). Les deux semi-involutions σ'_i et σ'_{l-i} induisent respectivement sur \mathfrak{g}^1 (respectivement $\hat{\mathfrak{g}}$) deux formes réelles isomorphes $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}^1$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}^1$ (respectivement $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R},i}$ et $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R},l-i}$) de rang $2i$, qui est aussi le rang commun des deux algèbres réelles $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}$.

7.5.1. Description des deux formes

(a) Description de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}$: On considère, dans l'algèbre de Lie simple $\hat{\mathfrak{g}}$, la sous-algèbre de Cartan standard $\hat{\mathfrak{h}}$ et le système de racines $\hat{\Delta} = \Delta(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{h}})$ muni de sa base de racines $\hat{\pi} = \{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_l\}$.

On pose $\beta_j = \hat{\alpha}_{i-j} + \dots + \hat{\alpha}_i + \dots + \hat{\alpha}_{i+j}$ pour $j = 0, 1, \dots, i - 1$. Lorsque $i < \frac{l-1}{2}$, on pose :

$$\gamma_j = \beta_j + 2(\hat{\alpha}_{i+j+1} + \dots + \hat{\alpha}_{l-2}) + \hat{\alpha}_{l-1} + \hat{\alpha}_l \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, i - 1.$$

Lorsque $l = 2k + 1$ ($k \geq 2$) et $i = k$, on pose :

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \beta_j + 2(\hat{\alpha}_{i+j+1} + \dots + \hat{\alpha}_{2k-1}) + \hat{\alpha}_{2k} + \hat{\alpha}_{2k+1} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, k - 2, \\ \gamma_{k-1} &= \beta_{k-1} + \hat{\alpha}_{2k} + \hat{\alpha}_{2k+1}. \end{aligned}$$

On associe, comme dans le cas $A_{2l-1}^{(2)}$, à chacune de ces $2i$ racines (qui sont fortement orthogonales) un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans $\hat{\mathfrak{g}}$ et on définit, avec les notations usuelles, la sous-algèbre :

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbb{R}(e_{\beta_j} + f_{\beta_j}) \oplus \mathbb{R}(e_{\gamma_j} + f_{\gamma_j})).$$

C'est une SATDM de $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R},i}$ fixe par $\hat{\rho}$; par conséquent, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes 1$ est une SATDM de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}^1)''$ fixe par $\tilde{\rho}$, c'est donc aussi une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}''$. En conjuguant par $A = \prod_{j=0}^{i-1} A_{\beta_j} A_{\gamma_j}$ qui commute à ω , ω' et $\tilde{\rho}$, on peut supposer que $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbb{R}\beta_j \oplus \mathbb{R}\gamma_j)$ qui vaut $\sum_{j=1}^{2i} \mathbb{R}\hat{\rho}_j$ si $2i \leq l - 2$ et $(\hat{\mathfrak{h}})^{\hat{\rho}}$ sinon. Ainsi $C_{\hat{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}) = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \sum_{\alpha \in \phi_i} \hat{\mathfrak{g}}_{\alpha}$, avec $\phi_i = (\sum_{j=2i+1}^l \mathbb{Z}\hat{\alpha}_j) \cap \hat{\Delta}$ si $2i \leq l - 2$ et $\phi_i = \emptyset$ sinon. Le conjugué $A^{-1}\sigma_i A$ de σ_i est

encore noté σ_i ; mais $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ est une SATDM σ_i -stable de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}$, donc σ_i agit sur \mathfrak{h} comme $(\hat{\rho})^\eta \hat{\omega} w(i)$, où $w(i)$ est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de ϕ_i (sous-système de racines de Δ de type D_{l-2i}) et $\eta = 0$ ou 1 selon que l est pair ou impair ; de plus σ_i fixe la sous-algèbre dérivée de $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})$. Si $2i \leq l - 2$, on en déduit que $\sigma_i = (\hat{\rho})^\eta \hat{\omega} w(i) \exp i \operatorname{ad}(h)$, avec $h \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$; donc en conjuguant encore par l'élément $H = \exp i \operatorname{ad}(\frac{h}{2})$, qui stabilise \mathfrak{h} , et qui commute à $\hat{\rho}, \hat{\omega}'$, et ω' , on peut supposer que $\sigma_i = (\hat{\rho})^\eta \hat{\omega} w(i) \otimes 1$. Si $2i = l - 1$, comme σ_i est induit par un automorphisme intérieur de $(\mathfrak{g})^{\hat{\rho}}$, on voit que σ_i induit $\hat{\rho} \hat{\omega}$ sur \mathfrak{h} , puis, avec le Lemme 7.3, que l'on peut supposer $\sigma_i = \hat{\rho} \hat{\omega}$. On a $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}^1)^{\hat{\rho}}$ dans tous les cas.

(b) *Description de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}$* : On considère le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ muni de sa base de racines $\hat{\pi} = \{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_l\}$.

Dans le cas $i = 1$, on pose $\beta_0 = \hat{\alpha}_{l-1}$ et $\gamma_0 = \hat{\rho}(\beta_0) = \hat{\alpha}_l$.

Dans le cas $i = 2$, on pose :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \hat{\alpha}_{l-2}, & \gamma_0 &= \hat{\alpha}_{l-2} + \hat{\alpha}_{l-1} + \hat{\alpha}_l, \\ \beta_1 &= \hat{\alpha}_{l-3} + \hat{\alpha}_{l-2} + \hat{\alpha}_{l-1}, \\ \gamma_1 &= \hat{\rho}(\beta_1) = \hat{\alpha}_{l-3} + \hat{\alpha}_{l-2} + \hat{\alpha}_l. \end{aligned}$$

Dans le cas $2 < i \leq \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$, on pose pour $j = 0, 1, \dots, i - 3$:

$$\begin{aligned} \beta_j &= \hat{\alpha}_{l-i-j} + \dots + \hat{\alpha}_{l-i} + \dots + \hat{\alpha}_{l-i+j}, \\ \gamma_j &= \beta_j + 2(\hat{\alpha}_{l-i+j+1} + \dots + \hat{\alpha}_{l-2}) + \hat{\alpha}_{l-1} + \hat{\alpha}_l, \\ \beta_{i-2} &= \hat{\alpha}_{l-2i+2} + \dots + \hat{\alpha}_{l-i} + \dots + \hat{\alpha}_{l-2}, \\ \gamma_{i-2} &= \beta_{i-2} + \hat{\alpha}_{l-1} + \hat{\alpha}_l, \\ \beta_{i-1} &= \hat{\alpha}_{l-2i+1} + \dots + \hat{\alpha}_{l-i} + \dots + \hat{\alpha}_{l-1}, \\ \gamma_{i-1} &= \hat{\rho}(\beta_{i-1}) = \hat{\alpha}_{l-2i+1} + \dots + \hat{\alpha}_{l-2} + \hat{\alpha}_l. \end{aligned}$$

On associe à chacune de ces $2i$ racines (qui sont fortement orthogonales) un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans \mathfrak{g} et on définit, avec les notations usuelles,

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} := \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbb{R}(e_{\beta_j} + f_{\beta_j}) \oplus \mathbb{R}(e_{\gamma_j} + f_{\gamma_j})).$$

C'est une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}$ qui est stable par $\hat{\rho}$ et σ_{l-i} ; par conséquent, $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes 1$ est une SATDM de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i})''$ stable par $\tilde{\rho}$. De plus, σ_{l-i} vaut $-\operatorname{Id}$ sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ et $+\operatorname{Id}$ sur l'algèbre dérivée du centralisateur de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ dans \mathfrak{g} .

En conjuguant par $A = \prod_{j=0}^{i-1} A_{\beta_j} A_{\gamma_j}$ (qui commute à $\hat{\rho}, \hat{\omega}, \omega, \omega'$), on peut supposer que $\sigma_{l-i} = \prod_{j=0}^{i-1} (r_{\beta_j} r_{\gamma_j}) \bar{v}_{l-i}$ et $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbb{R}\beta_j^\check{} \oplus \mathbb{R}\gamma_j^\check{}).$

La sous-algèbre

$$\begin{aligned} (\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})^{\dot{\rho}} &= \left(\sum_{j=0}^{i-2} (\mathbb{R}\beta_{\check{j}} \oplus \mathbb{R}\gamma_{\check{j}}) \right) \oplus \mathbb{R}(\beta_{i-1} + \dot{\rho}(\beta_{i-1})) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{2i-3} \mathbb{R}(\dot{p}_{l-2i+j} - \dot{p}_{l-2i+j+1}) \right) \oplus \mathbb{R}(\dot{p}_l + \dot{p}_{l-1} - \dot{p}_{l-2}) \end{aligned}$$

définit une SATDM de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}^1)^{\dot{\rho}}$. En particulier, σ_{l-i} est l'identité sur l'algèbre dérivée du centralisateur de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ dans $(\mathfrak{g})^{\dot{\rho}}$.

Soit $\psi_{l-i} := \{\alpha \in \dot{\Delta}; \alpha(t) = 0, \forall t \in (\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})^{\dot{\rho}}\}$. On a :

$$\psi_{l-i} = \left\{ \alpha = \sum_{s=1}^l n_s \dot{\alpha}_s \in \dot{\Delta}; n_{l-2i} = n_{l-2i+1} = \dots = n_{l-2} = n_{l-1} + n_l \right\}.$$

On pose $\mu_1 = \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots + \dot{\alpha}_{l-1} \in \psi_{l-i}$ et $\mu_2 = \dot{\rho}(\mu_1) = \dot{\alpha}_1 + \dots + \dot{\alpha}_{l-2} + \dot{\alpha}_l \in \psi_{l-i}$. On constate que $\dot{\rho}(\mu_1) = \sigma_{l-i}(\mu_1) = \mu_2$, et d'après le Lemme 5.7.4, les deux involutions $\dot{\rho}$ et σ_{l-i} coïncident sur l'algèbre dérivée de $C_{\mathfrak{g}}((\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})^{\dot{\rho}})$: algèbre de Lie simple de type D_{l-2i+1} .

On associe à chacune des deux racines μ_1 et μ_2 , qui sont dans ψ_{l-i} , un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans \mathfrak{g} . Ainsi, la sous-algèbre

$$\mathfrak{a} := ((\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})^{\dot{\rho}} \otimes 1) \oplus \mathbb{R}((e_{\mu_1} - e_{\mu_2}) \otimes t + (f_{\mu_1} - f_{\mu_2}) \otimes t^{-1})$$

est une SATDM de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}^1)''$ fixe par $\tilde{\rho}$ et stable par σ_{l-i} ; c'est donc aussi une SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}''$.

On considère le \mathfrak{sl}_2 -triplet $\{(e_{\mu_1} - e_{\mu_2}) \otimes t, \mu_{\check{1}} + \mu_{\check{2}}, (f_{\mu_1} - f_{\mu_2}) \otimes t^{-1}\}$ et on note r_{μ_1, μ_2} la réflexion par rapport à $(\mu_{\check{1}} + \mu_{\check{2}})$. Soit B_t l'élément du groupe adjoint de \mathfrak{g} vérifiant

$$(e_{\mu_1} - e_{\mu_2}) \otimes t + (f_{\mu_1} - f_{\mu_2}) \otimes t^{-1} = B_t(\mu_{\check{1}} + \mu_{\check{2}}) = B_t(2\dot{p}_1)$$

(cf. 5.3). En conjuguant par B_t (qui commute à $\omega, \omega', \tilde{\rho}$ et fixe $(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})^{\dot{\rho}} \otimes 1$), on peut supposer que

$$\sigma_{l-i} = r_{\mu_1, \mu_2} \prod_{j=0}^{i-1} (r_{\beta_j} r_{\gamma_j}) \bar{\tau}_{l-i},$$

et que $\mathfrak{a} := ((\mathfrak{t}_{\mathbb{R}})^{\dot{\rho}} \otimes 1) \oplus \mathbb{R}\dot{p}_1$ est une SATDM de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}^1)''$ et de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}''$.

L'involution r_{μ_1, μ_2} (et donc σ_{l-i}) ne respecte pas la graduation de la réalisation standard de \mathfrak{g} , puisque $r_{\mu_1, \mu_2}(d) = d - (\mu_{\check{1}} + \mu_{\check{2}}) = d - 2\dot{p}_1$. Par conséquent, r_{μ_1, μ_2} (et donc σ_{l-i}) fixe $d - \dot{p}_1$, et la réalisation $l(\mathfrak{g}, \dot{\rho}\bar{\tau}_1, -1)$ de \mathfrak{g} est adaptée à r_{μ_1, μ_2} (et donc à σ_{l-i}). On note $\tilde{\rho}_1$ l'automorphisme involutif $\dot{\rho}\bar{\tau}_1 \otimes \varepsilon$ de \mathfrak{g}^1 .

Soit $\phi_{l-i} := \{\alpha \in \dot{\Delta}; \alpha(\mathfrak{a}) = 0\}$. On a :

$$\phi_{l-i} = \left\{ \alpha = \sum_{s=1}^l n_s \dot{\alpha}_s \in \dot{\Delta}; n_1 = 0, n_{l-2i} = n_{l-2i+1} = \dots = n_{l-2} = n_{l-1} + n_l \right\}.$$

Supposons $2i < l - 1$; alors le sous-système de racines ϕ_{l-i} de $\dot{\Delta}$ est de type D_{l-2i} , et $\{\dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dots, \dot{\alpha}_{l-2i-1}, (\dot{\alpha}_{l-2i} + \dots + \dot{\alpha}_{l-1}), (\dot{\alpha}_{l-2i} + \dots + \dot{\alpha}_{l-2} + \dot{\alpha}_l)\}$ en est une base de racines. Soit w l'élément du groupe de Weyl de $\dot{\Delta}$ défini par

$$w = (r_{2i} \dots r_2)(r_{2i+1} \dots r_3) \dots (r_{l-2} \dots r_{l-2i}).$$

On a : $w(\{\dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dots, \dot{\alpha}_{l-2i-1}, (\dot{\alpha}_{l-2i} + \dots + \dot{\alpha}_{l-1}), (\dot{\alpha}_{l-2i} + \dots + \dot{\alpha}_{l-2} + \dot{\alpha}_l)\}) = \{\dot{\alpha}_{2i+1}, \dot{\alpha}_{2i+2}, \dots, \dot{\alpha}_{l-1}, \dot{\alpha}_l\}$. En conjuguant par w (qui commute à ω, ω' , et $\tilde{\rho}_1$), on peut supposer que $\phi_{l-i} = (\sum_{j=2i+1}^l \mathbb{Z}\dot{\alpha}_j) \cap \dot{\Delta}$. Ainsi, on a :

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in \phi_{l-i}} \text{Ker}(\alpha) = \sum_{j=1}^{2i} \mathbb{R}\dot{\rho}_j.$$

On constate alors (puisque σ_{l-i} fixe $[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})]'$) que σ_{l-i} agit sur \mathfrak{h} comme l'involution $(\dot{\rho})^\eta \dot{\omega} w(i)$, où $\eta = 0$ ou 1 , selon que l est pair ou impair, et $w(i)$ est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de ϕ_{l-i} ; donc il existe $h \in \mathfrak{a}$ tel que : $\sigma_{l-i} = (\dot{\rho})^\eta \dot{\omega} w(i) \exp i \text{ad}(h)$. En conjuguant par l'élément $H = \exp i \text{ad}(\frac{h}{2})$, qui stabilise \mathfrak{h} et qui commute à $\dot{\rho}, \tilde{\rho}_1$, et ω' , on peut supposer que $\sigma_{l-i} = (\dot{\rho})^\eta \dot{\omega} w(i) \otimes 1$ sur \mathfrak{g}^1 .

Si $2i = l - 1$, on a directement

$$\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{l-1} \mathbb{R}\tilde{\rho}_j = (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}})^{\dot{\rho}},$$

et comme σ_{l-i} est induit par un automorphisme intérieur de $(\mathfrak{g})^{\dot{\rho}}$, on voit que σ_{l-i} induit $\dot{\rho}\dot{\omega}$ sur \mathfrak{h} , puis avec le Lemme 7.3 que l'on peut supposer $\sigma_{l-i} = (\dot{\rho}\dot{\omega}) \otimes 1$ sur \mathfrak{g}^1 .

Ainsi, on a $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, l-i}^1 = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}^1$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, l-i} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}^1)^{\tilde{\rho}_1}$ dans tous les cas.

7.5.2. Comparaison des deux formes

D'après les modifications faites en 7.5.1, on a $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}^1)^{\tilde{\rho}}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, l-i} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}^1)^{\tilde{\rho}_1}$, avec $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}\tilde{\tau}_1$. Supposons que les deux formes sont isomorphes. L'algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}, 1} := \sum_{j=1}^{2i} \mathbb{R}\tilde{\rho}_j$ est une SATDM pour les deux formes $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, l-i}$ ainsi que pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}^1$. L'image réciproque par l'isomorphisme de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, l-i}$ de $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}, 1}$, notée $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}, 2}$, est une seconde SATDM de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}$ et de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}, i}^1$. On va essayer de la comparer à $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}, 1}$.

(a) *Le cocycle n* : D'après la Proposition 7.2, il existe, pour $j = 1, 2$, une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_j de \mathfrak{g}'' qui est stable par σ'_j et contient $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}, j}$, et il existe une base de racines π_j de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_j)$ et $g \in G$ tels que $g(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$, $g(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}, 1}) = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}, 2}$, et $g(\pi_1) = \pi_2$. De plus, g échange les racines de π_1 et π_2 possédant la même numérotation, et l'élément $n := g^{-1}\sigma'(g)$ fixe

\mathfrak{h}_1 et la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_1^1 de $(\mathfrak{g}^1)''$ contenant \mathfrak{h}_1 . On sait également que si \mathcal{G} est le groupe algébrique simplement connexe associé à \mathfrak{g} , on a $\text{Ad}(G^1) = \text{Ad}(\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}]))$ et $\text{Ad}(G) \subset \text{Ad}((G^1)^{\tilde{\rho}})$. Ainsi, on peut regarder $\text{Ad}(n)$ comme l'image par Ad d'un élément noté encore n , avec $n \in T = \mathcal{T}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, où \mathcal{T} est le tore maximal de \mathcal{G} correspondant à la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_1^1 de $(\mathfrak{g}^1)''$. On identifie le tore T à $(\mathbb{C}[t, t^{-1}])^*$ via les coracines. Comme n est fixe par $\tilde{\rho}$, on peut écrire

$$n = (u_1 t^{2n_1}, \dots, u_{l-2} t^{2n_{l-2}}, u_{l-1} t^{n_{l-1}}, (-1)^{n_{l-1}} u_{l-1} t^{n_{l-1}}),$$

avec $u_i \in \mathbb{C}^*$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, l - 1$.

En regardant l'expression de σ'_i , on constate que :

– si $2i < l - 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma'_i(\alpha_{\check{k}}) &= \alpha_{\check{k}} \quad \text{si } k < 2i, \\ \sigma'_i(\alpha_{\check{k}}) &= -\alpha_{\check{k}} \quad \text{si } k > 2i, \\ \sigma'_i(\alpha_{\check{2i}}) &= \alpha_{\check{2i}} + 2(\alpha_{\check{2i+1}} + \dots + \alpha_{\check{l-2}}) + \alpha_{\check{l-1}} + \alpha_{\check{l}}; \end{aligned}$$

– si $2i = l - 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma'_i(\alpha_{\check{k}}) &= \alpha_{\check{k}} \quad \text{si } k < l - 1, \\ \sigma'_i(\alpha_{\check{l-1}}) &= \alpha_{\check{l}}, \quad \text{et donc } \sigma'_i(\alpha_{\check{l}}) = \alpha_{\check{l-1}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

– pour $2i = l - 1$, $\sigma'_i(v_1 t^{m_1}, \dots, v_l t^{m_l}) = (\bar{v}_1 t^{-m_1}, \dots, \bar{v}_l t^{-m_l}, \bar{v}_{l-1} t^{-m_{l-1}})$,
 – et pour $2i < l - 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma'_i(v_1 t^{m_1}, \dots, v_l t^{m_l}) &= (\bar{v}_1 t^{-m_1}, \dots, \bar{v}_{2i} t^{-m_{2i}}, (\bar{v}_{2i})^2 (\bar{v}_{2i+1})^{-1} t^{-2m_{2i} + m_{2i+1}}, \\ &\dots, (\bar{v}_{2i})^2 (\bar{v}_{l-2})^{-1} t^{-2m_{2i} + m_{l-2}}, \bar{v}_{2i} (\bar{v}_{l-1})^{-1} t^{-m_{2i} + m_{l-1}}, \bar{v}_{2i} (\bar{v}_l)^{-1} t^{-m_{2i} + m_l}). \end{aligned}$$

Ainsi, la condition $\sigma'_i(n) = n^{-1}$ équivaut aux conditions suivantes :

– si $2i = l - 1$, $|u_k| = 1$, $k = 1, \dots, l - 1$, et n_{l-1} pair,
 – si $2i < l - 1$, $|u_k| = 1$, $k = 1, \dots, 2i$; $\bar{u}_{2i}^2 = \frac{\bar{u}_{2i+k}}{u_{2i+k}}$ et $n_{2i} = n_{2i+k}$, $k = 1, \dots, l - 2i - 2$;
 $\bar{u}_{2i} = \frac{\bar{u}_{l-1}}{u_{l-1}}$, et $n_{2i} = n_{l-1}$.

(b) *Modification de n* : Soit m un élément de $T^{\tilde{\rho}}$ défini par

$$m = (v_1 t^{2m_1}, \dots, v_{l-2} t^{2m_{l-2}}, v_{l-1} t^{m_{l-1}}, (-1)^{m_{l-1}} v_{l-1} t^{m_{l-1}}).$$

On pose $g' = gm$ et $n' = g'^{-1} \sigma'_i(g') = m^{-1} n \sigma'_i(m) = n m^{-1} \sigma'_i(m)$.

Si $2i = l - 1$, on a :

$$n' = \left(u_1 \frac{\bar{v}_1}{v_1} t^{2(n_1-2m_1)}, \dots, u_{l-2} \frac{\bar{v}_{l-2}}{v_{l-2}} t^{2(n_{l-2}-2m_{l-2})}, u_{l-1} \frac{\bar{v}_{l-1}}{v_{l-1}} (-1)^{m_{l-1}} t^{(n_{l-1}-2m_{l-1})}, \right. \\ \left. (-1)^{n_{l-1}} u_{l-1} \frac{\bar{v}_{l-1}}{v_{l-1}} (-1)^{m_{l-1}} t^{(n_{l-1}-2m_{l-1})} \right).$$

Comme $|u_k| = 1$, $k = 1, \dots, l - 1$, et n_{l-1} est pair, on peut prendre $u_k = \frac{v_k}{\bar{v}_k}$, $k = 1, \dots, l - 1$; $n_k - 2m_k = 0$ ou 1 , $k = 1, 2, \dots, l - 2$, et $n_{l-1} = 2m_{l-1}$.

Ainsi n' s'écrit : $n' = (t^{2s_1}, \dots, t^{2s_{l-2}}, (-1)^{m_{l-1}}, (-1)^{m_{l-1}})$, $s_k = 0$ ou 1 ; $k = 1, \dots, l - 2$.

Si $2i < l - 1$, on a :

$$n' = \left(u_1 \frac{\bar{v}_1}{v_1} t^{2(n_1-2m_1)}, \dots, u_{2i} \frac{\bar{v}_{2i}}{v_{2i}} t^{2(n_{2i}-2m_{2i})}, u_{2i+1} \frac{\bar{v}_{2i}^2}{|v_{2i+1}|^2} t^{2(n_{2i}-2m_{2i})}, \right. \\ \left. \dots, u_{l-2} \frac{\bar{v}_{2i}^2}{|v_{l-2}|^2} t^{2(n_{2i}-2m_{2i})}, u_{l-1} \frac{\bar{v}_{2i}}{|v_{l-1}|^2} t^{(n_{2i}-2m_{2i})}, (-1)^{n_{2i}} u_{l-1} \frac{\bar{v}_{2i}}{|v_{l-1}|^2} t^{(n_{2i}-2m_{2i})} \right).$$

On peut donc supposer $u_k = \frac{v_k}{\bar{v}_k}$, $k = 1, \dots, 2i$, ce qui entrain, pour $1 \leq k \leq l - 2i - 2$, $\frac{\bar{u}_{2i+k}}{u_{2i+k}} = \bar{u}_{2i}^2 = \left(\frac{\bar{v}_{2i}}{v_{2i}}\right)^2$. On constate alors que $\bar{v}_{2i}^2 u_{2i+k} \in \mathbb{R}$, et on peut donc supposer que $u_{2i+k} \frac{\bar{v}_{2i}^2}{|v_{2i+k}|^2} = \pm 1$.

On a également $\frac{\bar{u}_{l-1}}{u_{l-1}} = \bar{u}_{2i} = \frac{\bar{v}_{2i}}{v_{2i}}$; on constate donc que $\bar{v}_{2i} u_{l-1} \in \mathbb{R}$, et quitte à changer le signe de v_{2i} , on peut supposer que $\bar{v}_{2i} u_{l-1} \in \mathbb{R}^+$ et $u_{l-1} \frac{\bar{v}_{2i}}{|v_{l-1}|^2} = 1$.

Ainsi n' s'écrit :

$$n' = (t^{2s_1}, \dots, t^{2s_{2i}}, \varepsilon_{2i+1} t^{2s_{2i}}, \dots, \varepsilon_{l-2} t^{2s_{2i}}, t^{s_{2i}}, (-1)^{s_{2i}} t^{s_{2i}})$$

avec $s_k = 0$ ou 1 , $k = 1, \dots, 2i$, et $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 2i + 1, \dots, l - 2$.

(c) Nullité de s_{2i} dans le cas $2i < l - 1$: Si $s_{2i} = 1$, on montre qu'il n'existe pas de $g \in \mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])^{\tilde{\rho}}$ tel que

$$g^{-1} \sigma'(g) = (t^{2s_1}, \dots, t^{2s_{2i-1}}, t^2, \varepsilon_{2i+1} t^2, \dots, \varepsilon_{l-2} t^2, t, -t).$$

On va d'abord en trouver un dans un mauvais groupe. Pour cela on va décrire l'action de σ'_i en terme de matrices.

Soit \mathcal{G} le groupe algébrique simplement connexe associé à l'algèbre de Lie simple complexe $\hat{\mathfrak{g}}$ ($= \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$). Le groupe \mathcal{G} est le revêtement simplement connexe de $SO(2l, \mathbb{C})$.

On considère \mathbb{C}^{2l} muni de la base $(e_1, e_2, \dots, e_l, e_{-l}, e_{-l+1}, \dots, e_{-2}, e_{-1})$ et de la forme bilinéaire symétrique et non dégénérée B définie par :

$$B(e_i, e_j) = \delta_{i,-j}; \quad i, j \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm l\}.$$

Le sous-groupe commutatif T de \mathcal{G} défini par

$$T = \{\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_l, a_{-l}, a_{-l+1}, \dots, a_{-2}, a_{-1}) ; a_{-k} = a_k^{-1}, k = 1, 2, \dots, l\}$$

est un tore maximal de \mathcal{G} . Pour $k = 1, 2, \dots, l$, on note ε_k le caractère de T défini par

$$\varepsilon_k(\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_l, a_{-l}, a_{-l+1}, \dots, a_{-2}, a_{-1})) = a_k \in \mathbb{C}^*,$$

et λ_k le cocaractère de T défini par :

$$\lambda_k(z) = \text{Diag}(1, 1, \dots, 1, z, 1, \dots, 1, z^{-1}, 1, \dots, 1) \in T$$

où z (respectivement z^{-1}) est le $k^{\text{ième}}$ (respectivement le $(-k)^{\text{ième}}$) coefficient de la matrice diagonale $\lambda_k(z)$.

On a une base de racines $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ du système de racines $\Delta(\mathcal{G}, T)$ telle que $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, i = 1, 2, \dots, l-1$, et $\alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l$.

La base de coracines $\check{\pi}$ correspondant à π est telle que $\alpha_i^{\check{}} = \lambda_i - \lambda_{i+1}, i = 1, 2, \dots, l-1$, et $\alpha_l^{\check{}} = \lambda_{l-1} + \lambda_l$.

L'automorphisme de diagramme involutif $\hat{\rho}$ de \mathcal{G} défini par : $\hat{\rho}(\alpha_i) = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, l-2$, et $\hat{\rho}(\alpha_{l-1}) = \alpha_l$, correspond, en terme de matrices, à la conjugaison par la matrice inversible

$$r = \begin{pmatrix} (I_{l-1}) & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & (I_{l-1}) \end{pmatrix}.$$

La réflexion R_k par rapport à α_k ($k = 1, 2, \dots, l$) agit sur \mathcal{G} ou $\hat{\mathfrak{g}}$ par l'automorphisme intérieur $\text{Ad}(\exp X_k \exp Y_k \exp X_k)$, où $X_k = E_{k,k+1} - E_{-k-1,-k}, Y_k = -^t X_k, k = 1, 2, \dots, l-1$, et $X_l = E_{l-1,-l} - E_{l,-l+1}, Y_l = -^t X_l$ (notation de [12, VIII]).

On remarque que, pour $k = 1, 2, \dots, l-1$, l'automorphisme R_k de \mathcal{G} agit par la conjugaison par la matrice

$$r_k = \begin{pmatrix} (I_{k-1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I_{2(l-k-1)}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (I_{k-1}) \end{pmatrix}$$

et R_l agit par la conjugaison par

$$r = \begin{pmatrix} (I_{l-2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_{l-2}) \end{pmatrix}.$$

On considère l'involution $\hat{\sigma}_i = (\hat{\rho})^\eta \hat{\omega} w(i)$, où $w(i) = (R_{2i+1} \dots R_{l-1} R_l)^{l-2i-1}$ est l'élément de plus grande longueur dans le groupe de Weyl du sous-système de racines engendré par $(\alpha_{2i+1}, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_l)$; selon la parité de l , $\eta = 0$ ou 1 , et $\hat{\omega}$ est l'involution de Cartan ($\hat{\omega}(X) = {}^t X^{-1}$). La semi-involution de Cartan $\hat{\omega}'$ agit par $\hat{\omega}'(X) = {}^t \bar{X}^{-1}$.

On vérifie par le calcul que $(\hat{\rho})^\eta w(i)$ agit par la conjugaison par

$$s_\varepsilon = \begin{pmatrix} (I_{2i}) & & 0 & & 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \varepsilon & & \vdots \\ \varepsilon & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & & (I_{2i}) \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon = (-1)^{l-1}$.

La semi-involution $\hat{\sigma}'_i := \hat{\sigma}_i \hat{\omega}'$ agit sur $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$ par $\hat{\sigma}'_i(X) = s_\varepsilon \bar{X} s_\varepsilon$.

La semi-involution $\hat{\sigma}'_i$ induit sur \mathbb{C}^{2l} la semi-involution s'_ε telle que

$$s'_\varepsilon(z_1, \dots, z_l, z_{-l}, \dots, z_{-1}) = (z'_1, \dots, z'_l, z'_{-l}, \dots, z'_{-1})$$

avec $z'_k = \bar{z}_k$, si $|k| \leq 2i$, et $z'_k = \varepsilon \bar{z}_{-k}$, si $|k| > 2i$.

La forme réelle de \mathbb{C}^{2l} associée à s'_ε est

$$V_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{1 \leq k \leq 2i} (\mathbb{R}e_k \oplus \mathbb{R}e_{-k}) \oplus \left(\bigoplus_{k > 2i} (\mathbb{R}(e_k + \varepsilon e_{-k}) \oplus i\mathbb{R}(e_k - \varepsilon e_{-k})) \right).$$

La restriction à $V_{\mathbb{R}}$ de la forme bilinéaire B est de signature $(2i, 2l - 2i)$ si l est pair, et $(2l - 2i, 2i)$ si l est impair. La forme réelle de $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$ associée à $\hat{\sigma}'_i$ est $\mathfrak{so}(2i, 2l - 2i)$ si l est pair, et $\mathfrak{so}(2l - 2i, 2i)$ si l est impair.

Ainsi, la semi-involution $\sigma'_i := \hat{\sigma}'_i \otimes \iota'$ de $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ ou de $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}[t, t^{-1}])$ agit par la conjugaison par s_ε et la transformation ι' sur les coefficients des matrices $[\iota'(P(t)) = \bar{P}(t^{-1})]$.

On reprend, lorsque $2i < l - 1$, l'expression de n' obtenue au (b) et on suppose que $s_{2i} = 1$. En terme de matrices, on a

$$n' = \text{Diag}(P_1, P_2, \dots, P_l, P_{-l}, \dots, P_{-2}, P_{-1})$$

avec $P_1 = t^{2s_1}$; $P_k = t^{2(s_k - s_{k-1})}$, $k = 2, 3, \dots, 2i$ (en particulier, on a $P_{2i} = t^{2(1-s_{2i-1})}$); $P_{2i+1} = \varepsilon_{2i+1}$; $P_j = \varepsilon_j \varepsilon_{j-1}$, $j = 2i + 2, \dots, l - 2$; $P_{l-1} = -\varepsilon_{l-2}$; $P_l = -1$; $P_{-k} = P_k^{-1}$, $\forall k = 1, 2, \dots, l$.

Soit h la matrice de $GL_{2l}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ définie par

$$h = \text{Diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_l, Q_{-l}, \dots, Q_{-2}, Q_{-1})$$

avec $Q_1 = t^{-s_1}$; $Q_k = t^{-(s_k - s_{k-1})}$, $k = 2, 3, \dots, 2i$ (en particulier, on a $Q_{2i} = t^{(s_{2i-1}-1)}$); $Q_j = 1$, $j = 2i + 1, \dots, l$; $Q_{-l} = -1$; $Q_{-l+1} = -\varepsilon_{l-2}$; $Q_{-j} = \varepsilon_j \varepsilon_{j-1}$, $j = 2i +$

$2, \dots, l - 2$; $Q_{-2i-1} = \varepsilon_{2i+1}$; $Q_{-2i} = t^{1-s_{2i-1}}$; $Q_{-k} = t^{s_k - s_{k-1}}$, $k = 2, \dots, 2i - 1$; $Q_{-1} = t^{s_1}$.

Alors $h^{-1}\sigma'_i(h) = n' = g^{-1}\sigma'_i(g)$, et donc σ'_i fixe gh^{-1} .

On prend $t = 1$ et on note encore g' et h les évaluations en 1 des matrices inversibles g' et h . On remarque alors que $g'h^{-1}$ est fixe par σ'_i , c'est donc un automorphisme \mathbb{R} -linéaire de $V_{\mathbb{R}}$. On considère la famille \mathcal{F} de vecteurs (deux à deux orthogonaux relativement à B) de $V_{\mathbb{R}}$ formée des $v_k = e_k - \varepsilon e_{-k}$, $k = 1, 2, \dots, 2i$, et de $v_l = e_l + \varepsilon e_{-l}$, avec $\varepsilon = (-1)^{l-1}$. On vérifie facilement que $h^{-1}(v_k) = v_k$, $k = 1, 2, \dots, 2i$ et que $h^{-1}(v_l) = e_l - \varepsilon e_{-l}$. Comme g' respecte la forme bilinéaire B de $V_{\mathbb{R}}$, alors la famille $g'h^{-1}(\mathcal{F})$ de $V_{\mathbb{R}}$ (qui est de cardinal $2i + 1$) vérifie

$$B(g'h^{-1}v_j, g'h^{-1}v_k) = B(h^{-1}v_j, h^{-1}v_k) = -2\varepsilon\delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 2i, l.$$

Ceci contredit le fait que $(B, V_{\mathbb{R}})$ est de signature $(2i, 2l - 2i)$ si l est pair, et $(2l - 2i, 2i)$ si l est impair.

On a donc nécessairement $s_{2i} = 0$, et l'expression de n' (lorsque $2i < l - 1$) devient

$$n' = g'^{-1}\sigma'_i(g') = (t^{2s_1}, \dots, t^{2s_{2i-1}}, 1, \varepsilon_{2i+1}, \dots, \varepsilon_{l-2}, 1, 1)$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 2i + 1, \dots, l - 2$.

(d) *Comparaison* : On revient à la situation générale (i.e., $2i \leq l - 1$) et on note m' l'élément de $\mathcal{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ défini par

$$m' = (t^{s_1}, \dots, t^{s_{2i-1}}, 1, 1, \dots, 1).$$

On pose $g'' = g'm'$ et $n'' = g''^{-1}\sigma'_i(g'')$. On a :

$$n'' = m'^{-1}n'\sigma'_i(m') = n'm'^{-1}\sigma'_i(m') = (1, 1, \dots, 1, \varepsilon_{2i+1}, \dots, \varepsilon_l)$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 2i + 1, \dots, l$.

L'automorphisme intérieur g'' de \mathfrak{g}^1 (qui ne stabilise pas \mathfrak{g}) transforme $\mathfrak{t}_1 = \sum_{k=1}^{2i} \mathbb{C}\bar{p}_k$ en \mathfrak{t}_2 , et agit comme g ou g' sur les systèmes de racines $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}_1)$ et $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$.

Pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}'' , \mathfrak{t}_{\mathbb{R},1})$, on note respectivement $\mathfrak{g}_{\alpha,A}$, $\mathfrak{g}_{\alpha,A^1}$, $\mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}}$ et $\mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}^1}$ les espaces radiciels associés à α dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}^1$, \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^1 . On a $\mathfrak{g}_{\alpha,A} = \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}} \cap \mathfrak{g}_{\alpha,A^1}$.

On munit $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}'' , \mathfrak{t}_{\mathbb{R},1})$ de la base $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{2i}\}$ et on remarque que pour toute racine $\alpha \in \{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{2i-1}\}$, α est la classe d'une unique racine γ de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ et de $\Delta(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{h})$ (où \mathfrak{h} est l'unique sous-algèbre de Cartan de $(\mathfrak{g}^1)''$ contenant \mathfrak{h}_1). Par conséquent, l'espace radiciel $\mathfrak{g}_{\alpha,A}$ est un A -module libre de rang 1. De plus, $\gamma(n'') = 1$, et comme $\sigma'_i(g'') = g''n''$, la bijection $X \mapsto g''X$ de $\mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}^1}$ sur son image est σ'_i -covariante.

On considère une racine $\alpha \in \{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{2i-1}\}$ et on note β son image par g , g' ou g'' dans $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}'' , \mathfrak{t}_{\mathbb{R},2})$. L'espace radiciel $\mathfrak{g}_{\beta,A}$ (relativement à $\mathfrak{t}_{\mathbb{R},2}$) est isomorphe (en tant que A -module) à $g^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta,A}) = g'^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta,A})$. De plus, on a (avec des notations évidentes) $\mathfrak{g}_{\beta,A} = \mathfrak{g}_{\beta,\bar{A}} \cap \mathfrak{g}_{\beta,A^1}$ et $g''^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta,A^1}) = \mathfrak{g}_{\alpha,A^1}$, d'où :

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta,A}) &= g'^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta,\bar{A}} \cap \mathfrak{g}_{\beta,A^1}) = \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}} \cap g'^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta,A^1}) \\
 &= \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}} \cap m' g''^{-1}(\mathfrak{g}_{\beta,A^1}) = \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}} \cap m'(\mathfrak{g}_{\alpha,A^1}) \\
 &= \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}} \cap (t^{M_\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha,A^1}), \quad \text{avec } M_\alpha = \sum_{k=1}^{2i-1} s_k \alpha(\check{\alpha}_k).
 \end{aligned}$$

On remarque que la structure du A -module $\mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}} \cap (t^{M_\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha,A^1})$ (qui est isomorphe, en tant que A -module, à $\bar{A} \cap t^{M_\alpha} A^1$) ne dépend que de la parité de M_α . De plus, $\mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}} \cap (t^{M_\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha,A^1})$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_{\alpha,\bar{A}} \cap \mathfrak{g}_{\alpha,A^1} = \mathfrak{g}_{\alpha,A}$ si et seulement si M_α est pair ; en effet, si M_α est impair, le A -module $\bar{A} \cap t^{M_\alpha} A^1$ est isomorphe à $(t + t^{-1})A + i(t - t^{-1})A$ qui n'est pas un A -module libre.

On note N_α la classe de M_α modulo 2 et on remarque que :

$$N_{\check{\alpha}_1} = s_2 ; N_{\check{\alpha}_3} = s_2 + s_4 ; \dots ; N_{\check{\alpha}_{2k+1}} = s_{2k} + s_{2k+2} ; \dots ; N_{\check{\alpha}_{2i-1}} = s_{2i-2}$$

et on a

$$\sum_{k=0}^{i-1} N_{\check{\alpha}_{2k+1}} = 2 \sum_{k=1}^{i-1} s_{2k} \quad \text{modulo 2.}$$

Ainsi, on constate que le nombre des racines $\alpha \in \{\check{\alpha}_{2k+1} ; k = 1, 2, \dots, i - 1\}$ telles que les A -modules correspondants $\mathfrak{g}_{\beta,A}$ ne sont pas libres est pair.

L'automorphisme intérieur $\text{Ad}(g)$ envoie π_1 sur π_2 en respectant la numérotation, et en considérant dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}$ les espaces radiciels associés au même ensemble de racines $\{\check{\alpha}_{2k+1} ; k = 1, 2, \dots, i - 1\}$, on s'aperçoit que le A -module $\mathfrak{g}_{\beta,A}$ est non libre pour $\alpha = \check{\alpha}_1$ et libre pour les autres racines. D'où la contradiction.

Les deux formes réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},i}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R},l-i}$ ne sont donc pas isomorphes. \square

Théorème 7.6. *La table du paragraphe 6 est une liste complète et non redondante des formes réelles presque compactes non compactes des algèbres de Kac–Moody affines : deux éléments distincts de cette liste ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. On a vu au début de ce paragraphe que seuls deux cas particuliers restaient à traiter et on les a examinés en 7.4 et 7.5. \square

Au vu des résultats de [23] rappelés en 2.8, 2.9 et 2.10, on a donc :

Corollaire 7.7. *Il y a bijection entre les classes de conjugaison (sous $\text{Aut}(\mathfrak{g})$) de formes réelles presque compactes non compactes d'une algèbre de Kac–Moody affine \mathfrak{g} et les classes de conjugaison d'involutions de première espèce de \mathfrak{g} .*

Corollaire 7.8. *Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ une forme réelle presque compacte non compacte d'algèbre de Kac–Moody affine. Alors les objets suivants forment chacun une unique classe de conjugaison sous le groupe $\text{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ des automorphismes qui commutent à σ' :*

- les involutions de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$,
- les sous-algèbres de Cartan maximale compactes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$,
- les sous-algèbres compactes maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

N.B. : Le type des sous-algèbres compactes maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est indiqué dans [6].

Notations

- 1.1 : $A, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, e_i, f_i, \mathfrak{g}_{\alpha}, \Delta, \Pi, \alpha_i, \check{\alpha}_i, W, r_i, \Delta^{\text{re}}, \Delta^{\text{im}}, \mathfrak{c}$
- 1.2 : $G, \text{Ad}, U_{\alpha}, \exp, H$
- 1.3 : $\mathfrak{b}^+, \mathfrak{b}^-$
- 1.4 : $\tilde{H}, \omega, \text{Int}(\mathfrak{g}), \text{Ad } G = \text{Int}'(\mathfrak{g}) = \text{Int}(\mathfrak{g}'), \text{Aut}(A), \mathfrak{h}', \text{Aut}_1(\mathfrak{g}'), \text{Aut}(\mathfrak{g}'), \text{Tr}, \text{Aut}_1(\mathfrak{g}), \text{Aut}(\mathfrak{g})$
- 1.5 : $\mathfrak{g}, \varepsilon_m, \mathfrak{g}_j, \mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}_0, \mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta, \varepsilon_m) = \mathfrak{l}, c, d, \mathring{\Delta}, \mathring{\Pi}, \mathring{I}, \bar{\Delta}, \bar{\alpha}, \bar{\Pi}, \mathring{p}_i, \bar{p}_i$
- 1.6 : $\mathfrak{g}'', \mathfrak{l}'', \mathcal{T}, \mathbb{A}$
- 1.11 : $\bar{\Delta}_j, \delta, p_i, \hat{\omega}$
- 1.12 : $\mathbb{K}, \gamma_m, \Gamma, \tilde{\mathfrak{g}}$
- 1.16 : $\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{S}, \mathfrak{U}$
- 1.19 : $\mathfrak{P}, \mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_J, \mathfrak{l}, \mathfrak{h}_J, \check{\alpha}_i$
- 2.1 : $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}), \sigma'_n$
- 2.2 : $\text{Int}_{\text{Tr}}(\mathfrak{g}), \text{Ext}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$
- 2.5 : ω', \mathfrak{l}'
- 2.7 : $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$
- 2.13 : $\tau_j, \bar{\tau}_j, \mathring{\tau}_j$
- 2.14 : $\mathfrak{l}'_{\varepsilon}$
- 2.15 : γ_{ε}
- 4.6 : $\mathbb{K}_{\varepsilon}, \mathbb{A}_{\varepsilon}$
- 7.0 : $\bar{A}^1, \bar{K}^1, \varepsilon, \bar{A}, \bar{K}, A^1, K^1, A, K, \mathfrak{g}^1, G^1, \tilde{\rho}, \Gamma$

Définitions

adjoint (groupe)	1.4
adapté, presque adapté	2.7, 3.2, 3.4, 3.9, 7.1
compacte (forme ou semi-involution)	2.5
décomposition de Cartan	2.7
déployée ou normale (forme)	2.1
diagramme (automorphisme de)	1.4
entière (SATDM)	1.15
espèce (automorphisme de première ou seconde)	1.3
graduation (élément de)	1.5
indice (de Tits)	4.8
intérieur, presque intérieur (automorphisme)	1.4, 2.2
involution de Cartan (de \mathfrak{g} , de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$)	1.4, 2.7

maximalement compacte ou déployée ou fixée (SAC)	2.7, 3.1, 4.2
pseudo-complexe	2.15
poids fondamentaux	1.5, 1.11.5
presque compacte, presque déployée (forme)	2.6
rang relatif	4.8
réalisation	1.5
réductive-affine (algèbre)	1.5
SABI sous-algèbre de Borel–Iwahori	1.3
SABF sous-algèbre de Borel fractionnaire	1.16
SAC sous-algèbre de Cartan	1.3, 1.15
SAPF sous-algèbre parabolique fractionnaire	1.19
SATD, SATDM sous-algèbre torique déployée (maximale)	1.15
semi-linéaire, semi-involution	2.1
SI1, SI2 semi-involution de première ou seconde espèce	2.6
SIC semi-involution de Cartan (ou compacte)	2.5
sous-algèbre compacte maximale	2.7
standard	1.1, 1.5, 1.9, 1.11.3, 2.5
translation (application)	1.6
transvection	1.4
tordue ou non tordue (algèbre affine)	1.9
type d'une algèbre affine : $\text{Aff } k, X_n^{(k)}$	1.6

Références

- [1] N. Andruskiewitsch, Some forms of Kac–Moody algebras, *J. Algebra* 147 (1992) 324–344.
- [2] V. Back-Valente, N. Bardy-Panse, H. Ben Messaoud, G. Rousseau, Formes presque déployées d'algèbres de Kac–Moody, Classification et racines relatives, *J. Algebra* 171 (1995) 43–96.
- [3] P. Batra, Invariants of real forms of affine Kac–Moody Lie algebras, *J. Algebra* 223 (2000) 208–236.
- [4] J. Bausch, Étude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac–Moody affines, *Revue de l'Institut Elie Cartan Nancy* 11 (1988) 5–124.
- [5] J. Bausch, Automorphismes des algèbres de Kac–Moody affines, *C. R. Acad. Sci. Paris* 302 (1986) 409–412.
- [6] J. Bausch, G. Rousseau, Involutions de première espèce des algèbres de Kac–Moody affines, *Revue de l'Institut Elie Cartan Nancy* 11 (1988) 125–139.
- [7] H. Ben Messaoud, Involutions et formes réelles d'algèbres de Kac–Moody symétrisables, Thèse Université Nancy 1 (1993).
- [8] M. Berger, Les espaces symétriques non compacts, *Ann. École Norm. Sup.* 74 (1957) 85–177.
- [9] S. Berman, A. Pianzola, Generators and relations for real forms of some Kac–Moody Lie algebras, *Comm. Algebra* 15 (1987) 935–959.
- [10] A. Borel, G.D. Mostow, On semi-simple automorphisms of Lie algebras, *Ann. Math.* 61 (1955) 389–405.
- [11] A. Borel, J. Tits, Groupes réductifs, *Pub. Math. I.H.E.S.* 27 (1965) 55–151.
- [12] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre I à IX, Paris.
- [13] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [14] S. Kabbaj, Classification locale des espaces affines symétriques, Thèse, Nancy, 1986.
- [15] V.G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Troisième Édition, Cambridge University Press, 1990.
- [16] V.G. Kac, D.H. Peterson, Defining relations of certain infinite dimensional groups, in : *Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, Lyon, 1984, in : *Astérisque* n° hors série, 1985, pp. 165–208.
- [17] V.G. Kac, D.H. Peterson, On geometric invariant theory of infinite dimensional groups, in : *Algebraic Groups*, Utrecht, 1986, in : *Lecture Note in Math.*, Vol. 1271, Springer, 1987, pp. 109–142.

- [18] V.G. Kac, S.P. Wang, On automorphisms of Kac–Moody algebras and groups, *Adv. Math.* 92 (1992) 129–195.
- [19] F. Levstein, A classification of involutive automorphisms of an affine Kac–Moody Lie algebra, *J. Algebra* 114 (1988) 489–518.
- [20] D.H. Peterson, V.G. Kac, Infinite flag varieties and conjugacy theorems, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 80 (1983) 1778–1782.
- [21] M. Ronan, Affine twin buildings, Preprint, Mars 1999.
- [22] G. Rousseau, Espaces affines symétriques et algèbres affines, *Revue de l’Institut Elie Cartan Nancy* 11 (1988) 141–174.
- [23] G. Rousseau, Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac–Moody affines, *Revue de l’Institut Elie Cartan Nancy* 11 (1988) 175–205.
- [24] G. Rousseau, Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac–Moody affines, in : *Harmonic Analysis, Luxembourg*, 1987, in : *Lecture Note in Math.*, Vol. 1359, Springer, 1988, pp. 252–264.
- [25] G. Rousseau, Almost split K -forms of Kac–Moody algebras, in : V.G. Kac (Ed.), *Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups*, Marseille, 1988, in : *Adv. Ser. in Math. Phys.*, Vol. 7, World Scientific, 1989, pp. 70–85.
- [26] G. Rousseau, L’immeuble jumelé d’une forme presque déployée d’une algèbre de Kac–Moody, *Bull. Soc. Math. Belg.* 42 (1990) 673–694.
- [27] G. Rousseau, On forms of Kac–Moody algebras, in : *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. 56 (2), 1994, pp. 393–399.
- [28] J.P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.
- [29] M. Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple algebras, *J. Math. Soc. Jpn.* 11 (1959) 374–434.
- [30] J. Tits, Classification of algebraic semi-simple groups, in : *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Boulder, 1965, in : *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. IX, 1966, pp. 33–62.
- [31] J. Tits, Twin buildings and groups of Kac–Moody type, in : Liebeck, Saxl (Eds.), *Groups Combinatorics and Geometry*, Durham, 1990, in : *London Math. Soc. Lecture Note*, Vol. 165, Cambridge University Press, 1992, pp. 249–286.