Exercices métriques immobiliers

par Guy Rousseau

Abstract: Euclidean buildings are examples of hyperbolic spaces: their distance d verify the CAT(0) inequality. This has interesting consequences for the fixed-point-set of an isometry. Moreover such a building I is a discrete union of facets; as a consequence one proves here that if σ is an automorphism of I , with non empty fixed-point-set I^σ , there exists a constant k such that $\frac{d(x,\sigma x)}{d(x,I^\sigma)} > k > 0$, for any x in I \ I^σ . Some other inequalities of the same kind are also proved.

AMS classification: 51E24

Les résultats qui vont suivre sont liés au caractère " à courbure négative" de la métrique d'un immeuble (essentiellement résumé par la condition CAT(0) des géomètres hyperboliques), mais aussi au caractère discret de celui-ci. Ainsi si on obtient une inégalité (entre distances ou angles) qui ne peut être améliorée (car l'égalité est possible), il doit cependant être possible de minorer la différence à l'aide de constantes liées à l'immeuble chaque fois que l'inégalité se trouve être stricte. Un résultat semblable a été établi par Anne Parreau [P] depuis la première rédaction de cet article, on l'a ici utilisé pour améliorer les résultats du paragraphe 4 .

Le paragraphe 1 est consacré à fixer le type précis d'immeubles (les immeubles euclidiens) que l'on va étudier ici et à prouver certaines de leurs propriétés métriques et angulaires (caractéristiques de leur "courbure négative"). Les immeubles en question sont munis d'appartements qui sont des espaces euclidiens; les exemples principaux sont les immeubles affines (en particulier ceux de Bruhat-Tits) et les immeubles vectoriels (qui sont des variantes des immeubles-sphériques).

Au paragraphe 2, on montre que si σ est un automorphisme d'un tel immeuble I et si l'ensemble I^σ de ses points fixes est non vide, alors pour tout x de I \ I^σ il existe un unique point x_0 de I^σ réalisant le minimum de distance de x à I^σ (cela découle d'un résultat général plus ou moins classique) et l'angle (mesuré en x_0) des segments géodésiques $[x_0,x]$ et $[x_0,\sigma x]$ est minoré par une constante qui ne dépend que de I dans le cas (générique) où I est essentiel. Ceci prouve en particulier que si un automorphisme σ d'un immeuble-sphérique essentiel I_s n'a pas de point fixe alors la distance $d(x,\sigma x)$ de x à σx est minorée par une constante (ne dépendant que de I_s).

Au paragraphe 3 on introduit deux hypothèses techniques supplémentaires pour les immeubles considérés: elles permettent en particulier de définir un immeuble-sphérique à l'infini formé des directions de demi-droites de l'immeuble I en question. On montre aussi que la réunion I_D des droites de I parallèles à une droite donnée D de I est un immeuble. Si I est l'immeuble de Bruhat-Tits $I(\mathcal{G})$ d'un groupe réductif $\mathcal{G}$ sur un corps local, les immeubles I_D ainsi construits sont les immeubles $I(\mathcal{S},\mathcal{G})$ associés aux centralisateurs de sous groupes à un paramètre $\mathcal{S}$ de $\mathcal{G}$.

Certaines des inégalités obtenues aux paragraphes 1 et 3 ainsi qu'au début du paragraphe 2 figurent déjà dans [Ru2] ou [Ru5]; vue la diffusion limitée de ces publications on les a fait figurer ici avec une démonstration.

Au paragraphe 4 on généralise dans le cadre fixé au paragraphe 3 un résultat de Michael Rapoport et Thomas Zink [RZ] pour les immeubles de Bruhat-Tits . On considère deux automorphismes σ et t de I commutant entre eux, stabilisant I_D et tels que t induise une translation de longueur ℓ sur D . Alors pour x dans I on conjecture qu'il existe une constante c>0 telle que :

$$d(x,(t\sigma)x) \geq \sqrt{\ell^2 + cd(x,I_D^\sigma)^2}$$

et on le prouve dans certains cas particuliers. Une version affaiblie de cette conjecture, suffisante pour prouver le résultat de Rapoport et Zink, est démontrée grâce au résultat d'Anne Parreau [P] .

C'est à la suite de questions de Michael Rapoport , lors d'un séjour à l'Université de Wuppertal, que ce travail a été entrepris; qu'ils en soient remerciés.

§1 Les immeubles dont il sera question :

1.1 Immeubles combinatoires : Voir [T1],[Rn],[Bn] et [Bi] .

Dans [T1] Jacques Tits définit un immeuble-combinatoire comme un triplet $I_c = (\mathscr{S}_c, \mathscr{F}_c, \mathscr{A})$ d'un ensemble $\mathscr{S}_c$ et de deux ensembles $\mathscr{F}_c$ et $\mathscr{A}$ de parties de $\mathscr{S}_c$ vérifiant certains axiomes. Les éléments de $\mathscr{S}_c$ (resp. $\mathscr{F}_c$, $\mathscr{A}$) sont les sommets (resp. facettes, appartements) de l'immeuble-combinatoire. Rappelons quelques propriétés:

1) Une partie d'une facette est une facette; tout sommet est contenu dans une facette. Les facettes maximales, appelées chambres, ont toutes le même nombre fini d'éléments: le rang r de l'immeuble-combinatoire. Il existe une unique application, appelée type , de $\mathscr{S}_c$ dans un ensemble à r éléments qui est bijective sur chaque chambre.

Ainsi comme $\mathscr{S}_c$ s'identifie à l'ensemble des facettes non vides minimales, l'immeuble-combinatoire est déterminé par le couple $(\mathscr{F}_c, \mathscr{A})$.

2) Les appartements sont des unions de chambres; deux chambres sont toujours contenues dans un même appartement.

3) Une galerie de l'immeuble-combinatoire est une suite $C_0, C_1, \ldots, C_n$ de chambres telle que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, on a $|C_{i-1} \cap C_i| \geq r-1$; sa longueur est n . Elle est dite minimale si cette longueur est minimale parmi les longueurs de galeries de même origine C_0 et de même extrémité C_n . Pour toutes chambres C et C' de I_c il existe toujours une galerie minimale d'origine C et extrémité C' .

Une partie Δ de I_c qui est réunion de chambres est dite convexe si pour toutes chambres C et C' contenues dans Δ , toute galerie minimale d'origine C et d'extrémité C' est formée de chambres contenues dans Δ . Une partie quelconque Δ de I_c est dite convexe si c'est une intersection de parties de I_c qui sont réunion de chambres et convexes.

4) Le groupe $W(A_c)$ des automorphismes spéciaux (c'est à dire les bijections conservant les facettes et le type) d'un appartement A_c est simplement transitif sur les chambres de A_c ; Le choix d'une telle chambre détermine un système de générateurs d'ordre 2 de $W(I_c)$ qui en fait un système de Coxeter. Ce système détermine entièrement A_c et ses facettes ([T1],2.10) ; il ne dépend pas de A_c à isomorphisme près, on l'appelle le groupe de Weyl $W(I_c)$ de I_c .

5) Si A_c et A_c' sont deux appartements, alors leur intersection est convexe et il existe un isomorphisme spécial de A_c sur A_c' qui fixe cette intersection.

6) L'immeuble-combinatoire est dit <u>de type sphérique</u> si tout appartement contient un nombre fini de sommets, c'est à dire si le groupe de Weyl est fini.

7) L'immeuble-combinatoire est dit <u>de type affine</u> si son groupe de Weyl est le groupe de Weyl affine d'un système de racines avec le système de générateurs associé à une base (Dans [Bn] on suppose de plus l'immeuble-combinatoire <u>irréductible</u> c'est à dire le système de racines irréductible).

8) On dira ici (contrairement à [Bn]) que l'immeuble-combinatoire est <u>de type euclidien</u> si son groupe de Weyl est un groupe de déplacements engendré par des réflexions (au sens de [Bi],V§3), le système canonique de générateurs de ce groupe étant formé des réflexions par rapport aux murs d'une chambre.

Un immeuble-combinatoire de type sphérique ou affine est de type euclidien. Nous ne parlerons ici que du type euclidien.

9) Le <u>produit</u> de deux immeubles-combinatoires I_c et I_c' a pour ensemble de sommets la réunion disjointe de $\mathscr{S}_c$ et $\mathscr{S}_c'$, pour ensemble de facettes $\mathscr{F}_c \times \mathscr{F}_c'$ (resp. pour ensemble d'appartements $\mathscr{Q} \times \mathscr{Q}'$) où (G,G') correspond à l'ensemble $G \cup G'$ de sommets du produit.

Le groupe de Weyl du produit est le produit des groupes de Weyl.

Un produit d'immeubles-combinatoires de type sphérique ou affine ou euclidien est du même type.

10) Une facette F est dite <u>de type fini</u> si dans un (ou tout) appartement A_c la contenant le fixateur $W(A_c)_F$ de F dans $W(A_c)$ est fini; l'ensemble de ces facettes est noté $\mathscr{F}$. Une chambre, une <u>cloison</u> (c'est à dire une facette à r-1 éléments) sont de type fini.

Pour un produit l'ensemble des facettes de type fini est $\mathscr{F} \times \mathscr{F}'$.

Si I_c est de type fini (resp. affine irréductible) on a $\mathscr{F} = \mathscr{F}_c$ (resp . $\mathscr{F}_c \setminus \{\emptyset\}$) .

1.2 Réalisation géométrique :

Pour un appartement A_c d'un immeuble-combinatoire de type euclidien, il existe par hypothèse :

a) un espace affine euclidien A et un système $\mathscr{M}$ d'hyperplans affines appelés <u>murs</u> satisfaisant aux conditions de [Bi],V§3 ; en particulier $\mathscr{M}$ est localement fini et stable par le groupe $W(\mathcal{M})$ de déplacements de A engendré par les réflexions (orthogonales) par rapport aux murs,

b) un isomorphisme de $W(A_c)$ sur $W(\mathcal{M})$ qui envoie les générateurs de $W(A_c)$ sur les réflexions par rapport aux murs d'une chambre de $(A,\mathcal{M})$.

Cet isomorphisme est donc entièrement déterminé par le choix d'une chambre de A_c et d'une chambre de $(A,\mathcal{M})$ (ainsi qu'une bijection appropriée entre les cloisons de ces chambres).

Les facettes de $(A,\mathcal{M})$ sont alors en correspondance bijective W-équivariante avec les facettes de type fini de A_c . L'inclusion des facettes de A_c correspond à l'inclusion des adhérences des facettes correspondantes de $(A,\mathcal{M})$; ces adhérences sont parfois appelées <u>facettes-fermées</u> . Les chambres de A_c correspondent donc aux chambres de $(A,\mathcal{M})$ et les cloisons de A_c aux <u>cloisons</u> de $(A,\mathcal{M})$ c'est à dire aux facettes qui sont des ouverts d'un mur.

Les parties convexes de A_c qui sont union de facettes de type fini, correspondent aux parties convexes fermées de A qui sont union de facettes.

On construit alors comme dans [Ru1] (voir aussi [Bn],VI§3 ou [T2]) un espace métrique I muni d'une partition en facettes indexées par $\mathcal{F}$ et réunion d'appartements indexés par $\mathcal{Q}$ qui sont tous isométriques à l'espace A ci-dessus. Ce triplet $(I,\mathcal{F},\mathcal{Q})$ est un immeuble au sens de 1.3 ci-dessous. On ne détaillera pas plus cette construction non essentielle dans cet article, qui n'est donc indiquée que pour fournir beaucoup d'exemples des objets que l'on va étudier.

On remarque que A n'est pas entièrement déterminé par $W(A_c)$ et donc A_c puisque l'on peut multiplier A par n'importe quel espace affine euclidien (qui sera alors un facteur trivial). Le système $\mathcal{M}$ est dit <u>essentiel</u> si l'intersection des directions de murs est réduite à $\{0\}$. Si on impose cette condition, l'appartement A_c détermine uniquement A et donc l'immeuble-combinatoire I_c détermine uniquement l'immeuble I (à des équivalences de métriques près).

On montre dans [Bi],V§3 que A peut s'écrire comme produit d'un facteur trivial, d'un facteur essentiel de type sphérique et de facteurs essentiels de type affine irréductible.

1.3 Immeubles géométriques euclidiens :

(On ne parlera plus désormais que de ceux-ci.)

Un <u>Immeuble</u> (géométrique euclidien) est un triplet $(I,\mathcal{F},\mathcal{A})$ (souvent abrégé en I) formé d'un espace métrique I (on note d sa distance), d'une partition par un ensemble $\mathcal{F}$ de facettes et d'un recouvrement par un ensemble $\mathcal{A}$ d'appartements satisfaisant aux trois propriétés suivantes :

α) Chaque appartement A est, pour la métrique induite, un espace affine euclidien. On appelle <u>mur</u> de A un sous-espace affine engendré par une facette incluse dans A qui est un hyperplan. Ce système $\mathcal{M}$ d'hyperplans satisfait aux hypothèses de [Bi],V§3 résumées ci-dessus. Les facettes de $\mathcal{F}$ contenues dans A sont les facettes de $(A,\mathcal{M})$.

β) Deux facettes sont toujours contenues dans un même appartement.

γ) Si A et A' sont deux appartements, alors leur intersection est <u>close</u> (c'est à dire convexe, fermée et réunion de facettes) dans A et A' . De plus il existe une isométrie de A sur A' qui fixe leur intersection et échange les facettes.

On déduit en fait de ces trois propriétés les propriétés supplémentaires suivantes (voir par exemple [Bn], VI§3) :

δ) Pour toute paire (A,C) d'un appartement contenant une chambre, il existe une <u>rétraction</u> $\rho_{A,C}$ de I sur A qui diminue les distances et est une isométrie sur tout appartement contenant C .

ε) Si x et y sont deux points de I , le segment [x,y] est indépendant de l'appartement les contenant. On a : $[x,y] = \{ z \in I \ / \ d(x,y) = d(x,z) + d(z,y) \}$.

Si de plus m est le milieu de [x,y] , on a pour tout z dans I :

$$d(x,z)^2 + d(z,y)^2 \geq 2d(m,z)^2 + \frac{1}{2}d(x,y)^2$$

Plus généralement I vérifie la condition CAT(0) qui est l'une des conditions de courbure négative ou nulle considérées par les géomètres hyperboliques:

Si x , y et z sont dans I , il existe 3 points x' , y' et z' du plan euclidien (E,d') tels que $d'(x',y') = d(x,y)$, $d'(x',z') = d(x,z)$ et $d'(y',z') = d(y,z)$. Il existe alors 3 isométries notées $u \to u'$ de [x,y] sur [x',y'] , de [x,z] sur [x',z'] et de [y,z] sur [y',z'] . La condition CAT(0) exprime que, dans ces conditions, on a :

$$d'(u',v') \geq d(u,v) \text{ pour tous } u , v \text{ dans } [x,y]\cup[x,z]\cup[y,z]$$

ζ) L'espace métrique I est complet.

Il est facile de voir que I détermine un immeuble-combinatoire I_c . Le produit de deux immeubles $(I,\mathcal{F},\mathcal{Q})$ et $(I',\mathcal{F}',\mathcal{Q}')$ est l'immeuble $(I\times I',\mathcal{F}\times\mathcal{F}',\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}')$ dont l'immeuble-combinatoire associé est le produit des immeubles-combinatoires.

On ne répétera pas ici un certain nombre de définitions vues ci-dessus dans un cadre seulement légèrement différent comme celles de : groupe de Weyl W = W(I) = W(A) = W(A,$\mathcal{M}$) , type sphérique, type affine, essentiel , chambre, cloison, facette-fermée ...

La géométrie de I est la donnée, à isométrie près, du couple (A,$\mathcal{M}$) formé de l'un de ses appartements et de son système de murs; ceci est bien défini grâce à β) et γ) .

Une demi-droite Δ (resp. une droite) D de I est une partie d'un appartement qui dans cet espace affine (donc dans tout autre appartement qui la contient) se trouve être une demi-droite (resp. une droite).

Une partie de I est convexe si chaque fois qu'elle contient deux points elle contient le segment qui les joint. L'enclos d'une partie d'appartement est la plus petite partie close de cet appartement la contenant; d'après γ) elle ne dépend pas du choix de cet appartement.

Un automorphisme de I est une isométrie de I qui permute les facettes et les appartements, on note Aut(I) le groupe de ces automorphismes.

L'espace vectoriel euclidien F_A intersection des directions des murs d'un appartement A est aussi la direction des facettes de dimension minimale de cet appartement. D'après β) et γ) il est en fait indépendant de A et donc noté F_0 . Cet espace vectoriel agissant par translation est un groupe d'automorphismes de I qui stabilise toutes les facettes et tous les appartements. Le quotient I_e de I par F_0 est un immeuble essentiel (l'essentialisé de I) de même immeuble-combinatoire que I . On peut écrire I comme le produit $F_0\times I_e$ (décomposition orthogonale pour la métrique), mais pas de manière canonique : on choisit un point O de I et on identifie I_e à l'ensemble des y dans I tels que [O,y] soit orthogonal à F_0 (dans un/tout appartement contenant x et y) .

1.4 Immeubles de type sphérique :

C'est le cas où W est fini. Cela équivaut à dire que le système de murs d'un appartement A est fini et alors tous ces murs contiennent un même point O.

Les facettes de A sont alors des cônes de sommet O . Ainsi O est commun à tous les appartements de I : les appartements sont des espaces vectoriels euclidiens tous de même origine O ; on dit aussi que ces immeubles sont vectoriels (pour être précis dans le cas inessentiel, l'immeuble vectoriel est le couple (I,O)).

La facette F_0 contenant O est l'espace vectoriel de 1.3 contenu dans toutes les autres facettes-fermées. La décomposition $I = F_0 \times I_e$ associée au choix du point O est canonique : elle est invariante par tout automorphisme vectoriel (c'est à dire fixant O) de I.

Considérons l'immeuble-sphérique $I_s = \{ x \in I \,/\, d(O,x = 1 \}$, cet espace est réunion d'appartements (indexés par $\mathcal{A}$) qui sont des sphères et de facettes (indexées par $\mathcal{F} \setminus \{F_0\}$) . Si I est essentiel les facettes de I_s sont des complexes simpliciaux : I_s est un immeuble-sphérique au sens classique. On retrouve facilement I à partir de I_s :

$I = \{O\} \amalg I_s \times]0,\infty[$ avec une structure facile à construire ([Ru1]).

Les immeubles-sphériques fournissent donc le premier exemple important d'immeuble (géométrique euclidien).

Sur un immeuble-sphérique cohabitent deux métriques équivalentes : la métrique euclidienne d (bornée par 2) induite par celle de I et la métrique géodésique ∂ (bornée par π) qui est en fait un angle (en radians).

1.5 Immeubles de Bruhat-Tits :

Les immeubles discrets construits par François Bruhat et Jacques Tits dans [BT1] sont des immeubles (géométriques euclidiens) de type affine et essentiels. Ce sont des complexes polysimpliciaux c'est à dire que les facettes sont des produits de simplexes (comme par exemple des carrés).

Ces immeubles sont en général associés à un groupe semi-simple $\mathcal{G}$ sur un corps local; les appartements correspondent aux sous-tores déployés maximaux de $\mathcal{G}$.

Si on considère un groupe réductif $\mathcal{G}$ sur un corps local il est avantageux [Ru2] de considérer l'immeuble inessentiel produit de l'immeuble du groupe semi-simple dérivé $\mathcal{G}$ ' et d'un espace vectoriel associé au centre de $\mathcal{G}$.

On obtient ainsi le second exemple important d'immeuble (géométrique euclidien).

1.6 Germes de segment : [Ru2] ou [Ru5]

Si x et y sont deux points différents de l'immeuble I , on appelle <u>germe en</u> x <u>du segment</u> [x,y] et on note [x,y) le filtre des parties de I qui contiennent un segment [x,z] pour z dans]x,y] = [x,y]\{x} . On dira en fait que les parties de I vérifiant cette condition <u>contiennent</u> [x,y) .

Tout germe de segment est contenu dans une facette-fermée et donc deux germes de segment sont contenus dans un même appartement. On peut ainsi définir <u>l'angle</u> de deux germes de segment : ([x,y),[x',y'))$\in$ $[0,\pi]$; il ne dépend pas de l'appartement contenant les deux germes.

Cette notion de germe de segment permet en fait de faire marcher les raisonnements de cet article pour les immeubles non discrets de Bruhat-Tits (qui vérifient les propriétés β, γ,δ, ε de 1.3 ainsi que α pour un système d'hyperplans plus général) pourvu qu'ils soient complets (ζ) ce qui est le cas si le corps K est maximalement complet pour une valuation réelle non discrète, cf [Ru2] .

1.7 Étoile d'un point :

Pour un point x de l'immeuble I , on considère la relation d'équivalence sur I :

$$y \sim y' \Leftrightarrow \ (x = y = y') \text{ ou } (d(x,y) = d(x,y') \neq 0 \text{ et } [x,y) = [x,y'))$$

On note $\pi_x(y) = \overline{y}$ la classe de y .

L'ensemble quotient est <u>l'étoile de</u> I <u>en</u> x : $\overline{I}(x) = Et_x(I) = I/\sim$. C'est un immeuble vectoriel d'origine O = $\overline{x}$. L'ensemble $\overline{\mathscr{F}}_x$ de ses facettes est en bijection avec l'ensemble $\mathscr{F}_x$ des facettes de I contenant x dans leur adhérence. Si F $\in$ $\mathscr{F}_x$, la facette correspondante est $\overline{F}_x = \{ y \in I / y = x \in F \text{ ou } [x,y)\backslash\{x\} \subset F \}/\sim$. L'ensemble $\overline{\mathscr{A}}_x$ de ses appartements est un quotient de l'ensemble $\mathscr{A}_x$ des appartements de I contenant x . Si A $\in$ $\mathscr{A}_x$, l'appartement correspondant de l'étoile est $\overline{A}_x = \{ y \in I / y = x \text{ ou } [x,y) \subset A \}/\sim$; par le choix de son origine O = $\overline{x}$, l'appartement $\overline{A}_x$ s'identifie à l'espace vectoriel euclidien des vecteurs de l'espace affine A_x .

La distance sur $Et_x(I)$ est donnée par $d(O,\overline{y}) = d(x,y)$ et pour $y,y' \neq x$

$d(\overline{y},\overline{y}')^2 = d(x,y)^2 + d(x,y')^2 - 2d(x,y)d(x,y')\cos([x,y),[x,y'))$.

L'immeuble-sphérique $Et_x^s(I) = \overline{I}^s(x)$ s'identifie évidemment à l'ensemble des germes de segment d'origine x ; la métrique géodésique est l'angle de ceux-ci.

Classiquement l'étoile de I en x désigne dans [T1] le couple $Et_x^c(I) = (\overline{\mathcal{F}}_x, \overline{\mathcal{Q}}_x)$ qui est un immeuble-combinatoire de type sphérique; on en déduit facilement les assertions précédentes. Dans [Bn] l'étoile de I en x est le sous espace métrique $Et_x^{top}(I)$ de I réunion des facettes fermées de $\mathcal{F}_x$; c'est un voisinage de x qui s'envoie par l'application quotient π_x isométriquement sur un voisinage de l'origine dans $Et_x(I)$.

Il faut voir $Et_x(I)$ comme l'espace tangent à I en x .

Proposition 1.8 [Ru5] *La projection* π_x *diminue les distances; c'est une isométrie sur tout appartement de* $\mathcal{Q}_x$.

Démonstration: Il est clair que π_x est une isométrie sur tout appartement contenant x . On en déduit que pour $y,z \in I$, $d(\overline{y},\overline{z}) \leq d(y,z)$ en recouvrant [x,y] par des facettes (contenues donc dans un même appartement que x).

Corollaire 1.9 *Si* $([x,y),[x,z)) = \pi$, *alors* $x \in [y,z]$, *autrement dit* $[y,z] = [y,x] \cup [x,z]$

Démonstration: En effet alors $d(y,z) \geq d(\overline{y},\overline{z}) = d(x,y) + d(x,z) \geq d(y,z)$.

Proposition 1.10 : [Ru2] ou [Ru5]

Soient x,y,z,t *quatre points deux à deux distincts de l'immeuble* I , *alors* :

$$([x,y),[x,z)) + ([x,z),[x,t)) \geq ([x,y),[x,t)) = \theta$$

S'il y a égalité alors il existe un appartement contenant ces trois germes de segment

Si de plus $\theta < \pi$, *tout appartement contenant* [x,y) *et* [x,t) *contient* [x,z) .

Démonstration: Notons $\theta_1 = ([x,y),[x,z))$ et $\theta_2 = ([x,z),[x,t))$. On peut supposer $d(x,y) = d(x,z) = d(x,t) \neq 0$, $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi$ et x,y,z (resp. x,z,t ; x,y,t) dans un même appartement A_1 (resp. A_2 ; A) .

1) Supposons $\theta_1 + \theta_2 < \pi$. Alors l'étude du cas euclidien montre qu'il existe $z' \in$]x,z] tel que :

$d(x,z')(\sin\theta_1+\sin\theta_2) = d(x,y)\sin(\theta_1+\theta_2)$ et $d(y,z')+d(z',t)=2d(x,y)\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$.

On a alors $2d(x,y)\sin(\frac{\theta}{2}) = d(y,t) \leq 2d(x,y)\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$; donc $\theta \leq \theta_1 + \theta_2$.

Et s'il y a égalité on a $d(y,t) = d(y,z') + d(z',t)$ ainsi $z' \in [y,t] \subset A$; les germes de segment [x,y) , [x,t) et [x,z) sont dans le même appartement A .

2) Si $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ on a $\theta \leq \theta_1 + \theta_2$. Supposons de plus $\theta = \pi$. Dans l'appartement A_2 on considère un segment [t,t'] parallèle à [x,z] et de même sens et suffisamment court pour que y et [t,t'] soient dans un même appartement. Cet appartement contiendra automatiquement x (corollaire 1.9) et on peut donc supposer que c'est A .

Notons z' le point de [x,z] à distance d(t,t')/2 de x .

Alors $d(y,z')^2 = d(x,y)^2 + \frac{1}{4}d(t,t')^2 - d(x,y)d(t,t')\cos\theta_1$ (dans A_1)

$d(y,t')^2 = 4d(x,y)^2 + d(t,t')^2 - 4d(x,y)d(t,t')\cos\theta_1$ (dans A)

$d(z',t')^2 = d(x,y)^2 + \frac{1}{4}d(t,t')^2 - d(x,y)d(t,t')\cos\theta_1$ (dans A_2)

Donc $d(y,z') = d(z',t') = \frac{1}{2}d(y,t')$ et $z' \in [y,t'] \subset A$.

Les germes de segment [x,y) , [x,t) et [x,z) sont dans le même appartement A .

1.11 Défaut d'un triangle [Ru2] ou [Ru5] : Soient x,y,z trois points distincts de I . On note $\hat{x}$ l'angle ([x,y),[x,z)) , de même $\hat{y}$ = ([y,z),[y,x)) et $\hat{z}$ = ([z,x),[z,y)) . On note X la longueur d(y,z) et de même Y = d(x,z) et Z = d(x,y) .

L'angle $\mathrm{def}(x,y,z) = \pi - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$ est le <u>défaut</u> du triangle (x,y,z) .

Proposition : a) *Le défaut* $\alpha = \mathrm{def}(x,y,z)$ *est positif ou nul.*

b) $Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos\hat{x} \leq X^2 \leq Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos(\hat{x} + \alpha)$

Remarques :

1) Ceci est une propriété supplémentaire de "courbure négative" des immeubles.

2) Si le triangle (x,y,z) est contenu dans un appartement alors son défaut est nul. La réciproque est sans doute toujours vraie: voir [Ru2] ou [Ru5] pour le cas des immeubles de Bruhat-Tits d'une donnée radicielle valuée; comparer aussi b) et [BT1] , 2.8.1.

<u>Démonstration</u> : La première inégalité de b) résulte de 1.8 . D'après cette inégalité $\hat{x}$ est inférieur à la valeur $\hat{x}'$ calculée dans un espace euclidien à partir de X,Y et Z (par la formule

$X^2 = Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos(\hat{x}')$). De même $\hat{y} \le \hat{y}'$, $\hat{z} \le \hat{z}'$ et $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} \le \hat{x}' + \hat{y}' + \hat{z}' = \pi$, d'où a). De plus $\hat{x}' \le \hat{x} + \alpha$, d'où la seconde inégalité de b).

1.12 Divergence des demi-droites :

Soient Δ,Δ' deux demi-droites d'origines u,u' et v,v' des points de Δ,Δ' . On suppose les 4 points u,u',v,v' différents et on considère les angles $\hat{u} = ([u,u'),[u,v))$, $\hat{u}' = ([u',u),[u',v'))$, $\hat{v} = ([v,v'),[v,t))$ et $\hat{v}' = ([v',v),[v',t'))$, pour $t \in \Delta \setminus [u,v]$ et $t' \in \Delta' \setminus [u',v']$.

Proposition : $\hat{v} + \hat{v}' \ge \hat{u} + \hat{u}'$

Démonstration : En subdivisant les segments [u,v] et [u',v'] on se ramène au cas où ces 4 points (mais pas t,t') sont dans un même appartement. Alors $\hat{u} + \hat{u}' = 2\pi - ([v,u),([v,v')) - ([v',u'),[v',v)) \le \hat{v} + \hat{v}'$, d'après 1.10 .

§2 Projection sur un convexe fermé

Proposition 2.1 *Soit* C *un convexe fermé non vide de l'immeuble* I.

a) *Pour tout* x *de* I , *il existe un unique point* $x_0 = \pi_C(x)$ *de* C *qui réalise le minimum de distance de* x *à* C .

b) *La projection* π_C *de* I *sur* C *est continue et même contractante*.

c) *Pour tout x de* I *et tout* y *de* C , $y \ne x_0$, *on a* $([x_0,x),[x_0,y)) \ge \frac{\pi}{2}$.

d) *Soient* $x \in I$ *et* $z \in C$ *tels que* $([z,x),[z,y)) \ge \frac{\pi}{2}$ *pour tout* $y \in C \setminus \{z\}$ *alors* $z = x_0$

Remarques: La propriété a) et la première partie de b) sont bien connues dans un espace CAT(0) complet.

D'après cette propriété a) , dans un immeuble vectoriel I une partie convexe fermée ne contenant pas O a un unique point qui réalise le minimum de distance de O à C . Ce point est invariant par toute isométrie vectorielle de I stabilisant C . C'est la situation que l'on rencontre en théorie des invariants ([Ru1] , [Ru3]) : il suffit d'appliquer le résultat ci-dessus en prenant pour C l'ensemble H de [Ru3] 2.22 . On obtient ainsi une démonstration du critère d'instabilité de David Mumford sur les corps non algébriquement clos, voir [M] appendice au chapitre 2. Cette démonstration est plus proche de celle de Georg Kempf [K] que celle de [Ru3] qui utilise le lemme de point fixe de Bruhat et Tits.

Démonstration:

a) Soit $d = d(x,C)$ le minimum de distance de x à C . D'après l'inégalité de 1.3ε , si y et $z \in C$ vérifient $d(x,y) \le d+\varepsilon$ et $d(x,z) \le d+\varepsilon$, comme le milieu m de $[x,y]$ est dans C donc vérifie $d(x,m) \ge d$, on a $d(y,z)^2 \le 4((d+\varepsilon)^2 - d^2) = 4(\varepsilon^2 + 2\varepsilon d)$. Ceci prouve l'unicité de x_0 (pour $\varepsilon = 0$) et son existence (grâce à une limite de suite de Cauchy).

b) Soient $x,y \in I$ et x_0 ,y_0 leurs projetés sur C . En appliquant l'inégalité 1.3ε à x_0 , y_0 , x et le milieu m de $[x_0,y_0]$ (qui est donc dans C), on a :

$$d(x,x_0)^2 + d(x,y_0)^2 \ge 2d(x,m)^2 + \frac{1}{2}d(x_0,y_0)^2 \ge 2d(x,x_0)^2 + \frac{1}{2}d(x_0,y_0)^2$$

mais $d(x,y_0) \le d(x,y) + d(y,y_0) \le d(x,y) + d(y,x_0) \le d(x,x_0) + 2d(x,y)$

donc $d(x_0,y_0)^2 \le 8d(x,x_0)d(x,y) + 8d(x,y)^2$

d'où la continuité de π_C .

Pour montrer que $d(x_0,y_0) \le d(x,y)$, par additivité des distances sur le segment $[x,y]$, compacité de ce segment et continuité de la projection, on se ramène au cas où x et y sont assez proches et x_0,y_0 assez proches. Plus précisément l'expression "assez proche" signifie que ces points sont dans une même facette-fermée; c'est bien une notion topologique car la réunion des facettes fermées contenant un point est un voisinage de ce point.

Ainsi on peut supposer que x , y , x_0 et y_0 sont dans un appartement A; de plus x_0 (resp. y_0) est la projection de x (resp. y) sur le segment $[x_0,y_0]$ qui est dans $A\cap C$. On est donc ramené à un problème dans un espace euclidien qui est clair.

c) Quitte à rapprocher y de x_0 sur $[x_0,y]$ on peut supposer que x,x_0 et y sont dans un même appartement A . Comme x_0 est le point de $[x_0,y] \subset A\cap C$ le plus proche de x , il est clair que l'angle indiqué est obtus.

La réciproque d) est claire d'après 1.11b .

2.2 Considérons un immeuble-sphérique I_s muni de sa distance géodésique ∂ . Plus précisément I_s est l'immeuble-sphérique associé à un immeuble vectoriel I ; en particulier un immeuble-sphérique au sens classique convient.

Soit σ un élément du groupe $Aut(I_S)$ des automorphismes de I_S , c'est à dire une isométrie de I_S qui respecte les ensembles de facettes et appartements; σ se prolonge en un automorphisme vectoriel de I .

Proposition : *Si l'ensemble* I_s^σ *des points fixes de* σ *est vide , alors il existe une constante* $\theta > 0$ *telle que :* $\partial(x,\sigma x) \geq \theta$ *pour tout* x *de* I_S .

Remarques: 1) Si σ est d'ordre 2, alors $\theta = \pi$. En effet si $\partial(x,\sigma x) < \pi$, le milieu m de $[x,\sigma x]$ dans l'immeuble I est fixe par σ et différent de O; le point [O,m) est alors dans I_s^σ

2) Si l'immeuble I est <u>fini</u> (i.e. $\mathscr{Q}$ ou $\mathscr{F}$ fini) un argument topologique simple donne le résultat: σ est continu et $\theta = \inf(\partial(x,\sigma x))$ est atteint sur le compact I_S, donc $\theta>0$

3) Supposons σ d'ordre n et posons $\theta = \frac{\pi}{n}$. Si $\partial(x,\sigma x) < \theta$, alors tous les points de $\mathscr{O} = \{\sigma^i x \,/\, i \in \mathbb{Z}\}$ sont deux à deux à distance géodésique strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$; la conjecture de Tits est alors vérifiée pour l'enveloppe convexe de $\mathscr{O}$ dans I_S et σ a donc un point fixe dans celle-ci ([Ru1] , 3.5).

On a donc démontré la proposition dans ce cas avec ce θ .

4) Si l'immeuble est essentiel on va trouver un nombre θ <u>indépendant</u> de σ et même ne dépendant que de la géométrie de I_S . En fait sans supposer I_s^σ vide on va trouver $\theta > 0$ tel que pour tout point x vérifiant $\partial(x,\sigma x) < \theta$ l'adhérence de la facette de I_S contenant x rencontre I_s^σ .

<u>Démonstration</u>

Écrivons $I = F_0 \times I_e$ comme en 1.4 , cette décomposition est stable par $Aut(I_S)$ et orthogonale. Il suffit donc de démontrer la proposition séparément dans chaque facteur. Le cas de F_0 est clair d'après la remarque 2, on peut donc maintenant supposer I essentiel.

Appelons facette-barycentrique de I_S un simplexe obtenu par décomposition barycentrique d'une facette de I_S . Cette décomposition en facettes-barycentriques est stable par $Aut(I_S)$ et si une telle facette-barycentrique est stable par $\sigma \in Aut(I_S)$ alors elle est fixe point par point par ce σ .

Si N est la dimension des sphères que sont les appartements de I_S , on va construire une suite $(I_0,E_0,\theta_0), \ldots , (I_N,E_N,\theta_N)$ où les I_i,E_i sont des sous-ensembles de I_S et les θ_i des nombres réels strictement positifs.

I_0 est la réunion des facettes-barycentriques de dimension 0 , il est stable par $Aut(I_s)$ et en fait fermé.

On définit $3\theta_0$ comme l'inf de $\partial(x,y)$ pour $(x,y \in I_0$ et $x\neq y)$ ou $(x \in I_0$ et y n'est pas dans une facette-barycentrique d'adhérence contenant x) . Ce nombre est strictement positif et ne dépend que de la géométrie de I_s , car cela se voit dans un appartement.

$E_0 = \{ x \in I / \exists\, y \in I_0 \quad \partial(x,y) < \theta_0 \}$ est la réunion des boules ouvertes de centre dans I_0 et de rayon θ_0 ; il est donc ouvert et stable par $Aut(I_s)$.

Si $x \in E_0$ et si $\partial(x,\sigma x) < \theta_0$, alors l'unique sommet $y \in I_0$ à distance moins de θ_0 de x est à distance moins de $3\theta_0$ du sommet $\sigma y \in I_0$, donc $y = \sigma y$. De plus y est dans l'adhérence de la facette-barycentrique contenant x .

Supposons construits $I_0,E_0,\theta_0, \dots ,I_i,E_i,\theta_i$ avec $i < N$.

I_{i+1} est la réunion des facettes-barycentriques de dimension i+1 privée de $E_0, \dots ,E_i$; il est stable par $Aut(I_s)$ et en fait fermé.

On définit $3\theta_{i+1}$ comme l'inf de $\partial(x,y)$ pour $(x,y \in I_{i+1}$ et x,y dans des facettes barycentriques distinctes) ou $(x \in I_{i+1}$ et y n'est pas dans une facette-barycentrique d'adhérence contenant x) . Ce nombre est strictement positif et ne dépend que de la géométrie de I_s car cela se voit dans un appartement.

$E_{i+1} = \{ x \in I / \exists\, y \in I_{i+1} \quad \partial(x,y) < \theta_{i+1} \}\backslash(E_0\cup \dots \cup E_i)$ est stable par $Aut(I_s)$; $E_0\cup \dots \cup E_{i+1}$ est ouvert et contient toutes les facettes-barycentriques de dimension au moins i+1.

Si $x \in E_{i+1}$ et si $\partial(x,\sigma x) < \theta_{i+1}$, alors il existe une unique facette-barycentrique F de dimension i+1 rencontrant I_{i+1} et à distance moins de θ_{i+1} de x ; la distance de F à σF est alors moins de $3\theta_{i+1}$. Donc $F = \sigma F$ et la facette-barycentrique F est fixe point par point par σ. De plus cette facette est contenue dans l'adhérence de la facette-barycentrique contenant x .

Comme I_s est réunion disjointe de $E_0,E_1, \dots , E_N$, si on pose $\theta = \inf\{\theta_0,\theta_1,\dots ,\theta_N\}$, on voit que pour x dans I_s si $\partial(x,\sigma x) < \theta$, alors l'adhérence de la facette-barycentrique contenant x rencontre I_s .

Proposition 2.3 : *Soient* I *un immeuble et* σ *un automorphisme de* I *tels que* $I^\sigma \neq \emptyset$.

a) I^σ *est un convexe fermé de* I .

b) *Il existe* $\theta > 0$ *tel que pour tout* $x \in I \setminus I^\sigma$ *, si on note* x_0 *le point de* I^σ *le plus proche de* x *, alors* : $([x_0,x),[x_0,\sigma x)) \geq \theta$.

c) *Pour* x *dans* I : $d(x,\sigma x) \geq 2d(x,I^\sigma)\sin(\frac{\theta}{2})$.

Remarques : 1) Si I est un immeuble vectoriel et si $I^\sigma = \{O\}$, cette proposition est équivalente à la précédente.

2) Ceci s'applique en particulier si I est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif $\mathcal{G}$ sur un corps local K et si K est une extension galoisienne non ramifiée d'un corps local k sur lequel $\mathcal{G}$ est défini. Le groupe de Galois de K/k est alors cyclique engendré par un élément de Frobenius σ et donc I^σ est l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathcal{G}$ sur k canoniquement plongé dans I : [BT2] ou [Ru2] .

3) Si σ est d'ordre 2 , il est clair que x_0 est le milieu du segment $[x,\sigma x]$ et on peut donc prendre $\theta = \pi$: $d(x,\sigma x) = 2d(x,I^\sigma)$.

4) Si I est essentiel on va démontrer la proposition avec un θ ne dépendant que de la géométrie de I (en particulier pas de σ ni de I^σ); cela équivaut au résultat d'Anne Parreau [P] dans le cas où σ a un point fixe.

Démonstration : Comme σ est une isométrie, l'assertion a) est claire (cf 1.3ε). De même c) résulte aussitôt de b) et de 1.11b .

Pour montrer b) on décompose I en produit par le choix d'une origine $O \in I^\sigma$. Alors l'action de σ sur I est le produit d'une action sur F_0 et d'une action sur I_e . Il suffit donc de démontrer la proposition séparément dans chaque facteur. Le cas de F_0 est clair d'après la remarque 2.2.2 appliquée à l'orthogonal de $(F_0)^\sigma$ dans F_0 . On peut donc maintenant supposer I essentiel.

On considère un point x_0 de I^σ , la projection π de I sur I^σ et l'étoile-sphérique $Et^s_{x_0}(I)$ de I en x_0 avec sa distance géodésique ∂ .

Soit $y \in I$, $y \neq x_0$ tel que $[x_0,y) = [x_0,\sigma y)$, les segments $[x_0,y]$ et $[x_0,\sigma y]$ ont une partie commune $[x_0,z]$ avec $z \neq x_0$. Ainsi $Et^s_{x_0}(I)^\sigma$ est l'ensemble des $[x_0,z)$ avec $z \in I^\sigma \setminus \{x_0\}$.

On introduit dans I la subdivision barycentrique des facettes, ainsi I^σ est réunion de telles facettes-barycentriques. Dans $Et^s_{x_0}(I)$ on appelle facettes de second type l'image par la projection π_{x_0} d'une facette-barycentrique de I dont l'adhérence contient x_0 . Ainsi $Et^s_{x_0}(I)^\sigma$ est réunion de facettes de second type. En particulier la facette de second type F' de $Et_{x_0}(I)$ contenant $O = \overline{x}_0$ est entièrement fixe par σ .

Notons $Et^s_{x_0}(I)^\sigma_\perp = \{ \xi \in Et^s_{x_0}(I) \ / \ \partial(\xi,\eta) \geq \frac{\pi}{2} \quad \forall \eta \in Et^s_{x_0}(I)^\sigma \}$; il est clair que σ stabilise cet ensemble sans y avoir de point fixe. D'après 2.1 , on a $Et^s_{x_0}(I)^\sigma_\perp =$ $\{ [x_0,x) \ / \ x \in \pi^{-1}(x_0) \ \ x \neq x_0 \}$ et il s'agit donc de montrer un résultat analogue à la proposition 2.2 pour $Et^s_{x_0}(I)^\sigma_\perp$.

Quitte à remplacer $Et^s_{x_0}(I)$ par $(F')_\perp = \{ x \in Et^s_{x_0}(I) \ / \ [\overline{x}_0,x] \perp F' \}$ qui contient $Et^s_{x_0}(I)^\sigma_\perp$, on peut supposer que $F' = \{\overline{x}_0\}$. Alors les facettes de second type minimales de $Et^s_{x_0}(I)$ sont réduites à des points que l'on appellera sommets.

Dans un appartement de $Et^s_{x_0}(I)$ on considère tous les hyperplans orthogonaux à ces sommets, et on appelle facettes du troisième type les facettes que ces hyperplans découpent dans les facettes du second type. Il y en a un nombre fini dans l'appartement.

Ces facettes du troisième type sont permutées entre elles par l'action sur $Et^s_{x_0}(I)$ des automorphismes de I fixant I^σ . On peut donc répéter la démonstration de la proposition 2.2 pour $Et^s_{x_0}(I)$ et les facettes du troisième type pour trouver la constante $\theta > 0$.

Si $y \in Et^s_{x_0}(I)$ vérifie $\partial(y,\sigma y) < \theta$, alors l'adhérence de la facette du troisième type contenant y rencontre $Et^s_{x_0}(I)^\sigma$. Mais il est clair que $Et^s_{x_0}(I)^\sigma_\perp$ est réunion de facettes du troisième type fermées et on a vu que σ n'y a pas de point fixe; donc $\partial(y,\sigma y) \geq \theta$ pour tout y dans $Et^s_{x_0}(I)^\sigma_\perp$.

Il reste à voir que, quitte à la diminuer, la constante θ ne dépend que de la géométrie de I . Par construction elle ne dépend que de la facette-barycentrique F contenant x_0 (dont l'image dans $Et^s_{x_0}(I)$ est F') et il n'y a qu'un nombre fini de telles facettes modulo le groupe de Weyl; d'où le résultat.

§3 Hypothèses supplémentaires sur l'immeuble.

On considère toujours un immeuble (géométrique euclidien) I .

3.1 Cheminées : [Ru2] , [Ru5].

Une <u>cheminée</u> de I est l'enclos $C_{\Delta,S}$ de la réunion d'un segment S et d'une demi-droite Δ de même origine et situés dans un même appartement. Par convexité et fermeture, elle contient la demi-droite de cet appartement parallèle à Δ et d'origine l'extrémité de S .

Si Δ est une demi-droite d'origine x et x' un point de Δ , le <u>raccourci</u> $\Delta(x')$ de la demi-droite Δ est la demi-droite $\Delta \setminus [x,x'[$.

Si Δ est une demi-droite d'origine x et [x,y] un segment d'un même appartement A , un <u>raccourci</u> de la cheminée $C_{\Delta,[x,y]}$ est défini par un point x' de Δ et un point y' de]x,y] (y'=x si y=x) : c'est la cheminée $C_{\Delta(x'),[x',y'']}$ où [x',y''] est le segment de A translaté de [x,y'] par le vecteur x'-x .

Le <u>germe</u> d'une demi-droite Δ (ou d'une cheminée $C_{\Delta,S}$) est le filtre δ (ou $c_{\Delta,[x,y]}$) des parties de I qui contiennent un raccourci de celle-ci. On dira que les parties de I vérifiant cette condition contiennent le germe.

Remarques a) L'enclos d'une demi-droite est un cas particulier de cheminée.

b) L'enclos d'un quartier (au sens de [BT1] , 7.1.4 , c'est à dire d'un "sector" au sens de [Rn] , 9.1) est l'enclos d'une demi-droite <u>en position générale</u> (i.e. parallèle à aucun mur). C'est donc un cas particulier de cheminée et son germe est le germe de la cheminée.

3.2 Hypothèses : On considérera désormais des immeubles vérifiant les deux axiomes suivants:

α) Une facette et un germe de cheminée sont contenus dans un même appartement.

β) Deux germes de cheminée sont contenus dans un même appartement.

3.3 Remarques : a) L'enclos d'un germe de segment étant une facette-fermée (et réciproquement) on peut remplacer dans α) facette par germe de segment. Ainsi sous l'hypothèse α) une demi-droite et un germe de segment de même origine sont contenus dans un même appartement (par convexité) et déterminent donc un germe de cheminée.

b) Ces deux hypothèses sont vérifiées si I est de type sphérique, car alors un germe de cheminée n'est autre qu'une facette ou une facette-fermée.

c) Ces deux hypothèses portent en fait sur le système $\mathcal{A}$ d'appartements. Par exemple si I est l'immeuble (de type affine) d'un système de Tits affine on montre dans [BT1] , 2.9.3 et 2.9.5 que si les cheminées sont des quartiers alors α) et β) sont vrais en remplaçant "appartement" par "partie de I isométrique à une partie d'appartement". Si le système d'appartements est complet (ie maximal) alors une telle partie est contenue dans un appartement, d'où α) et β) pour les quartiers, voir [Rn] , 9.4 et 9.5. Ces axiomes sont liés à l'existence d'un immeuble (de type sphérique) à l'infini de I ; voir [Rn] , 10.1.

Anne Parreau [P] prouve aussi, pour les immeubles affines (très généraux) qu'elle définit, que α) et β) sont vérifiées si les cheminées sont des quartiers.

d) Les immeubles des algèbres de Kac-Moody affines sont des immeubles au sens adopté ici mais (sauf cas dégénérés) ils ne satisfont pas à β) (même pour les quartiers): dans le cas le plus simple de l'algèbre $\mathfrak{sl}_2(K[t,t^{-1}])$ cela signifie que $PGL_2(K[t,t^{-1}])$ est transitif mais pas doublement transitif sur l'espace projectif $\mathbb{P}_1(K(t))$. Par contre l'axiome α) est toujours vérifié (au moins pour les quartiers).

e) Les immeubles de Bruhat-Tits associés à des données radicielles valuées, par exemple ceux associés à un groupe réductif sur un corps local , satisfont aux axiomes α) et β) . C'est démontré dans [BT1] , 7.3.1 et 6.1.15a pour des quartiers et en général dans [Ru2] et [Ru5] . Pour passer du cas des quartiers à celui des cheminées il suffit de combiner les décompositions démontrées dans [BT1] pour le cas des quartiers à une décomposition de Bruhat ([BT1] , 7.3.4) du sous-groupe de Levi du parabolique associé à une demi-droite.

3.4 Angles et parallélisme :

D'après 3.2αβ on peut définir l'<u>angle</u> d'un germe de segment et d'un germe de demi-droite (égal à l'angle en x de ce germe de segment et de cette demi-droite si ceux-ci ont même origine x) ou de deux germes de demi-droites : il suffit de prendre un appartement les contenant tous deux. Si l'angle est 0 ou π (resp. 0 ; π ; $\frac{\pi}{2}$) on dit que ces deux germes sont <u>parallèles</u> (resp. <u>ont même direction</u> ; <u>sont opposés</u> ; <u>sont orthogonaux</u>).

Deux demi-droites <u>ont même direction</u> s'il en est ainsi de leurs germes.

Deux droites de I sont <u>parallèles</u> si elles sont contenues dans un même appartement et y sont parallèles.

Remarque : Le parallélisme des demi-droites, le parallélisme ou la direction commune (en un sens évident) des germes de segment ne sont pas des relations d'équivalence. Par contre le parallélisme des droites et la direction commune des demi-droites sont des relations d'équivalence comme on va le voir.

Proposition 3.5 : [Ru5] . *Soient* Δ , Δ' *deux demi-droites de même origine* x , *contenant des points* y,y' *distincts de* x . *On note* $(\Delta,\Delta')_\infty$ *l'angle des germes des demi-droites* Δ , Δ' *et* $(\Delta,\Delta')_X = ([x,y),[x,y'))$ *l'angle "à l'origine" de* Δ , Δ' . *On choisit* $z \in \Delta \setminus [x,y]$ *et* $z' \in \Delta \setminus [x,y']$ *, alors* :

$$(\Delta,\Delta')_X \leq ([y,y'),[y,z)) + ([y',y),[y',z')) - \pi \leq (\Delta,\Delta')_\infty$$

Remarques : 1) L'angle à l'origine de deux demi-droites de même origine est donc inférieur à leur angle à l'infini. Il n'y a pas forcément égalité comme le montre le cas des arbres. Il est vraisemblable que l'égalité implique que les deux demi-droites sont contenues dans un même appartement. C'est en tout cas vrai si l'angle à l'origine (et donc aussi celui à l'infini) est π , cf 1.9 .

2) Deux demi-droites Δ,Δ' de même origine x et même direction sont donc confondues : sinon par convexité $\Delta\cap\Delta'$ est un segment $[x,x']$ et on obtient une absurdité en remplaçant x par x' dans la proposition.

<u>Démonstration</u> : Appliquons 1.12 à v = y , v' = y' , $u \in]x,y]$ et $u' \in]x',y']$ tels que x , [u,y) et [u',y') soient dans un même appartement. Dans cet appartement on a $\hat{u} + \hat{u}' = \pi + (\Delta,\Delta')_X$. Donc $\hat{v} + \hat{v}' \geq \pi + (\Delta,\Delta')_X$; d'où la première inégalité.

Appliquons maintenant 1.12 avec u = y , u' = y' , v = z et v' = z' choisis de telle façon que les raccourcis $\Delta(z)$ et $\Delta'(z')$ soient dans un même appartement A . On a alors $\pi \leq \hat{u} + \hat{u}' = (([y,y'),[y,z)) + ([y',y),[y',z')) \leq \hat{v} + \hat{v}'$ et dans l'appartement A on voit que $\hat{v} + \hat{v}' \leq \pi + (\Delta,\Delta')_\infty$; d'où la seconde inégalité.

Proposition 3.6 [Ru2] ou [Ru5] : *Deux germes de demi-droites de même direction font le même angle avec tout germe de segment ou de demi-droite.*

Conséquence : La direction commune des demi-droites est une relation d'équivalence. On peut donc définir l'ensemble I_∞ des <u>directions de demi-droites</u>. C'est en général (sans doute toujours) un immeuble-sphérique : l'immeuble à l'infini de I, voir [Rn] , 9.3. On peut définir l'angle de deux directions de demi-droites ou d'une direction de demi-droite et d'un germe de segment.

<u>Démonstration</u> : Soient Δ , Δ' des demi-droites d'origines x , x' contenues dans un même appartement A et γ un germe de segment ou de demi-droite. D'après 3.2 et grâce à la compacité de $[x,x']$ on peut, quitte à raccourcir Δ et Δ' en remplaçant $[x,x']$ par un segment parallèle, trouver une subdivision $x(0) = x$, $x(1)$, ... , $x(n) = x'$ de $[x,x']$ et des appartements A_i (pour $0 \leq i \leq n-1$) contenant γ et la cheminée $C_{\Delta(i),[x(i),x(i+1)]}$ où $\Delta(i)$ est la demi-droite de A d'origine $x(i)$ et parallèle à Δ . Comme A_i contient aussi $\Delta(i+1)$ (par convexité) on est ramené à un problème dans un espace euclidien et celui-ci est clair.

Corollaire 3.7 : 1) *Soient* D *une droite d'un appartement* A *, et* Δ^+ , Δ^- *deux demi-droites opposées contenues dans* D *. Si un appartement* A' *contient* Δ^+ *et une demi-droite* Δ' *de même direction que* Δ^- *, alors il contient* D .

2) *Si deux droites* D_1 *et* D_2 *sont telles que les directions de demi-droites qu'elles déterminent sont les mêmes, alors elles sont parallèles (et en particulier contenues dans un même appartement).*

Conséquence : Le parallélisme de droites est une relation d'équivalence qui équivaut à l'égalité des directions de demi-droites. Une classe de parallélisme de droites (encore appelée <u>direction de droites</u>) est une paire de directions de demi-droites opposées.

<u>Démonstration</u> : 1) On peut supposer Δ^+ et Δ^- de même origine x . L'appartement A' contient une demi-droite Δ'' de même direction que Δ' et donc que Δ^- d'origine x . D'après 3.5.2 on a $\Delta'' = \Delta'$.

2) Considérons dans D_1 (resp. D_2) des demi-droites opposées D_1^+ et D_1^- (resp. D_2^+ et D_2^-) de façon que D_1^+ et D_2^+ (resp. D_1^- et D_2^-) aient même direction. Quitte à les

raccourcir on peut supposer que D_1^+ et D_2^- sont dans un même appartement A . D'après 1) A contient D_1 et D_2 et il est alors clair que D_1 et D_2 sont parallèles dans A .

Proposition 3.8 : 1) *Soient* D *une droite de* I , x *un point de* D *et* [x,y] *un segment non trivial. On note* Δ_+ *et* Δ_- *les deux demi-droites d'origine* x *portées par* D . *On a alors :*

$$([x,y),\Delta_+) + ([x,y),\Delta_-) \geq \pi = (\Delta_+,\Delta_-)$$

2) ([Ru2] *ou* [Ru5]) *Il y a égalité si et seulement s'il existe un appartement contenant* D *et* [x,y) .

3) *Si on se donne de plus une droite* D' *parallèle à* D *et un segment non trivial* [x',y'] *d'origine* x' *dans* D' *et si, avec des notations évidentes, on a* :

$$([x,y),\Delta_+) + ([x,y),\Delta_-) = \pi = ([x',y'),\Delta'_+) + ([x',y'),\Delta'_-)$$

alors il existe un appartement contenant D_1 , D_2 , [x,y) *et* [x',y') .

<u>Démonstration</u> : 1) est une reformulation de 1.10 et la partie directe de 2) est claire.

2) Supposons la somme des angles égale à π et considérons des appartements A_+ ; A_- ; A contenant respectivement [x,y) et Δ_+ ; [x,y) et Δ_- ; le germe de Δ_- et le germe de la cheminée $C_{\Delta+,[x,y)}$ (qui existe dans A_+) . Il existe alors z dans Δ_+ , z' dans Δ_- et t dans]x,y] tels que : d(x,z) = d(x,z') ; A_+ contient Δ_+ et [x,t] ; A_- contient Δ_- et [x,t] ; A contient la raccourcie $\Delta_-(z')$ de Δ_- et la cheminée $C_{\Delta+(z),[x,u]}$ de A_+ où u est déterminé dans A_+ par u-z = 2(t-x) . Par convexité A contient D et aussi [x,t] d'après les calculs de la démonstration 1.10.2 ; d'où le résultat.

3) Considérons un appartement A contenant les germes des deux cheminées déterminées respectivement par Δ_+ et [x,y) ; Δ'_- et [x',y') . D'après 3.7.1 A contient en fait D_1 et D_2 en entier. D'où le résultat d'après la démonstration de l'alinéa précédent.

3.9 L'immeuble associé à une droite :

Soient D une droite et d sa classe de parallélisme (c'est à dire sa direction).

On note $\mathcal{A}_d$ l'ensemble des appartements de I qui contiennent une droite parallèle à D et I_d le sous-espace métrique de I réunion des appartement de $\mathcal{A}_d$.

On appelle d-<u>facette-fermée</u> de I_d l'enclos F_d d'une facette F d'un appartement $A \in \mathcal{A}_d$ et de l'une (quelconque) des droites parallèles à D de cet appartement qui rencontrent F . D'après 3.5.2 cette d-facette-fermée ne dépend que de F et d (pas de A) . On appelle d-<u>facette</u> de I_d l'intérieur relatif (c'est à dire dans le sous-espace affine engendré) d'une d-facette-fermée. L'ensemble des d-facettes est noté $\mathcal{F}_d$.

Il est clair qu'une d-facette-fermée est l'enclos d'un germe de segment $[x,y)$ contenu dans I_d et de la droite (unique d'après 3.5.2) parallèle à D et contenant x .

Notons δ^+ et δ^- les deux directions de demi-droites déterminées par D ; pour x dans I notons Δ_x^+ et Δ_x^- les demi-droites d'origine x et de direction respectives δ^+ et δ^- . Alors d'après 3.4.1 x est dans I_d si et seulement si l'angle à l'origine des demi-droites Δ_x^+ et Δ_x^- est π (et alors $\Delta_x^+ \cup \Delta_x^-$ est une droite parallèle à D : 3.7) . On a de plus $[x,y) \subset I_d$ si et seulement si $([x,y),\Delta_x^+) + ([x,y),\Delta_x^-) = \pi$.

Proposition 3.10 : a) *Soit* $A \in \mathcal{A}_d$; *les d-facettes contenues dans* A *sont les facettes du système d'hyperplans* $\mathcal{M}_d = \{ M \in \mathcal{M} \ / \ M \text{ parallèle à } d \}$. *Le groupe* W_d *engendré par les réflexions orthogonales par rapport à ces hyperplans est donc un sous-groupe de* W .

b) I_d *ou plus précisément le triplet* $(I_d,\mathcal{F}_d,\mathcal{A}_d)$ *est un immeuble.*

c) I_d *est convexe et fermé dans* I .

Remarques : 1) L'immeuble I_d n'est évidemment pas essentiel; il est même réduit à un seul appartement et une seule facette (c'est à dire que l'essentialisé est réduit à un point) si D est "en position générale" (parallèle à aucun mur).

2) Les d-facettes sont des réunions de facettes et elles recouvrent I_d .

3) Si $\mathcal{G}$ est un groupe réductif sur un corps local K , on peut considérer son immeuble de Bruhat-Tits $I(\mathcal{G})$. Si $\mathcal{S}$ est un sous-tore déployé de $\mathcal{G}$ on peut considérer la réunion $I(\mathcal{S},\mathcal{G})$ des appartements de $I(\mathcal{G})$ correspondant à des sous-tores déployés maximaux contenant $\mathcal{S}$; c'est l'immeuble (plongé de manière adéquate dans $I(\mathcal{G})$) du centralisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{G}$: [Ru2] ou [Ru5] .

En fait $I(\mathscr{S},\mathscr{G})$ est un immeuble du type considéré ici : $\mathscr{S}$ détermine une "direction de sous-espace affine d'appartement" de dimension la dimension de $\mathscr{S}$ et il suffit de prendre pour d une direction de droite "en position générale" dedans.

Si $\mathscr{S}$ est de dimension 1 , alors la direction de droite d déterminée par $\mathscr{S}$ est telle que les droites qui ont cette direction sont les enveloppes convexes des orbites de $\mathscr{S}(K)$ dans I_d : le groupe $\mathscr{S}(K)$ agit par translation sur ces droites et on verra en 4.3.3 une caractérisation de I_d à partir de l'action de $\mathscr{S}(K)$ sur I .

<u>Démonstration</u>: La partie a) est claire et il est immédiat de vérifier que $\mathscr{H}_d$ vérifie les hypothèses de [Bi] , V§3 puisque c'est vrai pour $\mathscr{H}$.

On a donc vu l'axiome α) des immeubles pour I_d ; l'axiome γ) est clair car les appartements de I_d sont des appartements de I . Enfin l'axiome β) résulte de 3.8.3 . Donc b) est vérifié.

Le c) résulte de ce que I_d est un immeuble pour la métrique induite par celle de I et plus précisément des propriétés ε et ζ . On peut aussi déduire la convexité directement de 3.8.3 et la fermeture du fait qu'un voisinage d'un $x \in I$ est formé des facettes contenant x dans leur adhérence.

§4 Projection et translation

4.1 La situation rencontrée par Michael Rapoport et Thomas Zink : [RZ]

$\mathscr{G}$ est un groupe réductif défini sur le corps local k . On considère une extension galoisienne (éventuellement infinie) K/k non ramifiée, de groupe de Galois engendré par l'élément de Frobenius σ . On considère un sous-groupe à un paramètre λ de $\mathscr{G}$ défini sur k ; son image est donc un sous-tore déployé $\mathscr{S}$ de dimension 1 . On note $\mathscr{Z}$ = $\mathscr{Z}(\mathscr{S})$ le centralisateur de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{G}$.

On a donc d'après 3.10.3 des immeubles $I_K(\mathscr{G})$ et $I_K(\mathscr{S},\mathscr{G})$ (resp. $I_k(\mathscr{G})$ et $I_k(\mathscr{S},\mathscr{G})$) de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{Z}$ sur K (resp. k). Les groupes $\mathscr{G}(K)$ et Gal(K/k) = <σ> agissent sur $I_K(\mathscr{G})$; $I_K(\mathscr{S},\mathscr{G})$ est stable par σ et $\mathscr{Z}(K)$. Comme l'extension est non ramifiée de groupe de Galois engendré par σ, on peut d'après [BT] ou [Ru2] identifier

$I_k(\mathcal{G})$ à l'ensemble $I_K(\mathcal{G})^\sigma$ des points fixes par σ ; cette identification échange $I_k(\mathcal{S},\mathcal{G})$ et $I_K(\mathcal{S},\mathcal{G})^\sigma$.

Le problème comporte également un élément $t \in \mathcal{G}(K)$ tel que, pour une puissance $s \in \mathbb{N}$ non nulle convenable, on ait $(t\sigma)^s = \sigma^s\lambda(a)$ où a est un élément de k de valuation non nulle (en fait de valuation s). On note k(s) le corps des points fixes de σ^s

Il s'agit alors de montrer que : pour une constante $c > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que :

si $x \in I_K(\mathcal{G})$ vérifie $d(x,(t\sigma)x) \leq c$, alors $d(x,I_{k(s)}(\mathcal{S},\mathcal{G})) \leq C$

(l'implication en sens inverse, avec d'autres constantes, est évidente).

Michael Rapoport et Thomas Zink démontrent ce résultat d'abord pour $\mathcal{G} = \mathcal{G}\ell(n)$, puis ils se ramènent à ce cas en plongeant $I_K(\mathcal{G})$ dans $I_K(\mathcal{G}\ell(n))$ grâce à un résultat d'Erasmus Landvogt [L] .

Il est clair que l'on peut remplacer la condition $d(x,(t\sigma)x) \leq c$ par $d(x,(t\sigma)^s x) \leq sc$ et donc supposer que $s = 1$ et $t = \lambda(a)$.

L'élément t stabilise les quatre immeubles considérés, commute avec σ et induit sur $I_K(\mathcal{S},\mathcal{G})$ donc aussi sur $I_k(\mathcal{S},\mathcal{G})$ une translation.

4.2 La situation abstraite que l'on va considérer :

On se donne un immeuble I (vérifiant les hypothèses de 3.2), deux automorphismes σ et t de I et une direction de droite d dans I . On suppose que :

α) σ et t commutent ,

β) σ et t fixent la direction de droite d et donc stabilisent l'immeuble I_d ,

γ) l'ensemble I_d^σ des points fixes de σ dans I_d est non vide ,

δ) t induit sur chaque droite de direction d une translation ,

ε) si t est l'identité sur I_d , on suppose qu'il l'est aussi sur I .

Remarques 1) Les vecteurs de la translation t sur deux droites de direction d sont canoniquement isomorphes puisque t est une isométrie et qu'il existe un appartement contenant ces deux droites. En particulier on note ℓ la longueur de ce vecteur; ainsi pour x dans I_d on a $d(x,tx) = \ell$.

2) Les ensembles I_d , I^σ et I_d^σ sont convexes fermés dans I , mais on ne suppose pas forcément que les deux derniers sont des immeubles.

3) On va montrer (4.7) qu'il existe une constante k (dépendant de I , σ , t et d) telle que : $d(x,I_d^\sigma) \leq k.d(x,t\sigma)$.

. Pour cela on essaye de minorer $d(x,(t\sigma)x)$ en fonction de $d(x,I_d^\sigma)$.

L'inégalité inverse est claire : $d(x,(t\sigma)x) \leq 2d(x,I_d^\sigma) + \ell$.

4) On note δ^+ et δ^- les deux directions de demi-droites déterminées par d .

Proposition 4.3 :*Pour* x *dans* I *on note* x_0 *le point de* I_d *le plus proche de* x .

a) *Il existe une constante* $\varepsilon \in \,]0,\frac{\pi}{2}]$ *telle que si* x *n'est pas dans* I_d *alors* :

$$([x_0,x),\delta^+) \geq \frac{\pi}{2} + \varepsilon \quad \text{et} \quad ([x_0,x),\delta^-) \geq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

b) *Supposons* t *non triviale ie* $\ell \neq 0$, *alors pour* x *dans* I *on a* :

$$d(x,t(x)) \geq \ell + 2d(x,x_0)\sin^2\varepsilon$$

Remarques : 1) La constante ε ne dépend pas de x , mais seulement de la géométrie de I et de la position de la direction de droite d dans cette géométrie.

2) Cette proposition résout le problème 4.2.3 dans le cas où σ est l'identité.

3) D'après cette proposition ℓ est le minimum de distance de x à tx pour x dans I et ce minimum est atteint uniquement pour les points de I_d .

<u>Démonstration</u> : a) Considérons la droite D de direction d et contenant x_0 ; notons Δ une demi-droite de D d'origine x et de direction δ (= δ^+ ou δ^-) . Si y est un point différent de x_O de Δ , on a égalité des angles $([x_0,x),\delta)$ et $([x_0,x),[x_0,y))$. Mais toute facette F contenant $[x_0,y)$ dans son adhérence est dans I_d (3.8.2), donc pour z dans F , $z \neq x_0$, on a $([x_0,x),[x_0,z)) \geq \frac{\pi}{2}$ (2.1c) . Le résultat en découle en notant ε le plus petit des angles $([x_0,y),[x_0,u))$ pour u dans une facette ne contenant pas $[x_0,y)$ dans son adhérence. L'angle ε est > 0 car dans $\overline{I}(x_0)$ on sait que la réunion des facettes contenant un point dans son adhérence est un voisinage de ce point.

b) On peut trouver une subdivision $x_0,x_1, \ldots , x_n=x$ de $[x_0,x]$ telle que pour $0 \leq i \leq n-1$ $[x_i,x_{i+1}]$ et $[tx_i,tx_{i+1}]$ soient dans un même appartement A_i . D'après 1.12 la somme des angles $([x_i,tx_i),[x_i,x_{i+1}))$ et $([tx_i,x_i),[tx_i,tx_{i+1}))$ est au moins $\pi+2\varepsilon$. On en déduit donc dans l'appartement A_i (en se ramenant à un calcul dans un plan euclidien) que $d(x_{i+1},tx_{i+1}) \geq d(x_i,tx_i) + 2d(x_i,x_{i+1})\sin^2\varepsilon$; d'où le résultat.

Proposition 4.4 : *Supposons* $x \in I_d$ *. Si* $\theta > 0$ *est l'angle de 2.3 relatif à* I_d *et* σ *, on a :*

$$d(x,(t\sigma)x)^2 \geq \ell^2 + 4d(x,I_d^\sigma)^2\sin^2(\frac{\theta}{2})$$

Remarques 1) Cette proposition résout le problème 4.2.3 dans le cas où $I = I_d$.

2) Si t est l'identité ceci se réduit à 2.3 .

Démonstration : Soit x_0 le point de I_d^σ le plus proche de x . On note D_0 , D et D' les droites de direction d passant par x_0 , x et σx . D'après 2.3c on a $d(x,\sigma x) = d(tx,(t\sigma)x) \geq 2d(x,x_0)\sin\frac{\theta}{2}$. De plus $d(x,tx) = d(\sigma x,(t\sigma)x) = d(x_0,tx_0) = \ell$. Il suffit donc de montrer que le parallélogramme $\{x,\sigma x,t\sigma x,tx\}$ qui est contenu dans un appartement est en fait un rectangle.

Il existe une subdivision $x_0,x_1, \ldots ,x_n=\sigma x$ de $[x_0,\sigma x]$ et des appartements $A_0, A_1, \ldots , A_{n-1}$ tels que A_i contienne D et $[x_i,x_{i+1}]$. On note D_i la droite de direction d passant par x_i qui est donc contenue dans A_i et A_{i-1} . Comme x_0 est le point de $D_0 \subset I_d^\sigma$ le plus proche de x ou de σx , $[x_0,x]$ et $[x_0,\sigma x]$ sont perpendiculaires à D_0 c'est à dire à d . En raisonnant successivement dans les appartements $A_0,A_1, \ldots ,A_{n-1}$ on en déduit que $[x,x_1]$, $[x,x_2]$, ... , $[x,x_n] = [x,\sigma x]$ sont perpendiculaires à d ; d'où le résultat.

4.5 Le résultat d'Anne Parreau : [P]

Si g est une isométrie d'un immeuble affine I (au sens discret de 1.3 par exemple), on note $\ell(g) = \inf\{ d(y , gy) \ / \ y \in I \}$ et on définit $\mathrm{Min}(g)$ comme l'ensemble des x dans I tels que $d(x , gx) = \ell(g)$.

Si l'immeuble I est essentiel (mais vérifie des axiomes moins contraignants que ceux de 3.2 et 3.3) Anne Parreau montre qu'il existe une constante $k > 0$, ne dépendant que de la géométrie de I , c'est à dire que du groupe W et de la distance d , telle que :

pour tout x dans I $d(x , \mathrm{Min}(g)) \leq k.(\ell(g) + d(x , gx)) \leq 2k.d(x , gx)$

Proposition 4.6 : *Sous les hypothèses de 4.2 , on a* $\mathrm{Min}(t\sigma) = I_d^\sigma$.

Démonstration : Le cas $\ell = 0$ est clair; supposons donc $\ell \neq 0$. L'isométrie $t\sigma$ translate les droites de direction d dans I_d^σ et la réunion des géodésiques parallèles à ces droites est I_d ; la proposition est donc une conséquence facile du théorème II.6.8 de [BH] . On peut aussi en donner une démonstration directe avec les arguments de 4.3 .

Corollaire 4.7 : *Sous les hypothèses de 4.2 , il existe une constante* $k > 0$ *ne dépendant que de la géométrie de* I *(et de* t , σ *si l'immeuble est inessentiel) telle que :*

$d(x , I_d^\sigma) \leq k.d(x , t\sigma x)$ *pour tout* x *dans* I .

.Démonstration : Par le choix d'une origine O dans I_d^σ , on décompose l'immeuble I en produit orthogonal d'un immeuble essentiel I_e et d'un espace vectoriel euclidien F_0 . Les actions de t et de σ sur I sont les produits d'actions sur I_e et F_0 . On se ramène donc à traiter séparément le cas d'un immeuble essentiel (grâce à la proposition 4.6 et au résultat d'Anne Parreau) et le cas trivial d'un espace euclidien (facile et aussi conséquence de 4.4) .

Remarque 4.8 : Au vu de 4.3 et 4.4 , la meilleure inégalité que l'on puisse espérer est :

$d(x,(t\sigma)x) \geq \sqrt{\ell^2+cd(x,I_d^\sigma)^2}$ pour une constante $c > 0$ dépendant uniquement de la géométrie de I (et de t , σ dans le cas inessentiel).

Mais seuls quelques cas particuliers ont pu être prouvés.

BIBLIOGRAPHIE

[Bi] Bourbaki Nicolas , Groupes et algèbres de Lie ; chapitres 4,5 et 6 , Hermann Paris 1968 ; Masson Paris 1981.

[BH] Bridson Martin et Haefliger André, Metris spaces of non positive curvature, Grund. math. Wiss. **319** , Springer Verlag 1999

[Bn] Brown Kenneth S. , Buildings , Springer Verlag 1989.

[BT] Bruhat François et Tits Jacques , Groupes réductifs sur un corps local.

I Données radicielles valuées, Pub. Math. IHES **41** (1972), 5-252

II Schémas en groupes, existence d'une donnée radicielle valuée, Pub. Math. IHES **60** (1984), 5-184 .

[K] Kempf Georg , Instability in invariant theory, Annals of Math. **108** (1978) , 299-316

[L] Landvogt Erasmus , Some functorial properties of the Bruhat-Tits building, J. reine angew. Math. , **518** (2000), 213-241.

[M] Mumford David , Geometric invariant theory, second edition, Springer Verlag 1982.

[P] Parreau Anne , Immeubles affines: construction par les normes et étude des isométries, Contemporary Math. **262** (2000), 263-302.

[RZ] Rapoport Michael et Zink Thomas , A finiteness theorem in the Bruhat-Tits building: an application of the Landvogt's embedding theorem, Indag. Math. , **10** (1999), 449-458.

[Rn] Ronan Mark , Lectures on buildings , Academic Press, San Diego 1989 .

[Ru1]Rousseau Guy , Immeubles sphériques et théorie des invariants , C.R.Acad.Sci. Paris **286** (1978), 247-250 .

[Ru2]Rousseau Guy , Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux , thèse Orsay , 1977 .

[Ru3] Rousseau Guy , Instabilité dans les espaces vectoriels, in "Surfaces algébriques" séminaire Orsay, Lecture notes in Math. **868** Springer Verlag (1981), 263-276.

[Ru4]Rousseau Guy , L'immeuble jumelé d'une forme presque-déployée d'une algèbre de Kac-Moody , Bull. Soc. Math. Belgique , **42** (1990), 673-694 .

[Ru5]Rousseau Guy , Groupes réductifs et immeubles , en préparation .

[T1] Tits Jacques , Buildings of spherical type and finite BN-pairs , Lecture notes in Math. **386** , Springer Verlag 1974 .

[T2] Tits Jacques , On buildings and their applications , Proc. Int. Congress Math. , Vancouver 1974 , vol 1 , 209-220 .

[T3] Tits Jacques , Immeubles de type affine , in "Buildings and the geometry of diagrams" Como 1984 , Lecture notes in Math. **1181** , Springer Verlag (1986), 159-190 .

Guy Rousseau

Institut Elie Cartan

Unité mixte de recherche 7502

Université Henri Poincaré Nancy

BP 239

54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex France

rousseau@iecn.u-nancy.fr