DES ESPACES SYMÉTRIQUES AUX IMMEUBLES DE KAC-MOODY

par Guy Rousseau

Je ne vais pas parler des espaces symétriques: pour mon propos ils sont connus depuis longtemps, depuis qu'Élie Cartan les a utilisés pour étudier et classifier les groupes de Lie semi-simples réels.

Je veux surtout montrer les différentes généralisations (auxquelles je m'intéresse) de ce couple formé d'un groupe agissant sur un objet géométrique (dans l'esprit de Felix Klein).

Les objets que l'on va considérer sont de nature essentiellement combinatoire:

de manière générale un immeuble est un complexe simplicial c'est à dire un ensemble $\mathcal{S}$ de sommets muni d'un ensemble $\mathcal{F}$ de facettes qui sont des sous-ensembles finis de $\mathcal{S}$ et tels que, pour tout sommet x , $\{x\}$ est une facette et pour tout sous-ensemble F' d'une facette F alors F' est aussi une facette.

Je vais parler d'immeubles dans trois situations différentes apparues historiquement dans cet ordre.

I L'immeuble sphérique d'un groupe semi-simple sur un corps quelconque.

Ces immeubles ont été introduits (sous leurs premières formes au début des années 50) par Jacques Tits pour comprendre d'un point de vue géométrique les groupes de Lie (réels semi-simples) exceptionnels. Un but ultérieur était, en construisant des espaces analogues (finis), d'introduire de nouveaux groupes (comme groupes d'automorphismes de ces objets) et donc de définir les analogues sur les corps finis des groupes de Lie exceptionnels [34].

Cependant ce dernier projet a été réalisé de manière algébrique par Claude Chevalley vers 1955 [15] et donc ces immeubles ont surtout été utilisés pour comprendre les groupes semi-simples sur les corps quelconques introduits par Claude Chevalley et largement étudiés par Armand Borel et Jacques Tits (entre autres) [4] , [6] .

Néanmoins depuis la fin des années 70, des théoriciens des groupes finis (en particulier Francis Buekenhout) cherchent à généraliser les immeubles finis pour les associer aux groupes finis simples sporadiques, en rêvant peut-être de redémontrer la classification par ce biais [34].

Je vais expliquer l'immeuble associé au groupe projectif linéaire PGL(n+1,K) sur un corps K quelconque. Il traduit en fait la géométrie de l'espace projectif $\mathbb{P}_n(K)$ et peut être associé à une géométrie projective abstraite telle que définie par exemple dans le livre d'Emil Artin [2].

- les sommets sont les sous-espaces vectoriels de K^{n+1} de dimension (variable) d avec $1 \leq d \leq n$; d est la couleur du sommet.

- des sommets $V_1 , V_2 , \ldots , V_k$ sont contenus dans une même facette si et seulement si, à l'ordre près, on a : $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_k$ (une facette est donc un drapeau).

Il est clair que PGL(n+1,K) agit sur $\mathcal{I}$ par des automorphismes simpliciaux, c'est à dire des bijections qui induisent des bijections de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$. Ces automorphismes sont même colorés c'est à dire qu'ils respectent les couleurs des sommets.

On voit alors que ce complexe simplicial est un complexe de chambres coloré au sens suivant [8] :

(i) Toute facette est contenue dans une facette maximale appelée chambre .

Deux chambres ont le même cardinal: le rang r de $\mathcal{I}$.

(On appelle alors cloison une facette de cardinal r-1 et galerie une suite $C_0 , C_1 , \ldots , C_n$ (de chambres telle que, pour tout $i \leq n-1$, $C_i \cap C_{i+1}$ est une cloison (ou une chambre); (on dit qu'elle est de longueur n et qu'elle joint C_0 à C_n).

(ii) Deux chambres quelconques peuvent être jointes par une galerie.

(iii) Il existe une application "couleur" de $\mathcal{I}$ sur un ensemble de cardinal r qui est injective sur chaque facette.

Le premier et le dernier axiome se vérifient facilement pour l'exemple que l'on vient de construire (avec r = n); on verra plus tard un résultat qui aidera à prouver le deuxième. Dans cet exemple on a aussi que : un ensemble F de sommets est une facette si et seulement si, pour tous x , y dans F , l'ensemble {x,y} est une facette.

Exemples: Pour n= 1 , l'immeuble $\mathcal{I}$ est l'ensemble des points de la droite projective $\mathbb{P}_1(K)$; les facettes sont tous les singletons. L'intérêt est très limité.

Pour n = 2 , les sommets de l'immeuble correspondent aux points (couleur 1) ou aux droites (couleur 2) du plan projectif $\mathbb{P}_2(K)$. Outre les singletons (les cloisons) les facettes sont des chambres formées d'un couple point-droite le point étant contenu dans la droite. On obtient donc un graphe en associant une arête à chaque chambre.

Le dessin qui suit visualise le cas du corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$. A droite on a dessiné le plan projectif qui comporte 7 points (numérotés de 1 à 7) et 7 droites (numérotées de I à VII, y compris la droite VI formée des points 2 , 7 et 6); d'où le dessin de gauche qui visualise l'immeuble sous la forme d'un graphe.

[35]

Un groupe diédral d'ordre 14 respecte la figure; cependant les symétries (par exemple celle par rapport à la droite en pointillé) mélangent les couleurs des sommets: ce sont des "dualités". On cherche seulement le groupe des automorphismes colorés de ce graphe (ils respectent les arêtes mais pas forcément les longueurs de celles-ci). On trouve alors un groupe de cardinal 168 : $GL_3(\mathbb{F}_2) = PGL_3(\mathbb{F}_2)$ (le second groupe simple non commutatif après A_5).

On constate donc sur ce cas particulier un résultat général [32;5.9] :

Si G est un groupe algébrique adjoint absolument simple de rang relatif $r \geq 2$, sur un corps K , son immeuble est de rang r et le groupe des automorphismes colorés de cet immeuble est produit semi-direct de G(K) par le groupe Aut(K) des automorphismes du corps K (sauf peut-être en caractéristique 2 (resp. 3) et pour G de type B_2 ou F_4 (resp. G_2)).

(dans le cas de GL_3 ceci est le théorème fondamental de la géométrie projective [2], et, pour notre exemple on a l'avantage que $Aut(\mathbb{F}_2) = \{1\}$)

De plus un isomorphisme coloré entre deux immeubles associés à des groupes algébriques adjoints absolument simples de rang ≥ 2 provient d' isomorphismes entre les corps et les groupes (à isogénie près) [32;5.8].

Par contre on sait que $GL_3(\mathbb{F}_2)$ et $PSL_2(\mathbb{F}_7)$ sont isomorphes et l'immeuble de $PSL_2(\mathbb{F}_7)$, qui est formé de 8 points ne peut être isomorphe à celui de $GL_3(\mathbb{F}_2)$. C'est un contre-exemple (en bas rang) à un théorème de Borel et Tits [7] qui dit qu'un isomorphisme abstrait entre les groupes G(K) et G'(K') des points rationnels de deux groupes réductifs G et G' provient comme ci-dessus d' isomorphismes entre les corps et les groupes réductifs, si les rangs relatifs sont assez grands.

Appartements:

Dans la figure ci-dessus il faut aussi observer les lacets non homotopes à zéro et de longueur minimale (6 arêtes) , on les appelle appartements et on peut alors vérifier la définition ci-dessous [8] :

Un immeuble est un complexe simplicial $\mathcal{I}$ dans lequel il existe un système $\mathcal{A}$ d'appartements tel que :

(i) Les appartements sont des sous ensembles non vides de $\mathcal{I}$ que l'on munit de la structure simpliciale induite; pour cette structure ce sont des complexes de chambres minces (i.e. toute cloison est contenue dans exactement 2 chambres).

(ii) $\mathcal{I}$ est épais : toute cloison est contenue dans au moins 3 chambres.

(iii) Deux facettes sont contenues dans un même appartement.

(iv) Si 2 appartements A et A' contiennent les 2 facettes F et F' , alors il existe un isomorphisme (simplicial) de A sur A' qui fixe (point par point) F et F' .

Il résulte de ces axiomes que tous les appartements sont isomorphes et que $\mathcal{I}$ est un complexe de chambres coloré (cette coloration est plus dure à obtenir).

Si les appartements sont des ensembles finis, on dit que l'immeuble est sphérique; dans ce cas on peut montrer que le système $\mathcal{A}$ d'appartements est unique.

Pour l'immeuble de $PGL_{n+1}(K)$, les appartements correspondent aux décompositions de K^{n+1} en somme directe de droites:

Les sommets de l'appartement correspondant à la décomposition $K^{n+1} = D_1 \oplus .. \oplus D_{n+1}$ sont tous les sous espaces vectoriels sommes de certains des D_i .

Il est alors facile de vérifier que l'on a un immeuble sphérique sauf peut être pour l'axiome (iii). Celui-ci est une conséquence d'une variante du théorème de Jordan-Hölder:

Si $\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq ... \subsetneq V_n \subsetneq K^{n+1}$ et $\{0\} \subsetneq W_1 \subsetneq ... \subsetneq W_n \subsetneq K^{n+1}$ sont deux drapeaux complets de K^{n+1} , alors il existe une base $\{ e_1 , ... , e_{n+1} \}$ de K^{n+1} et une permutation $\sigma \in S_{n+1}$ telles que pour $1 \le i \le n$ V_i aie pour base $e_1 , ... , e_i$ et W_i pour base $e_{\sigma 1} , ... , e_{\sigma i}$.

Il est également intéressant de regarder l'action de $GL_{n+1}(K)$ sur l'immeuble:

Les fixateurs des facettes sont les sous-groupes paraboliques (i.e. les sous-groupes triangulaires par blocs dans une base ad hoc). Le stabilisateur de l'appartement correspondant à la décomposition $K^{n+1} = D_1 \oplus .. \oplus D_{n+1}$ est le groupe N normalisateur d'un sous-groupe diagonal maximal et formé des matrices monomiales dans une base adaptée à la décomposition. Enfin l'axiome (iii) peut se traduire par la décomposition de Bruhat : $GL_{n+1}(K) = BNB$, où, dans la même base, B est formé des matrices triangulaires.

C'est ainsi que l'on peut généraliser la construction de l'immeuble pour un groupe semi-simple G quelconque:

- les sommets sont les sous-groupes paraboliques maximaux,
- une facette est formée des sous-groupes paraboliques maximaux contenant un sous-groupe parabolique donné,
- un appartement est formé des sous-groupes paraboliques maximaux contenant un sous-groupe "diagonalisable maximal".

Application : Je ne vais citer qu'une application de ces immeubles sphériques [25;App 4] , voir [8] , [24] , [26] , [28] et [33] pour d'autres applications.

Une fois remplacées dans l'immeuble de G les facettes (combinatoires) par des simplexes on obtient un espace topologique $\mathcal{I}_t$ qui est homotope à un bouquet de (r-1)-sphères. Si le corps K est fini on obtient une représentation de G(K) dans l'homologie $H_{r-1}(\mathcal{I}_t)$, c'est la représentation de Steinberg bien connue des théoriciens des groupes finis.

II L'immeuble affine d'un groupe semi-simple sur un corps local non archimédien.

Cet immeuble ressemble plus à l'espace symétrique utilisé par Élie Cartan. Il s'agit en fait du véritable analogue pour les corps locaux (i.e. les corps topologiques localement compacts non discrets) non archimédiens de cet espace symétrique qui correspond au cas des corps (locaux) $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère donc un corps K muni d'une valeur absolue ultramétrique non triviale pour laquelle il est localement compact (en particulier complet). L'exemple le plus connu est celui des corps p-adiques. Mais je vais expliquer le cas des corps de fonctions: à extension finie près l'exemple suivant est l'unique cas de corps local non archimédien non p-adique.

On considère le corps $K = k((t))$ des séries formelles de Laurent sur un corps fini k . Ce corps est muni d'une valeur absolue : $| \sum_{i=j}^{\infty} a_i t^i | = e^{-j}$ si $j \in \mathbb{Z}$ et $a_j \neq 0$,

cette valeur absolue est ultramétrique : $| u+v | \leq \sup(|u| , |v|)$.

Pour la distance induite par cette valeur absolue, la boule unité fermée de centre 0 est l'anneau $\mathcal{O} = k[[t]]$ des séries formelles et la boule unité ouverte de centre 0 est l'idéal maximal $\mathfrak{m} = tk[[t]]$ de cet anneau. Ces 2 boules sont des ouverts compacts de K.

N.B. a)On va considérer des groupes de matrices sur ce corps topologique et l'on obtiendra donc des groupes topologiques.

b) Les constructions qui suivent peuvent se faire pour un corps local non archimédien K quelconque d'anneau d'entiers $\mathcal{O}$, il suffit de noter t une uniformisante et k le corps résiduel.

c) Les constructions qui suivent peuvent se faire pour $K = k((t))$ avec un corps k quelconque, mais on perd alors toutes les propriétés de compacité.

Je vais uniquement expliquer <u>l'immeuble affine</u> de $PGL_n(K)$ ou de $SL_n(K)$. Celui-ci a été d'abord étudié par Goldman et Iwahori [17] selon un point de vue assez différent et avant le développement de la théorie générale par Bruhat [9] , Iwahori et Matsumoto [18] et enfin Bruhat et Tits dans son aspect actuel à partir de 1966 [10] , [11] , [12] , [13] et [14].

On considère les réseaux de K^n , c'est à dire les sous $\mathcal{O}$-modules libres de K de $\mathcal{O}$-base une K-base de K^n ,

- l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets est le quotient de l'ensemble des réseaux par l'homothétie,

- si $M_1 , \ldots , M_k$ sont des réseaux, l'ensemble $\{ cl(M_1) , \ldots , cl(M_k) \}$ des classes de ces réseaux est une facette si et seulement si, à homothétie près, on peut supposer : $tM_k \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_k$.

(le rang de ce complexe simplicial est donc n , car la condition ci-dessus
(équivaut à ce que $M_1 , M_2 , \ldots , M_{k-1}$ définissent un drapeau du
(k-espace vectoriel M_k/tM_k)

- les appartements correspondent bijectivement (comme dans le cas des immeubles sphériques) aux décompositions de K^n en somme directe de droites:

si $e_1 , \ldots , e_n$ est une base de K^n , les sommets de l'appartement correspondant sont les classes des réseaux dont une $\mathcal{O}$-base est de la forme $t^{p_1}e_1 , \ldots , t^{p_n}e_n$ pour $p_1 , \ldots , p_n \in \mathbb{Z}$.

Il y a évidemment une action de $PGL_n(K)$ qui respecte toute la structure.

On peut alors montrer que l'on obtient un immeuble; on le verra facilement dans le cas particulier $n = 2$ qui va suivre.

Les sommets d'un appartement sont en bijection avec $\mathbb{Z}^{n-1}$ et le groupe des automorphismes simpliciaux de cet appartement est produit semi-direct d'un groupe fini d'automorphismes linéaires et d'un groupe de translations qui a un nombre fini d'orbites (ici en fait une seule). C'est pour cela que l'immeuble est dit <u>affine</u>.

On peut aussi constater que le stabilisateur dans $SL_n(K)$ d'un sommet est (pour l'écriture dans la base d'un réseau correspondant) le groupe $SL_n(\mathcal{O})$, c'est à dire un sous-groupe compact ouvert de $SL_n(K)$; en particulier l'action du groupe sur l'immeuble (discret) est continue et propre. De plus tout sous-groupe compact de $SL_n(K)$ est contenu dans l'un de ces groupes (plus difficile à voir!).

C'est un résultat général ([11] , [12]): si G est un groupe simple "simplement connexe", les sous-groupes compacts maximaux de $G(K)$ sont les fixateurs des sommets de l'immeuble et le nombre de leurs classes de conjugaison est le rang de l'immeuble c'est à dire le rang relatif de G .

La partie essentielle de la démonstration utilise une propriété de courbure négative de l'immeuble (appelée CAT(0) par les spécialistes des espaces hyperboliques à la

Gromov) exactement comme on peut montrer la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux d'un groupe de Lie semi-simple en le faisant agir sur son espace symétrique.

Cas de SL_2 :

L'immeuble $\mathcal{I}$ de SL_2 ou PGL_2 est de rang 2, c'est donc un graphe. La description que l'on a donnée d'un appartement quelconque montre que, dans ce cas, il est en bijection avec $\mathbb{Z}$, les chambres étant les couples $\{i,i+1\}$. Les axiomes (iii) et (iv) des immeubles permettent alors de montrer que $\mathcal{I}$ est connexe et n'a pas de circuit (i.e. de lacet non homotope à zéro) c'est donc un arbre. D'après la description ci-dessus des facettes, les sommets à distance 1 du sommet cl(M) associé au réseau M, correspondent bijectivement aux droites du k-espace vectoriel M/tM, c'est à dire aux points de $\mathbb{P}_1(k)$. Chaque sommet de l'arbre a $|k|+1$ voisins.

Si on note e, f une base de K^2 et (u,v) la classe du réseau $\mathcal{O}u \oplus \mathcal{O}v$, pour u, $v \in K^2$. On a alors la vue partielle suivante de l'immeuble de SL_2.

$(e+f+t^2f, t^2f)$ $(e+f, t^2f)$

$(e+f, tf)$ $(e+tf, t^2f)$

$(e, t^{-1}f)$ (e,f) (e,tf) (e,t^2f)

Si le corps k a 2 éléments le dessin ci-dessus est localement complet et on trouvera ci-dessous un dessin plus suggestif [31] (ne pas tenir compte de la numérotation des sommets).

D'après ce que l'on vient de voir si on considère le corps 2-adique $K = \mathbb{Q}_2$ on obtient exactement le même arbre: les résultats d'unicité du I ne sont vrais pour les immeubles affines que si $n \geq 3$.

On peut exprimer facilement la distance de 2 sommets :

$$d(cl(M) , cl(M')) = \inf \{ N \in \mathbb{N} \ / \ \exists\, j \in \mathbb{Z} \ , \ t^{j+N}M \subset M' \subset t^{j}M \}$$

En fait la distance est invariante par $PGL_2(K)$ et classifie exactement les orbites de $PGL_2(K)$ dans $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$.

Dans un arbre on sait qu'il existe des <u>bouts</u> qui correspondent aux demi-géodésiques infinies (= suites $(x_i)_{i\in \mathbb{N}}$ de sommets telles que $d(x_i,x_j) = |i-j|$) à troncature près et que le rajout de ces bouts permet de compactifier l'arbre. On peut montrer qu'ici l'ensemble des bouts s'identifie (de manière $PGL_2(K)$-équivariante) à $\mathbb{P}_1(K)$ qui est l'immeuble sphérique de $PGL_2(K)$ [31] .

C'est un résultat général: d'après Borel et Serre on peut compactifier l'immeuble affine (ou l'espace symétrique si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) d'un groupe semi-simple sur un corps local en rajoutant comme frontière l'immeuble sphérique. Ceci est très utile par exemple pour l'étude des groupes arithmétiques [5] .

III Groupes de Kac-Moody affines et immeubles jumelés.

Les algèbres de Kac-Moody ont été inventées indépendamment par Victor Kac et Robert Moody en 1967 [21] , [19] et ont été utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques; elles généralisent en dimension infinie les algèbres de Lie semi-simples. Plus récemment (1988) [29] , on s'est rendu compte que leur étude était facilitée par la considération de deux immeubles qui sont "jumelés" au sens d'une définition développée par Ronan et Tits [27] , [36] .

Ces algèbres ou groupes de Kac-Moody sont définis par générateurs et relations. Cependant dans le cas "affine" une définition plus concrète existe; c'est ce que je vais expliquer en me restreignant au cas "non tordu".

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple déployée sur un corps k (de caractéristique 0) , $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Δ le système de racines correspondant. L'<u>algèbre de Kac-Moody affine</u> (non tordue) associée est : $\tilde{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g} \otimes_k k[t,t^{-1}]) \oplus kd$, où l'action adjointe de d est celle de $t\dfrac{\partial}{\partial t}$ plus précisément le crochet est donné par la formule : $[X\otimes t^n + \lambda d , Y\otimes t^m + \mu d] = [X,Y]\otimes t^{n+m} + \lambda m Y\otimes t^m - \mu n X\otimes t^n$.

Il y a une sous-algèbre de Cartan $\tilde{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h}\otimes t^0) \oplus kd$ dont l'action adjointe sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ est diagonalisable : $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus (\oplus_\alpha \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha)$. Dans cette formule α parcourt une partie $\tilde{\Delta}$ du dual de $\tilde{\mathfrak{h}}$. On identifie ce dual à $\mathfrak{h}^* \oplus k\delta$ en posant $\delta(d) = 1$, $\delta(\mathfrak{h}) = 0$ et $a(d) = 0$ pour $a \in \mathfrak{h}^*$. On a alors $\tilde{\Delta} = \{ a+n\delta \ / \ a \in \Delta , n \in \mathbb{Z} \} \cup (\mathbb{Z}\setminus\{0\})\delta$.

On a aussi un "groupe de Weyl" W qui agit sur ce système de racines et une notion de racines positives : $\widetilde{\Delta}_+ = \Delta_+ \cup (\Delta + (\mathbb{N}\setminus\{0\})\delta) \cup (\mathbb{N}\setminus\{0\})\delta$.

Je ne vais citer qu'une application de ces algèbres:

Dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples complexes on connaît la célèbre formule du dénominateur de Weyl :
(on note ρ la somme des poids dominants fondamentaux et $\mathrm{mult}(\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$)

$$\prod_{\alpha\in\Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)} = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)e^{w(\rho)-\rho}$$

dans ce cas classique les sommes et produits sont finis et les multiplicités sont égales à 1.

On peut généraliser cette formule sous cette forme au cas des algèbres de Kac-Moody; on a alors des séries formelles à plusieurs indéterminées : les $u_i = e^{-\alpha_i}$ où $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de Δ_+ .

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, et si on considère la formule associée à $\widetilde{\mathfrak{g}}$, on retrouve la fameuse <u>identité du triple produit de Jacobi</u> [20] :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_1^n u_2^n).(1 - u_1^{n-1}u_2^n).(1 - u_1^n u_2^{n-1}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m.u_1^{\frac{m(m-1)}{2}}.u_2^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

Si G est un groupe algébrique sur k , semi-simple, connexe, déployé et d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le groupe $G(k[t,t^{-1}])$ des points de G à valeurs dans l'anneau des polynômes de Laurent sur k , est un <u>groupe de Kac-Moody</u> associé à l'algèbre de Kac-Moody $\widetilde{\mathfrak{g}}$; on peut considérer ce groupe même si le corps k est de caractéristique positive. Ce groupe agit sur deux immeubles affines : celui $\mathcal{I}^+$ de G sur k((t)) et celui $\mathcal{I}^-$ de G sur $k((t^{-1}))$.

Ces deux actions du groupe de Kac-Moody induisent un "jumelage" des deux immeubles. Je vais expliquer celui-ci uniquement dans le cas des arbres c'est à dire pour $G = SL_2$, cf. [27]:

Tout réseau de $k((t))^2$ (resp $k((t^{-1}))^2$) admet une base dans $M = k[t,t^{-1}]^2 \subset V = k(t)^2$. On peut donc représenter un sommet de $\mathcal{I}^+$ (resp $\mathcal{I}^-$) par la classe à homothétie près d'un k[t]-réseau M^+ (resp d'un $k[t^{-1}]$-réseau M^-) de M . L'intersection d'un k[t]-réseau et d'un $k[t^{-1}]$-réseau est de dimension finie sur k , on peut donc définir comme suit la <u>codistance</u> entre sommets de $\mathcal{I}^+$ et de $\mathcal{I}^-$:

codist($cl(M^+)$, $cl(M^-)$) est le plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ avec $t^{j+N+1}M^+\cap M^- = \{0\}$ et $t^jM^+\cap M^-$ contient une base de V sur k(t).

Cette définition de la codistance ne dépend bien que des classes d'homothétie des réseaux et est invariante pour l'action de $GL_2(k[t,t^{-1}])$. Plus précisément la codistance classifie en fait les orbites de $GL_2(k[t,t^{-1}])$ dans $\mathcal{I}^+\times\mathcal{I}^-$ et elle vérifie les axiomes suivants des <u>arbres jumelés</u> :

la <u>codistance</u> est une application cod de $\mathcal{I}^+ \times \mathcal{I}^- \cup \mathcal{I}^- \times \mathcal{I}^+$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour $x \in \mathcal{I}^+$, $y,y' \in \mathcal{I}^-$ (et symétriquement en échangeant + et -) on a :

- si cod(x,y) = m et d(y,y') = 1 alors cod(x,y') = m ± 1.
- si x et y sont fixés et cod(x,y) = m > 0 , alors il existe un unique y' tel que d(y,y') = 1 et cod(x,y') = m + 1 .

Le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{I}^+) \times \mathrm{Aut}(\mathcal{I}^-)$ formé des automorphismes qui respectent la codistance est en fait réduit à $GL_2(k[t,t^{-1}])$. On retrouve donc pour les immeubles jumelés un résultat que l'on a vu pour les immeubles sphériques mais qui est faux pour les immeubles affines $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ séparément.

Dans la figure du second paragraphe on a dessiné l'immeuble $\mathcal{I}^+$ correspondant à $k = \mathbb{F}_2$. Les nombres attribués aux sommets sont les codistances (comme définies ci-dessus) à un sommet * de $\mathcal{I}^-$. La figure ci-dessous représente les immeubles $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ avec encore les codistances à * , elle tente de visualiser les liens entre les bouts des deux arbres.

Cette figure est cependant trompeuse: les bouts de $\mathcal{I}^+$ (resp $\mathcal{I}^-$) sont en bijection avec l'espace projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_2((t)))$ [resp $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_2((t^{-1})))$] et les seuls bouts qui peuvent être en commun entre $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ correspondent aux points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_2(t))$.

Un sommet x de $\mathcal{I}^+$ à codistance strictement positive de * détermine uniquement une géodésique infinie de $\mathcal{I}^+$ d'origine x et au long de laquelle la codistance à * est croissante. Symétriquement il y a une unique géodésique infinie de $\mathcal{I}^-$

d'origine * et au long de laquelle la codistance à x est croissante. Les bouts correspondant à ces deux géodésiques correspondent à un même point situé dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_2(t))$.

Les seules géodésiques infinies de $\mathcal{I}^+$ d'origine ** qui convergent vers un point de $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_2(t))$ sont celles au long desquelles la codistance à * est croissante à partir d'un certain rang r ; la géodésique est alors uniquement déterminée par son début (les sommets numérotés de 0 à sup(r,1)) et par * .

Ces immeubles jumelés sont particulièrement utiles pour étudier les algèbres et groupes de Kac-Moody et leurs formes non déployées [30] , [3] et [23] . On peut aussi chercher à obtenir des résultats abstraits de classification comme il en existe pour les immeubles sphériques; ces recherches sont encore en cours [1] , [22] .

BIBLIOGRAPHIE :

[1] P. Abramenko et B. Mühlherr,Présentations de certaines BN-paires jumelées comme sommes amalgamées, C.R.Acad. Sci. Paris 325 (1997) pp 701-706.

[2] E. Artin, Algèbre géométrique, Gauthiers Villars Paris 1967.

[3] V. Back-Valente, N. Bardy-Panse, H. Ben Messaoud et G. Rousseau, Formes presque déployées des algèbres de Kac-Moody: Classification et racines relatives, J. of Algebra 171 (1995) pp 43-96.

[4] A. Borel, Groupes algébriques linéaires, Annals of Math. 2 (1956) pp 20-80.

[5] A. Borel et J.P. Serre, Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques, Topology 15 (1976) pp211-232.

[6] A. Borel et J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S. 27 (1965) pp 55-151.

[7] A. Borel et J. Tits, Homomorphismes abstraits de groupes algébriques simples, Annals of Math. 97 (1973) pp 499-571.

[8] K. Brown, Buildings, Springer Verlag Berlin 1989.

[9] F. Bruhat, Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps p-adique, Publ. Math. I.H.E.S. 23 (1964) pp 46-74.

[10] F. Bruhat et J. Tits, BN-paires de type affine et données radicielles affines, C.R.Acad. Sci. Paris 263 (1966) pp 598-601.

[11] F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local I: Données radicielles valuées, Publ. Math. I.H.E.S. 41 (1972) pp 5-251.

[12] F. Bruhat et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local II: Schémas en groupes, existence d'une donnée radicielle valuée, Publ. Math. I.H.E.S. 60 (1984) pp 5-184.

[13] F. Bruhat et J. Tits, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, Bul. Soc. Math. France 112 (1984) pp 259-301.

[14] F. Bruhat et J. Tits, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, Deuxième partie : Groupes unitaires, Bul. Soc. Math. France 115 (1987) pp 141-195.

[15] C. Chevalley, Sur certain groupes simples, Tôhoku Math. J. (2) 7 (1955) pp 14-66.

[16] P. Garrett, Buildings and classical groups, Chapman and Hall London 1997.

[17] O. Goldmann et N. Iwahori, The spaces of p-adic norms, Acta Math. 109 (1963) pp 137-177.

[18] N. Iwahori et H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups, Publ. Math. I.H.E.S. 25 (1965) pp 5-48.

[19] V. Kac, Simple graded Lie algebras of finite growth; Funct. Anal. Appl. 1 (1967) pp 328-329.

[20] V. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press 1990.

[21] R. Moody, Lie algebras associated with generalized Cartan matrices, Bul. Amer. Math. Soc. 73 (1967) pp 217-221.

[22] B. Mühlherr et M. Ronan, Local to global structure in twin buildings, Inventiones Math. 122 (1995) pp 71-81.

[23] B. Rémy, Formes presque déployées des groupes de Kac-Moody sur un corps quelconque, Thèse Université Henri Poincaré Nancy 1 1999.

[24] J. Rohlfs et T. Springer, Applications of buildings, pp 1085-1114 in "Handbook of incidence geometry", North Holland Amsterdam 1995.

[25] M. Ronan, Lectures on buildings, Perspectives in Math. 7, Academic Press Boston 1989.

[26] M. Ronan, Buildings: Main ideas and applications, Bull. London Math. Soc. 24 (1992) pp 1-51 et 97-126.

[27] M. Ronan et J. Tits, Twin trees I, Inventiones Math. 116 (1994) pp 463-479.

[28] G. Rousseau, Immeubles sphériques et théorie des invariants, C.R.Acad. Sci. Paris 286 (1978) pp 247-250.

[29] G. Rousseau, Almost split K-forms of Kac-Moody algebras, pp 70-88 in "Infinite dimensional Lie algebras and groups" Marseille 1988, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci. 1989 .

[30] G. Rousseau, L'immeuble jumelé d'une forme presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody, Bull. Soc. Math. Belg. 42 (1990) pp 673-694.

[31] J.P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2 , Astérisque 46 (1977).

[32] J. Tits, Buildings of spherical type and finite BN-pairs, Lecture notes in Math. 386, Springer Verlag Berlin 1974.

[33] J. Tits, On buildings and their applications, pp 259-301 in "Proc. Internat. Congr. Math." Vancouver 1974 , vol. 1, Canadian Math. Congr. 1975.

[34] J. Tits, Buildings and Buekenhout geometries, pp 309-320 in "Finite simple groups II" Durham 1978, M.J. Collins éditeur, Academic Press Boston 1980.

[35] J. Tits, Symétries, C.R.Acad. Sci. Paris série générale 2 (1985) n°1 pp 13-25.

[36] J. Tits, Twin buildings and groups of Kac-Moody type, pp 249-286 in "Groups, combinatorics and geometry" Durham 1990, Liebeck et Saxl éditeurs, London Math. Soc lecture note 165, Cambridge University Press 1992.