

Formes presque-déployées des algèbres
de Kac–Moody:
Classification et racines relatives

VALÉRIE BACK-VALENTE, NICOLE BARDY-PANSE,
HECHMI BEN MESSAOUD, ET GUY ROUSSEAU

*Institut Elie Cartan, Unité associée au C.N.R.S. n° 750, Département
de mathématiques de l'Université Nancy 1, B.P. 239, 54506
Vandoeuvre lès Nancy Cedex, France*

Communicated by J. Tits

Received June 22, 1992

On sait que les algèbres de Kac–Moody sont des généralisations raisonnables (et utiles) en dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples complexes. On appelle forme d'algèbre de Kac–Moody une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique 0 qui devient isomorphe à une algèbre de Kac–Moody sur la clôture algébrique de K . Il se trouve que pour une partie (la moitié?) de ces formes (celles dites presque-déployées) on peut généraliser les théorèmes classiques sur les algèbres de Lie semi-simples sur un corps de caractéristique 0. Pour les autres formes dites presque-anisotropes des résultats sont disponibles essentiellement sur le corps des réels: [R2], [A] et [BeP]; voir aussi [R6] pour une revue d'ensemble.

Cet article est donc consacré aux formes presque-déployées. Le paragraphe 1 rappelle, en fixant les notations, quelques résultats sur les algèbres de Kac–Moody, leurs formes et les groupes associés.

Au paragraphe 2 on continue l'étude à la Borel–Tits [BoT] des formes presque-déployées d'algèbres de Kac–Moody qui a été déjà bien entamée dans [R4] et [R5]. Il s'agit ici essentiellement de généraliser des résultats de Tits [T1] sur la classification de ces formes.

Le paragraphe 3 est consacré à l'étude du système des racines relatives, on y donne sa description complète au moyen d'une matrice dite de Kac–Moody relative. Le point notable est qu'il existe des racines simples imaginaires comme chez Borchers [Bo].

Au paragraphe 4 on explique que les formes réelles presque-déployées des algèbres de Kac–Moody complexes symétrisables sont en correspondance bijective (comme dans le cas classique) avec certaines involutions (dites de seconde espèce) de ces algèbres. Grâce aux résultats de Kac et Wang [KW] sur ces involutions et à ceux du paragraphe 2, on donne un

procédé de classification effective de toutes les formes réelles presque-déployées d'une algèbre de Kac-Moody complexe symétrisable donnée.

Au paragraphe 5 on montre que toutes les formes presque-déployées sur le corps K d'algèbres de Kac-Moody affines peuvent se construire explicitement à partir d'une algèbre de Lie simple sur K par un procédé généralisant la construction des algèbres de lacets (tordues ou non).

On applique enfin tous les résultats précédents dans le paragraphe 6 pour établir le tableau de toutes les formes réelles presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody affines et de leurs systèmes de racines relatives. Ce tableau fournit donc aussi la classification des involutions de seconde espèce des algèbres de Kac-Moody affines complexes.

1. ALGÈBRES DE KAC-MOODY ET FORMES PRESQUE-DEPLOYÉES

1.1. Soient K un corps de caractéristique 0 et \bar{K} sa clôture algébrique.

On considère une algèbre de Kac-Moody \mathfrak{g} sur \bar{K} que l'on suppose construite comme dans [K] et avec toutes ses composantes de dimension infinie. Pour les résultats standards suivants on renvoie à [K] et [PK] ou parfois à [KP1], [KP2], [R2] ou [R4].

Il existe une matrice de Cartan généralisée (encore appelée matrice de Kac-Moody) $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ soit engendrée par l'algèbre de Cartan standard \mathfrak{h} et des éléments e_i, f_i pour $i \in I$. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha})$ où α parcourt le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* - \{0\}$.

On note $\Pi = \{\alpha_i / i \in I\}$ la base (standard) de Δ . L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est $\Delta^+ = \Delta \cap (\bigoplus_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i)$ (resp. $\Delta^- = -\Delta^+$).

Les coracines α_i^{\vee} dans \mathfrak{h} sont telles que $a_{ij} = \alpha_j(\alpha_i^{\vee})$ pour tous i, j . Le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est engendré par l'ensemble S des réflexions fondamentales r_i définies par $r_i(h) = h - \alpha_i(h)\alpha_i^{\vee}$ pour h dans \mathfrak{h} . Une racine réelle est une racine conjuguée par W à une racine dans Π ; leur ensemble est noté Δ^{re} . Les éléments de $\Delta^{im} = \Delta - \Delta^{re}$ sont les racines imaginaires. Le centre de \mathfrak{g} est $\mathfrak{c} = \{H \in \mathfrak{h} / \alpha(H) = 0 \forall \alpha \in \Pi\}$.

1.2. Pour un sous-ensemble J de I on définit le sous-groupe $W(J)$ de W engendré par les r_i , pour $i \in J$ et $Q(J) = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}\alpha_i$, $Q^+(J) = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{N}\alpha_i$; les objets analogues définis avec les α_i^{\vee} sont notés avec des \vee , on omet (J) quand $J = I$.

On définit des sous-ensembles de Δ par:

$$\Delta^p(J) = \Delta \cap (Q(J) \oplus Q^+(I - J)), \quad \Delta(J) = \Delta^m(J) = \Delta \cap Q(J)$$

et

$$\Delta^u(J) = \Delta^p(J) - \Delta^m(J).$$

On en déduit des sous-algèbres de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^+(J) &= \mathfrak{p}(J) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) && \text{où } \alpha \text{ parcourt } \Delta^p(J) \\ \mathfrak{p}^-(J) &= \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) && \text{où } \alpha \text{ parcourt } -\Delta^p(J) \\ \mathfrak{m}(J) &= \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) && \text{où } \alpha \text{ parcourt } \Delta^m(J) \\ \mathfrak{u}^+(J) &= \mathfrak{u}(J) = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha} && \text{où } \alpha \text{ parcourt } \Delta^u(J) \\ \mathfrak{u}^-(J) &= \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha} && \text{où } \alpha \text{ parcourt } -\Delta^u(J). \end{aligned}$$

Alors $\mathfrak{p}^+(J) = \mathfrak{m}(J) \oplus \mathfrak{u}(J)$ (resp. $\mathfrak{p}^-(J) = \mathfrak{m}(J) \oplus \mathfrak{u}^-(J)$) est la sous-algèbre parabolique standard positive (resp. négative) de type J (le mot standard et les signes font référence ici et dans la suite du §1 à la standardisation (\mathfrak{h}, H) de 1.1).

$\mathfrak{u}(J)$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{p}(J)$ et $\mathfrak{m}(J) \cong \mathfrak{p}(J)/\mathfrak{u}(J)$ est le produit d'une sous-algèbre de \mathfrak{h} et d'une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{m}^s(J)$ associée à la matrice $A(J) = (a_{ij})_{i,j \in J}$. Cette algèbre $\mathfrak{m}^s(J)$ contient l'algèbre dérivée $\mathfrak{m}(J)$ engendrée par les e_i, f_i pour $i \in J$; elle est la somme directe de $\mathfrak{m}(J)$ et d'un supplémentaire dans \mathfrak{h} de $\{h \in \mathfrak{h}/\alpha_i(h) = 0 \forall i \in J\} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}(J)$.

Le sous-ensemble J et les paraboliques correspondants sont dits *de type fini* si la matrice $A(J)$ est une matrice de Cartan, c'est à dire si $W(J)$ est fini ou si $\Delta^m(J)$ est fini. Si J ne contient aucune composante connexe de I (ce qui est toujours le cas si J est de type fini) on dit que J et les paraboliques correspondants sont *non-dégénérés*. Quand $J = \emptyset$ les paraboliques $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{p}^+(\emptyset)$ et $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{p}^-(\emptyset)$ sont appelés *sous-algèbres de Borel standards*.

1.3. On définit un groupe G (ne dépendant que de \mathfrak{g}) agissant sur \mathfrak{g} par la représentation adjointe $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$. Il est engendré par des sous-groupes U_{α} , pour α racine réelle, isomorphes au groupe additif \mathfrak{g}_{α} par un isomorphisme \exp tel que: $\text{Ad} \circ \exp = \exp \circ \text{ad}$.

Le groupe H associé à l'algèbre de Cartan standard \mathfrak{h} est l'ensemble des $g \in G$ qui agissent sur \mathfrak{g}_{α} (pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$) par multiplication par un scalaire $\alpha(g)$ dépendant multiplicativement de α (en particulier H fixe $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$). Ainsi pour $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ on a $h \cdot \exp(X) \cdot h^{-1} = \exp(\alpha(h) \cdot X)$ et donc H normalise U_{α} .

Le sous-groupe de Borel standard positif (resp. négatif) est le sous-groupe engendré par H et les U_{α} pour α racine réelle positive (resp. négative).

Pour J dans I le sous-groupe parabolique standard positif (resp. négatif) correspondant à J est $P(J) = P^+(J) = B^+W(J)B^+$ (resp. $P^-(J) = B^-W(J)B^-$); c'est le stabilisateur de $\mathfrak{p}(J)$ (resp. $\mathfrak{p}^-(J)$) dans G . Le groupe $M(J) = P(J) \cap P^-(J)$ est le produit $H \cdot G(J)$ où $G(J)$ est le sous-groupe (distingué) engendré par les U_α pour α racine réelle dans $\Delta^m(J)$.

1.4. Les sous-algèbres de Cartan (c'est à dire les sous-algèbres ad $_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables maximales) de \mathfrak{g} sont conjuguées par G .

Une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} est une sous-algèbre complètement résoluble maximale de \mathfrak{g} ; c'est le cas de \mathfrak{b}^+ et \mathfrak{b}^- qui ne sont pas conjuguées par G . Les sous-algèbres de Borel conjuguées par G à \mathfrak{b}^+ (resp. \mathfrak{b}^-) sont dites positives (resp. négatives). Si \mathfrak{g} est indécomposable il n'y a pas d'autre classe de conjugaison de sous-algèbre de Borel.

Une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} est une sous-algèbre contenant une sous-algèbre de Borel. On dit qu'elle est non dégénérée si elle ne contient aucun facteur indécomposable de \mathfrak{g} et de signe positif ou négatif si elle est propre (i.e. différente de \mathfrak{g}) et si elle contient une sous-algèbre de Borel positive ou négative. Si \mathfrak{g} est indécomposable toute sous-algèbre parabolique propre est non-dégénérée et de signe positif ou négatif. Une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} de signe positif ou négatif est conjuguée à une unique sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{p}^\pm(J)$; elle est non dégénérée si et seulement si J est non dégénéré. On note $\mathfrak{u}(\mathfrak{p})$ le conjugué correspondant de $\mathfrak{u}^+(J)$ et on appelle J le type de \mathfrak{p} .

Les sous-algèbres paraboliques de signe ε de \mathfrak{g} contenues dans la sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{p}^\varepsilon(J)$ correspondent bijectivement (par passage au quotient) aux sous-algèbres paraboliques de signe ε de $\mathfrak{m}^\varepsilon(J)$.

Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de \mathfrak{g} agit de manière compatible à Ad sur G et donc transforme deux sous-algèbres de Borel (ou paraboliques) conjuguées en deux sous-algèbres de Borel (ou paraboliques) conjuguées; il est dit de première espèce s'il transforme une sous-algèbre de Borel positive ou négative en une sous-algèbre de Borel de même signe.

1.5. Une K -forme de \mathfrak{g} est une algèbre de Lie \mathfrak{g}_K telle qu'il existe un isomorphisme de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g}_K \otimes \bar{K}$.

Dans la suite on fixe une telle forme et un tel isomorphisme. Alors le groupe de Galois $\Gamma = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ agit sur \mathfrak{g} et le groupe correspondant G . On identifie \mathfrak{g}_K avec l'ensemble \mathfrak{g}^Γ des points fixes et on définit $G_K = G^\Gamma$.

On dit que \mathfrak{g}_K est presque-déployée si Γ est formé d'automorphismes (semi-linéaires) de première espèce. On sait [R4] que cela équivaut à exiger qu'une sous-algèbre parabolique non dégénérée et de signe positif (resp. négatif) de \mathfrak{g} est définie sur K .

Si \mathfrak{g} est décomposable, cette notion de presque-déployée dépend du choix de la classe de conjugaison des sous-algèbres de Borel opposées \mathfrak{b}^+

et \mathfrak{b}^- . On peut alors de manière plus générale dire que \mathfrak{g}_K est presque-déployée si Γ stabilise une classe de conjugaison de sous-algèbre de Borel; cette notion se ramène à la précédente par le choix de cette sous-algèbre de Borel comme standard.

Un exemple de forme presque-déployée est la *forme déployée* ${}^d\mathfrak{g}_K$ que l'on définit par générateurs et relations comme \mathfrak{g} mais en remplaçant le corps \bar{K} par le corps K . Tous les objets introduits ci-dessus se définissent encore pour ${}^d\mathfrak{g}_K$ (on les orne alors des lettres d et ${}_K$). Les résultats indiqués ci-dessus sont encore valables [PK].

Une partie B de \mathfrak{g} ou de G est dite *définie sur K* si elle est stable par Γ , on note alors $B_K = B^{\Gamma}$. On dit aussi, par exemple, que " P est un K -parabolique" au lieu de " P est un parabolique défini sur K , etc. Inversement si e_K est un K -sous-espace vectoriel de \mathfrak{g}_K , on note $e \cong e_K \otimes \bar{K}$ le \bar{K} -sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} correspondant.

1.6. Sous-algèbres toriques.

Une *sous-algèbre torique K -déployée* de \mathfrak{g}_K est une sous-algèbre \mathfrak{t} pour laquelle la représentation adjointe dans \mathfrak{g}_K est diagonalisable. Une sous-algèbre \mathfrak{t} est dite *torique* si et seulement si $\mathfrak{t} \otimes \bar{K}$ est torique \bar{K} -déployée.

Une *sous-algèbre de Cartan* (en abrégé SAC) de \mathfrak{g}_K est une sous-algèbre \mathfrak{h}_K telle que $\mathfrak{h}_K \otimes \bar{K}$ soit une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Toute sous-algèbre torique de \mathfrak{g}_K est contenue dans une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_K [R4; 4.3].

Il est clair que ${}^d\mathfrak{h}_K$ est une SAC de la forme déployée ${}^d\mathfrak{g}_K$; c'est aussi une sous-algèbre torique K -déployée donc une sous-algèbre torique K -déployée maximale. Il résultera de 2.8 ci-dessous que si dans une forme presque-déployée une SAC est déployée alors cette forme est isomorphe à la forme déployée ${}^d\mathfrak{g}_K$.

1.7. Automorphismes de \mathfrak{g} :

Soit \mathfrak{h} la SAC standard de \mathfrak{g} . On définit dans [PK] un groupe \tilde{H} qui agit sur G et \mathfrak{g} ; en fait $\text{Ad}(\tilde{H})$ est isomorphe à $(\bar{K})^I$ et si l'élément h correspond à $(h_i)_{i \in I}$, il agit sur \mathfrak{g}_α par multiplication par le scalaire $\alpha(h) = \prod_i (h_i)^{n(i)}$ si $\alpha = \sum n(i)\alpha_i \in \Delta \cup \{0\}$.

L'*involution de Cartan* ω de \mathfrak{g} est définie par $\omega(e_i) = -f_i$, $\omega(f_i) = -e_i$ et $\omega(h) = -h$ pour $h \in \mathfrak{h}$; elle dépend donc du choix de l'*épinglage* $(\mathfrak{h}, \Pi, (e_i, f_i)_{i \in I})$ de 1.1.

Le *groupe des automorphismes intérieurs* de \mathfrak{g} est l'image $\text{Int}(\mathfrak{g}) := \text{Ad}(\tilde{H} \times G)$ du produit semi-direct de \tilde{H} et G . Son groupe dérivé est le groupe adjoint $\text{Ad}(G)$ (noté aussi $\text{Int}'(\mathfrak{g})$ ou $\text{Int}(\mathfrak{g}')$) ou *groupe des automorphismes intérieurs* de \mathfrak{g}' (algèbre dérivée de \mathfrak{g}). Ces groupes sont intrinsèquement définis par \mathfrak{g} , cf. [R2].

On considère le groupe $\text{Aut}(A)$ des permutations ρ de I telles que $a_{\rho i, \rho j} = a_{i, j}$ pour $i, j \in I$. On en déduit une action fidèle de $\text{Aut}(A)$ sur \mathfrak{g}' en posant $\rho(e_i) = e_{\rho i}$ et $\rho(f_i) = f_{\rho i}$; cette action commute à ω et $\rho(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$.

où $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \oplus \bar{K}\alpha_i^\vee$; plus précisément $\rho(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\rho_i}^\vee$. D'après [PK] le groupe $\text{Aut}(A) \rtimes \text{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $(\Omega \rtimes \text{Aut}(A)) \rtimes \text{Int}(\mathfrak{g})$) où Ω désigne le groupe commutatif engendré par les involutions de Cartan des composantes de \mathfrak{g}) est le groupe $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce (resp. le groupe $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ de tous les automorphismes) de \mathfrak{g}' (ou $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$).

On peut prolonger l'action de $\text{Aut}(A)$ de \mathfrak{h}' à \mathfrak{h} et donc de \mathfrak{g}' à \mathfrak{g} par le choix d'un supplémentaire de \mathfrak{h}' dans \mathfrak{h} (c'est analogue à la démonstration 2.11b ci-dessous). On peut ainsi considérer $\text{Aut}(A)$ comme un groupe d'automorphismes (dits *de diagramme*) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ commutant à ω et $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ et considérer $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ comme un groupe d'automorphismes de \mathfrak{g} , mais ces définitions ne sont pas intrinsèques [R2].

Le sous-groupe $\text{Tr} = \text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ des *transvections* de \mathfrak{g} (noté $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ dans [KW; 4.20]) est formé des automorphismes de \mathfrak{g} qui induisent l'identité sur \mathfrak{g}' (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$); il commute à $\text{Int}(\mathfrak{g})$ et ω et est isomorphe au groupe additif des applications \bar{K} -linéaires de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ dans \mathfrak{c} , cf. [R2]. Le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} (resp. des automorphismes de première espèce) est $\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}(\mathfrak{g}') \rtimes \text{Tr}$ (resp. $\text{Aut}_1(\mathfrak{g}) = \text{Aut}_1(\mathfrak{g}') \rtimes \text{Tr}$).

2. L'INDICE DES FORMES PRESQUE-DEPLOYEES

Dans tout ce paragraphe \mathfrak{g}_K est une forme presque-déployée de \mathfrak{g} .

La proposition 2.1 ci-dessous est l'un des résultats essentiels de [R4, R5], voir 3.4, 3.5 et 3.11 dans [R5].

PROPOSITION 2.1. *Pour tout signe ε , le groupe G_K agit transitivement sur les paires $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^\varepsilon)$ où \mathfrak{t}_K est une sous-algèbre torique K -déployée maximale (en abrégé SATDM) de \mathfrak{g}_K et $\mathfrak{t}_K \subset \mathfrak{p}_K^\varepsilon$ une K -sous-algèbre parabolique minimale de signe ε de \mathfrak{g}_K . Toute K -sous-algèbre parabolique de signe ε contient une K -sous-algèbre parabolique minimale de signe ε .*

On dira qu'une telle paire $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^\varepsilon)$ est une *standardisation* de \mathfrak{g}_K de signe ε . Ainsi pour $K = \bar{K}$ une standardisation de \mathfrak{g} est une paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ d'une SAC et d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$, ce qui équivaut à la notion introduite en 1.2.

Dans la suite on choisit un signe que l'on note $+$.

PROPOSITION 2.2. *Pour une standardisation $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ de \mathfrak{g}_K , il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_K de \mathfrak{g}_K et une sous-algèbre de Borel positive \mathfrak{b}^+ de \mathfrak{g} telles que:*

$$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+ \subset \mathfrak{p}^+$$

Il existe une partie de type fini I_0 de I telle que $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{p}^+(I_0)$ pour la standardisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ de \mathfrak{g} .

La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{p}^-(I_0)$ est définie sur K et minimale. Elle ne dépend que de \mathfrak{t} et \mathfrak{p}^+ .

DÉFINITIONS. Sous ces conditions on dira que la standardisation $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^-)$ de \mathfrak{g}_K est opposée à $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ et que la standardisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ est compatible avec $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$.

Démonstration. D'après [R4; 4.3] il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_K contenant \mathfrak{t}_K . Avec le langage immobilier de [R4, R5] on a que la facette $F(\mathfrak{p}^+)$ de \mathfrak{p}^+ dans l'immeuble de \mathfrak{g} sur \bar{K} est l'enclos de son intersection $F_K(\mathfrak{p}^+)$ avec le K -appartement $A_K(\mathfrak{t})$ de \mathfrak{t}_K qui est contenu dans l'appartement $A(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{h} ; donc $F(\mathfrak{p}^+) \subset A(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}^+$. L'existence de \mathfrak{b}^+ est alors claire et I_0 est de type fini d'après [R4; 4.7b].

Comme $\mathfrak{p}^-(I_0)$ est la sous-algèbre parabolique opposée à $\mathfrak{p}^+(I_0)$ par rapport à la SAC \mathfrak{h} qui est définie sur K , elle est elle-même définie sur K . Elle est minimale d'après [R4; 4.7b]. Comme la K -chambre $F_K(\mathfrak{p}^-)$ est l'opposée de $F_K(\mathfrak{p}^+)$ dans le K -appartement $A_K(\mathfrak{t})$ l'algèbre \mathfrak{p}^- ne dépend que de \mathfrak{t} et \mathfrak{p}^+ .

Remarque. Pour une SAC \mathfrak{h}_K de \mathfrak{g}_K , il est équivalent de dire que \mathfrak{h}_K contient une SATDM \mathfrak{t}_K de \mathfrak{g}_K et que \mathfrak{h}_K est contenue dans une K -sous-algèbre parabolique minimale \mathfrak{p}_K^+ de \mathfrak{g}_K . En effet, une fois traduit en langage immobilier, cela signifie que l'appartement $A(\mathfrak{h})$ contient un K -appartement $A_K(\mathfrak{t}_K)$ si et seulement si il contient une K -chambre $F_K(\mathfrak{p}_K^+)$ ce qui est clair car $A(\mathfrak{h})$ est stable par le groupe de Galois Γ . Dans ces conditions il existe une sous-algèbre de Borel \mathfrak{b}^+ telle que: $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+ \subset \mathfrak{p}^+$.

PROPOSITION 2.3. Avec les standardisations de 2.2, l'algèbre dérivée $\mathfrak{l}_K = \mathfrak{z}(\mathfrak{t}_K)$ du centralisateur de \mathfrak{t}_K est la sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p}_K^+ relative à \mathfrak{h}_K . C'est une sous-algèbre semi-simple (de dimension finie) définie sur K et K -anisotrope.

Le système de racines Δ_0 de \mathfrak{l} par rapport à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$ admet pour base $\Pi_0 = \{\alpha_i/i \in I_0\}$.

Le groupe de Weyl $W_0 = W(\mathfrak{l})$ de \mathfrak{l} par rapport à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$ est engendré par les r_i pour $i \in I_0$; il agit simplement transitivement sur les sous-algèbres de Borel \mathfrak{b}_i^+ de \mathfrak{g} telles que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}_i^+ \subset \mathfrak{p}^+$.

DÉFINITIONS. (1) On appelle \mathfrak{l}_K le noyau anisotrope de $(\mathfrak{g}_K, \mathfrak{t}_K)$.

(2) La forme \mathfrak{g}_K est dite quasi-déployée s'il existe une sous-algèbre de Borel définie sur K , c'est à dire si \mathfrak{p}_K^+ est une sous-algèbre de Borel autrement dit si $I_0 = \emptyset$ ou encore si \mathfrak{l}_K est réduite à $\{0\}$.

Démonstration. D'après [R4; 4.7b et 3.5e] $\mathfrak{z}(\mathfrak{t}_K)$ est l'algèbre $\mathfrak{m}(I_0)$. Comme I_0 est de type fini, $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}^s(I_0)$ est une algèbre semi-simple qui

admet bien comme base de racines Π_0 et pour groupe de Weyl le sous-groupe W_0 de W engendré par les r_i pour $i \in I_0$.

Aucune sous-algèbre parabolique positive de \mathfrak{g} contenue dans \mathfrak{p}^+ n'est définie sur K , donc aucune sous-algèbre parabolique de \mathfrak{l} n'est définie sur K et ainsi \mathfrak{l}_K est anisotrope. Par contre W_0 agit simplement transitivement sur les sous-algèbres de Borel de \mathfrak{l} contenant $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$ qui sont en bijection avec les sous-algèbres de Borel positives de \mathfrak{g} contenues dans \mathfrak{p}^+ et contenant \mathfrak{h} , d'où la dernière assertion.

2.4. L'action $*$: (cf. [T1; 2.3]). Choisissons \mathfrak{l}_K , \mathfrak{h}_K , \mathfrak{b}^+ et \mathfrak{p}_K^+ comme en 2.2.

(a) Pour γ dans Γ , $\gamma\mathfrak{b}^+$ est une sous-algèbre de Borel positive vérifiant $\mathfrak{h} \subset \gamma\mathfrak{b}^+ \subset \mathfrak{p}^+$. Il existe donc un unique élément w_γ de W_0 tel que $w_\gamma\gamma\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{b}^+$. Ainsi $\gamma^* = w_\gamma\gamma$ stabilise \mathfrak{b}^+ et \mathfrak{h} et donc agit sur Π ou I .

On peut voir facilement que l'on définit ainsi une action notée par une étoile de Γ sur Δ , Π , I et le diagramme de Dynkin. Il est clair que I_0 est stable par cette action.

On peut interpréter différemment cette action $*$:

(b) Les éléments de I sont en correspondance bijective, par $i \rightarrow \text{cl}(\mathfrak{p}^\varepsilon(I - \{i\}))$, avec les classes de conjugaison sous G des sous-algèbres paraboliques de signe ε maximales de \mathfrak{g} . Ainsi Γ permute ces classes de conjugaison et l'action induite de Γ sur I est l'action $*$.

(c) Les orbites de Γ^* dans $I - I_0$ correspondent bijectivement, par $J \rightarrow \mathfrak{p}^\varepsilon(I - J)$, aux sous-algèbres paraboliques propres de \mathfrak{g} , contenant $\mathfrak{p}^\varepsilon(I_0)$, définies sur K et maximales pour cette propriété c'est à dire aux classes de conjugaison sous G_K des K -sous-algèbres paraboliques maximales de signe ε de \mathfrak{g}_K .

(d) Deux sous-algèbres paraboliques \mathfrak{q}^+ et \mathfrak{q}^- de \mathfrak{g} sont conjuguées par G aux sous-algèbres standards $\mathfrak{p}^+(J)$ et $\mathfrak{p}^-(J)$ pour le même $J \subset I$ si et seulement si elles sont opposées c'est à dire si $u(\mathfrak{q}^+) \cap \mathfrak{q}^- = u(\mathfrak{q}^-) \cap \mathfrak{q}^+ = \{0\}$. Cette relation d'opposition est évidemment stable par tout automorphisme (linéaire ou semi-linéaire).

(e) Il résulte des numéros précédents que l'action $*$ de Γ sur le graphe de Dynkin et la partie I_0 de celui-ci sont indépendants des choix faits c'est à dire du signe $+$ et des standardisations compatibles $(\mathfrak{l}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ et $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$.

Remarque. Dans le cas (que l'on exclut ici) où \mathfrak{g} est de dimension finie, on peut choisir de conjuguer une sous-algèbre parabolique à $\mathfrak{p}^+(J)$ ou $\mathfrak{p}^-(J)$. Le changement de ce choix échange donc les types par l'automorphisme d'opposition $-w_0$ (où w_0 est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl). Alors I_0 et l'action $*$ de Γ sont stabilisés par cet automorphisme d'opposition.

2.5. *L'indice de \mathfrak{g}_K* : (cf. [T1; 2.3]).

C'est le triplet consistant en le diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} (dont les sommets sont indexés par I), l'action $*$ de Γ et le sous-ensemble I_0 de I . Ce triplet est bien déterminé par \mathfrak{g}_K comme on vient de le voir.

On représente l'indice par le dessin du diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} sur lequel on figure l'action $*$ de Γ par des flèches (ou en dessinant de manière significativement rapprochée les sommets d'une même orbite); les orbites sous Γ^* des sommets de $I - I_0$ sont encerclées. On note $I' = (I - I_0)/\Gamma^*$ l'ensemble de ces orbites dites *distinguées*.

Bien entendu comme ce dessin ne représente que les orbites de Γ^* , il ne détermine pas complètement l'indice, sauf par exemple pour $K = \mathbb{R}$ et donc $|\Gamma| = 2$.

Remarque 2.6. Si J est une partie de I stable par Γ^* et contenant I_0 , alors (avec les standardisations de 2.2) $\mathfrak{p}^+(J)$ et $\mathfrak{m}(J)$ sont des sous-algèbres définies sur K de \mathfrak{g} . On peut choisir $\mathfrak{m}^+(J)$ définie sur K et alors l'indice de la forme d'algèbre de Kac-Moody correspondante est obtenu à partir de celui de \mathfrak{g}_K en enlevant les sommets du graphe de Dynkin non dans J et les arêtes (ou flèches) qui y aboutissent.

En particulier pour J de type fini, on obtient ainsi l'indice d'une algèbre de Lie semi-simple sur K au sens classique de [T1]. Si $J = I_0$, cette algèbre de Lie semi-simple est \mathfrak{t}_K qui est anisotrope.

2.7. *Racines relatives*: On considère toujours les standardisations de 2.2.

Pour α dans Δ , on note α' sa restriction à \mathfrak{t} . Le système des racines relatives est $\Delta' = \{\alpha' \neq 0 / \alpha \in \Delta\}$. Pour α' dans Δ' , on note $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ l'espace propre correspondant de \mathfrak{t} , c'est à dire la somme directe des \mathfrak{g}_{β} pour $\beta \in \Delta$ et $\beta' = \alpha'$.

PROPOSITION. (1) Pour $i \in I$, on a $\alpha'_i = 0$ si et seulement si $i \in I_0$. Pour $i, j \notin I_0$, on a $\alpha'_i = \alpha'_j$ si et seulement si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $j = \gamma^*i$.

On a $\Delta' \subset \pm(\bigoplus_{i \in I'} \mathbb{N}\alpha'_i)$. Le cardinal de I' est le rang de \mathfrak{g}_K sur K .

(2) L'algèbre \mathfrak{t} contient le centre \mathfrak{c} de \mathfrak{g} ; elle est l'ensemble des H dans \mathfrak{h} tels que $\alpha'_i(H) = 0$ pour i dans I_0 et $\alpha'_i(H) = \alpha'_j(H)$ si $j = \gamma^*i$ pour un γ dans Γ . Autrement dit $\mathfrak{t}/\mathfrak{c}$ est l'ensemble des points de l'orthogonal de Π_0 dans $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ fixes sous l'action (\bar{K} -linéaire) de Γ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ déduite de son action $*$ sur Π .

(3) Pour α' dans Δ' , l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ est de dimension finie et défini sur K .

Démonstration. (1) Par définition I_0 est l'ensemble des $i \in I$ tels que $\alpha'_i = 0$. Comme $\gamma^*i = w_\gamma i$ avec w_γ dans le centralisateur de \mathfrak{t}_K et γ fixant \mathfrak{t}_K , on a $\alpha'_j = \alpha'_i$ si $j = \gamma^*i$. On a bien $\Delta' \subset \pm(\sum_{i \in I'} \mathbb{N}\alpha'_i)$ et il reste donc à montrer que les α'_i pour $i \in I'$ sont libres dans le dual de \mathfrak{t} . Or il résulte de [R5; 3.2, 3.5.5 et 3.6] que le sous-espace vectoriel du dual de \mathfrak{t}

engendré par Δ' a pour dimension le rang c'est à dire le cardinal de I' ; d'où le résultat.

(2) Comme \mathfrak{c}_K est K -diagonalisable dans la représentation adjointe, \mathfrak{t} contient \mathfrak{c} . D'après le 1) \mathfrak{t} est contenu dans l'espace \mathfrak{s} des $H \in \mathfrak{h}$ vérifiant les conditions indiquées. Comme W_0 agit trivialement sur \mathfrak{s} il est clair que Γ stabilise \mathfrak{s} et que la base $(H_i)_{i \in I'}$ de $\mathfrak{s}/\mathfrak{c}$ duale de $(\alpha'_i)_{i \in I'}$ est fixe par Γ . On en déduit que cette base est contenue dans $\mathfrak{s}_K/\mathfrak{c}_K$ donc est une base de $\mathfrak{s}_K/\mathfrak{c}_K$. Ainsi \mathfrak{s}_K est formé d'éléments K -diagonalisables dans la représentation adjointe et $\mathfrak{s}_K = \mathfrak{t}_K$.

(3) Il est clair que $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ est défini sur K , montrons qu'il est de dimension finie. Pour cela il suffit d'après le 1) de montrer que la somme directe \mathcal{V} des \mathfrak{g}_{β} pour $\beta = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i \in \Delta$ et $\sum_{i \in I_0} n_i = N$ (fixé) est de dimension finie. Soient $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}^+ \cap \mathfrak{l}$ la sous-algèbre de Borel positive de \mathfrak{l} et u_0 sa partie nilpotente. Il est clair que \mathcal{V} est l'espace vectoriel engendré par les crochets itérés $[x(i_1), \dots, x(i_N)]$ où pour tout j , $i_j \in I - I_0$ et $x(i_j)$ est dans le sous u_0 -module $X(i_j)$ de \mathfrak{g} engendré par e_{i_j} (les crochets itérés sont définis par récurrence par $[x] = x$ et $[x_1, x_2, \dots, x_n] = [x_1, [x_2, \dots, x_n]]$). Mais u_0 est de dimension finie et engendré par des éléments agissant de manière localement nilpotente sur \mathfrak{g} donc (par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt) $X(i_j)$ est de dimension finie. Ainsi \mathcal{V} lui-même est de dimension finie.

THÉORÈME 2.8, cf. [T1; 2.7]. *La connaissance du noyau anisotrope \mathfrak{l}_K et de l'indice détermine entièrement la forme \mathfrak{g}_K de \mathfrak{g} sur K .*

Plus précisément. Soit ${}_1\mathfrak{g}_K$ une autre K -forme presque-déployée d'algèbre de Kac–Moody. On note avec des ${}_1$ à gauche les objets relatifs à ${}_1\mathfrak{g}_K$ analogues à ceux déjà introduits pour \mathfrak{g}_K .

On suppose qu'il existe une bijection $\Phi: I \rightarrow {}_1I$ et un K -isomorphisme $\psi_K: \mathfrak{l}_K \rightarrow {}_1\mathfrak{l}_K$ entre les noyaux anisotropes tels que, si l'on note encore ψ la bijection de I_0 sur ${}_1I_0$ déduite de l'isomorphisme ψ par l'intermédiaire des sous-algèbres paraboliques, on ait:

(i) Φ est un isomorphisme des diagrammes de Dynkin i.e. ${}_1a_{\Phi_i, \Phi_j} = a_{i,j} \forall i, j \in I$.

(ii) $\Phi(I_0) = {}_1I_0$.

(iii) $\Phi: I \rightarrow {}_1I$ est compatible aux actions $*$ de Γ .

(iv) La restriction de Φ à I_0 est ψ .

Alors il existe un K -isomorphisme Ψ_K de \mathfrak{g}_K sur ${}_1\mathfrak{g}_K$ dont la restriction à \mathfrak{l}_K est ψ_K et qui induit (par l'intermédiaire des sous-algèbres paraboliques positives) la bijection Φ de I sur ${}_1I$.

Démonstration. Considérons des standardisations compatibles $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$, $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ et $({}_1\mathfrak{t}_K, {}_1\mathfrak{p}_K^+)$, $({}_1\mathfrak{h}, {}_1\mathfrak{b}^+)$ pour \mathfrak{g}_K et ${}_1\mathfrak{g}_K$.

(a) D'après (i) il existe un isomorphisme Φ de \mathfrak{g} sur ${}_1\mathfrak{g}$ correspondant à la bijection Φ de I sur ${}_1I$ et tel que $\Phi(\mathfrak{h}) = {}_1\mathfrak{h}$ et $\Phi(\mathfrak{b}^+) = {}_1\mathfrak{b}^+$. D'après (ii), (iii) et 2.7.2 on a aussi $\Phi(\mathfrak{p}^+) = {}_1\mathfrak{p}^+$, $\Phi(\mathfrak{t}) = {}_1\mathfrak{t}$ et donc $\Phi(I) = {}_1I$.

D'après iv) les deux isomorphismes $\Phi|_I$ et ψ diffèrent par un automorphisme intérieur de ${}_1I$. Donc quitte à composer (à gauche) Φ par le prolongement à ${}_1\mathfrak{g}$ d'un automorphisme intérieur de ${}_1I$ (donc sans changer ${}_1\mathfrak{t}$ ni ${}_1\mathfrak{p}^+$) on peut supposer que $\Phi|_I = \psi$. Comme \mathfrak{h} est le centralisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{t} et $\mathfrak{h}_K^0 = \mathfrak{h}_K \cap I_K$, l'algèbre $\Phi(\mathfrak{h})$ est le centralisateur dans ${}_1\mathfrak{g}$ de ${}_1\mathfrak{t}$ et $\psi(\mathfrak{h}_K^0)$ elle est donc encore définie sur K .

On considère maintenant pour ${}_1\mathfrak{g}$ la standardisation $(\Phi(\mathfrak{h}), \Phi(\mathfrak{b}^+))$ que l'on appelle encore $({}_1\mathfrak{h}, {}_1\mathfrak{b}^+)$ et on identifie $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ à $\Delta({}_1\mathfrak{g}, {}_1\mathfrak{h})$ par Φ .

(b) L'isomorphisme Φ est compatible avec les actions $*$ de Γ sur Π et ${}_1\Pi$. Donc pour γ dans Γ l'automorphisme $\theta_\gamma = \Phi^{-1}\gamma\Phi\gamma^{-1}$ de \mathfrak{h} induit sur les racines un élément w_γ de \mathcal{W} .

La restriction ψ de Φ à $\mathfrak{h}^{\mathfrak{h}}$ est définie sur K . Ainsi θ_γ induit l'identité sur $\Delta(I, \mathfrak{h}^0)$ et donc sur \mathfrak{h}^0 .

Les algèbres \mathfrak{t}_K et ${}_1\mathfrak{t}_K$ sont déployées, leurs racines sont donc fixes par Γ . Ainsi θ_γ induit l'identité sur les racines de \mathfrak{t} dans \mathfrak{g} et donc sur $\mathfrak{t}/\mathfrak{c}$.

Finalement θ_γ induit l'identité sur $(\mathfrak{h}^0 + \mathfrak{t})/\mathfrak{c}$. Comme le centralisateur dans \mathfrak{g} de $\mathfrak{h}^0 + \mathfrak{t}$ est réduit à \mathfrak{h} , on en déduit que θ_γ stabilise une base de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et donc que $w_\gamma = 1$.

(c) Ainsi pour γ dans Γ , θ_γ induit l'identité sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ et sur $\mathfrak{h}' = \Sigma \bar{K}\alpha_i^\vee$. Autrement dit θ_γ est un élément du groupe $\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ de 1.7 qui est canoniquement isomorphe aux groupes additifs d'applications linéaires $L(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ et $L(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}', \mathfrak{c})$.

Pour γ' , γ dans Γ , on a $\theta_{\gamma\gamma'} = \theta_\gamma \cdot \gamma(\theta_{\gamma'})$. Autrement dit θ_γ est un 1-cocycle de Γ dans un espace vectoriel sur \bar{K} (défini sur K). Comme $H^1(\Gamma, \bar{K}) = \{0\}$, ce cocycle est un cobord: il existe $\xi \in \text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ tel que $\theta_\gamma = \xi^{-1} \cdot \gamma(\xi)$ sur \mathfrak{h} . Autrement dit $(\Phi\xi^{-1})^{-1}\gamma(\Phi\xi^{-1})\gamma^{-1}$ est l'identité sur \mathfrak{h} . Ainsi quitte à composer (à droite) Φ par ξ^{-1} on peut supposer que $\Phi|_{\mathfrak{h}}$ est défini sur K .

(d) Pour une racine relative $\alpha' \in \Delta'$ (identifié naturellement avec ${}_1\Delta'$) on va définir un isomorphisme K -linéaire $\eta_{\alpha'K}$ de $\mathfrak{g}_{\alpha'K}$ sur ${}_1\mathfrak{g}_{\alpha'K}$ compatible avec les actions de $\mathfrak{h}_K + I_K$ et ${}_1\mathfrak{h}_K + {}_1I_K$ et l'homomorphisme Φ_K de $\mathfrak{h}_K + I_K$ sur ${}_1\mathfrak{h}_K + {}_1I_K$ (qui coïncide avec ψ_K sur I).

L'ensemble L_K des applications K -linéaires de $\mathfrak{g}_{\alpha'K}$ dans ${}_1\mathfrak{g}_{\alpha'K}$ compatibles avec les actions ci-dessus est un K -espace vectoriel. De plus $L = L_K \otimes_K \bar{K}$ est l'espace défini de manière analogue sur \bar{K} ; il contient

donc un isomorphisme: la restriction de Φ . Mais les applications qui ne sont pas des isomorphismes sont les zéros d'un polynôme à coefficients dans K et K est infini, il existe donc dans L_K l'isomorphisme $\eta_{\alpha'K}$ cherché.

(e) Définissons d'abord Ψ sur \bar{K} : on impose que Ψ est égal à Φ sur \mathfrak{h} , à Φ et à ψ sur I et à $\eta_{\alpha'}$ sur \mathfrak{g}_{α} pour $\alpha \in \Pi - \Pi_0$. Comme les algèbres \mathfrak{g} et ${}_1\mathfrak{g}$ sont définies par générateurs et relations et comme la définition partielle de Ψ ci-dessus échange les générateurs et relations respectifs, il existe bien un isomorphisme Ψ de \mathfrak{g} sur ${}_1\mathfrak{g}$ ayant les restrictions ci-dessus à \mathfrak{h} , I et \mathfrak{g}_{α} pour $\alpha \in \Pi - \Pi_0$.

Mais $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ est, pour la représentation de $\mathfrak{h} + I$, une somme directe de modules de plus haut poids engendrés par les vecteurs e_i pour $i \in I - I_0$ tel que $\alpha' = \alpha'_i$ (cf. la démonstration de 2.7.3). Comme Ψ et $\eta_{\alpha'}$ coïncident sur \mathfrak{g}_{α} et sont tous deux compatibles avec les actions de $\mathfrak{h} + I$, ils coïncident sur $\mathfrak{g}_{\alpha'}$.

Pour montrer que Ψ est défini sur K il faut vérifier que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\Psi\gamma^{-1} = \Psi$ sur les générateurs \mathfrak{h} , I et $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ (pour $\alpha \in \Pi - \Pi_0$) de \mathfrak{g} . C'est clair d'après les choix ci-dessus et les résultats c) et d) précédents.

Remarques 2.9. Soit \mathfrak{g}_K une forme presque-déployée d'algèbre de Kac-Moody.

(1) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^n$ est une décomposition de \mathfrak{g} en somme directe d'algèbres de Kac-Moody, on a une décomposition correspondante $I = I^1 \cup I^2 \cup \cdots \cup I^n$ de I en parties disjointes et disconnexes.

Si K'/K est une extension finie, si $I' = \text{Gal}(\bar{K}/K')$ et si la décomposition de \mathfrak{g} est stable par I' , alors I' permute les I^j et les \mathfrak{g}^j par la même permutation des indices.

Si chaque facteur de la décomposition est défini sur K , alors l'indice de \mathfrak{g}_K est la réunion disjointe et disconnexe des indices des \mathfrak{g}_K^j .

(2) Si $I = I^1 \cup I^2 \cup \cdots \cup I^n$ est une réunion disjointe et disconnexe, on a une décomposition correspondante $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^n$ de \mathfrak{g} en somme directe d'algèbres de Kac-Moody. Supposons maintenant la partition de I stable par Γ .

Si Γ^j est le sous-groupe de Γ qui stabilise I^j et si K^j/K est l'extension finie correspondante, on peut modifier le facteur \mathfrak{g}^j par des éléments du centre c de façon que le nouveau facteur \mathfrak{g}^j soit défini sur K^j et que l'on ait encore la décomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^i$: En effet si \mathfrak{g}_j est la somme directe des \mathfrak{g}^k pour $k \neq j$, les algèbres dérivées \mathfrak{g}'' et \mathfrak{g}'_j sont stables par Γ^j (comme sommes directes des idéaux non commutatifs minimaux de \mathfrak{g} correspondant aux composantes de I^j et $I_j = I - I^j$). Ainsi le centralisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{g}'_j est stable par Γ^j et somme directe de \mathfrak{g}^j et du centre c_j de \mathfrak{g}_j (ou de \mathfrak{g}'_j). Comme c_j et \mathfrak{g}'' sont définis sur K^j , il existe un

supplémentaire \mathfrak{h}^j de $\mathfrak{c}_j \oplus \mathfrak{g}''$ dans $\mathfrak{c}_j \oplus \mathfrak{g}^j$ qui est défini sur K^j . Alors $\mathfrak{g}'' \oplus \mathfrak{h}^j$ est la nouvelle algèbre \mathfrak{g}^j cherchée.

En faisant des choix comme ci-dessus des \mathfrak{g}^j pour un j dans chaque orbite de Γ et en transportant ces \mathfrak{g}^j par Γ , on obtient une décomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^i$ stable par Γ .

(3) *Restriction des scalaires*: Sous les hypothèses de 2) on suppose que Γ agit transitivement sur $\{1, \dots, n\}$. On a donc une décomposition en somme directe de \mathfrak{g} stable par Γ . Soit \mathfrak{g}^1 l'un des facteurs, $\Gamma' = \Gamma^1$ le groupe et $K' = K^1$ le corps correspondants. On indexe la décomposition et les groupes ou corps par les éléments de $\Gamma/\Gamma' = \{\sigma: K' \rightarrow \bar{K}\}$: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma/\Gamma'} \mathfrak{g}^\sigma$. Le groupe Γ agit (à gauche) sur Γ/Γ' et pour $\gamma \in \Gamma$ on a: $\gamma(\mathfrak{g}^\sigma) = \mathfrak{g}^{\gamma\sigma}$, $\gamma\Gamma^\sigma = \Gamma^{\gamma\sigma}$ et $K^\sigma = \sigma(K')$.

On note \mathfrak{g}_K^1 , l'algèbre des points fixes sous Γ' de \mathfrak{g}^1 : c'est une K' -forme d'algèbre de Kac-Moody. Comme \mathfrak{g}_K^1 est un facteur de $\mathfrak{g}^{\Gamma'}$ on a un homomorphisme K -linéaire d'algèbres de Lie ϕ_K de $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}^{\Gamma'}$ dans \mathfrak{g}_K^1 . C'est en fait un isomorphisme K -linéaire: l'inverse ψ_K est donné par $\psi_K(X') = (\sigma(X'))_{\sigma \in \Gamma/\Gamma'}$ si $X' \in \mathfrak{g}_K^1$ (et donc $\sigma(X') \in \mathfrak{g}_{\sigma(K')}$).

Ainsi \mathfrak{g}_K est K -isomorphe à une K' -forme d'algèbre de Kac-Moody \mathfrak{g}_K^1 , considérée comme une algèbre de Lie sur K . Réciproquement il est classique que pour toute K -algèbre de Lie \mathfrak{g}_K restriction des scalaires d'une K' -algèbre de Lie \mathfrak{g}_K^1 , on a une décomposition de \mathfrak{g} en somme directe d'algèbres de Lie comme dans les hypothèses de ce numéro.

Voyons maintenant quel est l'indice de \mathfrak{g}_K^1 .

Si N' est un K' -sous-espace vectoriel de \mathfrak{g}_K^1 , on a $\psi_K(N') = (\bigoplus_{\sigma \in \Gamma/\Gamma'} \sigma(N'))^{\Gamma'}$. On en déduit facilement que $\mathfrak{h}_{K'}^1$ est une SAC de \mathfrak{g}_K^1 si et seulement si $\psi_K(\mathfrak{h}_{K'}^1)$ est une SAC de \mathfrak{g}_K et que $\mathfrak{p}_{K'}^1$ est une K' -sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g}_K^1 si et seulement si $\psi_K(\mathfrak{p}_{K'}^1)$ est une K -sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g}_K ; en particulier \mathfrak{g}_K^1 est une forme presque-déployée. Par ailleurs si $\mathfrak{t}_{K'}^1$ est une SATDM de \mathfrak{g}_K^1 , alors $\mathfrak{t}_K = \psi_K(\{X \in \mathfrak{t}_{K'}^1 / \alpha'(X) \in K \ \forall \alpha' \in \Delta(\mathfrak{g}_K^1, \mathfrak{t}_{K'}^1)\})$ est une SATDM de \mathfrak{g}_K et si \mathfrak{b}^{1+} est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g}^1 alors $\mathfrak{b}^+ = \bigoplus_{\sigma \in \Gamma/\Gamma'} \sigma(\mathfrak{b}^{1+})$ est une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} . Donc si $(\mathfrak{t}_{K'}^1, \mathfrak{p}_{K'}^1)$ et $(\mathfrak{h}_{K'}^1, \mathfrak{b}^{1+})$ sont des standardisations compatibles de \mathfrak{g}_K^1 , alors $(\mathfrak{t}_K, \psi_K(\mathfrak{p}_{K'}^1))$ et $(\psi_K(\mathfrak{h}_{K'}^1), \mathfrak{b}^+)$ sont des standardisations compatibles de \mathfrak{g}_K .

Il est maintenant clair que l'indice de \mathfrak{g}_K^1 s'obtient en ne retenant de celui de \mathfrak{g}_K que le sous-graphe de Dynkin correspondant à I^1 , avec $I_0^1 = I^1 \cap I_0$ et en prenant pour action de Γ' la restriction à Γ' et I^1 de l'action de Γ sur I .

2.10. Le problème de classification.

Pour classifier les formes presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody il faut maintenant déterminer les indices *admissibles*, c'est à dire ceux qui peuvent correspondre à des formes.

Une K -forme est évidemment somme directe de K -formes indécomposables. Son indice est alors réunion disjointe des indices de ces K -formes indécomposables (cf. 2.9.1).

Une K -forme indécomposable \mathfrak{g}_K peut ne pas être absolument indécomposable (i.e. \mathfrak{g} peut ne pas être indécomposable). D'après la remarque précédente les composantes connexes du graphe de Dynkin sont alors permutées transitivement par Γ et il existe une extension finie K'/K et une K' -forme presque-déployée $\mathfrak{g}_{K'}^1$ qui est absolument indécomposable telle que \mathfrak{g}_K soit $\mathfrak{g}_{K'}^1$ considérée comme algèbre de Lie sur K .

On est donc ramené au problème de la classification des formes absolument indécomposables. La proposition suivante dit que l'on peut se ramener au rang 0 ou 1 et le cas des formes quasi-déployées est traité en 2.12.2. D'autres résultats seront obtenus aux paragraphes 4, 5 et 6.

2.11. On considère un indice \mathcal{S} de \mathfrak{g} sur K , c'est à dire une action $*$ de $\Gamma = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} (dont les sommets sont indexés par I) et une partie de type fini I_0 de I stable par Γ^* .

Pour tout $i' \in I' = (I - I_0)/\Gamma^*$, on considère la partie $I_{i'}$ de I réunion de I_0 et de l'orbite i' , l'action $*$ induite sur $I_{i'}$ et la partie I_0 de $I_{i'}$. On obtient donc ainsi pour chaque $i' \in I'$ un indice $\mathcal{S}_{i'}$ sur K de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}_{i'} = \mathfrak{g}(A(I_{i'}))$.

PROPOSITION, cf. [Sa; II 3.12]. *Si pour chaque $i' \in I'$ il existe une forme presque-déployée $\mathfrak{g}_{i'K}$ de $\mathfrak{g}_{i'}$ dont l'indice est $\mathcal{S}_{i'}$ et si pour $i', j' \in I'$ les noyaux anisotropes de $\mathfrak{g}_{i'K}$ et $\mathfrak{g}_{j'K}$ sont K -isomorphes, alors il existe une forme presque-déployée \mathfrak{g}_K de \mathfrak{g} dont l'indice est \mathcal{S} et dont le noyau anisotrope est isomorphe à ceux des formes $\mathfrak{g}_{i'K}$.*

Remarques. (1) Ainsi l'admissibilité d'un indice se vérifie au rang 0 et 1.

(2) Cette condition suffisante d'admissibilité est aussi nécessaire d'après 2.6.

Démonstration. (a) On a donc une K -algèbre semi-simple anisotrope I_K et des K -isomorphismes $\phi_{i'K}$ de I_K sur chacun des noyaux anisotropes des $\mathfrak{g}_{i'K}$. On choisit une sous-algèbre de Borel \mathfrak{b}^0 de I contenant une SAC \mathfrak{h}^0 définie sur K .

Soit $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ une standardisation de \mathfrak{g} . On peut identifier I à la sous-algèbre $\mathfrak{m}(I_0)$ de \mathfrak{g} de façon que $\mathfrak{h}^0 = \mathfrak{h} \cap I$ et $\mathfrak{b}^0 = \mathfrak{b} \cap I$.

Il existe un isomorphisme $\psi_{i'}$ de la sous-algèbre $\mathfrak{m}^{\vee}(I_{i'})$ de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g}_{i'}$ tel que la standardisation de $\mathfrak{m}^{\vee}(I_{i'})$ déduite de $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ soit échangée avec une standardisation $(\mathfrak{h}_{i'}, \mathfrak{b}_{i'}^+)$ de $\mathfrak{g}_{i'}$ compatible avec une standardisation de $\mathfrak{g}_{i'K}$ et que $\phi_{i'} = \psi_{i'}$ sur I (cf. la démonstration 2.8a).

(b) Pour $\gamma \in I'$, $\gamma(\mathfrak{b}^0)$ est une sous-algèbre de Borel de I contenant \mathfrak{h}^0 , il existe donc un unique $w_\gamma \in W_0 = W(I, \mathfrak{h}^0) \subset W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tel que

$w_\gamma^{-1}\gamma(b^0) = b^0$. Ainsi $w_\gamma^{-1}\gamma$ induit une bijection de $\Delta_0 = \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}^0)$ qui est l'action γ^* sur l'indice: $\gamma = w_\gamma\gamma^*$. Comme γ correspond à une action de Γ sur \mathfrak{h}^0 on a $w_{\gamma'\gamma} = w_{\gamma'} \cdot \gamma'^*(w_\gamma)$ dans W_0 pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Réciproquement cette formule montre que $\gamma = w_\gamma\gamma^*$ définit un homomorphisme de Γ dans $W_0 \rtimes \Gamma^*$, donc une action sur $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et des actions K -linéaires de Γ sur $R = \sum_{\alpha \in \Delta_{re}} K\alpha$ (qui est un K -sous-espace vectoriel de \mathfrak{h}^*) et $R^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta_{re}} K\alpha^\vee$ (qui est un K -sous-espace vectoriel de \mathfrak{h}). De plus ces deux actions sont compatibles avec la dualité entre ces deux espaces vectoriels.

$c_K = c \cap R^\vee$ est une K -forme de c , elle est stable par W_0 et Γ^* donc par le groupe $W_0 \rtimes \Gamma^*$ (dont l'action sur $\Delta_{re}, \Delta_{re}^\vee$, etc. se fait via un groupe fini). Soit \mathfrak{h}_K^1 un supplémentaire de c_K dans R^\vee stable par $W_0 \rtimes \Gamma^*$. Soit \mathfrak{h}^2 un supplémentaire de c dans \mathfrak{h} contenant \mathfrak{h}^1 . On note $\mathfrak{h}_K^2 = \{X \in \mathfrak{h}^2 / \alpha(X) \in K \ \forall \alpha \in K\}$ et $\mathfrak{h}_K^3 = \mathfrak{h}_K^2 \oplus c_K$ qui sont des K -formes de \mathfrak{h}^2 et \mathfrak{h} . On a $\mathfrak{h}_K^2 \cap R^\vee = \mathfrak{h}_K^1$.

La dualité entre \mathfrak{h}_K^2 et R est non dégénérée. On en déduit donc une action de Γ sur \mathfrak{h}_K^2 coïncidant sur \mathfrak{h}_K^1 avec l'action sur R^\vee . Comme $\mathfrak{h}_K^3 = \mathfrak{h}_K^2 + R^\vee$, on obtient ainsi une action K -linéaire de Γ sur \mathfrak{h}_K^3 et une action \bar{K} -semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{h} prolongeant l'action sur \mathfrak{h}^0 (qui est contenu dans $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = R^\vee \otimes \bar{K}$) et compatible avec l'action $*$ de Γ sur le graphe de Dynkin.

Ces deux dernières conditions caractérisent en fait l'action de Γ sur \mathfrak{h}' .

(c) On vient donc de construire une action de Γ sur $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l} + \mathfrak{h}$ prolongeant l'action sur \mathfrak{l} et compatible avec les actions $*$ de Γ .

Par hypothèse il existe une action semi-linéaire de Γ sur l'algèbre dérivée \mathfrak{g}'_i compatible avec son action sur \mathfrak{l} et avec les actions $*$ de Γ sur les graphes. En particulier \mathfrak{g}'_i est gradué par $\Delta'_i \cup \{0\}$ où Δ'_i est une partie de Δ , cette graduation est stable par Γ et l'action de Γ sur Δ'_i est induite par l'action de Γ sur Δ du b). De la remarque à la fin du (b) on déduit que l'isomorphisme ψ_i qui transforme $\mathfrak{h}^0 \oplus (\bigoplus_{i \in I'} \bar{K}\alpha_i^\vee)$ en $\mathfrak{h}'_i \cap \mathfrak{g}'_i$ est compatible aux actions semi-linéaires de Γ sur $\mathfrak{l} + \mathfrak{h}$ et \mathfrak{g}'_i .

(d) Soit $\bar{\mathfrak{g}}$ le quotient de la somme amalgamée des algèbres de Lie \mathfrak{g}_0 et \mathfrak{g}'_i (pour $i' \in I'$) au dessus de \mathfrak{l} par les relations:

$$(1) [h, X] = \alpha(h)X \text{ pour } h \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0 \text{ et } X \in \mathfrak{g}'_{i'} \text{ de poids } \alpha \in \Delta_{i'} \subset \Delta.$$

$$(2) [X, Y] = 0 \text{ si } X \in \mathfrak{g}'_{i'} \text{ et } Y \in \mathfrak{g}'_{j'} \text{ sont de poids respectifs } \alpha, \beta \text{ avec } \alpha + \beta \notin \Delta$$

$$(3) h = \psi_{i'}(h) \text{ pour } h \in \bigoplus_{i \in I'} \bar{K}\alpha_i^\vee.$$

Alors \mathfrak{g} est le quotient de $\bar{\mathfrak{g}}$ par le plus grand idéal de $\bar{\mathfrak{g}}$ ne rencontrant pas \mathfrak{h} . En effet $\bar{\mathfrak{g}}$ est un quotient de l'algèbre de Lie de générateurs \mathfrak{h} et les e_i, f_i pour $i \in I$ avec les relations habituelles (sauf les relations de Serre) et il admet \mathfrak{g} pour quotient.

(e) Le groupe Γ agit semi-linéairement sur \mathfrak{g}_0 et les \mathfrak{g}'_γ de manière compatible avec son action sur I et en stabilisant d'après (b) les ensembles de relations (1), (2) et (3). On obtient ainsi une action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{g} qui coïncide avec les actions déjà connues sur \mathfrak{g}_0 et les images des \mathfrak{g}'_γ ; d'où la K -forme cherchée.

Remarques 2.12. (1) Il est facile de construire une action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{g} à partir d'une action sur \mathfrak{g}' ou $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ correspondant à un certain indice: l'action sur \mathfrak{h} est construite comme en 2.11b et le supplémentaire $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ qui doit être stable par Γ s'envoie isomorphiquement dans $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$. Ainsi l'admissibilité d'un indice se voit par exemple sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

(2) Les formes quasi-déployées sont caractérisées d'après le théorème 2.8 par une action de Γ (égale à l'action $*$) sur le graphe de Dynkin.

Réciproquement tout indice quasi-déployé (c'est à dire avec $I_0 = \emptyset$) est admissible: on construit une action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{h} comme 2.11b et si on pose $\gamma(e_i) = e_{\gamma i}$ et $\gamma(f_i) = f_{\gamma i}$ pour $\gamma \in \Gamma$, on obtient aussitôt l'action semi-linéaire de Γ sur \mathfrak{g} et donc la forme quasi-déployée cherchée grâce à la définition par générateurs et relations de \mathfrak{g} .

Si K est un corps de dimension cohomologique 1 (mais infini car de caractéristique 0!) il n'existe pas d'algèbre semi-simple anisotrope sur K non triviale, cf. e.g. [T1; 3.3.1]. Donc sur un tel corps toute forme presque-déployée est quasi-déployée.

3. LE SYSTEME DES RACINES RELATIVES

On considère une forme presque-déployée \mathfrak{g}_K de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et des standardisations compatibles $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ et $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$.

3.1. *Généralités.* D'après ce qui précède, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{t}_2$ où $\mathfrak{t}_1 = \bigcap_{i \in I_0} \text{Ker}(\alpha_i)$ et $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{h}^{\Gamma^*} + \mathfrak{c}$.

Pour étudier le système de racines relatives $\Delta' = \{\alpha' = \alpha|_{\mathfrak{t}} / \alpha \in \Delta, \alpha' \neq 0\}$, on peut étudier d'abord $\bar{\Delta} = \{\bar{\alpha} = \alpha|_{\mathfrak{t}_2} / \alpha \in \Delta, \bar{\alpha} \neq 0\}$ puis les restrictions $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}|_{\mathfrak{t}} = \alpha'$. Dans le cas quasi-déployé on a $\bar{\Delta} = \Delta'$, donc ce qui est valable pour Δ' l'est aussi pour $\bar{\Delta}$ (cf. 2.12.2).

D'après 2.7.1 on a $\Delta' \subset \pm \bigoplus_{i \in I'} \mathbb{N}\alpha'_i$ où $I' = (I - I_0)/\Gamma^* = I/\Gamma^* - I_0/\Gamma^*$,

$$\text{donc aussi } \bar{\Delta} \subset \pm \bigoplus_{i \in \bar{I}} \mathbb{N}\bar{\alpha}_i \text{ où } \bar{I} = I/\Gamma^*.$$

Dans la suite pour $i \in I$ on se permettra parfois de noter encore i la classe $i' = \bar{i} = \Gamma^*i$ dans \bar{I} .

Les résultats des numéros 3.2 à 3.5 seront valables dans $\bar{\Delta}$ et dans Δ' ; on considèrera Δ' comme une généralisation de $\bar{\Delta}$.

3.2. *Racines relatives réelles*, cf. [R5; 3.6, 3.7 et 3.11].

On appelle *racines relatives réelles*, les racines α' pour $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ telles que $\{\beta \in \Delta^{\text{re}} / \exists \lambda > 0 \beta' = \lambda \alpha'\}$ est fini. Pour une telle racine il existe un élément $R_{\alpha'}$ du groupe de Weyl relatif $W' = W_K = N_K/L$ (où N_K (resp. L) est le normalisateur (resp. fixateur) de \mathfrak{t} dans G_K) qui induit dans \mathfrak{t} la réflexion par rapport à l'hyperplan $\{v/\alpha'(v) = 0\}$.

Remarques. (1) Il est clair que si β' est une racine réelle alors la racine $\bar{\alpha}$ de $\bar{\Delta}$ telle que $\bar{\alpha}' = \beta'$ est réelle dans $\bar{\Delta}$.

(2) Dans le cas $\bar{\Delta}$, on a avec les mêmes définitions un groupe de Weyl relatif \bar{W} qui est le sous-groupe W^{I^*} de W formé des éléments fixes sous l'action $\gamma^* \cdot w = \gamma^* w \gamma^{*-1}$. De plus les racines réelles de $\bar{\Delta}$ sont les restrictions à \mathfrak{t}_2 des racines réelles de Δ dont l'orbite sous I^* est *prénilpotente* c'est à dire contenue dans $w_1 \Delta_+ \cap w_2 \Delta_-$ pour des éléments w_1 et w_2 de W [Hée].

(3) Si α' est une racine réelle de Δ' , son mur dans le K -appartement correspondant à \mathfrak{t} est engendré par son intersection avec l'adhérence d'une K -chambre positive [R5; 3.7c]; en conjuguant α' par le groupe de Weyl W_K [R5; 3.11] on peut supposer que cette chambre est la K -chambre canonique correspondant à \mathfrak{p}_K^+ . Il est alors clair que α' est colinéaire à une racine de la base Π' , cf. [R5; 3.6].

Dans le cas de $\bar{\Delta}$ le résultat analogue est dû à Hée [Hée].

3.3. *Racines relatives simples*. (1) Pour $i \in I - I_0$, α'_i est une racine relative simple réelle si et seulement si $\Delta(I^*i \cup I_0)$ est fini, en effet cette dernière condition équivaut à $\Delta^{\text{re}}(I^*i \cup I_0)$ fini, donc à $\Delta^{\text{re}}(I^*i \cup I_0) - \Delta^{\text{re}}(I_0)$ fini c'est à dire à $\{\beta \in \Delta^{\text{re}} / \exists \lambda > 0 \beta' = \lambda \alpha'_i\}$ fini.

Dans ce cas, d'après 2.6, l'indice de \mathfrak{g}_K restreint à $I^*i \cup I_0$ est un indice de rang relatif 1 parmi ceux répertoriés par Tits [T1]. En particulier la somme des coefficients, suivant les α_j pour $j \in I^*i$, de la plus grande racine de chaque composante connexe de $I^*i \cup I_0$ qui rencontre I^*i (elles sont toutes de même type) est au plus 2.

Une racine relative simple réelle α'_i admettra un multiple entier positif dans Δ' si et seulement si la somme précédente est 2, ce multiple est alors $2\alpha'_i$; on dit que $i \in I'_2$ dans ce cas. Dans les autres cas où α'_i est réelle on dit que $i \in I'_1$, on a alors:

$$i \in I'_1 \Rightarrow \mathbb{N}\alpha'_i \cap \Delta' = \{\alpha'_i\} \quad i \in I'_2 \Rightarrow \mathbb{N}\alpha'_i \cap \Delta' = \{\alpha'_i, 2\alpha'_i\}.$$

On définit de même \bar{I}'_1 et \bar{I}'_2 .

(2) Lorsque α'_i n'est pas réelle, elle est dite *imaginaire*, $\Delta(I^*i \cup I_0)$ n'est pas fini et il contient des racines imaginaires dont le support

rencontre nécessairement Γ^*i . Une racine imaginaire de Δ a tous ses multiples entiers dans Δ donc $\{n \in \mathbb{N}/n\alpha'_i \in \Delta'\}$ n'est pas borné.

(3) Lorsque $\alpha' \in \Delta'_+$ et n'est pas une racine simple, il existe $i \in I'$ tel que $\alpha' - \alpha'_i \in \Delta'_+$. En effet $\mathfrak{g}_{\alpha'} \neq \{0\}$ et est la somme directe des \mathfrak{g}_α pour α dans Δ et $\alpha|_1 = \alpha'$. Il existe donc un tel α et un $v \neq 0$ dans \mathfrak{g}_α qui est obtenu comme crochet itéré $v = [e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}]$ avec $\sum_{j=1, n} \alpha_{i_j} = \alpha$. Par suite il existe $k \geq 0$ tel que $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I_0$ et $i_{k+1} = j$ non dans I_0 ; alors le crochet itéré $[e_{i_{k+2}}, \dots, e_{i_n}]$ est non nul et de poids β avec $\beta' = \alpha' - \alpha'_j$, d'où le résultat.

3.4. *Coracine d'une racine relative réelle.* Si α' est une racine relative réelle l'élément $R_{\alpha'}$ (cf. 3.2) est associé à un élément α'^\vee de \mathfrak{t} appelé *coracine* de α' et défini par: $R_{\alpha'}(h) = h - \langle h, \alpha' \rangle \alpha'^\vee \quad \forall h \in \mathfrak{t}$. On posera $\alpha'^\wedge = (2\alpha')^\vee$ si α' est multipliable et $\alpha'^\wedge = \alpha'^\vee$ sinon.

Quand α'_i est une racine relative simple réelle, un calcul classique (expliqué par exemple dans [B; III 3.2]) détermine le diagramme de Dynkin du système de racines relatives $\bar{\Delta}_i = \bar{\Delta}(\{i'\} \cup J_0/\Gamma^*)$ où $J_0 \cup i'$ est la réunion des composantes connexes de $I_0 \cup i'$ rencontrant i' (qui sont toutes de même type). Si l'action de Γ^* sur l'une de ces composantes connexes n'est pas triviale, le système de racines relatives correspondant est donné par la fig. 1.

Dans tous les cas l'automorphisme d'opposition de $\bar{\Delta}_i$ stabilise J_0/Γ^* et fixe i' . L'élément du groupe de Weyl induisant $R_{\alpha'_i}$ est l'élément le plus long de $\bar{W}(\{i'\} \cup J_0/\Gamma^*)$, il échange la racine longue en son opposée.

3.5. *Condition de chaîne réelle.*

Si $i \in I'_1$ (resp. I'_2) on sait qu'il est possible de trouver dans \mathfrak{g}_K un \mathfrak{sl}_2 -triplet E'_i, F'_i, H'_i dans $(\mathfrak{g}_\beta)^{I'}, (\mathfrak{g}_{-\beta})^{I'}, [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}]^{I'}$ où $\beta = \alpha'_i$ (resp. $2\alpha'_i$) et $H'_i = \alpha'_i^\wedge$ dans les deux cas. On note $\mathfrak{g}_{(i)} = KE'_i \oplus KF'_i \oplus KH'_i$.

Si $\alpha' \in \Delta'_+ - \mathbb{N}\alpha'_i$ la somme directe des \mathfrak{g}_β pour $\beta \in \Delta' \cap (\alpha' + \mathbb{Z}\alpha'_i)$ est un $\mathfrak{g}_{(i)}$ -module. D'après la théorie des \mathfrak{sl}_2 -modules et comme $\alpha'_i(\alpha'_i^\wedge) = 2$ (resp. 1) on a:

Si $i \in I'_1$ $\Delta' \cap (\alpha' + \mathbb{Z}\alpha'_i) = \{\alpha' - p\alpha'_i, \dots, \alpha' + q\alpha'_i\} \subset \Delta'_+$ avec $p - q = \langle \alpha', \alpha'_i^\vee \rangle$.

Si $i \in I'_2$ il existe des entiers p et q tels que: $p - q = \langle \alpha', \alpha'_i^\vee \rangle = \langle \alpha', 2\alpha'_i^\wedge \rangle$,

$$\{\alpha' - p\alpha'_i, \alpha' - (p-2)\alpha'_i, \dots, \alpha' + (q-2)\alpha'_i, \alpha' + q\alpha'_i\} \subset \Delta'_+ \quad \text{et}$$

$$\Delta' \cap (\alpha' + \mathbb{Z}\alpha'_i) \subset \{\alpha' - p\alpha'_i, \dots, \alpha' + q\alpha'_i\}.$$

De plus si $i \in I'_2$ et $\alpha' - (p-2k)\alpha'_i \in \Delta'$ ainsi que $\alpha' - (p-2k-2)\alpha'_i$ on passe de l'un des espaces radiciels correspondants à l'autre grâce à l'action adjointe non nulle de E'_i ou F'_i . Supposons qu'il s'agisse de E'_i . Il existe alors $v \in \mathfrak{g}_{\alpha' - (p-2k)\alpha'_i}$ tel que $[E'_i, v] \neq 0$. Ainsi un des crochets

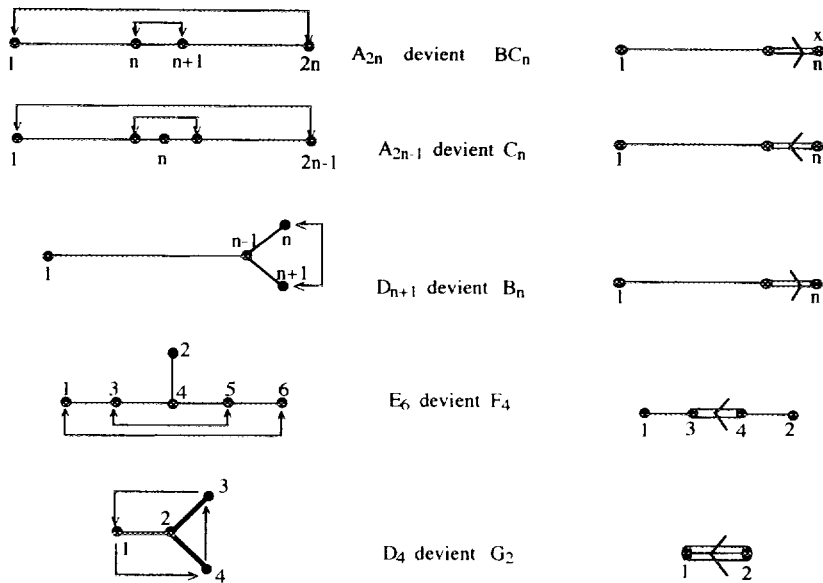
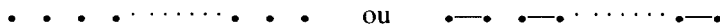


FIG. 1. Diagrammes relatifs dans les cas de type fini non triviaux (la croix au dessus du sommet n dans BC_n signifie que $2\alpha'_n$ est une racine, cf 3.6).

itérés contenant 2 éléments e_j avec $j \in i$ intervenant dans la combinaison linéaire donnant E'_i ne commute pas à v ; on le note $[e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}]$. Quitte à faire une permutation de $\{1, \dots, n\}$ on a $\text{ad}(e_{j_1})\text{ad}(e_{j_2}) \dots \text{ad}(e_{j_n})v \neq 0$ donc pour $k \geq 1$ on a $\text{ad}(e_{j_k}) \dots \text{ad}(e_{j_n})v \neq 0$. Si on choisit k de façon que $\{j_k, \dots, j_n\} \cap i$ soit réduit à un élément on en déduit aussitôt que: $\mathfrak{g}_{\alpha' - (p-2k-1)\alpha'_i}$ n'est pas réduit à 0. Ainsi même si $i \in I'_2$ on a $\Delta' \cap (\alpha' + \mathbb{Z}\alpha'_i) = \{\alpha' - p\alpha'_i, \dots, \alpha' + q\alpha'_i\} \subset \Delta'_+$ avec $p - q = \langle \alpha', \alpha'_i \rangle$.

3.6. Matrice et graphe associés à $\bar{\Delta}$.

(a) Pour $i \in \bar{I}$ une étude rapide des orbites montre que $\bar{\alpha}_i$ est réelle c'est à dire i est de type fini (comme partie de I) si et seulement si i est de la forme:



On obtient facilement que dans le premier cas $2\bar{\alpha}_i \notin \bar{\Delta}$ ($i \in \bar{I}_1$) et $\bar{\alpha}_i^\vee = \sum_{j \in i} \alpha_j^\vee$ et dans le second cas $2\bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta}$ ($i \in \bar{I}_2$) et $(2\bar{\alpha}_i)^\vee = \sum_{j \in i} \alpha_j^\vee$.

(b) Si on pose pour tout $i \in \bar{I}$ $\bar{\alpha}_i^\wedge = \sum_{j \in i} \alpha_j^\vee$ la notation est compatible avec celle de 3.4 et on a: $\bar{Q}^\vee = \bigoplus_{i \in \bar{I}} \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i^\wedge = \mathfrak{t}_2 \cap Q^\vee$. Ainsi \bar{Q}^\vee contient toutes les coracines de racines réelles de $\bar{\Delta}$ et il est stable par le groupe de Weyl \bar{W} .

(c) On définit la matrice $B = (b_{ij})$ ($i, j \in (\bar{I})^2$) par $b_{ij} = \langle \bar{\alpha}_j, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle = \langle \alpha_j, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle$.

Les calculs du a) rouvent que $\bar{\alpha}_i$ est réelle si et seulement si $b_{ii} = 2$ (et dans ce cas $2\bar{\alpha}_i \notin \bar{\Delta}$, $i \in \bar{I}_1$) ou $b_{ii} = 1$ (et dans ce cas $2\bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta}$, $i \in \bar{I}_2$) et que $\bar{\alpha}_i$ est imaginaire si et seulement si $b_{ii} \leq 0$.

On en déduit aussitôt que B est une matrice de Kac–Moody relative au sens suivant:

(d) Une matrice $B = (b_{ij})$ ($i, j \in J$) est dite *de Kac–Moody relative* (KMR) si:

- (1) Les coefficients de B sont entiers.
- (2) $b_{ii} \leq 2$.
- (3) $b_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$.
- (4) $b_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ji} = 0$.

Cela généralise donc la notion de matrice de Kac–Moody seulement en ce que $b_{ii} = 2$ est remplacé par $b_{ii} \leq 2$.

Si b_{ii} est strictement positif on pose $c_{ij} = (2/b_{ii})b_{ij}$, dans les autres cas on pose $c_{ij} = b_{ij}$.

(e) On définit le graphe associé à une matrice de Kac–Moody relative:

à chaque $i \in J$ on associe un sommet orné d'une croix si $b_{ii} = 1$, d'un signe—si $b_{ii} < 0$ et de 0 si $b_{ii} = 0$.

Deux sommets distincts i et j sont liés si et seulement si $b_{ij} \neq 0$. Plus précisément, si b_{ii} et b_{jj} sont simultanément strictement positifs on pose $\lambda = c_{ij}c_{ji} \in \mathbb{N}$ et $\mu = \sup(|c_{ij}|, |c_{ji}|) \in \mathbb{N}$ et, si $\lambda \leq 4$ on joint les sommets i et j par μ traits avec une flèche pointant vers i si $|c_{ij}| > 1$. Si $\lambda \geq 5$ ou si l'un des deux coefficients b_{ii} ou b_{jj} est négatif on joint les sommets i et j par un trait gras orné des deux entiers $|c_{ij}|$ (près de i) et $|c_{ji}|$ (près de j).

3.7. *Condition de chaîne imaginaire pour $\bar{\Delta}$* : Soit $i \in I$.

PROPOSITION. Si $\bar{\alpha}_i$ est une racine relative simple imaginaire dans $\bar{\Delta}_+$, et si $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ - \mathbb{N}\bar{\alpha}_i$, on a alors:

$$\bar{\alpha} + \mathbb{N}\bar{\alpha}_i \subset \bar{\Delta}_+ \text{ si les supports de } \bar{\alpha} \text{ et } \bar{\alpha}_i \text{ sont liés.}$$

$$(\bar{\alpha} + \mathbb{N}\bar{\alpha}_i) \cap \bar{\Delta} = \{\bar{\alpha}\} \text{ sinon.}$$

Remarque. Il est clair que le support de $\bar{\alpha}$ est lié au support $\{i\}$ de $\bar{\alpha}_i$ (dans \bar{I}) si et seulement si on a: $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0$.

Démonstration. Soit $\beta \in \Delta$, on sait que le support de β est connexe, on en déduit facilement la connexité du support de la racine $\bar{\beta} \in \bar{\Delta}$. Si les supports de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}_i$ ne sont pas liés on a donc $(\bar{\alpha} + \mathbb{N}\bar{\alpha}_i) \cap \bar{\Delta} = \{\bar{\alpha}\}$.

Supposons maintenant les supports de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}_i$ liés. Soit $\alpha \in \Delta$ dont la restriction à t_2 est $\bar{\alpha}$. Alors le support S_α de α est lié à une composante

connexe de i' , composante connexe qui n'est pas de type fini puisque $\bar{\alpha}_i$ est imaginaire. Or i' est réunion de composantes de même type, soit J l'une de celles liées au support de α . D'après [K; 4.3] on a:

Si J est de type affine, $v \in \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j = Q(J)$, $A(J)v \geq 0 \Rightarrow A(J)v = 0$,

Si J est de type indéfini, $v \in \bigoplus_{j \in J} \mathbb{N}\alpha_j = Q^+(J)$, $A(J)v \geq 0 \Rightarrow v = 0$.

On considère la décomposition $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ de α dans $Q(S_a - J) \oplus Q(J)$ et on applique le résultat précédent à $v = \alpha_2$. En étudiant les deux cas on montre facilement que:

$$\exists j \in J \text{ tel que } \langle \alpha, \alpha_j^\vee \rangle < 0, \text{ donc } \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_j \in \bar{\Delta} \quad [\text{K; cor. 3.6}].$$

Par une récurrence immédiate, on a le résultat.

THÉORÈME 3.8. $\bar{\Delta}$ est l'unique sous-ensemble de $\bar{Q} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i$ vérifiant:

$$(SR1) \quad \bar{\Delta} \subset \bar{Q}_+ \cup \bar{Q}_-, \quad \bar{\Delta}_+ = -\bar{\Delta}_- = \bar{\Delta} \cap \bar{Q}_+$$

$$\text{où on a posé } \bar{Q}_+ = -\bar{Q}_- = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{N}\bar{\alpha}_i.$$

$$(SR2) \quad \bar{\Pi} = \{\bar{\alpha}_i / i \in \bar{I}\} \subset \bar{\Delta} \text{ et plus exactement:}$$

$$\text{si } b_{ii} = 1 \quad \mathbb{N}\bar{\alpha}_i \cap \bar{\Delta}_+ = \{\bar{\alpha}_i, 2\bar{\alpha}_i\}$$

$$\text{si } b_{ii} = 2 \quad \mathbb{N}\bar{\alpha}_i \cap \bar{\Delta}_+ = \{\bar{\alpha}_i\}$$

$$\text{si } b_{ii} \leq 0 \quad \mathbb{N}\bar{\alpha}_i \cap \bar{\Delta}_+ = \mathbb{N}^*\bar{\alpha}_i.$$

$$(SR3) \quad \text{Pour } \bar{\alpha}_i \text{ réelle et pour } \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ - \mathbb{N}\bar{\alpha}_i \text{ on a:}$$

$$(\bar{\alpha} + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i) \cap \bar{\Delta}_+ = \{\bar{\alpha} - p\bar{\alpha}_i, \dots, \bar{\alpha} + q\bar{\alpha}_i\} \text{ avec } p - q = \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle.$$

$$(SR4) \quad \text{Pour } \bar{\alpha}_i \text{ imaginaire et pour } \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ - \mathbb{N}\bar{\alpha}_i \text{ on a:}$$

$$(\bar{\alpha} + \mathbb{N}\bar{\alpha}_i) \subset \bar{\Delta}_+ \Leftrightarrow \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0.$$

$$(\bar{\alpha} + \mathbb{N}\bar{\alpha}_i) \cap \bar{\Delta}_+ = \{\bar{\alpha}\} \Leftrightarrow \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle = 0.$$

$$(SR5) \quad \text{Pour } \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ - \bar{\Pi} \text{ il existe } i \in \bar{I} \text{ tel que } \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta}_+.$$

Remarques. (1) $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle$ et $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle$ se calculent grâce à la matrice B .

(2) Une étude abstraite des systèmes de racines infinis (avec essentiellement les cinq axiomes ci-dessus) est développée dans [Bp]; elle inclut

les systèmes ci-dessus et ceux de 3.10 mais les généralise au cas où les $\bar{\alpha}_i$ ne sont pas libres.

Démonstration. D'après les numéros précédents, ces 5 propriétés sont vérifiées par $\bar{\Delta}$. En effet pour (SR2) on sait que si $\bar{\alpha}_i$ est imaginaire $\{n \in \mathbb{N}/n\bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta}\}$ n'est pas borné, on en déduit facilement le résultat par (SR5).

Montrons que ces propriétés caractérisent $\bar{\Delta}$. Soit \mathcal{F} l'ensemble des parties Ω de $\bar{\Delta}$ qui vérifient les propriétés (SR1), (SR2), (SR3), et (SR4); on note \mathcal{F}' le sous-ensemble de \mathcal{F} formé des parties qui vérifient de plus (SR5). \mathcal{F} et \mathcal{F}' ne sont pas vides, car ils contiennent $\bar{\Delta}$. Notons Δ^* l'intersection des Ω de \mathcal{F} . On vérifie facilement que $\Delta^* \in \mathcal{F}$ et il est clair que $\Delta^* \subset \Omega$ pour tout $\Omega \in \mathcal{F}'$; montrons qu'en réalité $\Delta^* = \Omega$ pour tout $\Omega \in \mathcal{F}'$, ce qui établira l'unicité de $\bar{\Delta}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\Omega \in \mathcal{F}'$ avec $\Omega \neq \Delta^*$. Il existe alors $\beta \in \Omega - \Delta^*$ de hauteur minimale. Mais Ω vérifie (SR5) et Δ^* comme Ω vérifient (SR2), il existe donc $\bar{\alpha}_i$ non colinéaire à β telle que $\beta - \bar{\alpha}_i$ soit dans Δ^* . En considérant les chaînes $(\beta + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i) \cap \Delta^*$ et $(\beta + \mathbb{Z}\bar{\alpha}_i) \cap \Omega$, les axiomes (SR3) et (SR4) permettent de conclure que $\beta \in \Delta^*$; d'où la contradiction.

3.9. *Matrice de \mathcal{A} '*: Pour $i \in I'$, on pose: $\bar{\alpha}_i^\wedge = \sum_{\bar{w} \in \bar{W}(I_0/I^*)} \bar{w}\bar{\alpha}_i \in \bar{Q}^\vee$, où $\bar{W}(I_0/I^*)$ est le sous-groupe de \bar{W} engendré par les réflexions par rapport aux $\bar{\alpha}_j$ avec $j \in \bar{I}_0 = I_0/I^*$.

L'élément $\bar{\alpha}_i^\wedge$ est invariant par $\bar{W}(I_0/I^*)$ donc se trouve dans $t_1 \cap \bar{Q}^\vee = t \cap Q^\vee$.

Soit alors $B' = (b'_{ij})_{ij \in I'}$ où $b'_{ij} = \langle \alpha'_j, \alpha'_i^\wedge \rangle$ où α'_i^\wedge désigne l'élément $\bar{\alpha}_i^\wedge$ si α'_i est imaginaire, la coracine (au sens de 3.4) de α'_i (resp. $2\alpha'_i$) si α'_i est réelle et $2\alpha'_i \notin \mathcal{A}$ (resp. $2\alpha'_i \in \mathcal{A}$).

PROPOSITION. *B' est une matrice de Kac-Moody relative. Soit $i \in I - I_0$, si α'_i est réelle, c'est à dire si $\Gamma^*i \cup I_0$ est de type fini, on a: $\bar{\alpha}_i^\wedge \in \mathbb{Q}_+^* \alpha'_i^\wedge$.*

DÉMONSTRATION. (1) Supposons α'_i réelle, alors $b'_{ii} \in \{1, 2\}$ et $\Gamma^*i \cup I_0$ est de type fini. D'après [K; 4.3] étendu au cas décomposable de type fini, on a $\det(\mathcal{A}(\Gamma^*i \cup I_0)) \neq 0$ et si $v \in Q^\vee(\Gamma^*i \cup I_0)$ on a: ${}^t\mathcal{A}(\Gamma^*i \cup I_0)v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$.

Mais ${}^t\mathcal{A}(\Gamma^*i \cup I_0)\bar{\alpha}_i^\wedge$ est le vecteur colonne dont les composantes correspondant à I_0 sont nulles et celles correspondant à Γ^*i sont toutes égales à $\alpha_i(\bar{\alpha}_i^\wedge)$. Par suite, comme les coordonnées (sur la base Π^\vee) de $\bar{\alpha}_i^\wedge$ sont dans \mathbb{N} et non toutes nulles, $\alpha_i(\bar{\alpha}_i^\wedge)$ est nécessairement strictement positif.

De même ${}^t\mathcal{A}(\Gamma^*i \cup I_0)\alpha'_i^\vee$ est un vecteur colonne dont les composantes correspondant à I_0 sont nulles et celles correspondant à Γ^*i sont toutes

égales à b'_{ii} ($= 1$ ou 2). Comme la matrice $'A(\Gamma^*i \cup I_0)$ est inversible on en déduit que $\tilde{\alpha}'_i \in \mathbb{Q}_+^* \alpha'_i$.

(2) Si α'_i est imaginaire, $\Gamma^*i \cup I_0$ n'est pas de type fini, donc, par invariance par Γ^* , toutes les composantes connexes J de $\Gamma^*i \cup I_0$ rencontrant Γ^*i sont de même type (non fini). Le support de $\tilde{\alpha}'_i$ est inclus dans la réunion de ces composantes et, si J désigne l'une d'entre elles on a:

$$\text{Si } J \text{ est de type affine: } \quad v \in Q(J), \quad A(J)v \geq 0 \Rightarrow A(J)v = 0.$$

$$\text{Si } J \text{ est de type indéfini: } \quad v \in Q_+(J), \quad A(J)v \geq 0 \Rightarrow v = 0.$$

Il est clair que ces propriétés s'étendent au cas d'une réunion de composantes de même type, on peut donc remplacer J par la réunion $J(i)$ des composantes de $\Gamma^*i \cup I_0$ rencontrant Γ^*i .

Le même raisonnement qu'au 1) montre que:

Dans le cas affine $'A(J(i))(\tilde{\alpha}'_i) \geq 0$ (ou ≤ 0 selon le signe de $\alpha'_i(\tilde{\alpha}'_i)$), ce qui implique $'A(J(i))(\tilde{\alpha}'_i) = 0$, donc $b'_{ii} = 0$.

Dans le cas indéfini, comme $\tilde{\alpha}'_i$ n'est pas nul mais a ses coordonnées sur la base Π^\vee entières et positives, on a nécessairement $'A(I_0 \cup \Gamma^*i)(\tilde{\alpha}'_i) \leq 0$ et non nul, donc $b'_{ii} < 0$.

(3) Il est clair que si α'_i est imaginaire ($i \in I'_{im}$), les coefficients b'_{ij} sont entiers. Si α'_i est réelle ($i \in I'_{re}$), un simple calcul permet de montrer que $\alpha'_i \in \bar{Q} \cap t_1$ (résultat classique puisque $\Gamma^*i \cup I_0$ est de type fini) donc b'_{ij} est encore entier dans ce cas.

(4) Si $i \neq j$ dans I' on a: $(\mathbb{Q}_+^*)b'_{ij} \ni \langle \alpha'_j, \tilde{\alpha}'_i \rangle = \sum_w \langle \bar{\alpha}_j, w\tilde{\alpha}'_i \rangle$ où la somme est étendue à tous les $w \in \bar{W}(\bar{I}_0)$. Mais chaque $\langle \bar{\alpha}_j, w\tilde{\alpha}'_i \rangle$ est négatif ou nul (donc $b'_{ij} \leq 0$) et sont tous nuls si $b'_{ij} = 0$.

En supposant cette dernière condition vérifiée et en utilisant le fait que dans $\bar{\Delta}$ (tout comme dans Δ), les supports d'une racine réelle et de sa coracine sont les mêmes, on a:

$\langle w\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}'_j \rangle = 0$ pour tout $w \in \bar{W}(\bar{I}_0)$, d'où $\langle \bar{\alpha}_i, \tilde{\alpha}'_j \rangle = 0$ soit $b'_{ji} = 0$. D'où la proposition.

THÉORÈME 3.10. Δ' est l'unique sous-ensemble de Q' associé à B' par les conditions (SR1) à (SR5) du théorème 3.8 (sous réserve de remplacer à chaque fois $^-$ par $'$).

Démonstration. L'unicité se démontre comme en 3.8. Les relations (SR1), (SR3) et (SR5) ont déjà été vues en 3.1, 3.5 et 3.3.3. Comme en 3.8, on déduit (SR2) de (SR5) et du fait que $\{n \in \mathbb{N}/n\alpha'_i \in \Delta'\}$ n'est pas borné si α'_i est imaginaire.

Pour établir (SR4) on introduit la notion de support relatif d'une racine $\alpha' \in \Delta'_+$. Il s'agit de la composante connexe de $S_{\alpha'} \cup (I_0/\Gamma^*)$ contenant

l'ensemble $S_{\alpha'}$ des $i \in I'$ tels que α' s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des α'_i , $i \in I'$. La démonstration de (SR4) se fait en 6 étapes plus ou moins claires.

(1) Il existe $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ qui a pour support le support relatif de α' et telle que $\bar{\alpha}|_t = \alpha'$. (c'est clair et cela prouve que le support relatif est bien connexe)

(2) Les supports relatifs de α' et α'_j sont liés si et seulement si le support relatif de α' est lié à j (dans \bar{I}).

(3) Il existe $\alpha \in \bar{\Delta}$ dont la restriction à t est α' et telle que $\forall i \in I_0$ $\langle \alpha, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle \leq 0$. (il suffit de considérer la racine de hauteur minimale dans $\bar{\Delta}$ de restriction α')

(4) Si $\bar{\alpha}_j$ est réelle (dans $\bar{\Delta}$), si α'_j est imaginaire (dans \mathcal{D}'), si j appartient au support relatif de α' et si α' n'est pas colinéaire à α'_j , alors: $\alpha' + \alpha'_j \in \mathcal{D}'$.

Soit $\alpha \in \bar{\Delta}$ comme dans l'étape 3, $\alpha|_t = \alpha'$.

Si $\langle \alpha, \bar{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$ on a $\alpha + \bar{\alpha}_j \in \bar{\Delta}$ (d'après (SR3) dans $\bar{\Delta}$), d'où le résultat.

Supposons maintenant $\langle \alpha, \bar{\alpha}_j^\wedge \rangle \geq 0$ et considérons l'élément w_0 de plus grande longueur de $\bar{W}(\bar{I}_0)$ (où $\bar{I}_0 = I_0/\Gamma^*$). Pour $i \in \bar{I}_0$ on a $\langle \alpha, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle \leq 0$ donc $\langle w_0\alpha, \bar{\alpha}_i^\vee \rangle \geq 0$. Comme $w_0 \in \bar{W}(\bar{I}_0)$ on a $(w_0\alpha)^\vee = \alpha'$.

Notons $w_0\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_1 \in \bar{Q}(J(j))$ et $\alpha_2 \in \bar{Q}(\bar{I} - J(j))$ où $J(j)$ désigne le support relatif de j . Comme $w_0\alpha$ est une racine positive de $\bar{\Delta}$ on a $\alpha_1 \in \bar{Q}^+(J(j))$ et $\alpha_2 \in \bar{Q}^+(\bar{I} - J(j))$, comme $J(j)$ n'est pas de type fini on a: $'B(J(j))\alpha_1 \geq 0 \Rightarrow 'B(J(j))\alpha_1 = 0$. Il y a donc deux cas:

Soit pour tout $i \in J(j)$ $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle = 0$ auquel cas $J(j)$ est affine. Comme α' n'est pas proportionnelle à α'_j , on a $\alpha_2 \neq 0$ et donc il existe $i \in J(j)$ tel que $\langle \alpha_2, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0$. Ainsi $\langle w_0\alpha, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle = \langle \alpha_1 + \alpha_2, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0$, donc $i \in J(j) - \bar{I}_0 = \{j\}$ et $\alpha' + \alpha'_j = (w_0\alpha)^\vee + \alpha'_j \in \mathcal{D}'$ (d'après (SR3) dans $\bar{\Delta}$).

Soit il existe $k \in J(j)$ tel que $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_k^\wedge \rangle < 0$. Or $\langle \alpha_2, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle \leq 0 \forall i \in J(j) - \{j\} \subset \bar{I}_0$ et $\langle \alpha_1 + \alpha_2, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle \geq 0 \forall i \in \bar{I}_0$ donc $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle \geq 0 \forall i \in J(j) - \{j\}$. Ainsi $k = j$ et $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$ comme $\langle \alpha_2, \bar{\alpha}_j^\wedge \rangle \leq 0$ on en déduit comme ci-dessus que $\alpha' + \alpha'_j \in \mathcal{D}'$.

(5) Supposons toujours α' non colinéaire à α'_j ,

$\alpha' + \mathbb{N}\alpha'_j \subset \mathcal{D}'$ si et seulement si les supports relatifs de α' et α'_j sont liés.

$(\alpha' + \mathbb{N}\alpha'_j) \cap \mathcal{D}' = \{\alpha'\}$ sinon.

La seconde assertion est claire car les supports relatifs des racines sont connexes. Si les supports relatifs de α' et α'_j sont liés on choisit $\bar{\alpha}$ comme à l'étape 1 et on a 3 cas: $\bar{\alpha}_j$ imaginaire; $\bar{\alpha}_j$ réelle et j non dans le support relatif de α' ; $\bar{\alpha}_j$ réelle et j dans le support relatif de α' . La conclusion

découle alors respectivement de (SR4) dans $\bar{\Delta}$, de (SR3) dans $\bar{\Delta}$ et de l'étape 4.

(6) Pour établir (SR4) il reste à voir que, dans le cas α'_i imaginaire et non colinéaire à α' les supports relatifs de α' et α'_i sont liés si et seulement si $\langle \alpha', \alpha'_i \rangle < 0$. Mais il est évident que le support de α'_i dans \bar{Q}^\vee est exactement le support relatif de α'_i , d'où le résultat.

4. FORMES REELLES PRESQUE-DEPLOYEES DES ALGÈBRES DE KAC-MOODY SYMETRISABLES

Dans ce paragraphe on a $K = \mathbb{R}$ et donc $\bar{K} = \mathbb{C}$ et on suppose que la matrice de Cartan généralisée $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ est indécomposable et symétrisable.

4.1. *Généralités.* (1) Soit \mathfrak{g}_0 une forme réelle de \mathfrak{g} , comme le groupe $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ est d'ordre deux, l'élément non trivial de Γ agit sur \mathfrak{g} ($= \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$) comme la semi-involution σ' de \mathfrak{g} dont \mathfrak{g}_0 est l'ensemble des points fixes.

Inversement soit σ' une semi-involution de \mathfrak{g} , alors $\mathfrak{g}^{\sigma'} = \{X \in \mathfrak{g} / \sigma'(X) = X\}$ est une forme réelle de \mathfrak{g} .

Ainsi les formes réelles de \mathfrak{g} correspondent bijectivement aux semi-involutions de \mathfrak{g} ; la forme réelle est presque-déployée si la semi-involution est de première espèce.

(2) On note $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ la forme déployée de \mathfrak{g} sur \mathbb{R} , la semi-involution correspondante σ'_n est appelée *semi-involution normale standard* de \mathfrak{g} .

Soit $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ la sous-algèbre de Cartan standard de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, pour $i \in I$ on définit $P_i \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ tel que $(P_i + c)_{i \in I}$ soit la base de $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ duale de Π .

Posons $\omega' = \sigma'_n \omega = \omega \sigma'_n$, où ω est l'involution de Cartan de \mathfrak{g} ; ω' est appelée *semi-involution de Cartan standard* de \mathfrak{g} , son algèbre des points fixes est la forme compacte de \mathfrak{g} .

On appellera *semi-involution de Cartan* (en abrégé SIC) tout conjugué de ω' par un automorphisme de \mathfrak{g} .

(3) Les semi-involutions σ'_n et ω' dépendent non seulement de l'épinglage $(\mathfrak{h}, \Pi, (e_i, f_i)_{i \in I})$ mais aussi de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ c'est à dire d'un "R-supplémentaire" de $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \bigoplus \mathbb{R} \alpha_i^\vee$ dans $\{h \in \mathfrak{h} / \alpha(h) \in \mathbb{R} \forall \alpha \in \Delta\}$. Ce choix de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ n'est donc unique que modulo le centre. On va tourner cette difficulté en raisonnant un peu différemment:

Considérons le sous-groupe $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ introduit en 1.7 et le sous-groupe $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}') = \{1, \sigma'_n\} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}')$ du groupe des automorphismes \mathbb{R} -linéaires de \mathfrak{g} . D'après [R2; 3.6] toute semi-involution de \mathfrak{g} est conjuguée par $\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ à une semi-involution contenue dans $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$; d'après [KW; 4.39] toute involution de seconde espèce de \mathfrak{g} est conjuguée par

$\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ à une involution contenue dans $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$. Dans la suite de ce paragraphe on supposera donc que toutes les involutions ou semi-involutions qui interviendront seront dans $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ ou $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$.

Si l'on ne veut pas faire cette restriction, il faudra rajouter le groupe $\text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ dans les théorèmes de conjugaison qui vont suivre.

Avec ces conventions tout couple formé d'une semi-involution de Cartan et d'une sous-algèbre de Cartan qu'elle stabilise est conjugué par G au couple standard (ω', \mathfrak{h}) [R2].

4.2. Semi-involutions de première espèce.

PROPOSITION 4.2.1: [R2] (on peut voir aussi [KP2].

(1) Soit σ' une semi-involution de \mathfrak{g} :

Pour toute SAC \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , σ' -stable il existe une SIC ω' stabilisant \mathfrak{h} et commutant à σ' . Alors $\theta = \sigma'\omega' = \omega'\sigma'$ est une involution de \mathfrak{g} qui stabilise \mathfrak{h} et commute à σ' .

L'involution θ ou la SIC ω' correspondant à ces conditions est unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur commutant à σ' et stabilisant \mathfrak{h} .

(2) Deux SIC qui commutent et stabilisent une même SAC sont égales.

PROPOSITION 4.2.2. Soit σ' une semi-involution de première espèce de \mathfrak{g} , alors:

(1) σ' stabilise un triplet $(\mathfrak{h}, \mathfrak{p}^+(X), \mathfrak{p}^-(X))$ formé d'une SAC \mathfrak{h} de \mathfrak{g} et de deux sous-algèbres paraboliques opposées de type fini et contenant \mathfrak{h} .

(2) Les couples $(\mathfrak{h}, \mathfrak{p})$ formés d'une SAC \mathfrak{h} σ' -stable et d'une sous-algèbre parabolique positive (resp. négative) \mathfrak{p} σ' -stable minimale et contenant \mathfrak{h} sont conjugués par $G^{\sigma'}$.

N.B. Le groupe $G^{\sigma'}$ est noté $G_{\mathbb{R}}$ au paragraphe 2, mais ici comme on considère plusieurs semi-involutions, on évitera cette notation.

Démonstration. (1) résulte de 2.1 et 2.2 ci-dessus.

(2) Soient $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{p}_i)_{i=1,2}$ deux tels couples et supposons par exemple les \mathfrak{p}_i positives.

En conjuguant par $G^{\sigma'}$ on peut supposer que $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}^+$ pour $i = 1, 2$ où $(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{R}}^+)$ est une standardisation fixée de $\mathfrak{g}^{\sigma'}$. Alors \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 sont des SAC σ' -stables de $\mathfrak{z}(\mathfrak{t})$ et donc $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{l}$ et $\mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{l}$ sont des SAC σ' -stables de \mathfrak{l} . Or $\mathfrak{l}^{\sigma'}$ est une algèbre de Lie semi-simple compacte (2.3) ainsi il existe $l \in L^{\sigma'} \subset G^{\sigma'}$ qui conjugue $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{l}$ en $\mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{l}$ et qui stabilise \mathfrak{t} et \mathfrak{p}^+ . Mais alors l conjugue \mathfrak{h}_1 en \mathfrak{h}_2 car pour $i = 1, 2$ \mathfrak{h}_i est le centralisateur dans \mathfrak{g} de $\mathfrak{t} + (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{l})$.

PROPOSITION 4.2.3. Soit σ' une semi-involution de première espèce, il existe alors une involution de seconde espèce θ vérifiant :

$\theta\sigma'$ est une SIC (en particulier θ commute à σ') et θ et σ' stabilisent une même SAC \mathfrak{h} contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ' -stable minimale.

L'involution θ vérifiant ces conditions est unique à une conjugaison près par $\text{Int}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$.

Démonstration. Soit \mathfrak{h} une SAC σ' -stable et contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ' -stable minimale. Deux choix pour \mathfrak{h} sont donc conjugués par $G^{\sigma'}$ (4.2.2). D'après 4.2.1 il existe une SIC ω' qui stabilise \mathfrak{h} et commute à σ' , par suite $\theta = \sigma'\omega' = \omega'\sigma'$ est une involution de seconde espèce qui commute à σ' et stabilise \mathfrak{h} . Deux choix pour θ vérifiant ces conditions, correspondent à deux choix pour ω' qui stabilisent \mathfrak{h} et commutent à σ' , ils sont donc conjugués par un automorphisme intérieur qui commute à σ' et stabilise \mathfrak{h} (4.2.1).

4.3. Involutions de seconde espèce.

4.3.1. DÉFINITIONS. Rappelons quelques notions introduites par Kac et Wang [KW]. Soit θ une involution de seconde espèce.

(1) Une sous-algèbre \mathfrak{t} de \mathfrak{g} est dite *torique θ -déployée* si elle est $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable et si $\theta|_{\mathfrak{t}} = -\text{Id}_{\mathfrak{t}}$.

(2) Une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} de \mathfrak{g} est dite *θ -déployée* si $\theta(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de Levi de \mathfrak{p} (ou plutôt une sous-algèbre \mathfrak{m} supplémentaire de $\mathfrak{u}(\mathfrak{p})$). Une telle sous-algèbre existe.

(3) Soient \mathfrak{h} une SAC de \mathfrak{g} stable par θ et \mathfrak{b} une sous-algèbre de Borel contenant \mathfrak{h} . Posons $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\Delta^+ = \Delta(\mathfrak{b}, \mathfrak{h})$, Π la base de Δ contenue dans Δ^+ , $\Psi = \theta(\Delta^+) \cap \Delta^+$ et $X = \Pi \cap \Psi$.

La paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est dite *θ -déployée* si $\Psi = \Delta(X)^+$ et θ est l'identité sur $\mathfrak{g}_{\alpha} \forall \alpha \in \Psi$

Une telle paire existe et est unique à conjugaison près par G^{θ} .

LEMME 4.3.2. Soient θ une involution de seconde espèce, \mathfrak{h} une SAC θ -stable de \mathfrak{g} et \mathfrak{b} une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{h} .

(a) Si la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est θ -déployée, alors la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}(X) = \mathfrak{b} + (\bigoplus_{\alpha \in \Delta(X)} \mathfrak{g}_{\alpha})$ est θ -déployée minimale et de type fini. De plus l'algèbre $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}^{-\theta} = \{h \in \mathfrak{h} / \theta(h) = -h\}$ est une sous-algèbre torique θ -déployée maximale de \mathfrak{g} et le centralisateur $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ est égal à $\mathfrak{m}(X)$.

(b) Si \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique θ -déployée minimale et contenant \mathfrak{b} , alors la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est θ -déployée et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(X)$.

Démonstration. Le (a) est [KW; 5.16]. Si \mathfrak{p} est θ -déployée et contient \mathfrak{b} , il existe une partie Y de Π telle que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(Y)$ et $\theta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{-}(Y)$. Si \mathfrak{p}

n'est pas de type fini on peut appliquer le a) à une paire θ -déployée dans l'algèbre de Kac–Moody $m^s(Y) \subset \mathfrak{p} \cap \theta(\mathfrak{p})$; on en déduit une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} de type fini, θ -déployée et contenue dans \mathfrak{p} . Donc si \mathfrak{p} est minimale elle est de type fini et d'après [KW; 4.34] la sous-algèbre $m^s(Y)$ ne contient pas de sous-algèbre torique θ -déployée non triviale, ce qui équivaut à dire, d'après [V], que la restriction de θ à $m^s(Y)$ est l'identité. On en déduit aussitôt que $\Psi = \Delta(Y)^+$ et donc $Y = X$, d'où le résultat.

PROPOSITION 4.3.3. *Soit θ une involution de seconde espèce. Les couples $(\mathfrak{h}, \mathfrak{p})$ formés d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} , θ -stable et une sous-algèbre parabolique positive (resp. négative) \mathfrak{p} , θ -déployée minimale et contenant \mathfrak{h} sont conjugués par G^θ .*

Démonstration. Soient $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{p}_1)$ et $(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{p}_2)$ deux tels couples et pour $i = 1, 2$ soit \mathfrak{b}_i une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{p}_i contenant \mathfrak{h}_i . D'après 4.3.2 les paires $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{b}_i)$ sont θ -déployées et donc conjuguées par G^θ d'après [KW; 5.32]. Par suite les couples $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}(X_i))$ sont conjugués par G^θ .

PROPOSITION 4.3.4. *Soit θ une involution de seconde espèce de \mathfrak{g} , on a alors:*

(i) *A une conjugaison par $\text{Int}(\mathfrak{g})$ près, l'involution θ s'écrit:*

$$\theta = \tau \omega \text{Ad}(n_X) \text{Ad}(s) \quad \text{avec,}$$

$X \subset H$, X de type fini et choisie de façon que $\mathfrak{p}^+(X)$ soit θ -déployée minimale

τ un automorphisme de diagramme qui stabilise X et vérifie $\tau^2 = 1$

ω l'involution de Cartan de \mathfrak{g}

$n_X \in N^\tau \cap N^\omega \cap G(X)$ et $\text{Ad}(n_X)$ est l'élément de plus grande longueur de $W(X)$

$s \in \tilde{H}$ et $\text{Ad}(s)$ commute à θ

(ii) *Il existe une semi-involution de première espèce σ' telle que $\theta\sigma' = \sigma'\theta$ est une SIC et θ et σ' stabilisent une même SAC \mathfrak{h} contenue dans une sous-algèbre parabolique θ -déployée minimale.*

De plus la semi-involution σ' vérifiant ces conditions est unique à une conjugaison près par un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} commutant à θ .

Démonstration. Le (i) est [KW; 4.39], montrons maintenant (ii).

(a) Existence: On peut supposer $\theta = \tau \omega \text{Ad}(n_X) \text{Ad}(s)$ avec les conditions indiquées en (i). Soit ω' la semi-involution de Cartan standard, elle

commute à τ et ω . On verra dans 4.10.2 (qui n'utilise ni 4.3.4 ni 4.4) que l'on peut choisir n_X de façon que $\text{Ad}(n_X)$ commute à ω' . On a alors $\text{Ad}(n_X)(\Delta^+ - \Delta(X)) = \Delta^+ - \Delta(X)$ et $\text{Ad}(n_X^2)(\Delta^+) = \Delta^+$, donc $n_X^2 \in H^\omega \cap H^\tau \cap G(X)$ et on en déduit alors que $n_X^4 = 1$.

La condition $\theta^2 = 1$ s'écrit $\text{Ad}(n_X^2) \cdot \text{Ad}(s^2) = 1$ ce qui donne $\text{Ad}(s^4) = \text{Ad}(n_X^4)^{-1} = 1$. Il existe donc une famille $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels telle que, avec les P_j de 4.1.2, $\text{Ad}(s) = \exp(\text{adi}\pi(\sum_{j \in I} \varepsilon_j P_j))$ et on voit alors que ω' commute à $\text{Ad}(s)$ et donc à θ . Par conséquent la semi-involution $\sigma' = \theta\omega' = \omega'\theta$ répond à la question.

(b) Unicité: Deux choix possibles pour \mathfrak{h} sont conjugués par G^θ (4.3.3). Deux choix pour σ' vérifiant les conditions ci-dessus pour une même SAC correspondent à deux SIC qui commutent à θ et stabilisent \mathfrak{h} , elles sont donc conjuguées par un automorphisme intérieur commutant à θ et stabilisant \mathfrak{h} (4.2.1), d'où le résultat.

THÉORÈME 4.4. *On considère.*

(1) *Les semi-involutions de première espèce σ' de \mathfrak{g} .*

(2) *Les involutions de seconde espèce θ de \mathfrak{g} .*

(3) *La relation: $\sigma' \approx \theta$ si et seulement si*

(a) *$\omega' = \theta\sigma' = \sigma'\theta$ est une SIC.*

(b) *θ et σ' stabilisent une même SAC \mathfrak{h} .*

(c) *\mathfrak{h} est contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ' -stable minimale.*

Alors cette relation induit une bijection entre les classes de conjugaison sous $\text{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$) des semi-involutions de première espèce et celles des involutions de seconde espèce.

Remarques. (1) Si l'hypothèse de 4.1.3 est abandonnée, les classes de conjugaison à considérer sont sous le groupe $\text{Int}(\mathfrak{g}) \times \text{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ (resp. $\text{Aut}(\mathfrak{g})$).

(2) Soient σ' , θ et \mathfrak{h} vérifiant les conditions (a) et (b) ci-dessus et \mathfrak{p} une sous-algèbre parabolique positive et contenant \mathfrak{h} . Il est clair que \mathfrak{p} est σ' -stable (minimale) si et seulement si elle est θ -déployée (minimale). En effet si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(X)$ on a:

$$\sigma'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \Leftrightarrow \theta(\mathfrak{p}) = \omega'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^-(X) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \cap \theta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{m}(X) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \text{ est } \theta\text{-déployée.}$$

Dans ce cas $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}^{-\theta}$ est une sous-algèbre torique θ -déployée maximale de \mathfrak{g} et $\mathfrak{t}^{\sigma'} = \{h \in \mathfrak{h} / \theta(h) = -h = -\sigma'(h)\} = \{h \in \mathfrak{h} / \sigma'(h) = h = \sigma'_n(h)\} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Ainsi $\mathfrak{t}^{\sigma'}$ est une sous-algèbre torique déployée de \mathfrak{h} (contenue dans une SATDM de $\mathfrak{g}^{\sigma'}$, cf. la remarque 2.2). Il est facile de voir que $\mathfrak{t}^{\sigma'} + \mathfrak{c}^{\sigma'}$ est cette SATDM: la définition de déployée donnée en

1.6 ne fait intervenir que la représentation adjointe et donc le centre est toujours contenu dans une SATDM.

Démonstration. Notons par CS11 (resp. CI2) l'ensemble des classes de conjugaison sous $\text{Int}(\mathfrak{g})$ ou $\text{Aut}(\mathfrak{g}')$ des semi-involutions de première espèce (resp. des involutions de seconde espèce) de \mathfrak{g} .

Soient σ' une semi-involution de première espèce, $\text{cl}(\sigma')$ sa classe dans CS11 et \mathfrak{h} une SAC σ' -stable et contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ' -stable minimale. Soit θ une involution de seconde espèce qui stabilise \mathfrak{h} , commute à σ' et telle que $\theta\sigma'$ soit une SIC. D'après 4.2.3 θ existe et sa classe $\text{cl}(\theta)$ dans CI2 est bien déterminée par σ' . Il est clair que $\sigma' \approx \theta$ et l'on obtient donc une application $\phi: \text{CS11} \rightarrow \text{CI2}$ par la formule $\phi(\text{cl}(\sigma')) = \text{cl}(\theta)$.

Montrons maintenant que ϕ est bijective. Soient θ une involution de seconde espèce et \mathfrak{h} une SAC θ -stable contenue dans une sous-algèbre parabolique positive θ -déployée minimale. Soit σ' une semi-involution de première espèce qui stabilise \mathfrak{h} , commute à θ et telle que $\theta\sigma'$ soit une SIC. D'après 4.34(ii) σ' existe et sa classe $\text{cl}(\sigma')$ dans CS11 est bien déterminée par $\text{cl}(\theta)$. On a alors d'après la remarque 2 $\sigma' \approx \theta$ et $\phi(\text{cl}(\sigma')) = \text{cl}(\theta)$; par suite ϕ est bijective.

4.5. *Le problème de classification.*

(1) A une conjugaison par un automorphisme de \mathfrak{g} près, une forme réelle presque-déployée \mathfrak{g}_0 de \mathfrak{g} correspond à une involution de seconde espèce θ qui s'écrit comme dans 4.3.4(i) sous la forme $\theta = \tau\omega \text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$.

D'après 4.3.4(ii) on peut supposer que la semi-involution définissant \mathfrak{g}_0 est $\sigma' = \omega'\theta = \tau\sigma'_n \text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$. La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^+(X)$ est θ -déployée minimale donc σ' -stable minimale. L'action de σ' sur $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est donnée par $\tau w_0(X)$ où $w_0(X)$ est l'élément de plus grande longueur de $W(X)$.

Par conséquent l'indice de \mathfrak{g}_0 (cf. 2.5) est donné par la partie X de I qui est de type fini et par l'automorphisme de diagramme τ qui stabilise X et qui détermine l'action $*$ de $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. En particulier $\tau|_X$ doit être l'automorphisme d'opposition correspondant à $-w_0(X)$.

(2) On considère donc des couples (τ, X) formés d'un automorphisme de diagramme τ et d'une partie de type fini X de I vérifiant la condition:

- (A1) τ est une involution qui stabilise X et γ induit l'automorphisme d'opposition $-w_0(X)$.

On sait que toute algèbre semi-simple complexe a une unique forme réelle compacte (i.e. anisotrope), d'après 2.8 pour classifier les formes réelles presque-déployées, il suffit de déterminer les diagrammes admissibles c'est à dire les couples (τ, X) vérifiant (A1) et tels qu'il existe un choix de n_X et de $s \in \tilde{H}$ commutant à θ tel que $\theta = \tau\omega \text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$ soit une involution.

On peut même fixer un choix pour n_X , car deux choix différents par un élément de $H^\omega \cap H^\tau \cap G(X)$ qui est donc un élément de \tilde{H} commutant à θ (puisque $\text{Ad}(n_X) = \tau\omega$ sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}(X)$).

Pour déterminer ces diagrammes admissibles, on va d'abord rassembler quelques résultats sur les algèbres de Lie semi-simples complexes.

4.6. Soit \mathfrak{s} une algèbre de Lie semi-simple complexe de rang l .

(1) Soient \mathfrak{t} une SAC de \mathfrak{s} , $X = \{\alpha_i, i = 1, \dots, l\}$ une base de $\Delta(\mathfrak{s}) = \Delta(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$, et $\{e_i, f_i, i = 1, \dots, l\}$ les générateurs de Chevalley de \mathfrak{s} correspondant à la base X .

Pour $i = 1, \dots, l$, soit ρ_i le monomorphisme d'algèbre Lie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans \mathfrak{s} défini par: $\rho_i(x) = e_i$, $\rho_i(y) = f_i$ et donc $\rho_i(H) = \alpha_i^\vee$ où $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soient S le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{s} , T un tore maximal de S d'algèbre de Lie \mathfrak{t} , N le normalisateur de T dans S et $W_0 = N/T$ le groupe de Weyl correspondant. Pour $i = 1, \dots, l$, ρ_i s'intègre en un monomorphisme de groupes de Lie de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ dans S qu'on note encore ρ_i .

Pour $s \in \mathbb{C}^*$ et $i = 1, \dots, l$ on pose:

$$\begin{aligned} m(s) &= \exp(sx)\exp(-s^{-1}y)\exp(sx) = \exp(-s^{-1}y)\exp(sx)\exp(-s^{-1}y) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

$m_i(s) = \rho_i(m(s))$ et $m_i = m_i(1)$. Les applications m et donc m_i sont injectives sur \mathbb{C}^* .

(2) Soit \mathbf{I} le groupe libre engendré par $\{1, 2, \dots, l\}$. Le groupe de Weyl est un quotient de \mathbf{I} ; on note $r: \mathbf{I} \rightarrow W_0$ la projection canonique, pour $i \in \{1, \dots, l\}$ on a $r(i) = r_i = \text{Ad}(m_i)$ (considéré comme élément de W_0).

(3) Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq l}$ la matrice de Coxeter associée à W_0 . Pour $i, j \in \{1, \dots, l\}$ on a d'après [T3; §2.4 prop 3]: $m_i m_j m_i \dots = m_j m_i m_j \dots$ (m_{ij} facteurs de chaque côté).

PROPOSITION 4.7. Soient X_0 un groupe et $a: \mathbf{I} \rightarrow X_0$, $b: X_0 \rightarrow W_0$ deux homomorphismes de groupes tels que $b \circ a = r$ (cf. 4.6.2).

Les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes:

(1) Pour $i, j \in \{1, \dots, l\}$ on a $a(i)a(j)a(i)\dots = a(j)a(i)a(j)$ (m_{ij} facteurs de chaque côté).

(2) Soient \mathbf{i} et \mathbf{j} deux mots de \mathbf{I} qui sont minimaux (i.e. $r(\mathbf{i})$ et $r(\mathbf{j})$ sont de longueurs minimales dans W_0) et vérifient $r(\mathbf{i}) = r(\mathbf{j})$ on a alors $a(\mathbf{i}) = a(\mathbf{j})$.

(3) Soient $\mathbf{i} \in \mathbf{I}$ un mot minimal et $j, k \in \{1, \dots, l\}$ tels que $r(\mathbf{i})r_j r(\mathbf{i})^{-1} = r_k$, on a alors $a(\mathbf{i})a(j)a(\mathbf{i})^{-1} = a(k)$.

Démonstration. C'est la proposition 2.1 de [T2].

Conséquence. Pour $X_0 = N$ et a défini par $a(i) = m_i$ pour $i = 1, \dots, l$, on sait d'après 4.6.3, qu'avec $b: N \rightarrow W_0 = N/T$ la projection canonique, les hypothèses et la propriété 1 de la proposition sont vérifiées, ainsi les deux autres propriétés le sont aussi.

DÉFINITION 4.8. On conserve les notations de 4.6.

Soient $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_n$ un mot minimal de \mathbf{I} , $w = r(\mathbf{i})$ l'élément de W_0 correspondant et $m = m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_n} \in N$. D'après 4.7.2 l'élément m ainsi défini ne dépend pas du choix du mot minimal \mathbf{i} mais seulement de w . Ceci permet de définir un automorphisme $w^* = \text{Ad}(m)$ de \mathfrak{s} qui ne dépend que de w (et des choix de $\mathfrak{t}, X, e_i, f_i$).

LEMME 4.9. Soient w_0 l'élément de plus grande longueur dans W_0 , τ l'automorphisme d'opposition de $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, e_i, f_i)$ (c'est à dire l'automorphisme de diagramme tel que $w_0 = -\tau$ sur \mathfrak{t}) et ω l'involution de Cartan de $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, e_i, f_i)$, on a alors $w_0^* = \tau\omega$.

Démonstration. Comme $w_0^* = \tau\omega$ sur \mathfrak{t} , pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$ il existe $\varepsilon_i \in \mathbb{C}^*$ tel que $w_0^*(e_i) = -(\varepsilon_{\tau(i)})^{-1} f_{\tau(i)}$; on a alors $w_0^*(f_i) = -\varepsilon_{\tau(i)} e_{\tau(i)}$ puisque w_0^* transforme $\alpha_i^\vee = [e_i, f_i]$ en $-\alpha_{\tau(i)}^\vee$. On va montrer que $\varepsilon_i = 1$ pour tout i , ce qui prouvera le lemme.

Soient \mathbf{j} un mot minimal de \mathbf{I} tel que $r(\mathbf{j}) = w_0$, et m l'élément de N correspondant à \mathbf{j} (cf. 4.8). Pour tout i on a $r(\mathbf{j})r_i r(\mathbf{j})^{-1} = w_0 r_i w_0^{-1} = r_{\tau(i)}$, ce qui équivaut d'après 4.7.3 à $mm_i m^{-1} = m_{\tau(i)}$. D'autre part (puisque $\text{Ad}(m) = w_0^*$) on a:

$$\begin{aligned} mm_i m^{-1} &= m \exp(e_i) \exp(-f_i) \exp(e_i) m^{-1} \\ &= \exp(\text{Ad}(m)e_i) \exp(-\text{Ad}(m)f_i) \exp(\text{Ad}(m)e_i) \\ &= \exp\left(-(\varepsilon_{\tau(i)})^{-1} f_{\tau(i)}\right) \exp(\varepsilon_{\tau(i)} e_{\tau(i)}) \exp\left(-(\varepsilon_{\tau(i)})^{-1} f_{\tau(i)}\right) \\ &= m_{\tau(i)}(\varepsilon_{\tau(i)}) \end{aligned}$$

Ainsi on a $m_{\tau(i)}(\varepsilon_{\tau(i)}) = m_{\tau(i)} = m_{\tau(i)}(1)$ et donc $\varepsilon_{\tau(i)} = 1$ par injectivité de $m_{\tau(i)}$.

4.10. Classes de conjugaison des involutions de seconde espèce.

(a) Comme on l'a vu en 4.5, le problème consiste à voir si pour un couple (τ, X) formé d'un automorphisme de diagramme et d'une partie X de I de type fini vérifiant la condition (A1) de 4.5 et pour un choix de n_X , il existe un élément s de \tilde{H} qui commute à $\tau\omega \text{Ad}(n_X)$ et tel que:

(A2) l'automorphisme $\theta = \tau\omega \text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$ est une involution.

(b) DÉFINITION. Un couple (τ, X) vérifiant les propriétés (A1) et (A2) est dit *admissible*.

Cela signifie que l'indice associé est admissible.

PROPOSITION 4.10.1. Soient $w = r_{i_1}r_{i_2}\dots r_{i_n}$ une décomposition réduite de $w \in W$, on a alors: $\text{Ad}(m_{i_n}m_{i_{n-1}}\dots m_{i_1})(m_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_n}) = \exp \text{ad}(i\pi H_w)$ dans $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

avec $H_w = \sum_{\alpha \in \Phi(w)} \alpha^\vee$ si on pose $\Phi(w) = \{\alpha \in \Delta^+ / w(\alpha) \in \Delta^-\}$.

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur la longueur n de w . Pour $n = 1$ on a bien la relation $(m_i)^2 = \exp \text{ad}(i\pi\alpha_i^\vee)$.

Posons $w' = r_{i_1}r_{i_2}\dots r_{i_{n-1}}$, on a $l(w') < l(w)$ et l'hypothèse de récurrence appliquée à w' donne $\text{Ad}(m_{i_{n-1}}m_{i_{n-2}}\dots m_{i_1})(m_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_{n-1}}) = \exp \text{ad}(i\pi H_{w'})$, on en déduit donc que: $\text{Ad}(m_{i_n}m_{i_{n-1}}\dots m_{i_1})(m_{i_1}m_{i_2}\dots m_{i_n}) = m_{i_n} \exp \text{ad}(i\pi H_{w'}) (m_{i_n})^{-1} (m_{i_n})^2 = \exp \text{ad} i\pi(\alpha_{i_n}^\vee + r_{i_n}(H_{w'}))$.

Il reste à montrer que $\Phi(w) = \{\alpha_{i_n}\} \cup r_{i_n}(\Phi(w'))$. Comme w est de longueur n on a $w(\alpha_{i_n}) \in \Delta^-$ [K; 3.11], donc $\alpha_{i_n} \in \Phi(w)$. Soit $\alpha \in \Phi(w) - \{\alpha_{i_n}\}$, alors $r_{i_n}(\alpha) \in \Delta^+ - \{\alpha_{i_n}\}$, comme $w(\alpha) \in \Delta^-$, on a $w'(r_{i_n}(\alpha)) \in \Delta^-$ et donc $r_{i_n}(\alpha) \in \Phi(w')$. Ainsi $\Phi(w) - \{\alpha_{i_n}\}$ est inclus dans $r_{i_n}(\Phi(w'))$.

Inversement soit $\alpha \in \Phi(w')$, comme $l(w'r_{i_n}) > l(w')$ on a $\alpha \neq \alpha_{i_n}$ [K; 3.11] et par suite $r_{i_n}(\alpha) \in \Delta^+ - \{\alpha_{i_n}\}$. Comme $w'r_{i_n}(\alpha) = w'(\alpha) \in \Delta^-$, on a $r_{i_n}(\alpha) \in \Phi(w)$ et ainsi $r_{i_n}(\Phi(w'))$ est inclus dans $\Phi(w)$; d'où le résultat.

4.10.2. Choix de n_X . Soit $w(X)$ l'élément de plus grande longueur du groupe $W(X)$. On considère l'élément n_X de $N \cap G(X)$ défini à partir de $w(X)$ comme en 4.8; il vérifie $\text{Ad}(n_X) = w(X)$ sur \mathfrak{h} . De plus d'après 4.7.2 l'élément n_X ainsi choisi est fixé par τ , ω et ω' puisque d'après 4.6.1 ω et ω' fixent m_i et $\tau(m_i) = m_{\tau i}$.

COROLLAIRE 4.10.3. On a: $\text{Ad}(n_X^2) = \exp \text{ad}(i\pi 2\rho_X^\vee)$ où $2\rho_X^\vee$ désigne la somme des coracines positives du système $\Delta(X)$.

Démonstration. Soit $w(X) = r_{i_1}r_{i_2}\dots r_{i_n}$ une décomposition réduite de $w(X)$ dans $W(X)$. Comme $w(X)^2 = 1$, on a $w(X) = r_{i_1}r_{i_2}\dots r_{i_n} = r_{i_n}r_{i_{n-1}}\dots r_{i_1}$. Le résultat découle alors de 4.7.2, 4.10.1 et du fait que $(\text{Ad}(n_X^{-1})\Delta^-) \cap \Delta^+ = \Delta(X)^+$.

COROLLAIRE 4.10.4. Soient $I_1 = \{i \in I - X / \tau(i) \neq i\}$ et Ω un système de représentants des orbites de $\{1, \tau\}$ dans I_1 . Le couple (τ, X) vérifiant (A1) est admissible si et seulement si pour tout j de Ω il existe un nombre rationnel ε_j tel que:

$$(A3) \quad 2\rho_X^\vee + \sum_{j \in \Omega} 2\varepsilon_j(P_j - P_{\tau(j)}) \in \bigoplus_{i \in I} 2\mathbb{Z}P_i \text{ (modulo le centre)}.$$

Et alors $\theta = \tau\omega\text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$ avec $\text{Ad}(n_X)$ comme en 4.10.2 et $\text{Ad}(s) = \exp\text{ad}(i\pi\sum_{j \in \Omega}\varepsilon_j(P_j - P_{\tau(j)}))$.

Démonstration. Par définition (τ, X) est admissible si et seulement si il existe $s \in \tilde{H}$ tel que $\theta = \tau\omega\text{Ad}(n_X)\text{Ad}(s)$ soit une involution et $\text{Ad}(s)$ commute à $\tau\omega\text{Ad}(n_X)$.

S'il en est ainsi $\mathfrak{p}^+(X)$ est θ -déployée minimale (4.5) et on a, d'après 4.3.2b, que la restriction de θ à $\mathfrak{m}^s(X)$ est l'identité et donc celle de $\text{Ad}(s)$ l'est aussi (4.9). Ainsi on peut écrire $\text{Ad}(s) = \exp\text{ad}(i\pi\sum_{j \in I-X}\varepsilon_j P_j)$ avec des ε_j dans \mathbb{C} .

Si s est ainsi choisi, $\text{Ad}(s)$ commute à $\text{Ad}(n_X)$ et il commute donc à θ si et seulement si il commute à $\tau\omega$, ce qui se traduit par $\varepsilon_{\tau(j)} \equiv -\varepsilon_j$ (modulo $2\mathbb{Z}$); en particulier pour $\tau(j) = j$ on a $\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$. Sous ces conditions on a $\theta^2 = \text{Ad}(n_X^2)\text{Ad}(s^2)$. Donc si $\theta^2 = 1$ on a de plus $2\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$ pour $\tau(j) \neq j$ et la condition (A3) est vérifiée. La réciproque est claire.

4.10.5. *Conclusion.* La formule (A3) ci-dessus et les tables bien connues donnant $2\rho_X^\vee$ pour chaque système de racine fini (cf. e.g. [BBK]) permettent de décider rapidement quels sont les couples admissibles correspondant à une algèbre de Kac-Moody symétrisable donnée et donc de déterminer à isomorphisme près toutes les formes réelles presque-déployées de celle-ci. Le cas des algèbres affines sera traité in extenso au paragraphe 6.

5. FORMES PRESQUE-DEPLOYEES DES ALGEBRES DE KAC-MOODY AFFINES

On considère une forme presque-déployée \mathfrak{g}_K de l'algèbre de Lie affine \mathfrak{g} et des standardisations compatibles $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K^+)$ et $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$.

Si Π est la base correspondante du système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on note $\Pi_0 = \{\alpha \in \Pi / \alpha(\mathfrak{t}_K) = \{0\}\} \subsetneq \Pi$ et W_0 le sous-groupe de $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ engendré par les r_α pour $\alpha \in \Pi_0$ (cf. 2.2, 2.3 et 2.7).

D'après 2.4 $\Gamma = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ agit sur Δ et pour $\gamma \in \Gamma$ il existe $w_\gamma \in W_0$ tel que $w_\gamma\gamma(\Pi) = \Pi$; on note alors par $*$ l'action de Γ sur Π ou Δ définie par $\gamma^*\alpha = w_\gamma\gamma(\alpha)$.

5.1. Construction des algèbres affines sur \bar{K} .

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple sur \bar{K} , θ un automorphisme d'ordre fini divisant $m \geq 1$ et ε_m une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité dans \bar{K} . Pour $j \in \mathbb{Z}$, on note \mathfrak{g}_j l'espace propre de θ dans \mathfrak{g} correspondant à la valeur propre $(\varepsilon_m)^j$.

On note: $I'' = I''(\mathfrak{g}, \theta, m) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} t^j \mathfrak{g}_j$ (sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \otimes \bar{K}[t, t^{-1}]$)

et $I = I(\mathfrak{g}, \theta, m) = I'' \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}D$ où c et D sont deux symboles.

Alors I est une algèbre de Lie pour le crochet défini par:

$$[t^j X + \lambda c + \mu D, t^k Y + \lambda' c + \mu' D] = t^{j+k} [X, Y] + \mu k t^k Y - \mu' j t^j X + j \delta_{j, -k} (X|Y) c$$

où $(|)$ désigne une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante (par exemple la forme de Killing).

Ainsi $c = \bar{K}c$ est le centre de I , $I' = I'' \oplus \bar{K}c$ est l'algèbre dérivée de I et I'/c est isomorphe à I'' .

Si on remplace m par un multiple $m'm$ dans la construction précédente on obtient un isomorphisme ϕ de $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$ sur $I(\mathfrak{g}, \theta, m'm)$ en posant $\phi(t^j X) = t^{jm'} X$, $\phi(D) = D/m'$ et $\phi(c) = m'c$.

On sait [K] que toute algèbre de Kac-Moody affine peut se construire de cette façon, on peut même choisir pour θ un automorphisme de diagramme ξ de \mathfrak{g} d'ordre $k = 1, 2$ ou 3 .

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}^θ , on sait que le centralisateur \mathfrak{h}° de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On a donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^\theta = \mathfrak{h}^\circ \cap \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}D$ est une sous-algèbre de Cartan de I . On note alors $\Delta = \Delta(I, \mathfrak{h}^\circ)$ le système de racines de I par rapport à \mathfrak{h}° . On note aussi $\Delta^\circ = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^\circ)$ le système de racines de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{h}° et $\bar{\Delta} = \{\bar{\alpha}_i / i \in \bar{I}\}$ sa base déterminée par un élément régulier de \mathfrak{h} ; $\bar{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\bar{\alpha} = \alpha|_{\mathfrak{h}} / \alpha \in \Delta^\circ\}$ est le système de racines de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{h} et $\bar{\bar{\Delta}} = \{\bar{\alpha} / \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}\}$ sa base. On a donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}} \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}})$.

θ stabilise $\bar{\Delta}$ et $\bar{\bar{\Delta}}$ donc agit sur \bar{I} ; on note \bar{I} un système de représentants des orbites de θ dans \bar{I} . Alors $\bar{\bar{\Delta}} = \{\bar{\alpha}_i / i \in \bar{I}\}$ et on note $(\bar{P}_i)_{i \in \bar{I}}$ la base duale de $\bar{\bar{\Delta}}$ dans \mathfrak{h} .

5.2. Changement de réalisation d'une algèbre.

Pour $i \in \bar{I}$, donnons nous un entier $s_i \in \mathbb{Z}$. On note $H = \sum_{i \in \bar{I}} s_i \bar{P}_i$. Si de plus $p \geq 1$ est un entier et ε_{mp} une racine $p^{\text{ième}}$ de ε_m , on construit un automorphisme σ de \mathfrak{g} par les formules:

$$\begin{aligned} \sigma &\text{ est l'identité sur } \mathfrak{h} \\ \text{pour } \bar{\alpha} = \sum_{i \in \bar{I}} m_i \bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta} \cup \{0\}, \sigma &\text{ est la multiplication par } (\varepsilon_{mp})^N \\ \text{sur } \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} &\text{ où } N = \sum_{i \in \bar{I}} m_i s_i. \end{aligned}$$

PROPOSITION. (1) σ commute à θ et σ comme $\theta\sigma$ sont des automorphismes de \mathfrak{g} d'ordres divisant mp .

(2) Considérons l'application linéaire ϕ de $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta, m)$ dans $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta\sigma, mp)$ définie par:

$$\begin{aligned}\phi(D) &= (D - H)/p & \phi(c) &= pc \\ \phi(t^j X) &= t^{pj+N} X + \delta_{j,0}(H|X)c \\ \text{si } X &\in \mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} \text{ où } \bar{\alpha} = \sum_{i \in \bar{I}} m_i \bar{\alpha}_i \text{ et } N = \sum_{i \in \bar{I}} m_i s_i,\end{aligned}$$

alors ϕ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Remarque. ϕ échange les sous-algèbres de Cartan de ces deux algèbres qui sont attachées comme ci-dessus à la même sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g}^θ .

Démonstration. La première assertion est claire, la seconde est une réécriture de [R3; 1.2] dans le cas $\bar{K} \neq \mathbb{C}$.

5.3. Les racines de \mathfrak{g} :

On considère la réalisation de \mathfrak{g} sous la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi, k)$ où ξ est un automorphisme de diagramme d'ordre k de \mathfrak{g} et on note alors d l'élément noté D en 5.1.

On note $\bar{I} = \{1, \dots, l\}$, $\hat{I} = \{1, \dots, n\}$. On sait alors (cf. [K] ou [R1]) qu'une base de Δ est $\Pi = \{\alpha_i / i \in I\}$ avec $I = \{0, 1, \dots, l\}$. On emploiera ici comme dans [R1] la convention de numérotation suivante: $\alpha_i(d) = \delta_{0,i}$; elle diffère de celle de [K] uniquement dans le cas $A_{2l}^{(2)}$.

Plus précisément pour $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$, on note encore $\bar{\alpha}$ le prolongement de $\bar{\alpha}$ en une forme linéaire sur \mathfrak{h} nulle sur c et d et δ désigne la forme linéaire sur \mathfrak{h} nulle sur \mathfrak{h} et c et telle que $\delta(d) = 1$. On a alors: $\forall i \in I \alpha_i = \delta_{0,i} \delta + \bar{\alpha}_i$.

La racine $\bar{\alpha}_0$ appartient à $\bar{\Delta}$ mais on ne la précisera pas plus ici. Notons seulement que δ est la plus petite racine imaginaire positive et donc que si l'on écrit $\delta = \sum_{i=0,l} a_i \alpha_i$ on a $a_0 = 1$ et $\bar{\alpha}_0 = -\sum_{i=1,l} a_i \bar{\alpha}_i$.

5.4. Graduation de \mathfrak{g} .

Si on se donne un entier $s_i \in \mathbb{N}$ pour chaque $i \in I$ (les s_i non tous nuls) on définit une graduation $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ pour laquelle \mathfrak{h} est de degré 0 et \mathfrak{g}_α de degré $\sum_{i=0,l} n_i s_i$ pour $\alpha = \sum_{i=0,l} n_i \alpha_i$.

On considère alors $p = \sum_{i=0,l} a_i s_i$ et $H = \sum_{i=1,l} s_i \bar{P}_i$. On note σ l'automorphisme construit comme en 5.2 avec ce p , ces s_i et $m = k$.

PROPOSITION. La graduation ainsi construite sur \mathfrak{g} correspond à la graduation naturelle de $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi\sigma, kp)$ c'est à dire que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}d$ et que $\mathfrak{g}_j = t^j \mathfrak{g}_j$ pour $j \neq 0$.

Remarque. Cette proposition ainsi que 5.2 généralisent au cas $\bar{K} \neq \mathbb{C}$ et précisent certains aspects des résultats de [R1] et de [K; §8.6 et 8.7].

Démonstration. D'après 5.2 on a un isomorphisme $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi\sigma, kp)$. La graduation naturelle de cette dernière algèbre est donnée par les valeurs propres de $\text{ad}(D)$. Or on calcule facilement que $\phi^{-1}(D) = pd + H - ((H|H)/p)c$. Pour $i \in \bar{I}$ on a donc $\alpha_i(\phi^{-1}(D)) = \bar{\alpha}_i(H) = s_i$ et de plus $\alpha_0(\phi^{-1}(D)) = p + \bar{\alpha}_0(H) = \sum_{i=0,l} a_i s_i - \sum_{i=1,l} a_i \bar{\alpha}_i(H) = a_0 s_0 = s_0$. On en déduit aussitôt le résultat.

5.5. Choix d'une graduation.

On choisit dans toute la suite de ce paragraphe (sauf peut-être en 5.6) l'isomorphisme de \mathfrak{g} avec $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi, k)$ de façon que le couple (\mathfrak{h}, Π) de l'introduction de ce paragraphe corresponde avec celui défini pour \mathfrak{l} en 5.1 et 5.3.

On considère une partie $\Pi' = \{\alpha_i / i \in I'\}$ non vide de $\Pi - \Pi_0$ stable par l'action $*$ de Γ , par exemple une orbite de cette action dans $\Pi - \Pi_0$. On définit alors $s_i = 1$ si $i \in I'$, $s_i = 0$ sinon et on considère la graduation de \mathfrak{g} associée.

PROPOSITION. *Sous ces hypothèses l'action de Γ sur \mathfrak{g} stabilise la graduation de \mathfrak{g} ainsi définie.*

Démonstration. L'action $*$ de Γ permute les éléments de Π et stabilise Π' ; cette action stabilise donc la graduation de \mathfrak{g} associée à Π' . On sait que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma^* = w_\gamma \gamma$ avec $w_\gamma \in W_0$, donc pour $\alpha \in \Delta$ on a $w_\gamma(\alpha) = \alpha + \sum_{i \in I_0} m_i \alpha_i$. Pour $\alpha = \sum_{i=0,l} n_i \alpha_i \in \Delta$, notons $h(\alpha) = \sum_{i=0,l} n_i s_i = \sum_{i \in I'} n_i$ le degré de \mathfrak{g}_α dans cette graduation. Puisque $I' \subset I - I_0$ on a $h(w_\gamma(\alpha)) = h(\alpha)$ et par conséquent w_γ stabilise aussi la graduation de \mathfrak{g} associée à Π' ; d'où le résultat.

5.6. L'application translation.

Dans tout ce qui va suivre on notera $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/c$.

Choisissons un isomorphisme de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \theta, m)$ pour un certain choix de l'algèbre simple \mathfrak{g} et de l'automorphisme θ d'ordre fini divisant m .

On a alors un isomorphisme de \mathfrak{g}'' sur $\mathfrak{l}''(\mathfrak{g}, \theta, m)$ et l'on construit un isomorphisme de $\text{ad}(\mathfrak{g}')$ -modules: $\mathcal{T}: \mathfrak{g}'' \rightarrow \mathfrak{g}''$ en posant $\mathcal{T}(t^j X) = t^{j+m} X$ pour $X \in \mathfrak{g}''_j$.

En fait $(\text{Id} - \mathcal{T})\mathfrak{g}''$ est un idéal maximal de \mathfrak{g}'' puisque le quotient est \mathfrak{g} .

PROPOSITION. *Si T est un isomorphisme de $\text{ad}(\mathfrak{g}')$ -modules de \mathfrak{g}'' sur \mathfrak{g}'' tel que $(\text{Id} - T)\mathfrak{g}''$ soit un idéal maximal de \mathfrak{g}'' , alors T est la multiplication par at^k ou at^{-k} avec $a \in \bar{K}^*$ pour l'identification de \mathfrak{g} avec $\mathfrak{l}(\mathfrak{g}, \xi, k)$ de 5.3.*

Remarque. Ce résultat est affirmé sans démonstration dans [R3].

Démonstration. (1) On remarque qu'il existe $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ telle que la dimension de $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}''$ soit 1. Il suffit en fait de prendre pour $\bar{\alpha}$ la restriction à $\bar{\mathfrak{h}}$ de la plus grande racine de $\bar{\Delta}$. On note j l'entier $j \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}''$ soit contenu dans \mathfrak{g}_j .

(2) Il est clair que si $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}'' = \{Y \in \mathfrak{g}''/[H, Y] = \bar{\alpha}(H)Y \ \forall H \in \bar{\mathfrak{h}}\}$ on a $T(\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}'') \subset \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}''$ et $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}'' = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} t^{j+pk} \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}''$. On en déduit immédiatement que, si on fixe X dans $t^j \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}'' - \{0\}$, alors il existe un polynôme de Laurent $P \in \bar{K}[t, t^{-1}]$ tel que $T(X) = P(t^k)X$.

(3) On considère l'idéal $\mathcal{S}(X)$ de \mathfrak{g}'' engendré par X . D'après [K; 8.6] on a $\mathcal{S}(X) = Q(t^k)\mathfrak{g}''$ pour un certain $Q \in \bar{K}[t, t^{-1}]$ et le fait que X appartienne à $t^j \mathfrak{g}_j \cap \mathcal{S}(X)$ implique que Q est un monôme et donc que $\mathcal{S}(X) = \mathfrak{g}''$.

(4) Comme T est $\text{ad}(\mathfrak{g}')$ -linéaire on déduit de 2) et 3) que pour tout Y de \mathfrak{g}'' on a $T(Y) = P(t^k)Y$. Puis, T étant un isomorphisme, on voit que P est forcément un monôme et enfin le fait que $(\text{Id} - T)\mathfrak{g}''$ soit un idéal maximal de \mathfrak{g}'' implique d'après [K; 8.6] que l'on a $P(t) = at^\varepsilon$ avec $a \in \bar{K}^*$ et $\varepsilon = \pm 1$. D'où le résultat.

Conséquence. L'application \mathcal{F} est donc canoniquement déterminée par l'algèbre de Lie \mathfrak{g}'' au changement près de \mathcal{F} en $a\mathcal{F}^{\pm 1}$ avec $a \in \bar{K}^*$.

On remarque aussi qu'un isomorphisme du type de la proposition 5.2 échange les applications translation. En particulier si on écrit \mathfrak{g}'' sous la forme $\mathfrak{g}'' = \mathcal{I}''(\mathfrak{g}, \xi, k)$ et si on choisit \mathfrak{h} comme en 5.1 et 5.3, on voit aussitôt que pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\mathcal{F}(\mathfrak{g}_{\alpha}'') = \mathfrak{g}_{\alpha+k\delta}''$.

PROPOSITION 5.7. *A conjugaison près par un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} stabilisant toute graduation du type 5.4, on peut supposer que \mathcal{F} commute aux éléments de Γ .*

Remarque. Cette généralisation de [R3; 3.3] a aussi été remarquée par N. Andruskiewitsch (communication privée).

Démonstration. Soit $\gamma \in \Gamma$, on considère l'application $\mathcal{F}_{\gamma} = \gamma\mathcal{F}\gamma^{-1}$ de \mathfrak{g}'' dans \mathfrak{g}'' ; on voit facilement que \mathcal{F}_{γ} est un isomorphisme de $\text{ad}(\mathfrak{g}')$ -modules et que $(\text{Id} - \mathcal{F}_{\gamma})\mathfrak{g}''$ est un idéal maximal de \mathfrak{g}'' puisque $\mathfrak{g}''/(\text{Id} - \mathcal{F}_{\gamma})\mathfrak{g}''$ est isomorphe à $\mathfrak{g}''/(\text{Id} - \mathcal{F})\mathfrak{g}''$ qui est simple. Par conséquent d'après la proposition 5.6 $\mathcal{F}_{\gamma} = a_{\gamma}\mathcal{F}^{\varepsilon}$ avec $a_{\gamma} \in \bar{K}^*$ et $\varepsilon = \pm 1$. Mais le fait que γ stabilise une graduation de \mathfrak{g} du type 5.5 et que sur une telle graduation \mathcal{F} agisse par $\mathcal{F}(\mathfrak{g}_j'') = \mathfrak{g}_{j+\varepsilon m}''$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ avec $\varepsilon' = \pm 1$ montre que l'on a forcément $\varepsilon = 1$.

Ainsi pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $a_\gamma \in \bar{K}^*$ tel que $\gamma \mathcal{F} \gamma^{-1} = a_\gamma \mathcal{F}$. Considérons alors l'application $f: \Gamma \rightarrow \bar{K}^*$ $f(\gamma) = a_\gamma$; pour tout couple (γ, γ') de Γ^2 on a $f(\gamma'\gamma) = \gamma'(f(\gamma))f(\gamma')$, autrement dit f est un 1-cocycle. Donc d'après le théorème 90 de Hilbert il existe un élément $b \in \bar{K}^*$ tel que $a_\gamma = \gamma(b^{-1})b$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Par conséquent si $\gamma \in \Gamma$ on a: $\gamma \circ (b\mathcal{F}) \circ \gamma^{-1} = \gamma(b)\gamma \circ \mathcal{F} \circ \gamma^{-1} = \gamma(b)a_\gamma \mathcal{F} = \gamma(b)\gamma(b^{-1})b\mathcal{F} = b\mathcal{F}$.

Ainsi, quitte à remplacer \mathcal{F} par $b\mathcal{F}$ avec $b \in \bar{K}^*$, on peut supposer que \mathcal{F} commute aux éléments de Γ .

On considère alors une racine $k^{i\delta} b'$ de b dans \bar{K} et l'automorphisme ψ de \mathfrak{g} qui sur \mathfrak{g}_α pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ est la multiplication par $(b')^{\alpha(d)}$ où d est l'élément de \mathfrak{g} défini en 5.3. Comme $\delta(d) = 1$ et $\mathcal{F}(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\alpha+k\delta}$ on voit facilement que $\psi \circ \mathcal{F} \circ \psi^{-1} = b\mathcal{F}$. Il est clair que ψ stabilise toutes les graduations du type 5.4 et que c'est un élément de $\text{Ad}(\bar{H})$ donc un automorphisme intérieur (cf. 1.7); d'où la proposition.

5.8. *L'action induite sur $\hat{\mathfrak{g}}$.* On considère un isomorphisme de \mathfrak{g} sur $(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, m)$ qui stabilise la graduation naturelle et tel que l'action induite de Γ sur $(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, m)$ commute à \mathcal{F} . On a montré précédemment qu'il en existe.

Pour $X \in \hat{\mathfrak{g}}_j$ et $\gamma \in \Gamma$ on note $\gamma(X)$ l'élément de $\hat{\mathfrak{g}}_j$ tel que $\gamma(t^j X) = t^j \gamma(X)$. Comme Γ commute à \mathcal{F} cette définition ne dépend pas du choix de j modulo m . On obtient ainsi une action semi-linéaire de Γ sur $\hat{\mathfrak{g}}$ qui stabilise les $\hat{\mathfrak{g}}_j$. Comme $\hat{\mathfrak{g}}$ est isomorphe à $(\mathfrak{g}, \theta, m) / (Id - \mathcal{F})(\mathfrak{g}, \theta, m)$ cette action de Γ est compatible avec la structure d'algèbre de Lie de $\hat{\mathfrak{g}}$ et définit donc une forme $\hat{\mathfrak{g}}_K$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ sur K .

Le fait que Γ stabilise les espaces propres $\hat{\mathfrak{g}}_j$ se traduit par la propriété suivante:

$$(*) \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad \gamma \theta \gamma^{-1} = \theta^{n(\gamma)}$$

$$\text{où } n(\gamma) \text{ est défini modulo } m \text{ par } \gamma(\varepsilon_m) = (\varepsilon_m)^{n(\gamma)}.$$

5.9. *Construction.* On considère une forme $\hat{\mathfrak{g}}_K$ de l'algèbre de Lie simple $\hat{\mathfrak{g}}$, un automorphisme θ de $\hat{\mathfrak{g}}$ d'ordre fini divisant m et (\cdot, \cdot) une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante sur $\hat{\mathfrak{g}}_K$ que l'on prolonge à $\hat{\mathfrak{g}}$. On suppose que l'action de Γ sur $\hat{\mathfrak{g}}$ vérifie la condition (*) ci-dessus.

Alors les espaces propres $\hat{\mathfrak{g}}_j$ de θ sont stables par Γ et on vérifie facilement que l'on peut définir une action semi-linéaire de Γ sur $(\hat{\mathfrak{g}}, \theta, m)$ par les formules:

$$\gamma(t^j X) = t^j \gamma(X) \quad \gamma(D) = D \quad \gamma(c) = c.$$

On définit donc ainsi une forme $I_K(\mathfrak{g}_K, \theta, m) = I(\mathfrak{g}, \theta, m)^I$ de l'algèbre de Lie affine $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$. Cette forme est presque-déployée puisqu'il existe une sous-algèbre parabolique définie sur $K: (\bigoplus_{j \geq 0} t^j \mathfrak{g}_j) \oplus \bar{K}c \oplus \bar{K}D$.

THÉORÈME 5.10. *Toute forme presque-déployée d'algèbre de Kac-Moody affine est isomorphe à une forme construite comme ci-dessus.*

Plus précisément. Plaçons nous dans la situation de 5.8 alors \mathfrak{g}_K est isomorphe à $I_K(\mathfrak{g}_K, \theta, m)$.

Démonstration. (a) Quitte à remplacer c par λc avec $\lambda \in \bar{K}^*$, on peut supposer que Γ fixe c : en effet c est stable par Γ , donc défini sur K et il suffit de prendre pour λc un élément non nul de c_K . Ce nouveau choix de c oblige à modifier la forme bilinéaire (\cdot, \cdot) sur \mathfrak{g} (par le facteur λ^{-1}) pour conserver la formule du crochet dans I explicitée en 5.1 et alors cette formule montre que (\cdot, \cdot) est invariante par Γ donc définie sur K .

(b) Quitte à remplacer D par $D + \mu c$ avec $\mu \in \bar{K}$ on peut supposer que Γ fixe D :

En effet la graduation naturelle de $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$ étant stable par Γ , on a pour tout $\gamma \in \Gamma$ $\gamma(\mathfrak{g}_j) = \mathfrak{g}_j \forall j \in \mathbb{Z}$; or \mathfrak{g}_j est l'espace propre de $\text{ad}(D)$ associé à la valeur propre j donc $\text{ad}(\gamma(D)) = \text{ad}(D) \forall \gamma \in \Gamma$. On en déduit que $\gamma(D) = D + \lambda_\gamma c$ avec $\lambda_\gamma \in \bar{K}$ et si $(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2$ on a $\lambda_{\gamma\gamma'} = \lambda_{\gamma'} + \gamma'(\lambda_\gamma)$. D'après le théorème 90 de Hilbert (version additive) il existe $\mu \in \bar{K}$ tel que $\lambda_\gamma = \mu - \gamma(\mu) \forall \gamma \in \Gamma$; alors les éléments de Γ fixent $D + \mu c$.

(c) Il reste à identifier l'action de Γ sur $I(\mathfrak{g}, \theta, m)$ avec celle définie en 5.9. Par construction elles coïncident sur $I'/c = I''(\mathfrak{g}, \theta, m)$ et sur D (d'après b) donc sur I/c . Les deux actions stabilisent \mathfrak{h} et permutent ses espaces radiciels; ceux-ci étant disjoints de c , les deux actions coïncident sur ces espaces radiciels donc sur l'algèbre engendrée I' . Mais D est fixe par les deux actions, d'où le résultat.

Remarque 5.11. On considère les formes réelles presque-déployées des algèbres affines *non tordues*. D'après 2.11, comme une algèbre semi-simple complexe a une unique forme réelle compacte, la détermination des formes de rang relatif $r \geq 2$ se ramène à des résultats connus sur les algèbres semi-simples. Pour le rang relatif $r = 1$, en utilisant 2.6, on voit facilement qu'il y a trois cas pour $\Pi - \Pi_0$:

- (a) $\Pi - \Pi_0 = \{\alpha_i\}$ avec $a_i = 1$.
- (b) $\Pi - \Pi_0 = \{\alpha_i\}$ avec $a_i = 2$.
- (c) $\Pi - \Pi_0 = \{\alpha_i, \alpha_j\}$ avec $i \neq j$, $a_i = a_j = 1$ et Γ^* échange α_i et α_j .

Ce résultat est confirmé par la classification ci-dessous au paragraphe 6. On voit alors assez facilement que dans ce cas $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est de l'une des formes suivantes:

- $I_{\mathbb{R}}(\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}, Id, 1)$ avec $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ algèbre réelle simple compacte (cas a),
- $I_{\mathbb{R}}(\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}, \theta, 2)$ avec $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ algèbre réelle absolument simple non compacte et θ involution de Cartan (cas b et c).

Pour un rang relatif quelconque, si on suppose que $\{0\}$ (ou un transformé de $\{0\}$ par un automorphisme de diagramme) est une orbite de Γ^* dans $\Pi - \Pi_0$, alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est de la forme $I_{\mathbb{R}}(\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}, Id, 1)$ avec $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ algèbre absolument simple réelle. Le diagramme de Dynkin relatif de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est le complété de celui de $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ (cf. [R5; 4.6]) si l'on admet que le complété de $BC_n = B_n^x$ est $A_{2n}^{(2)x}$ (voir les notations au §6).

Les détails et le cas plus compliqué des algèbres affines tordues seront traités ailleurs.

6. TABLEAU DES FORMES RÉELLES PRESQUE-DEPLOYÉES DES ALGÈBRES DE KAC-MOODY AFFINES

6.1. On trouvera ci-dessous la classification à isomorphisme près de ces formes réelles (qui sont entièrement déterminées par leur indice: cf. 2.5 et 4.5). Elle est établie grâce aux résultats du paragraphe 4 et vérifiée, pour partie grâce à ceux du paragraphe 5.

6.2. Dans le cas des séries infinies des algèbres affines on indique successivement dans le premier tableau le nom de la forme réelle, son indice (représenté conformément à 2.5), un système de représentants dans I de l'ensemble $I' = (I - I_0)/\Gamma^*$ des orbites distinguées, les conditions sur les paramètres et le système de racines relatives Δ' (avec son nom et son diagramme de Dynkin).

Le nom de la forme réelle se présente dans ce cas sous la forme: ${}^a X_n^{(k)}$ où $X_n^{(k)}$ est le nom de l'algèbre affine complexe

$r = |I'|$ est le rang relatif

i (facultatif) est un paramètre: c'est souvent le cardinal de la plus petite composante connexe de I_0

$a = 1, 2, 2'$ ou $2''$ est l'ordre de l'automorphisme de diagramme représentant Γ^* . Il est omis s'il vaut 1; dans certains cas on différencie par $2, 2'$ ou $2''$ des involutions différentes.

6.3. Dans le cas des algèbres affines exceptionnelles (y compris $A_1^{(1)}$ et $A_2^{(2)}$) on indique successivement dans le second tableau le nom de la forme réelle, son indice et le système de racines relatives (avec son nom et son diagramme de Dynkin).

Le nom de la forme réelle se présente dans ce cas sous la forme: ${}^a X_{n,r}^{(k)m}$ où $X_n^{(k)}$, r et a sont déterminés selon les mêmes conventions que ci-dessus et m (omis s'il vaut 0 c'est à dire dans le cas quasi-déployé) est la dimension du noyau anisotrope $I = m^s(I_0)$.

6.4. Pour calculer le système de racines relatives on utilise les résultats du paragraphe 3. On peut utiliser le calcul direct préalable des $\alpha_i \wedge$, pour α_i racine relative simple réelle, qui se ramène à des calculs classiques pour des algèbres de Lie semi-simples de rang relatif 1, cf. 3.4. On peut aussi utiliser des indications indirectes:

Si $i' \in I'$ et si J est une composante connexe de $i' \cup I_0$ rencontrant i' , on a $b_{i'j'} = 0$ si et seulement si $J = I$ et sinon $b_{i'j'} = 1$ ou 2 selon que la somme des coefficients de la plus grande racine de $\Delta(J)$ sur $i' \cap J$ est 2 ou 1 (cf. 3.3.1).

Si $i' \neq j' \in I'$ et si J est une composante connexe de $I_0 \cup i' \cup j'$ rencontrant i' , on a $b_{i'j'} = 0$ si et seulement si J ne rencontre pas j' . Si J est de type fini (i.e. $J \neq I$) et rencontre j' , la plus grande racine de $\Delta(J)$ a pour restriction à \mathfrak{t} la plus grande racine du sous-système de racines de Δ' engendré par i' et j' , cela permet de déterminer (dans ce cas) $b_{i'j'}$ et $b_{j'i'}$ si l'on connaît déjà $b_{i'i'}$ et $b_{j'j'}$.

La restriction à \mathfrak{t} d'une racine imaginaire de Δ est une racine imaginaire de Δ' nulle sur les coracines. Sa connaissance permet de vérifier le calcul précédent des $b_{i'j'}$ ou de calculer ces coefficients pour $r = 2$.

6.5. Le diagramme du système de racines relatives est indiqué selon les conventions de 3.6. Sauf dans les cas de rang relatif $r = 1$, on trouve en enlevant les croix éventuelles un diagramme de Dynkin affine (cela pouvait se prévoir d'après le dernier alinéa de 6.4), on prend donc comme nom le nom de ce dernier diagramme orné d'autant de croix qu'il y en a sur le

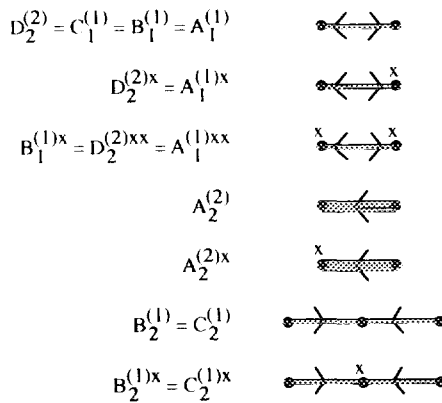


FIG. 2. Equivalences.

TABLEAU 1 Formes réelles presque-déployées des algèbres affines "classiques"

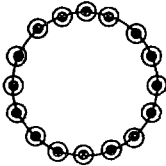

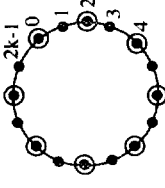
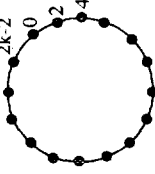

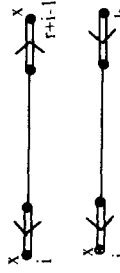
nom	indice	orbites distinguées	paramètres	diagramme relatif	nom
$A_{n,n+1}^{(1)}$		0, 1, 2,n-1, n (toutes)	$n \geq 2$		$A_n^{(1)}$
$A_{2k-1,k}^{(1)}$		0, 2, 4, ... $2k-4, 2k-2$	$k \geq 2$		$A_{k-1}^{(1)}$
$2A_{i,2k,r}^{(1)}$		i, j+1,r+1, i	$k \geq 1$ $i < k-r+1$ $i = k-r+1$		$D_r^{(2) \times \times}$ $A_{2r-2}^{(2) \times}$

TABLEAU I—Continué

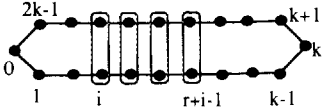
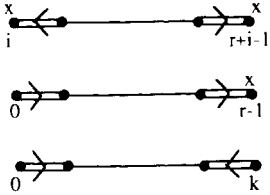
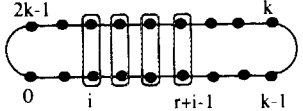
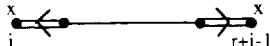
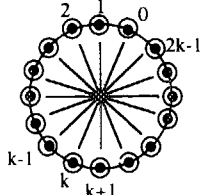
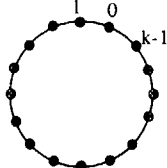
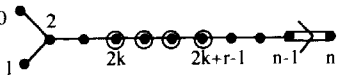
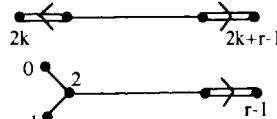
nom	indice	orbites distinguées	paramètres	diagramme relatif	nom
${}_{i}^{2}A_{2k-1,r}^{(1)}$		$i, i+1, \dots, r+i-1$	$k \geq 2$ $0 < i \leq \frac{k-r+1}{2}$ $i = 0 < k-r+1$ $i = 0 : k = r-1$		$D_r^{(2)xx}$ $A_{2r-2}^{(2)x}$ $C_{r-1}^{(1)}$
${}_{i}^{2'}A_{2k-1,r}^{(1)}$		$i, i+1, \dots, r+i-1$	$k \geq 2$ $i \leq \frac{k-r}{2}$		$D_r^{(2)xx}$
${}^{2''}A_{2k-1,k}^{(1)}$		$0, 1, 2, \dots, k-1$ (toutes)	$k \geq 2$		$A_{k-1}^{(1)}$
${}_{2k}B_{n,r}^{(1)}$		$2k, 2k+1, \dots, 2k+r-1$	$n \geq 3$ $0 < 2k \leq n-r+1$ $k = 0 : r \leq n+1$		$D_r^{(2)}$ $B_{r-1}^{(1)}$

TABLEAU 1—Continué

nom	indice	orbites distinguées	paramètres	diagramme relatif	nom
${}_{2k+1}^{2n(1)}B_{n,r}$		$2k+1, 2k+2, \dots, 2k+r$	$n \geq 3$ $2k+r \leq n$		$D_r^{(2)}$
$C_{n,n+1}^{(1)}$		$0, 1, \dots, n$ (toutes)	$n \geq 2$		$C_n^{(1)}$
${}_i C_{n,r}^{(1)}$		$i, i+2, \dots, i+2r-2$	$n \geq 2$ $0 < i \leq \frac{n}{2} + 1 - r$ $i = 0; n > 2r-2$ $i = 0; n = 2r-2$		$D_r^{(2)xx}$ $A_{2r-2}^{(2)x}$ $C_{r-1}^{(1)}$
${}_{2n}^{2n(1)}C_{n,r}$	<p>$n = 2k$</p>	$0, 1, 2, \dots, r-1$	$n \geq 2$ $n = 2(r-1)$ $r < \frac{n}{2} + 1$		$C_{r-1}^{(1)}$ $A_{2r-2}^{(2)x}$
$D_{2k,k+1}^{(1)}$		$0, 2, 4, \dots, 2k-2, 2k$	$k \geq 2$		$C_k^{(1)}$

TABLEAU I—Continué

nom	indice	orbites distinguées	paramètres	diagramme relatif	nom
$2_i D_{n,r}^{(1)}$		$2i, 2i+1, \dots, 2i+r-1, \dots, 2i+r$	$0 < i \leq \frac{n-r+1}{4}$ $n \geq 4$ $n-r$ impair $i = 0; r < n+1$ $i = 0; r = n+1$		$D_r^{(2)}$ $B_{r-1}^{(1)}$ $D_n^{(1)}$
$2_{2i+1} D_{n,r}^{(1)}$		$2i+1, 2i+2, \dots, 2i+r$	$2i+r < n$ $n \geq 4$ $n-r$ pair $2i+r = n$		$D_r^{(2)}$ $B_{r-1}^{(1)}$
$2_{2k+1} D_{2k+1, k+1}^{(1)}$		$1, 3, 5, \dots, 2k+1$	$k \geq 2$		$A_{2k}^{(2)x}$
$2_{2i+1} D_{n,r}^{(1)}$		$2i+1, 2i+2, \dots, 2i+r$	$n \geq 4$ $n-r$ impair		$D_r^{(2)}$
$2_{2k} D_{2k,k}^{(1)}$		$1, 3, 5, \dots, 2k-1$	$k \geq 2$		$D_k^{(2)xx}$

TABLEAU I—Continué

nom	indice	orbites distinguées	paramètres	diagramme relatif	nom
$2^n D_{n,r}^{(1)}$	<p>pour $n = 2k$</p> <p>pour $n = 2k+1$ l'extrémité est:</p>	<p>0, 1, 2,, r-1</p>	<p>$n \geq 4$</p>	<p>$r < \frac{n}{2} + 1$</p>	$B_{r-1}^{(1)x}$
	<p>$r = \frac{n}{2} + 1$</p>			$A_{2r-3}^{(2)}$	
$A_{2k,r}^{(2)}$		<p>0, 1, 2,, r-1</p>	<p>$k \geq 2$</p>	<p>$r \leq k+1$</p>	$A_{2r-2}^{(2)}$
$A_{2k-1,r}^{(2)}$		<p>$k+1-r, \dots$ $\dots, k-1, k$</p>	<p>$k \geq 3$ $k-r$ impair</p>	<p>$r < k+1$</p> <p>$r = k+1$</p>	<p>$A_{2r-2}^{(2)}$ $A_{2k-1}^{(2)}$</p>
$2^2 A_{2k-1,r}^{(2)}$		<p>0, 2, 4,, 2r-2</p>	<p>$k \geq 3$</p>	<p>$r < \frac{k+2}{2}$</p> <p>$r = \frac{k+2}{2}$</p>	<p>$A_{2r-2}^{(2)x}$ $C_{r-1}^{(1)}$</p>

TABLEAU I—Continué

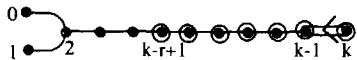
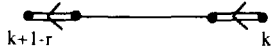
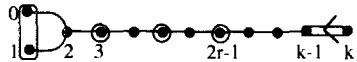

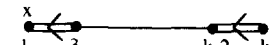

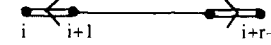
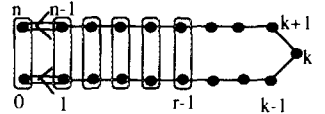
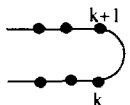
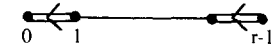
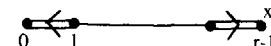
nom	indice	orbites distinguées	paramètres	diagramme relatif	nom	
$2A_{2k-1,r}^{(2)}$	 <p>Pour $r = k$ l'orbite de 1 est $\{0,1\}$</p>	$k-r+1, \dots, \dots, k-1, k$	$k \geq 3$ $k-r$ pair	$r \leq k$		$A_{2r-2}^{(2)}$
$2A_{2^2 2k-1,r}^{(2)}$		$1, 3, 5, \dots, \dots, 2r-1$	$k \geq 3$	$r < \frac{k+1}{2}$ $r = \frac{k+1}{2}$	 	$D_r^{(2)xx}$ $A_{2r-2}^{(2)x}$
$iD_{n+1,r}^{(2)}$		$i, i+1, \dots, \dots, i+r-1$	$n \geq 2$	$i \leq \frac{n-r+1}{2}$		$D_r^{(2)}$
$2D_{n+1,r}^{(2)}$	<p>$n = 2k$</p>  <p>pour $n = 2k+1$ l'extrémité est:</p> 	$0, 1, 2, \dots, \dots, r-1$	$n \geq 2$	$r = \frac{n+2}{2}$ $r < \frac{n+2}{2}$	 	$A_{2r-2}^{(2)}$ $D_r^{(2)x}$

TABLEAU II Formes réelles presque-déployées des algèbres affines "exceptionnelles"

nom	indice	diagramme relatif	nom
$A_{1,2}^{(1)}$			$A_1^{(1)}$
$A_{1,1}^{(1)3}$			$Z_0^{(1)}$
${}^2A_{1,1}^{(1)}$			$Z_0^{(1)}$
$A_{2,2}^{(2)}$			$A_2^{(2)}$
$A_{2,1}^{(2)3}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{6,7}^{(1)}$			$E_6^{(1)}$
$E_{6,3}^{(1)12}$			$A_2^{(1)}$
$E_{6,3}^{(1)28}$			$A_2^{(1)}$
${}^2E_{6,5}^{(1)}$			$F_4^{(1)}$
${}^2E_{6,3}^{(1)6}$			$C_2^{(1)x}$
${}^2E_{6,3}^{(1)15}$			$A_4^{(2)x}$
${}^2E_{6,1}^{(1)38}$			$Z_0^{(1)}$
${}^2E_{6,1}^{(1)45}$			$Z_0^{(1)}$

TABLEAU II—Continué

nom	indice	diagramme relatif	nom
$2E_{6,1}^{(1)78}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{7,8}^{(1)}$			$E_7^{(1)}$
$E_{7,5}^{(1)9}$			$F_4^{(1)}$
$E_{7,4}^{(1)12}$			$A_5^{(2)}$
$E_{7,4}^{(1)28}$			$C_3^{(1)}$
$E_{7,1}^{(1)69}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{7,1}^{(1)133}$			$Z_0^{(1)}$
$2E_{7,5}^{(1)}$			$F_6^{(2)}$
$2E_{7,3}^{(1)15}$			$C_2^{(1)x}$
$2E_{7,1}^{(1)63}$			$Z_0^{(1)}$
$2E_{7,1}^{(1)78}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{8,9}^{(1)}$			$E_8^{(1)}$
$E_{8,5}^{(1)12}$			$F_6^{(2)}$

TABLEAU II—Continué

nom	indice	diagramme relatif	nom
$F_{8,5}^{(1)28}$			$F_4^{(1)}$
$E_{8,1}^{(1)120}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{8,1}^{(1)136}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{8,1}^{(1)248}$			$Z_0^{(1)}$
$F_{4,5}^{(1)}$			$F_4^{(1)}$
$F_{4,2}^{(1)9}$			$A_2^{(2)x}$
$F_{4,2}^{(1)21}$			$A_2^{(2)x}$
$F_{4,1}^{(1)24}$			$Z_0^{(1)}$
$F_{4,1}^{(1)36}$			$Z_0^{(1)}$
$F_{4,1}^{(1)52}$			$Z_0^{(1)}$
$G_{2,3}^{(1)}$			$G_2^{(1)}$
$G_{2,1}^{(1)6}$			$Z_0^{(1)}$
$G_{2,1}^{(1)14}$			$Z_0^{(1)}$
$F_{6,5}^{(2)}$			$F_6^{(2)}$
$E_{6,3}^{(2)6}$			$A_4^{(2)}$

TABLEAU II—Continué

nom	indice	diagramme relatif	nom
$E_{6,2}^{(2)13}$			$A_2^{(2)x}$
$E_{6,2}^{(2)21}$			$A_2^{(2)x}$
$E_{6,1}^{(2)36}$			$Z_0^{(1)}$
$E_{6,1}^{(2)52}$			$Z_0^{(1)}$
$D_{4,3}^{(3)}$			$D_4^{(3)}$
$D_{4,1}^{(3)6}$			$Z_0^{(1)}$
$D_{4,1}^{(3)14}$			$Z_0^{(1)}$

diagramme; il se trouve que cela détermine entièrement le diagramme à un automorphisme près. Ces diagrammes avec leurs noms ont déjà été introduits dans [B; Vn^4], ce sont les graphes des échelonnages irréductibles de [BrT1; 1.4.6] (cf. aussi [BrT2; E1 p. 365]) mais le nom adopté ici paraît plus adapté à notre contexte.

Quand le rang relatif est $r = 1$ le graphe est toujours: $Z_0^{(1)} \bullet_0$. C'est le seul cas (quand Δ est affine) où il y a une racine imaginaire simple et alors $\Delta' = (\mathbb{Z} - \{0\})\alpha'_1$.

Pour ne pas alourdir le tableau I on ne fait pas figurer les cas particuliers r petit dans la dernière colonne. Pour $r = 1$ on vient de dire que l'on a toujours $Z_0^{(1)}$. Pour $r = 2$ (et pour certains cas où $r = 3$) le dessin du diagramme de Dynkin devient faux mais le nom de celui-ci est juste si l'on admet les équivalences indiquées dans la fig. 2.

Remarque sur la figure 2. Le troisième diagramme semble suggérer la notation $B_1^{(1)xx}$ au lieu de $B_1^{(1)x}$, mais il s'agit bien pourtant du cas particulier $r = 1$ de $B_r^{(1)x}$; voir la forme ${}^{2n}D_{n,2}^{(1)}$ ci dessous dans le premier tableau.

6.6. *Tableaux I et II.* Les paramètres utilisés dans le tableau I sont tous des entiers positifs ou nuls. On a toujours $n \geq 1$ et $r \geq 1$ (r est le rang relatif). Certaines restrictions sur les paramètres servent uniquement à éviter des redondances dans la liste; c'est le cas par exemple de la limitation $i \leq (k - r + 1)/2$ pour ${}^2A_{2k-1,r}^{(1)}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] N. ANDRUSKIEWITSCH, Some forms of Kac Moody algebras, *J. Algebra* **147** (1992), 324–344.
- [Bp] N. BARDY-PANSE, “Systèmes de racines infinis,” thèse, Nancy, Janvier 1993.
- [B] J. BAUSCH, Etude et classification des automorphismes d’ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac–Moody affines, *Rev. Inst. Elie Cartan* **11** (1988), 5–124.
- [B’] J. BAUSCH, Automorphismes des algèbres de Kac–Moody affines, *C.R. Acad. Sci. Paris* **302** (1986), 409–412.
- [BR] J. BAUSCH ET G. ROUSSEAU, Involutions de première espèce des algèbres affines, *Rev. Inst. Elie Cartan* **11** (1988), 125–139.
- [BeP] S. BERMAN AND A. PIANZOLA, Generators and relations for real forms of some Kac–Moody Lie algebras, *Comm. Algebra*, **15** (1987), 935–959.
- [Bo] R. BORCHERS, Generalized Kac–Moody algebras, *J. Algebra* **115** (1988), 501–512.
- [BoT] A. BOREL ET J. TITS, Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.E.S.* **27** (1965), 55–150.
- [BBK] N. BOURBAKI, “Groupes et algèbres de Lie,” chap. I–IX, Hermann, Paris.
- [BrT1] F. BRUHAT ET J. TITS, Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées, *Publ. Math. I.H.E.S.* **41** (1972), 5–252.
- [BrT2] F. BRUHAT ET J. TITS, Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes: existence d’une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. I.H.E.S.* **60** (1984), 5–184.
- [Hée] J. Y. HÉE, Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné, *Geom. Dedicata* **37** (1991), 65–102.
- [K] V. G. KAC, “Infinite Dimensional Lie Algebras,” troisième édition, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1990.
- [KP1] V. G. KAC AND D. H. PETERSON, Defining relations of certain infinite dimensional groups, in “Elie Cartan et les mathématiques d’aujourd’hui” Lyon 1984, *Astérisque* n° hors série (1985), 165–208.
- [KP2] V. G. KAC AND D. H. PETERSON, On geometric invariant theory for infinite dimensional groups, in “Algebraic Groups” Utrecht 1986, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1271, pp. 109–142, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1987.
- [KW] V. G. KAC AND S. P. WANG, On automorphisms of Kac–Moody algebras and groups, *Adv. Math.* **92** (1992), 129–195.
- [PK] D. H. PETERSON AND V. G. KAC, Infinite flag varieties and conjugacy theorems, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **80** (1983), 1778–1782.
- [R1] G. ROUSSEAU, Espaces affines symétriques et algèbres affines, *Rev. Inst. Elie Cartan* **11**, (1988), 141–174.
- [R2] G. ROUSSEAU, Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac–Moody affines, *Rev. Inst. Elie Cartan* **11**, Nancy (1988), 175–205.
- [R3] G. ROUSSEAU, Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac–Moody affines, in “Harmonic Analysis” Luxembourg 1987, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1359, pp. 252–264, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1988.
- [R4] G. ROUSSEAU, Almost split K -forms of Kac–Moody algebras, in “Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups” Marseille 1988, (V. G. Kac Ed.), *Adv. Ser. in Math. Physics* **7**, World Scientific (1989), 70–85.
- [R5] G. ROUSSEAU, L’immeuble jumelé d’une forme presque déployée d’une algèbre de Kac–Moody, *Bull. Soc. Math. Belg.* **42** (1990), 673–694.
- [R6] G. ROUSSEAU, On forms of Kac–Moody algebras, in “Algebraic groups and Their Generalizations: Quantum and Infinite Dimensional Methods” Pennsylvania State University 1991, *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 56, Part 2, pp. 393–399, 1994.

- [Sa] I. Satake, Classification theory of semi-simple algebraic groups, "Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics," Vol. 3, Marcel Dekker, New York, 1971.
- [T1] J. Tits, Classification of algebraic semi-simple groups, in "Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups" Boulder 1965, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, Vol. IX, pp. 33–62, 1966.
- [T2] J. Tits, Normalisateurs de tores I groupes de Coxeter étendus, *J. Algebra* **4** (1966), 96–116.
- [T3] J. Tits, Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, *Publ. Math. I.H.E.S.* **31** (1966), 21–58.
- [T4] J. Tits, Groups and group functors attached to Kac–Moody data, in "Arbeitstagung Bonn 1984," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1111, pp. 193–223, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1985.
- [T5] J. Tits, Uniqueness and presentation of Kac–Moody Groups over fields, *J. Algebra* **105** (1987), 542–573.
- [T6] J. Tits, Immeubles jumelés, cours au Collège de France, 1988/89 et 1989/90.
- [T7] J. Tits, Twin buildings and groups of Kac–Moody type, in "Groups, Combinatorics and Geometry," Durham 1990, Liebeck et Saxl éditeurs, London Math. Soc. Lecture Notes, Vol. 165, pp. 249–286, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1992.
- [V] T. Vust, Opérations de groupes réductifs dans un type de cône presque-homogène, *Bull. Soc. Math. France* **102** (1974), 317–334.