

LE GROUPE FONDAMENTAL DE CERTAINS ESPACES  
D'ORBITES REGULIERES DE GROUPES DE WEYL  
AFFINES

*A Jacques Tits pour son soixantième anniversaire*

ABSTRACT. The affine Weyl group  $W_a$  of an irreducible root system of rank  $n$  acts on the complexification  $\mathfrak{h}$  of a real space of dimension  $n$  via the usual (affine) action on the imaginary part and the action through the finite Weyl group on the real part. This group acts freely on the complement  $\mathfrak{h}'$  of some complex hyperplanes. We prove a presentation of the fundamental group of the quotient  $\mathfrak{h}'/W_a$ .

1. INTRODUCTION

1.1. Soit  $R$  un système de racines réduit irréductible dans un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ . On note  $E^*$  le dual de  $E$  et  $\mathfrak{h} = E^* \otimes \mathbb{C}$  son complexifié. Si  $\iota = \sqrt{-1}$  on désignera en général un élément de  $\mathfrak{h}$  sous la forme  $z = X + \iota Y$  avec  $X = \operatorname{Re}(z)$  et  $Y = \operatorname{Im}(z)$  dans  $E^*$ , composantes réelles et imaginaires de  $Z$ . On considérera  $\mathfrak{h}$  comme le produit des espaces euclidiens isomorphes à  $E^*$ ,  $\operatorname{Re}(\mathfrak{h})$  et  $\operatorname{Im}(\mathfrak{h})$ , et on écrira  $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}(\mathfrak{h}) \times \operatorname{Im}(\mathfrak{h})$  ou  $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}(\mathfrak{h}) + \iota \operatorname{Im}(\mathfrak{h})$ .

Les racines  $\alpha$  dans  $R$  sont donc des formes linéaires sur  $\mathfrak{h}$ . Pour  $\alpha$  dans  $R$  et  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ , on définit un hyperplan complexe de  $\mathfrak{h}$  par  $M_{\alpha,m} = \{z \in \mathfrak{h} / \alpha(z) = im\}$ . On note alors  $\mathfrak{h}'$  le complémentaire de la réunion de ces hyperplans.

Pour  $\alpha$  dans  $R$ , on note  $\alpha^\vee$  la coracine associée dans  $E^*$  (égale à  $2\alpha/(\alpha, \alpha)$  si on identifie  $E$  à  $E^*$ ). Alors le réseau des copoids radiciels est  $Q^\vee = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Z}\alpha^\vee$ .

Le groupe de Weyl  $W$  du système  $R$  agit sur  $E$ ,  $E^*$ ,  $Q^\vee$  et  $\mathfrak{h}$ . On définit le *groupe de Weyl affine* comme le produit semi-direct  $W_a = W \ltimes Q^\vee$ ; il agit sur  $\mathfrak{h}$  par la formule:

$$(w, Z)(X + \iota Y) = w(X) + \iota(w(Y) + Z).$$

En particulier un élément  $Z$  de  $Q^\vee$  agit sur  $\mathfrak{h}$  par la translation  $\tau_Z$  de vecteur  $\iota Z$ .

1.2. Le groupe  $W_a$  agit sur  $E^* = \operatorname{Re}(\mathfrak{h})$  uniquement par  $W$  et sur  $\operatorname{Im}(\mathfrak{h})$  par l'action habituelle du groupe de Weyl affine [1]. Ainsi  $W_a$  est engendré par des 'reflexions complexes' par rapport aux hyperplans  $M_{\alpha,m}$ . Il est donc facile de voir que  $\mathfrak{h}'$  est l'ensemble des  $z$  dans  $\mathfrak{h}$  qui ne sont fixés par aucun élément

nontrivial de  $W_a$ . L'espace quotient  $\mathfrak{h}'/W_a$  est donc l'espace des orbites régulières de  $W_a$  dans  $\mathfrak{h}$ .

Le but de cette note est de donner une démonstration géométrique et élémentaire du calcul par Looijenga et van der Lek [6] du groupe fondamental de  $\mathfrak{h}'/W_a$ .

1.3. Choisissons une base  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  de  $R$ , alors  $W$  est engendré par les réflexions  $r_i$  correspondantes. Si  $X_0$  est choisi dans la chambre de Weyl positive  $\mathcal{C}_0$  de  $E^*$  (i.e.  $\beta_i(X_0) > 0$  pour tout  $i$ ), on note  $x_0$  son image dans  $\mathfrak{h}'/W_a$  et on la choisit comme point de base de  $\mathfrak{h}'/W_a$ .

On définit des lacets dans  $\mathfrak{h}'/W_a$  grâce à des chemins dans  $\mathfrak{h}'$ :

(a) Pour  $Z$  dans  $Q^\vee$ , la formule  $T_Z(t) = X_0 + tZ$ ,  $t \in [0, 1]$ , définit un chemin dans  $\mathfrak{h}'$  de  $X_0$  à  $X_0 + Z \in W_a X_0$ . Son image dans  $\mathfrak{h}'/W_a$  est un lacet et on note  $t_Z$  sa classe dans  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0)$ .

Si  $Z = \beta_i^\vee$  ( $i = 1, \dots, n$ ), on note  $T_i$  et  $t_i$  au lieu de  $T_Z$  et  $t_Z$ .

(b) Pour  $i = 1, \dots, n$  et  $m \in \mathbb{Z}$ , on considère une application continue  $\delta_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\delta_m(0) = \delta_m(1) = 0$  et  $2\delta_m(1/2) \in ]m, m + 1[$ .

La formule  $S_i^{(m)}(t) = (1-t)X_0 + t r_i(X_0) + i\delta_m(t)\beta_i^\vee$  définit un chemin dans  $\mathfrak{h}'$  de  $X_0$  à  $r_i(X_0) \in W_a X_0$ . Son image dans  $\mathfrak{h}'/W_a$  est un lacet et on note  $s_i^{(m)}$  sa classe dans  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0)$ . Il est clair que  $s_i^{(m)}$  ne dépend que de  $i$  et de  $m$  et non du choix de  $\delta_m$ . On supposera dans la suite que

$$2\delta_0([0, 1]) \subset [0, 1[ \text{ et } 2\delta_{-1}([0, 1]) \subset ]-1, 0].$$

Pour  $m = 0$ , on note  $S_i$  et  $s_i$  au lieu de  $S_i^{(0)}$  et  $s_i^{(0)}$ .

**THÉORÈME 1.4** [6]. *Le groupe fondamental  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0)$  est engendré par les éléments  $s_i$  et  $t_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , avec les relations suivantes (pour  $i \neq j$ ):*

$$(A) \quad t_i t_j = t_j t_i;$$

$$(B) \quad s_i s_j s_i \cdots = s_j s_i s_j \cdots$$

avec de chaque coté  $m_{ij}$  facteurs où  $m_{ij}$  est l'ordre de l'élément  $r_i r_j$  de  $W$ .

(C) Notons  $n_{ij} = (\beta_i, \beta_j^\vee)$  alors,

$$\text{Si } n_{ij} = -2r, \text{ on a: } \quad s_i t_j = t_j t_i^r s_i t_i^{-r}$$

$$\text{Si } n_{ij} = -(2r + 1), \text{ on a: } s_i t_j = t_j t_i^{r+1} s_i^{-1} t_i^{-r}$$

1.5. Ce théorème est démontré par van der Lek parmi beaucoup d'autres résultats: par exemple le théorème est encore vrai si on remplace  $R$  par le système de racines d'une algèbre de Kac–Moody. Nous allons en donner une démonstration qui évite des manipulations algébriques abstraites et utilise uniquement de la topologie algébrique élémentaire et géométriquement visible (dont un résultat de van der Lek: n° 3.6).

2. REMARQUES ET REDUCTION DU PROBLEME

2.1. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les poids fondamentaux de  $R$ . L'application  $\theta: \mathfrak{h} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ ,  $\theta(z) = (\exp(2\pi\lambda_1(z)), \dots, \exp(2\pi\lambda_n(z)))$  identifie  $\mathfrak{h}/\iota Q^\vee$  à  $(\mathbb{C}^*)^n$ . Considérons les polynômes exponentiels  $P_i$  définis sur  $\mathfrak{h}$  par  $P_i(z) = \sum_{\lambda \in W\lambda_i} \exp(-2\pi\lambda(z))$ ; ils sont  $W$ -invariants et un résultat classique [1; VI 3.4] dit que l'algèbre des polynômes exponentiels  $W$ -invariants est  $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_n]$ . On peut alors montrer que l'application  $\theta': \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $\theta'(z) = \prod P_i(z)$  identifie  $\mathfrak{h}/W_a$  à  $\mathbb{C}^n$  et que le jacobien de cette application est le polynôme exponentiel  $W$ -anti-invariant fondamental  $\Delta$ :

$$\Delta(z) = \exp(2\pi\rho(z)) \prod_{\alpha > 0} (1 - \exp(-2\pi\alpha(z))) \quad \text{où } \rho = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

En particulier on a un revêtement  $\mathfrak{h}' \rightarrow \mathbb{C}^n - \{\Delta^2 = 0\}$  de groupe  $W_a$ .

2.2. On n'utilisera ici que le fait que  $\mathfrak{h}' \rightarrow \mathfrak{h}'/W_a$  est un revêtement connexe de groupe  $W_a$ . On a ainsi un homomorphisme surjectif de groupes  $\Phi: \Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0) \rightarrow W_a$ ,  $\Phi(s_i^{(0)}) = r_i$  et  $\Phi(t_Z) = Z$ . Il est facile de vérifier que les relations (A), (B) et (C) sont vérifiées dans  $W_a$ . D'ailleurs une présentation de  $W_a$  est obtenue en rajoutant les relations  $r_i^2 = 1$  et  $t_i s_i = s_i t_i^{-1}$  (c'est une conséquence facile de la condition (C') de 2.5).

Les relations (B) sont connues comme relations de tresses, cf. [2], [3] et [7].

2.3. Afin de raisonner entièrement sur des lacets dans  $\mathfrak{h}'$  on introduit la définition suivante:

Soit  $\mathcal{T}$  un espace topologique et  $\Omega$  une partie de  $\mathcal{T}$ , on note  $\Pi_1(\mathcal{T}; \Omega)$  le groupoïde formé des classes d'homotopie de chemins allant d'un point de  $\Omega$  à un autre point de  $\Omega$ ; le produit (non toujours défini et noté  $\circ$ ) est la composition des chemins.

Ainsi  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0)$  est le quotient de  $\Pi_1(\mathfrak{h}'; W_a X_0)$  par l'équivalence qui identifie deux chemins transformés l'un dans l'autre par  $W_a$ . En fait si on identifie  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0)$  à l'ensembles des classes de chemins dans  $\Pi_1(\mathfrak{h}'; W_a X_0)$  d'origine  $X_0$  le composé de deux chemins  $c_1$  et  $c_2$  est  $c_1 \cdot c_2 = c_1 \circ \Phi(c_1)c_2$ .

2.4. *Démonstration des relations (A)*

On a  $T_Z \cdot T_{Z'} = T_Z \circ \tau_Z(T_{Z'}) \approx T_{Z+Z'}$ , en effet tous ces chemins sont dans  $X_0 + \iota E^*$  qui est convexe et contenu dans  $\mathfrak{h}'$ .

On en déduit que  $t_Z \cdot t_{Z'} = t_{Z+Z'}$  et  $t_{-Z} = (t_Z)^{-1}$ , d'où en particulier les relations (A). Réciproquement les relations (A) permettent de définir  $t_Z = \prod t_i^{n_i}$  si  $Z = \sum n_i \beta_i^\vee$ .

### 2.5. Etude des relations (C)

Pour  $p$  dans  $\mathbb{Z}$ , notons (provisoirement)  $\sigma_i^{(2p)} = t_i^p s_i t_i^p$  et  $\sigma_i^{(2p-1)} = t_i^p s_i^{-1} t_i^p$ .

LEMME [6]. *Modulo les relations (A), les relations (C) sont équivalentes aux relations (C') ci-dessous:*

$$(C') \quad \sigma_i^{(m)} t_Z = t_{r_i(Z)} \sigma_i^{(m+\beta_i(Z))} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \text{ et } Z \text{ dans } Q^\vee.$$

D'après 2.4 il suffit de faire la démonstration pour  $Z = \alpha_j^\vee$ . Faisons la par exemple si  $m = 2p$  et  $n_{ij} = \beta_i(\beta_j^\vee) = -2r$ . On a alors  $r_i(Z) = \beta_j^\vee - \beta_i(\beta_j^\vee)\beta_i$  et  $t_{r_i(Z)} = t_j t_i^{2r}$ . Le calcul d'après (C) donne:

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(m)} t_j &= t_i^p s_i t_i^p t_j = t_i^p s_i t_j t_i^p = t_i^p t_j t_i^r s_i t_i^{-r} t_i^p \\ &= t_j t_i^{2r} t_i^{p-r} s_i t_i^{p-r} = t_{r_i(Z)} s_i^{(m-2r)}; \end{aligned}$$

et la réciproque se montre de la même manière.

REMARQUE. Si  $\beta_i(Z) = 0$ , c'est à dire  $r_i(Z) = Z$ , on a  $\sigma_i^{(m)} t_Z = t_Z \sigma_i^{(m)}$ .

### 2.6. Démonstration des relations (C')

On a clairement  $\sigma_i^{(0)} = s_i = s_i^{(0)}$  et  $(\sigma_i^{(m)})^{-1} = \sigma_i^{(-m-1)}$ . D'autre part il est clair que  $s_i^{(-1)} = (s_i)^{-1}$ . Donc pour montrer à la fois que  $\sigma_i^{(m)} = s_i^{(m)}$  et (C') il suffit de montrer les relations (C') en remplaçant  $\sigma_i^{(m)}$  par  $s_i^{(m)}$ .

Les chemins représentant les deux membres de l'équation se situent dans le produit  $\mathfrak{p}$  du segment joignant  $X_0$  à  $r_i(X_0)$  par l'espace  $iE^*$ ; de plus  $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$  est défini par  $\text{Im}(\beta_i(z)) \notin \mathbb{Z}$ . Ainsi l'application linéaire  $\beta_i$  de  $\mathfrak{p}$  sur  $\mathbb{C}$  définit un revêtement trivial de  $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$  sur  $\mathfrak{q} = ]-\beta_i(X_0), \beta_i(X_0)[ + i(\mathbb{R} - \mathbb{Z})$  de fibre contractile  $\mathbb{C}^{n-1}$ . On peut donc démontrer (C') dans  $\mathfrak{q}$ .

La classe  $t_{r_i(Z)}^{-1} s_i^{(m)} t_Z$  est représentée dans  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}'$  par le chemin  $T_{-r_i(Z)} \circ \tau_{-r_i(Z)} (S_i^{(m)}) \circ (\tau_{-r_i(Z)} \circ r_i)(T_Z)$ . L'image de ce chemin par  $\beta_i$  va de  $\beta_i(X_0)$  à  $\beta_i(r_i(X_0)) = -\beta_i(X_0)$  et est le composé de trois chemins: (1) le segment de  $\beta_i(X_0)$  à  $\beta_i(X_0) + i\beta_i(Z)$ ; (2) le chemin  $C(t) = (1-t)\beta_i(X_0) + t\beta_i(r_i(X_0)) + i(\beta_i(Z) + 2\delta_m(t))$ ; (3) le segment de  $\beta_i(r_i(X_0)) + \beta_i(Z)$  à  $\beta_i(r_i(X_0))$ . Il est alors clair que cette image est homotope dans  $\mathfrak{q}$  à  $\beta_i(S_i^{(m+\beta_i(Z))})$ ; d'où la relation (C').

## 3. DEMONSTRATION DU THEOREME

3.1. Pour calculer  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0)$ , on étudie le groupoïde  $\Pi_1(\mathfrak{h}'; W_a X_0)$  et pour cela on va introduire un ouvert (connexe et  $W_a$ -invariant)  $\mathfrak{h}''$  de  $\mathfrak{h}'$  contenant  $X_0$  de façon que l'homomorphisme naturel de  $\Pi_1(\mathfrak{h}''; W_a X_0)$  dans  $\Pi_1(\mathfrak{h}'; W_a X_0)$  soit surjectif.

Plus précisément  $\mathfrak{h}''$  sera égal à  $\mathfrak{h}'$  privé de certaines cellules de  $\mathfrak{h}'$ ; celles-ci seront des sous-ensembles convexes de  $\mathfrak{h}$  contenus dans  $\mathfrak{h}'$  définis par des équations ou inéquations de la forme  $\text{Re}(\alpha(X)) = 0$  ou  $\text{Re}(\alpha(X)) < 0$  ou  $\text{Im}(\alpha(X)) = m$  ou  $\text{Im}(\alpha(X)) < m$  pour  $\alpha$  dans  $R$  et  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ . On n'enlèvera que des cellules de codimension au moins deux.

3.2. On peut retirer à  $\mathfrak{h}'$  les cellules par ordre de dimensions croissantes. Donc pour comparer les groupoïdes on se ramène à comparer les groupoïdes d'ouverts  $\mathfrak{h}_1$  et  $\mathfrak{h}_2$  tels que  $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1 - \Delta$  où  $\Delta$  est une cellule de codimension  $m \geq 2$  fermée dans  $\mathfrak{h}_1$  (les cellules qui constituent sa frontière  $\partial\Delta = \bar{\Delta} - \Delta$  sont donc dans  $\mathfrak{h} - \mathfrak{h}_1$ ).

Soit  $V$  un voisinage tubulaire de  $\Delta$  (légèrement modifié pour être contenu dans  $\mathfrak{h}_1$ :  $V = \Delta^\varepsilon = \{z \in \mathfrak{h} / d(z, \bar{\Delta}) < \varepsilon \cdot \inf(1, d(z, \partial\Delta))\}$  pour  $\varepsilon$  assez petit,  $0 < \varepsilon < 1$ ). Comme  $V$  est simplement connexe, le théorème de van Kampen indique que  $\Pi_1(\mathfrak{h}_1; W_a X_0) = \Pi_1(\mathfrak{h}_2; W_a X_0) / \Pi_1(\mathfrak{h}_2 \cap V)$  si on interprète ce quotient comme celui engendré par l'identification à l'élément neutre en  $wX_0$  du lacet  $\gamma \circ \delta \circ \gamma^{-1}$  où  $\gamma$  est un chemin de  $wX_0$  à  $Y \in \mathfrak{h}_2 \cap V$  et  $\delta$  un lacet en  $Y$  dans  $\mathfrak{h}_2 \cap V$ .

Mais  $\mathfrak{h}_2 \cap V$  se rétracte sur la boule de rayon  $\varepsilon$  (dans un espace de dimension  $m$ ) privée de 0. Si  $m \geq 3$  le groupe  $\Pi_1(\mathfrak{h}_2 \cap V)$  est trivial et l'application  $\Pi_1(\mathfrak{h}_2; W_a X_0) \rightarrow \Pi_1(\mathfrak{h}_1; W_a X_0)$  est un isomorphisme. Si  $m = 2$  on a  $\Pi_1(\mathfrak{h}_2 \cap V) \cong \mathbb{Z}$  et  $\Pi_1(\mathfrak{h}_1; W_a X_0)$  est le quotient de  $\Pi_1(\mathfrak{h}_2; W_a X_0)$  par la relation engendrée par un lacet tournant autour de  $\Delta$ .

Ainsi l'homomorphisme canonique  $\Pi_1(\mathfrak{h}''; W_a X_0) \rightarrow \Pi_1(\mathfrak{h}'; W_a X_0)$  est surjectif, et identifie  $\Pi_1(\mathfrak{h}'; W_a X_0)$  au quotient de  $\Pi_1(\mathfrak{h}''; W_a X_0)$  par les relations engendrées par les lacets tournant autour des cellules de codimension 2 ôtées à  $\mathfrak{h}'$ .

Finalement  $\Pi_1(\mathfrak{h}' / W_a; x_0)$  est le quotient du groupe  $\Pi_1(\mathfrak{h}'' / W_a; x_0)$  par les relations que représentent les lacets autour des cellules de codimension 2 ôtées à  $\mathfrak{h}'$  (une relation par orbite sous  $W_a$  de telle cellule).

Ce genre de résultat est bien connu, voir par exemple [7].

### 3.3. Définition de $\mathfrak{h}''$

On appelle *facette* de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  (resp.  $\text{Im}(\mathfrak{h})$ ) une facette déterminée par le système des hyperplans (appelés *murs*) d'équations  $\alpha(X) = 0$ ,  $\alpha \in R$  (resp.  $\alpha(Y) = m$ ,  $\alpha \in R, m \in \mathbb{Z}$ ). Si cette facette est de codimension 0 ou 1, on l'appelle *chambre* (resp. *alcove*) ou cloison.

Si  $Z \in Q^\vee = \text{Im}(W_a X_0)$ , on appelle *étoile* de  $Z$  la réunion  $\text{Et}(Z)$  des facettes de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$  contenant  $Z$  dans leur adhérence; on a

$$\text{Et}(Z) = \{ Y \in \text{Im}(\mathfrak{h}) / \alpha(Y) < \alpha(Z) + 1, \forall \alpha \in R \}.$$

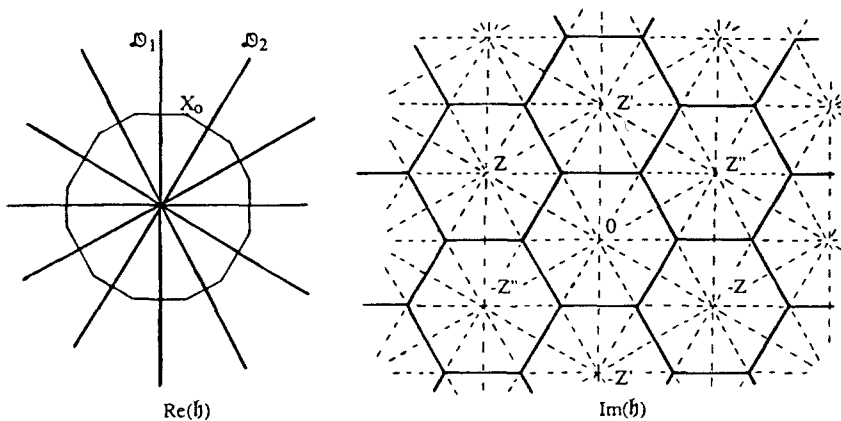
On sait que dans  $\text{Im}(\mathfrak{h})$  toute alcôve est un simplexe et son adhérence contient un unique élément de  $Q^\vee$  qui est l'un de ses sommets. Les étoiles sont donc des ouverts disjoints en bijection avec  $Q^\vee$  et  $\text{Im}(\mathfrak{h})$  est réunion de leurs adhérences.

On appelle *cellule* de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$  les facettes des étoiles. Une cellule est une réunion de facettes au sens du premier alinea. L'espace  $\text{Im}(\mathfrak{h})$  est réunion disjointe de ses cellules.

Les cloisons de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$  contenues dans la frontière de  $\text{Et}(Z)$  correspondent aux faces opposées à  $Z$  des alcôves de  $\text{Et}(Z)$ ; c'est à dire qu'elles sont contenues dans les intersections avec l'adhérence de  $\text{Et}(Z)$  des murs de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$  d'équation  $\alpha(Y) = \alpha(Z) + 1$  où  $\alpha$  est dans l'orbite sous  $W$  de la plus grande racine  $\mu$ , c'est à dire dans l'ensemble  $W\mu = R_l$  des racines longues. Cette intersection est donc l'adhérence de la cellule de codimension 1 de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$   $M(Z, \alpha) = \{ Y \in \text{Im}(\mathfrak{h}) / \alpha(Y) = \alpha(Z) + 1, \beta(Y) < \beta(Z) + 1 \forall \beta \in R, \beta \neq \alpha \}$ . Cette cellule est dans l'adhérence d'exactly deux étoiles:  $\text{Et}(Z)$  et  $\text{Et}(Z + \alpha^\vee)$ . D'après [1], comme  $\alpha$  est longue on  $\beta(\alpha^\vee) = 0, 1$  ou  $-1$  pour  $\beta \neq \pm\alpha$ , ainsi  $Z + \alpha^\vee / 2 \in M(Z, \alpha)$ .

On appelle *cellule* de  $\mathfrak{h}$  le produit d'une facette  $\mathcal{F}$  de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  par une cellule  $K$  de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$ . Ainsi  $\mathfrak{h}$  est réunion disjointe de ses cellules.

On appelle *cellule* de  $\mathfrak{h}'$  une composante connexe  $P$  de l'intersection avec  $\mathfrak{h}'$  d'une cellule  $\mathcal{F} \times K$  de  $\mathfrak{h}$ . Si  $R_{\mathcal{F}}$  est l'ensemble des racines de  $R$  nulles sur  $\mathcal{F}$ , la cellule  $P$  est le produit  $\mathcal{F} \times L$  où  $L$  est l'intersection de  $K$  avec une des chambres définies par le système d'hyperplans d'équations  $\alpha(Y) = m$  avec  $\alpha \in R_{\mathcal{F}}$  et  $m \in \mathbb{Z}$ .



$\text{Re}(\mathfrak{h})$

$\text{Im}(\mathfrak{h})$

$$(\mathcal{D}_i \subset \text{Ker}(\beta_i) ; \quad Z = \beta_2^\vee ; Z' = (2\beta_2 + 3\beta_1)^\vee ; Z'' = (\beta_2 + 3\beta_1)^\vee )$$

Cellules de  $\mathfrak{h}$  (cas du système de racines  $G_2$ )

L'espace  $\mathfrak{h}''$  est égal à  $\mathfrak{h}'$  privé de ses cellules de codimension au moins 2; c'est un ouvert de  $\mathfrak{h}'$  stable par  $W_a$  et contenant  $X_0$ .

### 3.4. Chambres et cloisons de $\mathfrak{h}''$

On appelle *chambre* (ou *cloison*) de  $\mathfrak{h}$  (resp.  $\mathfrak{h}'\mathfrak{h}''$ ) une cellule de codimension 0 (ou 1) de  $\mathfrak{h}$  (resp.  $\mathfrak{h}'$ ,  $\mathfrak{h}''$ ).

Une chambre de  $\mathfrak{h}$  est le produit d'une chambre (de Weyl) de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  par une étoile de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$ . C'est un ouvert convexe de  $\mathfrak{h}''$  donc une chambre de  $\mathfrak{h}'$  ou  $\mathfrak{h}''$ .

Comme  $W$  stabilise  $\text{Et}(0)$  et permute simplement transitivement les chambres de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$ , tandis que  $Q^\vee$  agit trivialement sur  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  et permute simplement transitivement les étoiles, le groupe  $W_a$  permute simplement transitivement les chambres de  $\mathfrak{h}$ . La chambre de  $\mathfrak{h}$  contenant  $X_0$  est  $\mathcal{C}_0 \times \text{Et}(0)$ ; on a une bijection évidente de  $W_a X_0$  sur l'ensemble des chambres de  $\mathfrak{h}$ .

Une cloison de  $\mathfrak{h}$  est dite *complexe* si elle est le produit  $\mathcal{C} \times M(Z, \alpha)$  d'une chambre de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  par une cellule de codimension 1 de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$ . Elle est alors contenue dans  $\mathfrak{h}''$ , c'est donc une cloison de  $\mathfrak{h}'$  ou  $\mathfrak{h}''$ .

Une cloison de  $\mathfrak{h}$  est dite *réelle* si elle est le produit  $\mathcal{D} \times \text{Et}(Z)$  d'une cloison de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  et d'une étoile de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$ . Si la cloison  $\mathcal{D}$  est contenue dans le mur d'équation  $\alpha(X) = 0$  avec  $\alpha \in R$ , l'intersection de  $\mathcal{D} \times \text{Et}(Z)$  avec  $\mathfrak{h}'$  est formée des deux cloisons de  $\mathfrak{h}'$  (ou  $\mathfrak{h}''$ )  $\mathcal{D} \times \text{Et}(Z, \alpha)$  et  $\mathcal{D} \times \text{Et}(Z, -\alpha)$  où  $\text{Et}(Z, \alpha) = \{Y \in \text{Et}(Z) / \alpha(Y) - \alpha(Z) \in ]0, 1[ \}$ .

Il est clair que  $\mathfrak{h}''$  est réunion disjointe de ses chambres et de ses cloisons.

Deux cloisons distinctes d'une même chambre de  $\mathfrak{h}$  ne sont pas conjuguées par  $W_a$ ; par contre les deux cloisons de  $\mathfrak{h}'$  contenues dans une même cloison réelle de  $\mathfrak{h}$  sont échangées par une réflexion de  $W_a$ .

### 3.5. Galeries de $\mathfrak{h}''$

Deux chambres de  $\mathfrak{h}''$  sont dites *mitoyennes* si l'intersection de leurs adhérences dans  $\mathfrak{h}''$  contient une cloison de  $\mathfrak{h}''$ . Si les deux chambres sont distinctes cette cloison est égale à cette intersection ou à l'une des deux composantes connexes de cette intersection et elle n'est contenue dans aucune autre adhérence de chambre.

Une *galerie* de  $\mathfrak{h}''$  est une suite  $(C_0, P_1, C_1, P_2, C_2, \dots, P_m, C_m)$  où les  $C_i$  sont des chambres,  $C_i$  mitoyenne de  $C_{i+1}$  et  $P_i$  est une des cloisons de  $\mathfrak{h}''$  dans les adhérences de  $C_i$  et  $C_{i+1}$ . La chambre  $C_0$  est l'origine de la galerie et  $C_m$  son extrémité.

Si une galerie  $\Gamma_1$  a pour extrémité l'origine d'une galerie  $\Gamma_2$  on définit de manière évidente la galerie composée  $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ .

Sur l'ensemble Gal des galeries on définit la relation d'équivalence  $\cong$  engendrée par les relations:  $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cong \Gamma_1 \cdot (C, P, C) \cdot \Gamma_2 \cong \Gamma_1 \cdot (C, P, C', P, C) \cdot \Gamma_2$ , où  $\Gamma_1, \Gamma_2, (C, P, C)$  et  $(C, P, C', P, C)$  sont des galeries pour lesquelles les compositions précédentes sont licites. L'ensemble  $\text{Gal}/\cong$  est un groupoïde.

On définit une application  $\Psi$ , compatible avec la composition, de Gal dans l'ensemble des chemins de  $\mathfrak{h}''$  allant d'un point de  $W_a X_0$  à un autre. Comme les chambres sont en bijection avec  $W_a X_0$ , il suffit de définir le chemin  $\gamma$  associé à  $(C, P, C')$ :

Il existe  $w$  dans  $W_a$  tel que  $wX_0 \in C$ . Si  $C' = C$  alors  $\gamma$  est le chemin constant en  $wX_0$ ; sinon on est dans l'un des trois cas suivants:

- (1)  $w^{-1}(P) = \mathcal{C}_0 \times M(0, \alpha)$ ,  $\alpha \in R_i$ , on pose alors  $\gamma = w(T_\alpha \vee)$ ;
- (2)  $w^{-1}(P) = \mathcal{D}_i \times \text{Et}(Z, \beta_i)$  avec  $\beta_i \in B$  (où  $\mathcal{D}_i$  désigne la cloison de  $\mathcal{C}_0$  dans le mur d'équation  $\beta_i(X) = 0$ ), on pose alors  $\gamma = w(S_i)$ ;
- (3)  $w^{-1}(P) = \mathcal{D}_i \times \text{Et}(Z, -\beta_i)$  avec  $\beta_i \in B$ , on pose alors  $\gamma = w(S_i^{(-1)})$ .

**PROPOSITION 3.6.** *L'application  $\Psi$  induit un isomorphisme de groupoïdes  $\psi$  de  $\text{Gal}/\cong$  sur  $\Pi_1(\mathfrak{h}''; W_a X_0)$ .*

*Démonstration.* Choisissons un  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que si  $P_1$  et  $P_2$  sont deux composantes connexes distinctes de cloisons de  $\mathfrak{h}''$ , les voisinages tubulaires  $P_1^\varepsilon$  et  $P_2^\varepsilon$  (cf 3.2) sont disjoints. Les chambres et ces voisinages tubulaires de composantes de cloisons de  $\mathfrak{h}''$  forment un revêtement ouvert de  $\mathfrak{h}''$ . Les seules intersections non vides d'ouverts de ce recouvrement sont convexes et de la forme  $C \cap P^\varepsilon$  pour  $P$  dans l'adhérence de  $C$ ; ainsi une suite d'ouverts de ce recouvrement telle que deux ouverts consécutifs soient distincts et d'intersection non vide détermine une galerie. La proposition est ainsi conséquence d'un résultat préliminaire général de topologie algébrique de van der Lek [6; I.1.5]. La démonstration directe dans notre cas particulier plus simple est laissée au lecteur.

**COROLLAIRE 3.7.** *Le groupe  $\Pi_1(\mathfrak{h}''/W_a; x_0)$  est engendré par les générateurs  $t_\alpha, \alpha \in R_i, s_i$  et  $s_i^{(-1)}$  pour  $i = 1, \dots, n$  avec pour seules relations  $t_\alpha \cdot t_{-\alpha} = 1$  pour  $\alpha \in R_i$  et  $s_i \cdot s_i^{(-1)} = s_i^{(-1)} \cdot s_i = 1$  pour  $i = 1, \dots, n$ .*

*Autrement dit  $\Pi_1(\mathfrak{h}''/W_a; x_0)$  est le groupe libre sur les générateurs  $t_\alpha, \alpha \in R_i^+$  et  $s_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration.* La seconde assertion est une conséquence immédiate de la première. Pour celle-ci comme  $\Pi_1(\mathfrak{h}''/W_a; x_0) = \Pi_1(\mathfrak{h}''; W_a X_0)/W_a$ , la proposition 3.6 et la construction de  $\Psi$  donnent la réponse à condition



d'identifier les relations entre les générateurs induites par la relation  $\cong$  sur Gal. Ces relations se réduisent à  $\Psi(C, P, C', P, C) = 1$  quand  $C' \neq C$ . Par  $W_a$  on peut supposer  $C = \mathcal{C}_0 \times \text{Et}(0)$ , et il y a alors 3 cas pour  $P$ . Si  $P = \mathcal{C}_0 \times M(0, \alpha)$  avec  $\alpha \in R_l$ , on a alors  $C' = \mathcal{C}_0 \times \text{Et}(\alpha^\vee)$  et  $\Psi(C, P, C', P, C) = (T_{\alpha^\vee}) \circ (\tau_{\alpha^\vee})(T_{-\alpha^\vee})$  dont la classe est  $t_\alpha \cdot t_{-\alpha}$ . Si  $P = \mathcal{D}_i \times \text{Et}(0, \beta_i)$ , on a alors  $C' = r_i(\mathcal{C}_0) \times \text{Et}(0)$  et  $r_i(P) = \mathcal{D}_i \times \text{Et}(0, -\beta_i)$  donc  $\Psi(C, P, C', P, C) = S_i \circ r_i(S_i^{-1})$  dont la classe est  $s_i \cdot s_i^{-1}$ . De même si  $P = \mathcal{D}_i \times \text{Et}(0, -\beta_i)$  on trouve la relation  $s_i^{-1} \cdot s_i$ . D'où le corollaire.

3.8. Le raisonnement de 3.2 et le corollaire précédent permettent de calculer  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0)$ . C'est le quotient du groupe libre précédent par les relations engendrés par les lacets autour des cellules de codimension 2 de  $\mathfrak{h}'$ . Par  $W_a$  on peut supposer que ces cellules sont dans l'adhérence de  $\mathcal{C}_0 \times \text{Et}(0)$ ; elles sont alors de trois types:

- (a) le produit de la chambre  $\mathcal{C}_0$  de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  par une cellule de codimension 2 de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$ ;
- (b) le produit d'une facette de codimension 2 de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  par un ouvert de  $\text{Et}(0)$ ;
- (c) le produit d'une cloison de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  par une cellule de codimension 1 de  $\mathfrak{h}'$ .

On va dans les trois numéros suivants montrer que les relations correspondantes sont respectivement les relations (A), (B) et (C) du théorème 1.4 ce qui achèvera la démonstration de celui-ci.

### 3.9. Cellules de type (a)

Un lacet autour d'une telle cellule reste par exemple dans  $X_0 + \imath \text{Im}(\mathfrak{h})$ ; il ne rencontre donc que des cloisons du genre  $\mathcal{C}_0 \times M(Z, \alpha)$ . Ainsi la relation correspondante ne porte que sur les  $t_Z$  pour  $Z$  dans  $(R_l)^\vee$ . Plutôt que de calculer explicitement ces relations, on fait les remarques suivantes: Les relations (A) (ou plutôt  $t_Z \cdot t_Z = t_Z \cdot t_Z$ ) ont été prouvées en utilisant uniquement la convexité de  $X_0 + \imath \text{Im}(\mathfrak{h})$  et son inclusion dans  $\mathfrak{h}'$ . Or  $X_0 + \imath \text{Im}(\mathfrak{h})$  est inclus dans la réunion de  $\mathfrak{h}''$ , de cellules de type (a) et de cellules de codimension au moins 3. Donc ces relations sont conséquences des relations correspondant aux cellules de type (a). D'autre part il ne peut y avoir de relations supplémentaires entre les  $t_Z$  puisqu'il existe un homomorphisme de  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; x_0)$  sur  $W_a$  qui envoie  $t_Z$  sur  $Z$ .

Ainsi ces cellules donnent les relations (A) et le fait que les générateurs  $t_Z$  peuvent être réduits à  $t_i, i = 1, \dots, n$ .

## 3.10. Cellules de type (b)

Par  $W$  on peut se ramener au cas où la facette de codimension 2 de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  correspondante est  $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j$ . La cellule de  $\mathfrak{h}'$  est donc  $\Gamma = (\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j) \times P$  où  $P$  est l'une des composantes connexes de  $\text{Et}(0)$  déterminée par le système d'hyperplans d'équations  $\alpha(Y) = 0$  avec  $\alpha \in R \cap (\mathbb{R}\beta_i + \mathbb{R}\beta_j)$ . En changeant encore par le sous-groupe  $W_{ij}$  de  $W$  engendré par  $r_i$  et  $r_j$ , on peut supposer que  $P = \{Y \in \text{Et}(0) / \beta_i(Y) > 0 \text{ et } \beta_j(Y) > 0\}$ . Choisissons  $Y_0$  dans  $P$  et même  $\alpha(Y_0) > 0$  pour  $\alpha \in R^+$ . Notons  $m = m_{ij}$  et  $w_1 = r_i, w_2 = r_i r_j, w_3 = r_i r_j r_i, \dots$ , ainsi que  $w'_1 = r_j, w'_2 = r_j r_i, w'_3 = r_j r_i r_j, \dots$ . On a ainsi  $w_{2m} = w'_{2m} = 1$  et  $w_m = w'_m$ . On note aussi  $i' = i, j' = j$  si  $m$  est impair,  $i' = j, j' = i$  sinon.

Le lacet autour de  $\Gamma$  peut se visualiser comme dans la figure (où  $m = 6$ , mais avec éventuellement un système de type  $A_1 \times A_1$  ( $m = 2$ ),  $A_2$  ( $m = 3$ ) ou  $B_2$  ( $m = 4$ )). Il correspond à une ligne polygonale de sommets successifs  $X_0 + \iota Y_0, w_1 X_0 + \iota Y_0, \dots, w_{2m} X_0 + \iota Y_0 = X_0 + \iota Y_0$ . Plutôt que d'exprimer que ce lacet est homotope à 0, on va exprimer que deux lignes polygonales faisant un demi-tour autour de  $\Gamma$  sont homotopes. La première ligne  $\lambda$  a pour sommets  $X_0 + \iota Y_0, w_1 X_0 + \iota Y_0, \dots, w_m X_0 + \iota Y_0$ ; la seconde  $\lambda'$  a pour sommets  $X_0 + \iota Y_0, w'_1 X_0 + \iota Y_0, \dots, w'_m X_0 + \iota Y_0 = w_m X_0 + \iota Y_0$ .

Pour  $k = i$  ou  $j$  et  $Y \in \text{Im}(\mathfrak{h})$  avec  $\beta_k(Y) \in ]0, 1[$ , le chemin  $S_k$  se déforme dans  $\mathfrak{h}'$  sur la ligne polygonale de sommets successifs  $X_0, X_0 + \iota Y, r_k X_0 + \iota Y$  et  $r_k X_0$ . Ainsi pour  $w$  dans  $W$ , le chemin  $wS_k$  se déforme dans  $\mathfrak{h}'$  sur la ligne polygonale de sommets successifs  $wX_0, wX_0 + \iota Y', wr_k X_0 + \iota Y'$  et  $wr_k X_0$  dès que  $Y' \in \text{Im}(\mathfrak{h})$  vérifie  $\beta_k(w^{-1}Y') \in ]0, 1[$ . C'est en particulier vrai pour  $Y' = Y_0$  si  $w(\beta_k) > 0$ .

Il est connu (et facile à vérifier dans les 4 cas en question) que  $w_k(\beta_i) > 0, w'_k(\beta_j) > 0$  pour  $k$  pair inférieur ou égal à  $m$  et que  $w_k(\beta_j) > 0, w'_k(\beta_i) > 0$  pour  $k$  impair inférieur ou égal à  $m$ . Ainsi le chemin composé du segment de  $X_0$  à  $X_0 + \iota Y_0$ , de  $\lambda$  (resp.  $\lambda'$ ) et du segment de  $w_m X_0 + \iota Y_0$  à  $w_m X_0$  se déforme sur le chemin composé  $S_i \circ w_1(S_j) \circ w_2(S_i) \circ \dots \circ w_{m-1}(S_{i'})$  (resp.  $S_j \circ w'_1(S_1) \circ w'_2(S_j) \circ \dots \circ w'_{m-1}(S_{j'})$ ). La relation introduite par la cellule  $\Gamma$  est donc l'égalité de ces deux derniers chemins à homotopie près. En prenant les classes dans  $\Pi_1(\mathfrak{h}'/W_a; X_0)$  on obtient la relation (B) (cf. 2.3).

## 3.11. Cellules de type (c)

Par  $W$  on peut se ramener au cas où cette cellule est  $\Gamma = \mathcal{D}_i \times L$  où  $L$  est une partie non vide de  $M(0, \alpha)$  avec  $\alpha \in R_i$  et  $\alpha \neq \pm \beta_i$ ; on pose  $Z = \alpha^\vee$ . Comme  $\beta_i(M(0, \alpha)) \subset ]-1, 1[$ , cette partie est définie par  $\varepsilon \beta_i(Y) > 0$  avec  $\varepsilon = \pm 1$ . Comme  $r_\alpha(\beta_i)(M(0, \alpha)) \subset ]-1, 1[$  et  $r_\alpha(\beta_i) = \beta_i + \alpha^\vee(\beta_i)\alpha$ , on a  $\varepsilon = \beta_i(Z)$

$= \pm 1$  sauf si  $\beta_i(Z) = 0$ . En changeant par  $r_i$  on peut supposer  $\varepsilon = +1$  et donc  $\beta_i(Z) = 1$  ou  $0$ . L'ouvert  $L$  est dans l'adhérence de  $\text{Et}(0, \beta_i)$  et  $\text{Et}(Z, \eta\beta_i)$  avec  $\eta = \pm 1$ ; plus précisément  $\eta = +1$  si  $\beta_i(Z) = 0$  et  $\eta = -1$  si  $\beta_i(Z) = 1$ .

La cellule  $\Gamma$  est dans l'adhérence d'exactly 4 chambres de  $\mathfrak{h}''$ :  $C_0 = \mathcal{C}_0 \times \text{Et}(0)$ ,  $C_1 = r_i(C_0) = (r_i\mathcal{C}_0) \times \text{Et}(0)$ ,  $C'_1 = \tau_Z(C_0) = \mathcal{C}_0 \times \text{Et}(Z)$  et  $C_2 = (r_i\mathcal{C}_0) \times \text{Et}(Z)$  et d'exactly 4 cloisons de  $\mathfrak{h}''$ :  $P_1 = \mathcal{D}_i \times \text{Et}(0, \beta_i)$ ,  $P_2 = (r_i\mathcal{C}_0) \times M(0, \alpha)$ ,  $P'_1 = \mathcal{C}_0 \times M(0, \alpha)$  et  $P'_2 = \mathcal{D}_i \times \text{Et}(Z, \eta\beta_i)$ . La relation induite par la cellule  $\Gamma$  exprime que les deux galeries  $(C_0, P_1, C_1, P_2, C_2)$  et  $(C_0, P'_1, C'_1, P'_2, C_2)$  définissent le même chemin à homotopie près dans  $\mathfrak{h}'$ . Or d'après 3.5 et 3.6,  $\Psi(C_0, P_1, C_1) = s_i$ ,  $\Psi(C_0, P'_1, C'_1) = t_Z$ ,  $\Psi(C_1, P_2, C_2) = t_{r_i(Z)}$  car  $r_i^{-1}(P_2) = \mathcal{C}_0 \times M(0, r_i(\alpha))$  et  $\Psi(C'_1, P'_2, C_2) = s'_i$  car  $\tau_Z^{-1}(P'_2) = \mathcal{D}_i \times \text{Et}(0, \eta\beta_i)$ . On obtient ainsi la relation  $t_Z s'_i = s_i t_{r_i(Z)}$ , qui est bien l'une des relations (C) puisque  $s'_i = s_i^{-\beta_i(Z)}$ . Comme toutes les relations (C) ont déjà été démontrées (2.6) la démonstration du théorème est achevée.

#### 4. RESULTATS VOISINS

4.1. On peut reprendre le même schéma de démonstration en prenant pour cellules de  $\mathfrak{h}'$  les produits de  $\text{Re}(\mathfrak{h})$  par une facette de  $\text{Im}(\mathfrak{h})$  et en retirant toujours les cellules de codimension au moins deux. On trouve alors une présentation du groupe fondamental de  $\mathfrak{h}'/W_a$  par  $n + 1$  générateurs  $s_0, s_1, \dots, s_n$  soumis uniquement aux relations de tresse (B) pour  $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Les éléments  $s_1, \dots, s_n$  sont essentiellement les mêmes que ci-dessus, tandis que  $s_0$  est la classe d'un chemin allant de l'alcove  $\{Y \in \text{Im}(\mathfrak{h}) / \beta_i(Y) > 0 \text{ et } \mu(Y) < 1\}$  à l'alcove  $\{Y \in \text{Im}(\mathfrak{h}) / \mu(Y) > 1 \text{ et } \alpha(Y) < 1 \text{ pour } \alpha \neq \mu \text{ dans } R^+\}$ .

On trouve ainsi un résultat analogue à celui de Nguyễn Việt Dung [7] qui porte sur le groupe fondamental de l'espace des orbites régulières d'une représentation légèrement différente de  $W_a$ . En fait van der Lek [6] a montré que les groupes fondamentaux sont isomorphes et la démonstration proposée à l'alinéa précédent est semblable à celle de [7].

4.2. Soit  $F$  un espace euclidien muni d'un système localement fini d'hyperplans (appelés murs) tel que le groupe  $W$  engendré par les réflexions orthogonales par rapport à ces hyperplans stabilise le système. Ces murs découpent des facettes dans  $F$  et, pour  $i \geq 0$ , on note  $F_i$  la réunion des facettes de codimension inférieure ou égale à  $i$ . La comparaison comme au paragraphe 3 des groupes fondamentaux de  $F_1, F_2$ , et  $F$  permet de (re)démontrer que  $W$  est un groupe de Coxeter et qu'il agit simplement transitivement sur les chambres de  $F$ . Cette démonstration est indiquée dans [8] mais elle est bien antérieure.

## BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres IV à VI, Masson, Paris, 1981.
2. Brieskorn, E., 'Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe', *Invent. Math.* **12** (1971), 57–61.
3. Deligne, P., 'Les immeubles des groupes de tresses généralisés', *Invent. Math.* **17** (1972), 273–302.
4. Heckman, G. J. et Opdam, E. M., 'Root systems and hypergeometric functions I', *Compositio Math.* **64** (1987), 329–352.
5. Van der Lek, H., 'Extended Artin groups in "Arcata 1981"', *Proc. Sympos. Pure Math.* **40** (1983), 117–121.
6. Van der Lek, H., 'The homotopy type of complex hyperplane complements', Thèse, Nijmegen, 1983.
7. Nguyễn Việt Dũng, 'The fundamental groups of the spaces of regular orbits of the affine Weyl groups', *Topology* **22** (1983), 425–435.
8. Rousseau, G., 'Immeubles et groupes réductifs' (en préparation).

*Adresse de l'auteur:*

Guy Rousseau,  
Unité associée au C.N.R.S. n° 750,  
Département de mathématiques  
de l'Université Nancy 1,  
B.P. 239  
54506 Vandoeuvre lès Nancy Cedex,  
France.

(Réçu, juin 13, 1989)