# L'IMMEUBLE JUMELE D'UNE FORME PRESQUE DEPLOYEE D'UNE ALGEBRE DE KAC-MOODY

Guy ROUSSEAU

*A Jacques Tits pour son soixantième anniversaire*

ABSTRACT

We build, by descent from the algebraic closure $\overline{K}$ of the field K of characteristic 0, the twin-building of an almost-split K-form $\mathfrak{g}_K$ of a Kac-Moody algebra $\mathfrak{g}$ . This gives a twin Tits system in the corresponding group $G_K$ .

## § 1 ALGEBRES DE KAC-MOODY ET FORMES PRESQUE-DEPLOYEES :

**1.1** Soient K un corps de caractéristique 0 et $\overline{K}$ sa cloture algébrique.

On considère une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ sur $\overline{K}$ que l'on suppose construite comme dans [K] ; on suppose de plus que toutes ses composantes sont de dimension infinie (cf. appendice). Pour les résultats standards suivants on renvoie à [K] et [PK] ou parfois à [KP1],[KP2] ou [R2].

Il existe une matrice de Cartan généralisée $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ telle que $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ soit engendrée par l'algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ et des éléments $e_i$ , $f_i$ , $i\in I$ .On a la décomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus(\oplus\mathfrak{g}_\alpha)$ où $\alpha$ parcourt le système de racines $\Delta=\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h}^*-\{0\}$ .

On note $\Pi=\{\alpha_i \,/\, i\in I\}$ la base (standard) de $\Delta$ . L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est $\Delta^+=\Delta\cap(\oplus_{i\in I}\mathbb{N}\alpha_i)$ (resp. $\Delta^-=-\Delta^+$ ). On note $X(\mathfrak{h})=\oplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ . L'épinglage standard de $\mathfrak{g}$ est le triplet $(\mathfrak{h},\Pi,(e_i,f_i)_{i\in I})$ formé de cette algèbre de Cartan, cette base et ces éléments $e_i\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_i\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$.

Les coracines $\alpha_i^\vee$ dans $\mathfrak{h}$ sont telles que $a_{ij}=\alpha_j(\alpha_i^\vee)$ pour tous i,j . Le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est engendré par l'ensemble S des réflexions fondamentales $r_i$ définies par $r_i(h)=h-\alpha_i(h)\alpha_i^\vee$ pour h dans $\mathfrak{h}$ . Une racine réelle est une racine conjuguée par W à une racine dans $\Pi$ ; leur ensemble est noté $\Delta^{re}$ . Les éléments de $\Delta^{im}=\Delta-\Delta^{re}$ sont les racines imaginaires . Le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{c}=\{H\in\mathfrak{h} \,/\, \alpha(H)=0 \ \ \forall\alpha\in\Pi\}$ .

BULLETIN DE LA SOCIETE MATHEMATIQUE DE BELGIQUE,t.XLII,1990

**1.2** Pour un sous-ensemble J de I on définit le sous-groupe W(J) de W engendré par les $r_i$ , $i \in J$ et des sous-ensembles de $\Delta$ par :

$$\Delta(J)=\Delta\cap((\oplus_{i\in J}\mathbb{Z}\alpha_i)\oplus(\oplus_{i\notin J}\mathbb{N}\alpha_i))$$

$$\Delta^m(J)=\Delta(J)\cap(-\Delta(J)) \quad \text{et} \quad \Delta^u(J)=\Delta(J)-\Delta^m(J)$$

On en déduit des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{p}^+(J)=\mathfrak{p}(J) = \mathfrak{h}\oplus(\oplus\mathfrak{g}_\alpha) \text{ pour } \alpha \text{ dans } \Delta(J)$$

$$\mathfrak{p}^-(J) = \mathfrak{h}\oplus(\oplus\mathfrak{g}_\alpha) \text{ pour } \alpha \text{ dans } -\Delta(J)$$

$$\mathfrak{m}(J) = \mathfrak{h}\oplus(\oplus\mathfrak{g}_\alpha) \text{ pour } \alpha \text{ dans } \Delta^m(J)$$

$$\mathfrak{u}(J) = \oplus\mathfrak{g}_\alpha \text{ pour } \alpha \text{ dans } \Delta^u(J)$$

Alors $\mathfrak{p}^+(J)=\mathfrak{m}(J)\oplus\mathfrak{u}(J)$ (resp. $\mathfrak{p}^-(J)$ ) est la sous-algèbre parabolique standard positive (resp. négative ) correspondant à J et $\mathfrak{m}(J)$ en est le facteur de Lévi.

Le sous-ensemble J et les paraboliques correspondants sont dits de type fini si la matrice $A_J = (a_{ij})_{i,j\in J}$ est une matrice de Cartan, c'est à dire si W(J) est fini ou si $\Delta^m(J)$ est fini. Si J ne contient aucune composante connexe de I (ce qui est toujours le cas si J est de type fini) on dit que J et les paraboliques correspondants sont non-dégénérés. Quand $J=\emptyset$ les paraboliques $\mathfrak{b}^+=\mathfrak{p}^+(\emptyset)$ et $\mathfrak{b}^-=\mathfrak{p}^-(\emptyset)$ sont appelés sous-algèbres de Borel standard .

**1.3** On définit un groupe G (ne dépendant que de $\mathfrak{g}$) agissant sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe Ad : $G\to Aut(\mathfrak{g})$ . Il est engendré par des sous-groupes $U_\alpha$ pour $\alpha$ racine réelle isomorphes au groupe additif $\mathfrak{g}_\alpha$ par un isomorphisme exp tel que : $Ad\circ exp=exp\circ ad$ .

Le groupe H associé à l'algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ est l'ensemble des $g\in G$ qui agissent sur $\mathfrak{g}_\alpha$ ( pour $\alpha\in\Delta\cup\{0\}$) par multiplication par un scalaire $\alpha(g)$ dépendant multiplicativement de $\alpha$ (en particulier H fixe $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0$ ). Ainsi pour $h\in H$ et $X\in\mathfrak{g}_\alpha$ on a $h.exp(X).h^{-1} = exp(\alpha(h).X)$ et donc H normalise $U_\alpha$ .

Le sous-groupe de Borel standard positif (resp. négatif ) est le sous-groupe $B^+$ (resp. $B^-$) engendré par H et les $U_\alpha$ pour $\alpha$ racine réelle positive (resp. négative) .

Pour J dans I le sous-groupe parabolique standard positif (resp. négatif) correspondant à J est $P(J) = P^+(J) = B^+W(J)B^+$ (resp. $P^-(J) = B^-W(J)B^-$ ) ; c'est le stabilisateur de $\mathfrak{p}(J)$ (resp. $\mathfrak{p}^-(J)$ ) dans G .

**1.4** Les sous-algèbres de Cartan (c'est à dire les sous-algèbres $ad_\mathfrak{g}$-diagonalisables maximales) de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par G .

Une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre complètement résoluble maximale de $\mathfrak{g}$ ; c'est le cas de $\mathfrak{b}^+$ et $\mathfrak{b}^-$ qui ne sont pas conjuguées par G . Les sous-algèbres de Borel conjuguées par G à $\mathfrak{b}^+$ (resp. $\mathfrak{b}^-$ ) sont dites positives (resp. négatives ). Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable il n'y a pas d'autre classe de conjugaison de sous-algèbre de Borel.

Une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre contenant une sous-algèbre de Borel; On dit qu'elle est non dégénérée si elle ne contient aucun facteur indécomposable de $\mathfrak{g}$ et de signe positif ou négatif si elle est propre (i.e. différente de $\mathfrak{g}$ ) et si elle contient une sous-algèbre de Borel positive ou négative. Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable toute sous-algèbre parabolique propre est non-dégénérée et de signe positif ou négatif. Une sous-algèbre parabolique de signe positif ou négatif est conjuguée à une unique sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{p}^{\pm}(J)$ ; elle est non dégénérée si et seulement si J est non dégénéré.

Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de $\mathfrak{g}$ agit de manière compatible à Ad sur G et donc transforme deux sous-algèbres de Borel (ou paraboliques) conjuguées en deux sous-algèbres de Borel (ou paraboliques) conjuguées; il est dit de première espèce s'il transforme une sous-algèbre de Borel positive ou négative en une sous-algèbre de Borel de même signe.

**1.5** Une K-forme de $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K$ telle qu'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_K \otimes \overline{K}$ .

Dans la suite on fixe une telle forme et un tel isomorphisme. Alors le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ agit sur $\mathfrak{g}$ et le groupe correspondant G . On identifie $\mathfrak{g}_K$ avec l'ensemble $\mathfrak{g}^\Gamma$ des points fixes et on définit $G_K = G^\Gamma$ .

On dit que $\mathfrak{g}_K$ est presque-déployée si $\Gamma$ est formé d'automorphismes (semi-linéaires) de première espèce. On sait [R4] que cela équivaut à exiger qu'une sous-algèbre parabolique non dégénérée et de signe positif (resp. négatif) de $\mathfrak{g}$ est définie sur K .

L'étude (dans l'esprit de [BoT] ) de ces formes presque-déployées a été largement entamée dans [R4] . Si $K=\mathbb{R}$ et $\mathfrak{g}$ est affine , toutes les formes presque-déployées sont construites dans [R3] (cf. §4) et les formes non presque-déployées (dites presque-anisotropes ou presque-compactes) sont étudiées dans [R2] .

## § 2 L'IMMEUBLE JUMELE DE $\mathfrak{g}$ SUR $\overline{K}$ :

**2.1** L'appartement associé à la sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ ( cf. [R4] ) :

L'espace vectoriel réel $V(\mathfrak{h}) = \{ x \in \mathfrak{h}/\mathfrak{c} \ / \ \chi(x) \in \mathbb{Q} \ \ \forall \chi \in X(\mathfrak{h}) \} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ est l'ensemble des applications $\mathbb{Z}$-linéaires de $X(\mathfrak{h})$ dans $\mathbb{R}$ ; il est stable par W et contient le cône $C = C^+_s = \{ x \in V(\mathfrak{h}) / \alpha_i(x) \geq 0 \ \forall i \in I \}$ appelé chambre standard positive . La réunion $CT^+(\mathfrak{h})$ des wC pour w dans W est le cône de Tits. Les wC sont les chambres de $CT^+(\mathfrak{h})$ , elles sont en bijection avec W .

Pour J dans I on définit $C_J{}^+ = C_J = \{ x \in C / \alpha_i(x) = 0 \ \forall i \in J \}$ (resp. $\mathrm{int}(C_J{}^+) = \mathrm{int}(C_J) = \{ x \in C_J / \alpha_i(x) > 0 \ \ \forall i \notin J \}$ . Les conjugués $w.C_J$ (resp. $w.\mathrm{int}(C_J)$ ) pour w dans W et J dans I sont les facettes (fermées) (resp. facettes ouvertes ) définies dans $CT^+(\mathfrak{h})$ par les murs $\mathrm{Ker}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Delta^{re}$ , de plus le stabilisateur ou le fixateur de $C_J$ dans W est W(J) . Ainsi il existe une (unique) identification W-équivariante de $CT^+(\mathfrak{h})$ muni de ces facettes avec le complexe de Coxeter $\Sigma$ du système de Coxeter (W,S) qui envoie la chambre wC sur la chambre w de $\Sigma$ ( [T3] , voir aussi [BBK; IV §1 exer. 16] et [T2; 5.1] ).

Cette identification envoie la facette $wC_J$ de $CT^+(\mathfrak{h})$ sur la facette $wW(J) \in W/W(J)$ de $\Sigma$ . Pour $\alpha \in \Delta^{re}$ le mur $M^+(\alpha) = CT^+(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$ de $CT^+(\mathfrak{h})$ est transformé en le mur de $\Sigma$

dont les cloisons sont de la forme $wW(\{i\})$ si $\alpha=w\alpha_i$ (avec $i\in I$ et $w\in W$ ). A $\alpha\in\Delta^{re}$ est associé un unique demi-appartement (fermé) de $CT^+(\mathfrak{h})$ $R^+(\alpha)=\{x\in CT^+(\mathfrak{h})\ /\ \alpha(x)\geq 0\ \}$ , l'identification lui fait correspondre la "racine" (ou moitié) de $\Sigma$ réunion des chambres w' telles que $\ell(r_iw^{-1}w')>\ell(w^{-1}w')$ si $\alpha=w\alpha_i$ . Il y a donc une bijection de l'ensemble $\Phi$ des racines de $\Sigma$ avec $\Delta^{re}$ . Si $\phi\in\Phi$ correspond à $\alpha$ sa racine complémentaire notée $-\phi$ correspond à $-\alpha$ .

Si on définit $C^-=-C$ , $C_J^-=-C_J$ , on peut recommencer les constructions des trois alinéas précédents en changeant simplement les + en des - . On introduit alors les réunions (disjointes sauf pour la facette $\{0\}=C_I^+=C_I^-$ ) $CT(\mathfrak{h})=CT^+(\mathfrak{h})\cup CT^-(\mathfrak{h})\subset V(\mathfrak{h})$ et pour $\alpha\in\Delta^{re}$ $M(\alpha)=M^+(\alpha)\cup M^-(\alpha)$ , $R(\alpha)=R^+(\alpha)\cup R^-(\alpha)$ avec $R^-(\alpha)=\{\ x\in CT^-(\mathfrak{h})\ /\ \alpha(x)\geq 0\ \}$ .

Les complexes $CT^+(\mathfrak{h})$ et $CT^-(\mathfrak{h})$ sont tous deux identifiés à $\Sigma$ . Par cette identification $M^+(\alpha)$ et $M^-(\alpha)$ correspondent au même mur de $\Sigma$ ; par contre $R^+(\alpha)$ et $R^-(\alpha)$ correspondent à des racines complémentaires de $\Sigma$ . On identifiera par la suite $\Delta^{re}$ et $\Phi$ par la bijection $\alpha\to R^+(\alpha)$ . On dit dans [T3] qu'une partie $\Psi$ de $\Phi$ est prénilpotente s'il existe deux chambres $w_1$ et $w_2$ de $\Sigma$ telles que $\forall\phi\in\Psi$ $w_1\in\phi$ et $w_2\in-\phi$ ; ainsi dans notre cas une partie $\Psi$ de $\Delta^{re}$ est prénilpotente si et seulement si l'intersection des $R(\alpha)$ pour $\alpha\in\Psi$ contient une chambre de $CT^+(\mathfrak{h})$ et une chambre de $CT^-(\mathfrak{h})$ . De même si $\{\alpha,\beta\}\subset\Delta^{re}$ est une paire prénilpotente, on note $[\alpha,\beta]=\{\ \gamma\in\Delta^{re}\ /\ R(\gamma)\supset R(\alpha)\cap R(\beta)\ \}$ et $]\alpha,\beta[\ =[\alpha,\beta]-\{\alpha,\beta\}$ .

**2.2** On rappelle maintenant quelques notions abstraites de [T2] , [T3] ou [T4] et on les compare à celles de [KP1] .

Soit $\Sigma(W,S)$ un système de Coxeter; on note $\Phi^+$ l'ensemble de ses racines contenant la chambre standard $1\in W$ et $\Phi^-=\Phi-\Phi^+$ . Si $\alpha$ est une racine il lui correspond une réflexion $r_\alpha\in W$ . L'ensemble des racines fondamentales est $\Phi^0=\{\ \alpha\in\Phi^+\ /\ r_\alpha\in S\ \}$ .

Définition : Une donnée radicielle jumelée est un système $(G,(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi})$ formé d'un groupe G et d'une famille de sous-groupes indexée par $\Phi$ vérifiant les conditions suivantes :

( Pour $\Psi\subset\Phi$ on note $U_\Psi$ le sous-groupe engendré par les $U_\alpha$ , $\alpha\in\Psi$ ; si $\Psi=\Phi^+$ (resp. $\Phi^-$ ) , on note $U^+$ (resp $U^-$) $=U_\Psi$ ; H est l'intersection des normalisateurs des $U_\alpha$ .)

(DRJ1) $G=HU_\Phi$

(DRJ2) $U_\alpha\neq\{1\}$ $\forall\alpha\in\Phi$

(DRJ3) Pour $\alpha\in\Phi^0$ et $u\in U_\alpha-\{1\}$ il existe u', u"$\in U_{-\alpha}$ tels que le produit m(u)=u'uu" conjugue $U_\beta$ en $U_{r_\alpha(\beta)}$ pour tout $\beta\in\Phi$ .

(DRJ4) Pour $\alpha\in\Phi^0$ on a $U_{-\alpha}\not\subset U^+$ .

(DRJ5) Si $\{\alpha,\beta\}$ est une paire prénilpotente de racines distinctes, le groupe $[U_\alpha,U_\beta]$ des commutateurs est contenu dans $U_{]\alpha,\beta[}$ (avec des notations analogues à celles de 2.1) .

**2.3** Pour $(G,(U_\alpha))$ une donnée radicielle jumelée, on définit des groupes $B_\alpha = HU_\alpha$ pour $\alpha \in \Phi$ ; alors H est l'intersection des $B_\alpha$ et les axiomes (RD1) à (RD5) de [T2] sont vérifiés (cf [T3] et [T4] ).

Dans ces conditions notons $B^+$, $B^-$, N et $\nu : N \to W$ les groupes et l'homomorphisme définis en [T2; 5.2 et 5.4] ; il résulte de (RD1) à (RD5) que $(G,B^+,B^-,N\ \nu)$ est un système de Tits jumelé au sens du numéro suivant (cf [T4] ) :

(Si on a une donnée radicielle jumelée alors $B^+ = HU^+$, $B^- = HU^-$, N est le normalisateur de la collection des $U_\alpha$ et $\nu$ est caractérisé par la relation $nU_\alpha n^{-1} = U_{\nu(n)\alpha}$ pour n dans N et $\alpha$ dans $\Phi$ ).

**2.4** Définition : Un système de Tits jumelé est un quintuplet $(G,B^+,B^-,N,\nu)$ formé d'un groupe G de trois sous-groupes $B^+$, $B^-$, N et d'un homomorphisme surjectif $\nu$ de N dans un groupe de Coxeter W de système de générateurs S tel que pour tous $s \in S$, $w \in W$ et $\varepsilon = +$ ou - (et si on note $\ell$ la longueur dans W et $H=\mathrm{Ker}(\nu)$ ) on ait :

(TJ1) $B^+ \cap B^- = H$ et G est engendré par N et $B^\varepsilon$.

(TJ2) $sB^+ \cap B^- = \varnothing$

(TJ3) $sB^\varepsilon s \not\subset B^\varepsilon$

(TJ4) $sB^\varepsilon wB^\varepsilon \subset B^\varepsilon wB^\varepsilon \cup B^\varepsilon swB^\varepsilon$

(TJ5) si $\ell(sw) = \ell(w)-1$ alors $sB^\varepsilon wB^{-\varepsilon} \subset B^\varepsilon swB^{-\varepsilon}$

Dans ces conditions si $\alpha \in \Phi^0(W,S)$ et si $s=r_\alpha$ est l'élément de S correspondant on note $B_\alpha = B^+ \cap {}^sB^-$. Dans les conditions des axiomes (RD) de 2.3 on retrouve bien les groupes en question. Si le système de Tits provient d'une donnée radicielle on a de même $U_\alpha = U^+ \cap {}^sU^-$.

**2.5** Les immeubles jumelés :

Il résulte en particulier des axiomes (TJ) que $(G,B^+,N,S)$ et $(G,B^-,N,S)$ sont des systèmes de Tits avec en particulier les décompositions de Bruhat $G = B^+NB^+ = B^-NB^-$.

On en déduit deux immeubles (épais) $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ qui sont des ensembles $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ de facettes ordonnés par une relation appelée inclusion et sur lesquels G agit. Pour $\varepsilon = +$ ou - les facettes maximales de $\mathcal{I}^\varepsilon$ appelées chambres sont les transformés de la chambre standard $C_S^\varepsilon$ dont le fixateur est $B^\varepsilon$ ; elles sont en bijection avec les conjugués par G de $B^\varepsilon$; leur ensemble est noté $\mathcal{C}^\varepsilon$. Les facettes contenues dans $gC_S^\varepsilon$ sont en bijection (par l'application F$\to$fixateur de F) avec les sous groupes propres de G contenant ${}^gB^\varepsilon$ (des paraboliques) c'est à dire avec les parties J de S (on note $gF^\varepsilon(J)$ la facette correspondante)

Les ensembles $\mathcal{C}^\varepsilon$ sont munis d'une distance $\underline{w} : \mathcal{C}^\varepsilon \times \mathcal{C}^\varepsilon \to W$ ( cf. [T3] ou [Ro]) vérifiant les axiomes suivants :

(Im0) $\underline{w}(C,C') = 1 \Leftrightarrow C = C'$

(Im1) $\underline{w}(C,C') = w$, $\underline{w}(C',C'') = s \in S \Rightarrow \underline{w}(C,C'') \in \{w,ws\}$ ; si de plus $\ell(ws) = \ell(w)+1$ alors $\underline{w}(C,C'') = ws$ .

(Im2) Si $\underline{w}(C,C') = w$ et $s\in S$ alors il existe $C''\in \mathcal{C}^{\varepsilon}$ tel que $\underline{w}(C',C'') = s$ et $\underline{w}(C,C'') = ws$ .

Un Appartement de $\mathcal{I}^{\varepsilon}$ est un sous-ensemble A de facettes isomorphe par une application $\theta$ au complexe de Coxeter $\Sigma(W,S)$ . Si C et C' sont des chambres de A alors $\underline{w}(C,C') = \theta(C)^{-1}\theta(C')$ . On ne considérera que les appartements du système d'appartements $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ défini par le système de Tits : ses appartements sont les transformés par G de l'appartement standard $A_S^{\varepsilon}$ dont les chambres sont les transformées par N de $C_S^{\varepsilon}$ . Ce système vérifie les axiomes classiques suivants :

(SA1) Deux facettes F et F' sont contenues dans un même appartement.

(SA2) Si deux appartements A et A' contiennent les deux facettes F et F' alors il existe un isomorphisme de A sur A' qui fixe F et F' .

Deux chambres (resp. deux facettes) de $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ transformées de $C_S^+$ et $C_S^-$ (resp. $C^+(J)$ et $C^-(J)$ ) par le même $g\in G$ sont dites opposées. Deux appartements de $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ transformés par le même $g\in G$ des appartements $A_S^+$ et $A_S^-$ sont dits associés .

Des axiomes des systèmes de Tits jumelés on déduit la décomposition de Bruhat-Birkhoff $G = B^+NB^- = B^-NB^+$ qui prouve qu'une facette de $\mathcal{I}^+$ et une facette de $\mathcal{I}^-$ sont contenues dans des appartements associés. On en déduit l'existence du jumelage de $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ qui est une codistance $\underline{w}^*$ : $\mathcal{C}^+\times\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}^-\times\mathcal{C}^+ \to W$ définie par $\underline{w}^*(gnC_S^{\varepsilon},gn'C_S^{-\varepsilon}) = \nu(n^{-1}n')$ pour $g\in G$ et $n,n'\in N$ ; en particulier la codistance de deux chambres opposées est 1 . Cette codistance satisfait les axiomes suivants des jumelages (pour $C\in \mathcal{C}^{\varepsilon}$ et $C'\in \mathcal{C}^{-\varepsilon}$ tels que $\underline{w}^*(C,C')=w$ ).

(J1) $\underline{w}^*(C',C) = \underline{w}^*(C,C')^{-1}$

(J2) si $C''\in \mathcal{C}^{-\varepsilon}$ , $\underline{w}(C',C'')=s\in S$ et $\ell(ws)=\ell(w)-1$ alors $\underline{w}^*(C,C'')=ws$

(J3) si $s\in S$ il existe $C''\in \mathcal{C}^{-\varepsilon}$ tel que $\underline{w}(C',C'')=s$ et $\underline{w}^*(C,C'')=ws$

Jacques Tits montre dans [T3] que les immeubles jumelés, c'est à dire les triplets formés de deux immeubles (épais) $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ et d'un jumelage $\underline{w}^*$ (vérifiant donc les axiomes (J)) , sur lesquels un groupe G agit de manière transitive sur les paires de chambres opposées, sont construits comme ci-dessus à partir d'un système de Tits jumelé. Ils sont construits à partir d'une donnée radicielle jumelée si et seulement si ils vérifient une condition technique dite de Moufang .

**2.6** Définition : Soient G un groupe, $N,U^+,U^-,H$ des sous-groupes de G et S une partie de N/H . On dit que $(G,N,U^+,U^-,H,S)$ est un "refined Tits System" [KP1] si ce sextuplet vérifie les trois axiomes suivants :

(RT1) G est engendré par N et $U^+$ ; H normalise $U^+$ et $U^-$ , il est distingué dans N . Le groupe W=N/H est engendré par S qui est formé d'éléments d'ordre 2 .

(RT2) Pour $s\in S$ on pose $U_s = U^+\cap {}^sU^-$ ; alors , si de plus $w\in W$ , on a :

a) $U_s\neq\{1\}$ et ${}^sU_s-\{1\}\subset U_sHsU_s$ ;

b) ${}^wU_s \subset U^+$ ou ${}^wU_s \subset U^-$ ;

c) $U^+ = U_s(U^+ \cap {}^sU^+)$ .

(RT3) Si $u^- \in U^-$ , $n \in N$ et $u^+ \in U^+$ vérifient $u^-nu^+ = 1$ alors $u^- = n = u^+ = 1$ .

**2.7** Revenons au cas de nos groupes G et $U_\alpha$ associés à l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ sur $\overline{K}$ . Ils forment une donnée radicielle jumelée.

Ceci est prouvé dans [T3] . On peut aussi voir [KP1] où l'on prouve que $(G,N,U^+,U^-,H,S)$ et $(G,N,U^-,U^+,H,S)$ forment des "refined Tits system". Puisque d'après [KP1; prop. 4.2] si $\alpha \in \Phi^0$ et $s=r_\alpha$ on a $U_\alpha = U_s$ , il en résulte aussitôt les axiomes (DRJ2),(DRJ3),(DRJ4) ainsi que (DRJ1) en tenant compte de ce que de (DRJ3) résulte que $N \subset HU_\Phi$ . Enfin (DRJ5) est démontré en [KP1; prop. 4.7] .

De plus on voit facilement que, si dans un groupe abstrait G $(G,N,U^+,U^-,H,S)$ et $(G,N,U^-,U^+,H,S)$ forment des "refined Tits system" alors, en posant $B^\varepsilon = HU^\varepsilon$ , le quintuplet $(G,B^+,B^-,N,v)$ est un système de Tits jumelé (voir e.g. [KP1; lemma 3.1 et 3.2] pour (TJ5)). Il résulte d'ailleurs alors de [KP1; cor. 3.4] que $(G,B^\varepsilon,N,S)$ est un système de Tits saturé; ainsi N est le stabilisateur de l'appartement standard de $\mathcal{I}^\varepsilon$ et les appartements de $\mathcal{I}^\varepsilon$ sont en bijection avec G/N et donc avec ceux de $\mathcal{I}^{-\varepsilon}$ : il y a unicité de l'associé d'un appartement de $\mathcal{I}^\varepsilon$ .

**2.8** Description géométrique de l'immeuble (cf. [R4]) :

Le cône de Tits $CT^+(\mathfrak{h})$ est la réunion disjointe de ses facettes ouvertes . Si $F=w.\mathrm{int}(C_J)$ en est une et si $x \in F$ on note $P(x) = P(F) = {}^wP(J)$ et $\mathfrak{p}(x) = \mathfrak{p}(F) = w.\mathfrak{p}(J)$ le groupe et la sous-algèbre parabolique correspondants; la facette F est dite de type fini ou non dégénérée si J l'est. L'intérieur $\mathrm{int}(CT^+(\mathfrak{h}))$ du cône de Tits est la réunion des facettes ouvertes de type fini.

On pose $\mathcal{I}^+ = G \times CT^+(\mathfrak{h})/\sim$ où $(g,x)\sim(h,y)$ si et seulement si il existe n dans N tel que $y = nx$ et $g^{-1}hn \in P(x)$ . Une base de voisinages de la classe de (g,x) dans $\mathcal{I}^+$ est formée des images des ${}^gP(x) \times V$ où V décrit une base de voisinages de x dans $CT^+(\mathfrak{h})$ ; ainsi $\mathcal{I}^+$ est un espace topologique. Il existe une action évidente et continue de G sur $\mathcal{I}^+$ et on peut identifier $CT^+(\mathfrak{h})$ à son image dans $\mathcal{I}^+$ par l'application $x \to cl(1,x)$ . Les facettes de $\mathcal{I}^+$ sont les transformés par G des facettes de $CT^+(\mathfrak{h})$ et les paraboliques associés les conjugués correspondants des paraboliques ; ils sont dits de type fini (resp. non dégénérés) si la facette correspondante de $CT^+(\mathfrak{h})$ l'est. Le stabilisateur dans G de la facette F est aussi son fixateur : le groupe correspondant P(F) . Si $C = gC_S^+$ est une chambre on pose $U(C)={}^gU^+$. Les appartements de $\mathcal{I}^+$ sont les transformés par G de $CT^+(\mathfrak{h})$ .

On identifie ainsi l'ensemble des facettes et des appartements de $\mathcal{I}^+$ à l'ensemble $\mathcal{F}^+$ de 2.5 et à ses appartements : on a donné une description géométrique de $\mathcal{I}^+$ en recollant les appartements (qui sont des copies de $CT^+(\mathfrak{h})$ ) le long des facettes.

On peut faire les mêmes choses pour $\mathcal{I}^-$ et on définit l'immeuble jumelé $\mathcal{I}$ comme la réunion (disjointe sauf pour la facette {0}) de $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ . L'appartement correspondant à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est $A(\mathfrak{h}) = CT(\mathfrak{h}) = CT^+(\mathfrak{h}) \cup CT^-(\mathfrak{h})$ où $CT^-(\mathfrak{h}) = -CT^+(\mathfrak{h})$. Les appartements de $\mathfrak{I}$ sont donc les réunions de deux appartements associés de $\mathfrak{I}^+$ et $\mathfrak{I}^-$ .

**2.9** Groupes associés à une partie d'un appartement (cf. [R4]) :

Soit $\Omega$ une partie non vide de $A(\mathfrak{h})$ .

On note $P(\Omega)$ (resp. $\mathfrak{p}(\Omega)$ ) l'intersection des $P(F)$ (resp. $\mathfrak{p}(F)$ ) pour F facette ouverte de $A(\mathfrak{h})$ rencontrant $\Omega$ .

$\Delta^m(\Omega)$ (resp. $\Delta^u(\Omega)$ ) est l'ensemble des racines $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ telles que $\alpha(\Omega) = 0$ (resp. $\alpha(\Omega) \geq 0$ et $\alpha(\Omega) \neq 0$ ) .

$$\mathfrak{m}(\Omega) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus \mathfrak{g}_\alpha) \quad \text{où } \alpha \text{ décrit } \Delta^m(\Omega)$$

$$\mathfrak{u}(\Omega) = \oplus \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{où } \alpha \text{ décrit } \Delta^m(\Omega)$$

$M(\Omega)$ est le groupe engendré par H et les $U_\alpha$ pour $\alpha$ racine réelle dans $\Delta^m(\Omega)$ .

$U(\Omega)$ est le plus petit sous-groupe de $P(\Omega)$ normalisé par $M(\Omega)$ et contenant l'intersection des $U(C)$ pour C chambre fermée de $A(\mathfrak{h})$ rencontrant $\Omega$ .

$\mathfrak{p}(\Omega)$ , $P(\Omega)$ , $\mathfrak{u}(\Omega)$ et $U(\Omega)$ ne dépendent que de $\Omega$ . Par contre $\mathfrak{m}(\Omega)$ et $M(\Omega)$ dépendent de $\Omega$ et $\mathfrak{h}$ ; en fait $\mathfrak{m}(\Omega) = \mathfrak{p}(\Omega')$ et $M(\Omega) = P(\Omega')$ où $\Omega'$ est la réunion de $\Omega$ et de son opposé $-\Omega$ dans $A(\mathfrak{h})$ .

On a la décomposition de Lévi en produit semi-direct $P(\Omega) = M(\Omega) \ltimes U(\Omega)$ et $\mathfrak{p}(\Omega) = \mathfrak{m}(\Omega) \oplus \mathfrak{u}(\Omega)$ .

Le groupe $P(\Omega)$ fixe $\Omega$ mais aussi son enveloppe convexe $ec(\Omega)$ ( c'est à dire l'intersection avec $CT(\mathfrak{h})$ de l'enveloppe convexe de $\Omega$ dans $V(\mathfrak{h})$ ). De plus $P(\Omega)$ permute transitivement les appartements contenant $\Omega$ ; ainsi $ec(\Omega)$ est indépendant du choix de $A(\mathfrak{h})$ .

## § 3 L'IMMEUBLE JUMELE DE $\mathfrak{g}_K$ SUR K :

**3.1** On considère comme en 1.5 une forme presque déployée $\mathfrak{g}_K$ de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ et on fixe un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_K \otimes \overline{K}$ . Alors le groupe de Galois $\Gamma$ agit sur $\mathfrak{g}$ et le groupe correspondant G ; on a $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}^\Gamma$ . De plus $\Gamma$ transforme un parabolique de signe positif ou négatif en un parabolique de même signe; donc $\Gamma$ agit sur $\mathfrak{F}^+$ et $\mathfrak{F}^-$ et donc sur $\mathfrak{I}$ d'une façon compatible avec ses actions sur $\mathfrak{g}$ et G . On note $\mathfrak{I}_K = \mathfrak{I}^\Gamma$ la réunion (disjointe sauf pour $\{0\}$) de $\mathfrak{I}_K^+ = (\mathfrak{I}^+)^\Gamma$ et $\mathfrak{I}_K^- = (\mathfrak{I}^-)^\Gamma$ .

Une partie B de $\mathfrak{g}$ ou de G est dite définie sur K si elle est stable par $\Gamma$ , on note alors $B_K = B^\Gamma$ . On dit aussi, par exemple, que " P est un K-parabolique " au lieu de " P est un parabolique défini sur K , etc.

**3.2** Sous-algèbres toriques :

Une sous-algèbre torique K-déployée de $\mathfrak{g}_K$ est une sous-algèbre $\mathfrak{t}$ pour laquelle la représentation adjointe dans $\mathfrak{g}_K$ est diagonalisable. Une sous-algèbre $\mathfrak{t}$ est dite torique si et seulement si $\mathfrak{t}\otimes \overline{K}$ est torique $\overline{K}$ -déployée.

Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_K$ est une sous-algèbre $\mathfrak{h}_K$ telle que $\mathfrak{h}_K\otimes \overline{K}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ . Toute sous-algèbre torique de $\mathfrak{g}_K$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_K$ [R4 ; 4.3] .

Considérons dorénavant une sous-algèbre torique $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}_K$ . On note $X(\mathfrak{t})$ le sous $\mathbb{Z}$-module du dual de $\mathfrak{t}\otimes \overline{K}$ engendré par les poids de $\mathfrak{t}\otimes \overline{K}$ pour la représentation adjointe dans $\mathfrak{g}\otimes \overline{K}$ et $V(\mathfrak{t})$ l'espace vectoriel réel des applications $\mathbb{Z}$-linéaires de $X(\mathfrak{t})$ dans $\mathbb{R}$ . Si $\mathfrak{t}\otimes \overline{K}$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ , alors $V(\mathfrak{t})$ est un sous-espace vectoriel réel de $V(\mathfrak{h})$ et on dit que $\mathfrak{t}$ est générique si $V(\mathfrak{t})$ rencontre l'intérieur du cône de Tits $CT(\mathfrak{h})$ ; on note alors $CT(\mathfrak{t})$ le sous-ensemble $CT(\mathfrak{h})\cap V(\mathfrak{t})$ de $\mathcal{I}$ . Ces définitions ne dépendent pas du choix de $\mathfrak{h}$ et $CT(\mathfrak{t})$ détermine entièrement $\mathfrak{t}$ [R4 ; 3.6] .

Si $\mathfrak{t}\otimes \overline{K}$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ , on dit que $\mathfrak{t}$ est rationnelle si le $\overline{K}$ -sous-espace vectoriel $\mathfrak{t}\otimes \overline{K}$ de $\mathfrak{h}$ est défini par des équations qui sont des combinaisons linéaires de racines à coefficients entiers. On définit alors le groupe T comme le sous-groupe de H formé des h tels que $\prod \alpha_i(h)^{n(i)} = 1$ dès que $\sum n(i)\alpha_i(\mathfrak{t}) = 0$ . Ces notions ne dépendent pas du choix de $\mathfrak{h}$ [R4 ; 1.5 à 1.7] . Le groupe T est appelé un tore rationnel de G ; il détermine entièrement $\mathfrak{t}$ .

Soit $\mathfrak{h}_K$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_K$ contenant $\mathfrak{t}$ , alors le groupe de Galois $\Gamma$ agissant sur $V(\mathfrak{h})$ stabilise $V(\mathfrak{t})$ et $V(\mathfrak{t})$ est fixe par $\Gamma$ si et seulement si $\mathfrak{t}$ est torique déployée. Si de plus $\mathfrak{t}$ est générique, l'action de $\Gamma$ sur $CT(\mathfrak{t}) \subset \mathcal{I}$ détermine l'action de $\Gamma$ sur $V(\mathfrak{t})$ , donc $\mathfrak{t}$ est déployée si et seulement si $CT(\mathfrak{t})$ est fixe par $\Gamma$ .

Proposition 3.3 [R4 ; 4.6 et 4.7] : *Les sous-algèbres toriques* K*-déployées maximales (en abrègé SATDM) de* $\mathfrak{g}_K$ *sont rationnelles et génériques; elles sont toutes conjuguées par le groupe* $G_K$ .

**3.4** Facettes et appartements de $\mathcal{I}_K$ :

Si F est une facette (fermée ou ouverte) de $\mathcal{I}$ stable par $\Gamma$ alors $F^\Gamma$ est non vide et est appelé une K-facette (fermée ou ouverte). Tout point de $\mathcal{I}_K$ est contenu dans une K-facette. Une K-chambre est une K-facette (fermée) maximale; donc toute K-facette est contenue dans une K-chambre.

Les K-facettes de $\mathcal{I}_K$ sont en correspondance bijective avec les K-sous-groupes (ou K-sous-algèbres) paraboliques; en particulier les K-chambres correspondent aux K-sous-groupes (ou K-sous-algèbres) paraboliques minimaux.

Un K-appartement de $\mathcal{I}_K$ est une intersection avec $\mathcal{I}_K$ d'un appartement de $\mathcal{I}$ maximale pour cette propriété.

Deux K-facettes sont dites opposées si les facettes correspondantes de $\mathscr{I}$ le sont.

Proposition 3.5 [R4 ; 4.6 et 4.7] :

a) *L'application* $\mathfrak{t} \to A_K(\mathfrak{t}) := CT(\mathfrak{t})$ *est une bijection de l'ensemble des sous-algèbres toriques* K-*déployées maximales de* $\mathfrak{g}_K$ *sur l'ensemble* $\mathcal{a}_K$ *des* K-*appartements de* $\mathscr{I}_K$.

b) *Le groupe* $G_K$ *permute transitivement les* K-*appartements de* $\mathscr{I}_K$.

c) *Deux* K-*facettes sont contenues dans un même* K-*appartement*.

d) *Les* K-*chambres sont de type fini; ce sont les* K-*facettes d'intérieur non vide dans un* K-*appartement*.

e) *Si* D *est une* K-*chambre, alors* $U_K(D)$ *agit simplement transitivement sur les* K-*appartements contenant* D.

Remarques : 1) Comme toute sous-algèbre torique $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}_K$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_K$, un K-appartement $A_K(\mathfrak{t})$ de $\mathscr{I}_K$ est contenu dans un appartement $A(\mathfrak{h})$ de $\mathscr{I}$ que l'on peut supposer stable par Galois. Les K-facettes dans $A_K(\mathfrak{t})$ sont les intersections non vides avec $A_K(\mathfrak{t})$ des facettes de $A(\mathfrak{h})$.

2) La dimension commune d des K-chambres et des K-appartements est appelée le K-rang de $\mathfrak{g}_K$, il vaut au moins 1. Les K-facettes de dimension d-1 sont les K-cloisons.

3) Le groupe $P(A_K(\mathfrak{t}))$ est le fixateur dans G de $A_K(\mathfrak{t})$, on note $L = P_K(A_K(\mathfrak{t})) = P(A_K(\mathfrak{t})) \cap G_K$ qui est le fixateur dans $G_K$ de $A_K(\mathfrak{t})$ ; c'est aussi le centralisateur de $\mathfrak{t}$ dans $G_K$ [R4 ; 3.6]. Si D est une K-chambre de $A_K(\mathfrak{t})$ on a $M(D) = P(A_K(\mathfrak{t}))$, le fixateur (ou stabilisateur) de D dans $G_K$ est donc $L.U_K(D)$.

4) Supposons d=1. Comme les K-facettes positives et les K-appartements positifs sont des cônes, ces derniers sont en fait des K-chambres. Comme deux K-chambres positives sont contenues dans un même K-appartement positif, on en déduit qu'il ne peut y avoir qu'un seul K-appartement positif. Ainsi $\mathscr{I}_K^{\varepsilon}$ est réduit à un seul appartement et une seule chambre. Il n'y a dans $\mathfrak{g}_K$ qu'une seule SATDM et un seul K-parabolique propre de chaque signe. A partir de 3.7 on exclura ce cas trivial.

**3.6** Racines relatives :

Considérons un K-appartement $A_K(\mathfrak{t})$ de $\mathscr{I}_K$ et un appartement $A(\mathfrak{h})$ de $\mathscr{I}$ le contenant. Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ sa restriction $\alpha'$ à $\mathfrak{t}$ est dans $X(\mathfrak{t})$ et on note $\Delta_K = \Delta(\mathfrak{g}_K,\mathfrak{t})$ l'ensemble de ces $\alpha' \neq 0$. Si de plus $\alpha$ est réelle on note $R(\alpha') = R(\alpha) \cap A_K(\mathfrak{t}) = \{ x \in A_K(\mathfrak{t}) \subset V(\mathfrak{t}) / \alpha'(x) \geq 0 \}$, $-R(\alpha') = R(-\alpha')$ et on définit le mur $M(\alpha') = M(\alpha) \cap A_K(\mathfrak{t}) = \{ x \in A_K(\mathfrak{t}) / \alpha'(x) = 0 \}$.

La racine $\alpha' \in \Delta_K$ est dite réelle si $\alpha$ est réelle et si de plus $M(\alpha')$ contient une K-facette de type fini; on dit alors que $R(\alpha')$ est un demi-appartement de $\mathscr{I}_K$ et que le mur $M(\alpha')$ est réel. On note $\Phi_K = \Phi_K(\mathfrak{g}_K,\mathfrak{t})$ l'ensemble des demi-appartements de $A_K(\mathfrak{t})$. Cet ensemble est donc un quotient de $\Delta_K^{re}$ ; si d=1 ces deux ensembles sont vides.

Pour $a \in \Phi_K$ le groupe U(a) défini en 2.9 est défini sur K et on note $V_a = U_K(a) = U(a) \cap G_K$. Si $a = R(\alpha')$ on note aussi $\partial a = M(\alpha')$ son mur.

Soit D une K-chambre de $A_K(\mathfrak{t})$ , on définit $\Delta_K{}^+ = \{ \alpha' \in \Delta_K / \alpha'(D) \geq 0 \}$ . Mais D est dans l'adhérence d'une chambre C de $A(\mathfrak{h})$ et on peut considérer que C est la chambre standard, alors $\Delta_K{}^+ = \{ \alpha' / \alpha \in \Delta^+ , \alpha' \neq 0 \}$ . Si $J = \{ i \in I / (\alpha_i)' \neq 0 \}$ , D rencontre l'intérieur de la facette $C_J$ qui est donc stable par Galois et $D = (C_J)^\Gamma$ . Pour $\gamma \in \Gamma$ il existe $u \in U(C_J)$ tel que $u\gamma A(\mathfrak{h}) = A(\mathfrak{h})$ et $w \in W(J)$ tel que $wu\gamma(C) = C$ . On note $\tilde{\gamma} = wu\gamma$ , il stabilise $\Delta^+$ et la base correspondante et agit donc par permutations sur I . L'action de $\tilde{\gamma}$ sur C stabilise $C_J$ et y induit la même action que $\gamma$ ; ainsi $\tilde{\gamma}$ agissant sur I stabilise J et D est l'ensemble des x dans C tels que $\alpha_i(x)=0$ si $i \notin J$ et $\alpha_i(x)=\alpha_j(x)$ si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\tilde{\gamma}(i)=\tilde{\gamma}(j)$ . En particulier d est le cardinal de $J/\Gamma$ et $\Delta_K{}^+ \subset \oplus\ \mathbb{N}(\alpha_i)'$ pour $i \in J/\Gamma$ ; de plus $D = \{ x \in V(\mathfrak{t}) / (\alpha_i)'(x) \geq 0 , \forall i \in J/\Gamma \}$ est un cône simplicial.

Comme le groupe $P(A_K(\mathfrak{t}))$ est transitif sur les appartements de $\mathscr{I}$ contenant $A_K(\mathfrak{t})$ [R4 ; 3.5] , ces notions ne dépendent pas du choix de $A(\mathfrak{h})$ .

<u>Proposition 3.7</u>: 1) *Soit* $\alpha \in \Delta^{re}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ *telle que* $\alpha' \neq 0$ , *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\alpha'$ *est réelle.*

ii) $\Psi = \{ \beta \in \Delta^{re} / \exists\ \lambda>0$ tel que $\beta' = \lambda\alpha' \}$ *est fini.*

2) *Dans ces conditions on note* $a=R(\alpha') \in \Phi_K$ *et* $\Psi_a$ *l'ensemble ci-dessus , alors :*

a) *Pour tout numérotage* $\{\beta_1,..,\beta_n\}$ *de* $\Psi_a$ *l'application produit* $\prod_{1\leq i\leq n} U_{\beta_i} \to U(a)$ *est bijective.*

b) $V_a$ *n'est pas réduit à l'élément neutre.*

c) *Toute facette* F *ouverte dans* $\partial a$ *est de type fini; elle est contenue dans l'adhérence d'une unique* K*-chambre* D *(resp.* $D_1$*) contenue dans* a *(resp.* -a*). Pour un tel choix on a* : $V_a = U_K(D \cup -D_1)$ .

<u>Démonstration</u> : 1) On a $\Psi = \{ \beta \in \Delta^{re} / \beta' \neq 0$ et $R(\beta') = R(\alpha') \}$ .

Supposons $\Psi$ fini. Soit F une facette de dimension maximale (d-1) dans $M(\alpha')$ . Les racines de $\Delta^{re}$ nulles sur F sont nulles sur $M(\alpha')$ , il y en a trois sortes : les racines telles que $\alpha'=0$ (en nombre fini d'après 3.5d ) et les racines dans $\pm\Psi$ ; ces racines sont donc en nombre fini et F est de type fini.

Supposons $\alpha'$ réelle. Alors $M(\alpha')$ contient une K-facette de type fini c'est à dire $M(\alpha')$ rencontre $int(CT(\mathfrak{h}))$ .Ainsi une facette ouverte F dans $M(\alpha')$ est de dimension maximale d-1 et de type fini. Un point x de F est dans $int(CT(\mathfrak{h}))$ , donc F est dans (l'adhérence d') une unique K-facette de dimension d contenue dans $R(\alpha')$ , cette facette est une K-chambre positive D ; notons de même $D_1$ la K-chambre positive de $R(-\alpha')$ contenant F et $D^- = -D_1 \subset R(\alpha')$ . L'enveloppe convexe de F et -F est $M(\alpha')$ , donc l'enveloppe convexe de D et $D^-$ (ou D et -F ) est $R(\alpha')$ . Soient $C^+$ et $C^-$ des chambres de $A(\mathfrak{h})$ contenant respectivement D et $D^-$ . Si $\beta \in \Delta^{re}$ , $\beta' \neq 0$ et $R(\beta') \supset D \cup D^-$ il est clair que $R(\beta) \supset C^+ \cup C^-$ , donc $\Psi$ est formé de racines positives pour les deux chambres $C^+$ et $C^-$ de signes opposés. Ainsi $\Psi$ est prénilpotent et fini (cf [T3] ou [KP1 ; lemma 4.5]) et on a montré 2)c puisque $U(D\cup D^-) = U(a)$ par convexité.

2) Le a) découle des résultats précédents et de [T3] ou de [KP1 ; prop. 4.8] . Prouvons le b) . Supposons de plus $\mathfrak{h}$ défini sur K . Alors $\Psi$ est fini, formé de racines réelles et stable par Galois. Choisissons $x \in a\text{-}\partial a$ et soit $\Theta$ l'ensemble des $\beta \in \Psi$ tels que $\beta(x)$ est maximum. Alors $\Theta$ est stable par Galois et pour tous $\beta_1$ , $\beta_2 \in \Theta$ , on a $\beta_1+\beta_2 \notin \Psi$ donc $\beta_1+\beta_2 \notin \Delta^{re}$ . Soit $\mathfrak{u} = \oplus_{\beta\in\Theta}\, \mathfrak{g}_\beta$ , c'est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathfrak{g}$ stable par Galois, en particulier $\mathfrak{u}_K = \mathfrak{u}\cap\mathfrak{g}_K$ est non réduit à 0 . Les groupes $U_\beta$ pour $\beta\in\Theta$ commutent entre eux (axiome DRJ5) et donc l'application $\prod\exp : \mathfrak{u}\to U(a)$ est un homomorphisme injectif de groupes compatible aux actions du groupe de Galois. Il en résulte que $V_a$ contient l'image de $\mathfrak{u}_K$ et n'est pas réduit à l'élément neutre.

Proposition 3.8 : *Soit* $a \in \Phi_K(\mathfrak{t})$ ; *Le groupe* $V_a$ *agit simplement transitivement sur les* K-*appartements contenant* a . *Si* F , D et $D_1$ *sont comme en 3.7.2c toute* K-*chambre* $D_2$ *de* $\mathscr{I}_K$ *différente de* D *et contenant* F *(dans son adhérence) est contenue dans un unique* K-*appartement contenant* a , *elle est donc transformée de* $D_1$ *par un unique élément de* $V_a$ .

Démonstration : Soit $D^- = -D_1$ la K-chambre opposée à $D_1$ dans $A_1 = A_K(\mathfrak{t})$ .

Si un K-appartement $A_2$ contient a il contient $\partial a$ et donc F et -F ; soit $D_2$ la K-chambre de $A_2$-a contenant F dans son adhérence. L'enveloppe convexe de -F et $D_2$ contient $A_2$-a donc $A_2$ est entièrement déterminé par $D_2$ . Réciproquement si $D_2$ est une K-chambre de $\mathscr{I}_K$ contenant F dans son adhérence, alors $D_2$ et $D^-$ sont contenus dans un même K-appartement $A_2$ et $A_2$ contient l'enveloppe convexe a de $D^-$ et F . On a donc une bijection entre les K-chambres ($\neq$D) contenant F et les K-appartements contenant a . D'autre part d'après 3.5e il existe un unique $u \in U_K(D^-)$ tel que $A_2 = uA_1$ . Alors $uD_1 = D_2$ et $uF = F$ , donc, par convexité, u fixe a , c'est à dire $u \in V_a$ ; d'où la proposition.

Corollaire 3.9 : *Soient* $a \in \Phi_K(\mathfrak{t})$ , $u \in V_a$ , $u \neq 1$ . *Il existe* u' , u'' $\in U_{-a}$ *tels que* $m(u) = u'uu'' \in G_K$ *stabilise* $A_K(\mathfrak{t})$ *fixe* $\partial a$ *et échange* a *et* -a . *Si* D *et* $D_1$ *sont comme en 3.7.2c , on a* $D_1 = m(u)D$ et $D = m(u)D_1$ .

Remarque : En particulier u ne fixe aucun point de -a non dans $\partial a$ .

Démonstration : Soient F , D et $D_1$ comme en 3.7.2c . La K-chambre $D_2 = uD_1$ est distincte de $D_1$ et contient F , il existe donc $u' \in V_{-a}$ tel que $u'(D_2) = D$ . Ainsi $(u'u)^{-1}D = D_1$ et la K-chambre $D_3 = (u'u)^{-1}D_1$ est distincte de $D_1$ et contient F . Il existe donc $u'' \in V_{-a}$ tel que $u''(D) = D_3$ . Ainsi on a $m(u)D = D_1$ et $m(u)D_1 = D$ . Comme u' , u'' et u fixent $-F \subset \partial a$ , on a par convexité $m(u)a = -a$ et $m(u)(-a) = a$ d'où le résultat.

**3.10** Les facettes réelles et le groupe de Weyl relatif :

Soient $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre torique déployée maximale de $\mathfrak{g}_K$ et $A = A_K(\mathfrak{t})$ le K-appartement correspondant.

Une K-facette est dite réelle si le sous-espace vectoriel de $V(\mathfrak{t})$ qu'elle engendre est l'intersection de K-murs réels. Une K-chambre est donc réelle; plus généralement une K-facette de type fini est réelle.

On a vu que les K-facettes correspondent bijectivement aux sous-algèbres pararaboliques ou aux sous-groupes paraboliques définis sur K ; mais si une K-facette F n'est pas réelle il se pourrait que l'ensemble $P_K(F) = P(F)^\Gamma$ des points rationnels sur K du groupe parabolique correspondant soit réduit à l'élément neutre.

Choisissons $D^+$ une K-chambre positive de A , on note $\Phi_K{}^0$ l'ensemble des K-demi-appartements a tels que a contienne $D^+$ et $\partial a$ contienne une K-cloison contenue dans $D^+$. Ainsi $\Phi_K{}^0$ est en bijection avec l'ensemble des K-cloisons réelles de $D^+$.

On note $N_K = N_K(\mathfrak{t})$ le normalisateur de $\mathfrak{t}$ dans $G_K$ ; d'après 3.5a il est formé des éléments de $G_K$ qui stabilisent $A_K(\mathfrak{t})$ . Il contient le fixateur L de $A_K(\mathfrak{t})$ cf 3.5 . Le groupe de Weyl relatif $W_K = N_K/L$ agit donc sur A .

Considérons la partie positive $A^+ = CT^+(\mathfrak{t})$ de A , son intérieur est un cône convexe $\mathrm{int}(CT^+(\mathfrak{t}))$ formé des K-facettes de type fini de $A^+$.

Proposition 3.11 : *Pour* $a \in \Phi_K$ *la classe dans* W *de l'élément* m(u) *de 3.9 ne dépend pas du choix de* u *et elle est d'ordre deux. C'est la réflexion par rapport au mur* $\partial a$ *notée* $r_a$ . *Le groupe* $W_K$ *est engendré par* $S_K = \{ r_a / a \in \Phi_K{}^0 \}$ *; il agit simplement transitivement sur les chambres positives (resp. négatives) de* A .

Remarques : 1) Ainsi d'après 3.5b le groupe $G_K$ permute transitivement les paires formées d'un K-appartement et d'une K-chambre positive de cet appartement. Mais les K-appartements contenant une K-chambre D sont en bijection avec les K-chambres opposées à D (en effet un K-appartement A contenant D contient une unique K-chambre $D^-$ opposée à D et l'enveloppe convexe de D et $D^-$ est A , donc A est entièrement déterminée par D et $D^-$ ). Ainsi $G_K$ permute transitivement les paires de K-chambres opposées.

2) Si $\alpha \in \Delta^{re}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est tel que $\alpha' \neq 0$ et que $R(\alpha')$ et $R(-\alpha')$ contiennent tous deux des K-chambres de même signe, alors $\alpha'$ est réelle, c'est à dire $R(\alpha') \in \Phi_K$ : En effet grace à une galerie comme celle de la démonstration ci-dessous on peut supposer que $R(\alpha') \supseteq D_1$ , $R(-\alpha') \supseteq D_2$ où $D_1 \cap D_2$ contient la cloison réelle F ; ainsi $M(\alpha')$ contient la facette de type fini F .

Démonstration : Soient u ,u' non triviaux dans $V_a$ , alors les éléments m(u) , m(u') et $m(u)^{-1}$ stabilisent A (et sont donc dans $N_K$) et transforment $D_1$ en D . Ainsi $m(u)^2$ et $m(u')^{-1}m(u)$ fixent $\partial a$ , stabilisent A , D et $D_1$ . Comme ils stabilisent ces facettes ils les fixent (point par point) ainsi donc que A enveloppe convexe de $\partial a$ , D et $D_1$ : les classes de m(u) , m(u') et $m(u)^{-1}$ dans $W_K$ sont les mêmes.

Soit D' une K-chambre positive. Ainsi $D^+$ et D' sont contenues dans le cône convexe $\mathrm{int}(CT^+(\mathfrak{t}))$ . Le segment $\Sigma$ joignant un point $x^+$ à l'intérieur de $D^+$ à un point x' à l'intérieur de D' ne rencontre que des facettes de type fini. Ainsi tout point x de $\Sigma$ n'est contenu dans l'adhérence que d'un nombre fini de K-facettes, il possède donc un voisinage ouvert qui ne rencontre qu'un nombre fini de K-facettes. Par compacité de $\Sigma$ on voit que $\Sigma$ (et même un voisinage ouvert de $\Sigma$) ne rencontre qu'un nombre fini de K-facettes. Ainsi on peut déformer $\Sigma$ en un ligne polygonale ne rencontrant que des K-chambres ou des K-cloisons de type fini (car dans n'importe quel voisinage on peut tourner autour d'une K-facette de codimension $\geq 2$). Cette ligne polygonale détermine une galerie $D_0 = D^+$ , $F_1$ , $D_1$ ,....., $F_n$ , $D_n = D'$ où $F_i$ est une K-cloison de type fini adhérente aux K-chambres $D_{i-1}$ et $D_i$ . On peut supposer $D_{i-1} \neq D_i$ , notons alors $r_i$ la réflexion par rapport au mur réel contenant $F_i$ ; il est clair que $r_i(D_{i-1}) = D_i$ . Notons $w_1 = 1$ et $w_i = r_{i-1}......r_2 r_1$ pour $i \geq 2$ , il est clair que $w_i(D^+) = D_{i-1}$ et que $w_i r_i (w_i)^{-1}$ est la réflexion par rapport à une K-cloison réelle de $D^+$ , c'est à dire que $w_i r_i (w_i)^{-1} \in S_K$ . On en déduit facilement que le sous-groupe de $W_K$ engendré par $S_K$ agit transitivement sur l'ensemble des K-chambres positives. Mais un élément de $W_K$ qui stabilise $D^+$ le fixe (point par point) et fixe donc A (car il le stabilise et y agit de manière affine). D'où la proposition puisque le cas négatif se traite de manière symétrique.

**3.12** Soient $D^- = -D^+$ la k-chambre opposée à $D^+$ dans $A = A_K(\mathfrak{t})$ et $V^+ = U_K(D^+)$ , $V^- = U_K(D^-)$ les groupes correspondants.

<u>Proposition</u> : $(G_K , N_K , V^+ , V^- , L , S_K)$ *est un "refined Tits system"* .

<u>Remarque</u> : Puisque ici les deux signes jouent des rôles symétriques, on a un autre "refined Tits system" : $(G_K , N_K , V^- , V^+ , L , S_K)$ .

<u>Démonstration</u> : Les groupes $V^+$ et $V^-$ sont normalisés par $L = M_K(D^+) = M_K(D^-)$ , les éléments de $S_K$ sont d'ordre deux et il résulte de 3.11 et 3.5e que le groupe engendré par N et $V^+$ agit transitivement sur les K-chambres positives, donc est égal à $G_K$ puisque le fixateur de $D^+$ est $L.V^+ \subset N_K.V^+$ ; d'où l'axiome (RT1).

Soit $a \in \Phi_K{}^0$ et $s = r_a \in S_K$ , d'après 3.7.2c on a $V_a = V^+ \cap {}^s V^-$ . Ainsi la partie a) de l'axiome (RT2) résulte de 3.7.2b et de 3.9 ; la partie b) est claire et la partie c) résulte de 3.8 : Si $D_1$ est la K-chambre de A séparée de $D^+$ par le mur $\partial a$ et si $u \in V^+$ on a $uD_1 \neq D^+$ et $uD_1 \supseteq D^+ \cap D_1$ ; il existe donc $v \in V_a$ tel que $(v^{-1})uD_1 = D_1$ et donc $(v^{-1})u \in V^+ \cap {}^s V^+$ .

Soient maintenant $u \in V^-$ , $n \in N_K$ et $v \in V^+$ , si $unv = 1$ on a $u^{-1} = nv$ . Mais $u^{-1}$ fixe $D^-$ donc transforme $D^+$ en une K-chambre opposée à $D^+$ et nv transforme $D^+$ en la chambre $nD^+$ de A . On a donc $nD^+ = D^+$ , c'est à dire $n \in L = M_K(D^+)$ . On a alors $u = n = v = 1$ d'après [PK ; cor 5a] d'où l'axiome (RT3).

<u>Corollaire</u> 3.13 : *Soit* $\varepsilon = \pm 1$ ,

a) $(G_K , LV^\varepsilon , N_K , S_K)$ *est un système de Tits saturé* .

b) *En particulier* $(W_K , S_K)$ *est un système de Coxeter; on note* $\ell(\ )$ *sa fonction longueur.*

c) *Soient* $a \in \Phi_K{}^0$ *et* $w \in W_K$ *, alors ,*

$$wD^\varepsilon \subset a \quad \Leftrightarrow \quad V_{w^{-1}(a)} \subset V^\varepsilon \quad \Leftrightarrow \varepsilon\ell(r_a w) > \varepsilon\ell(w)$$

d) *Le groupe* $V^\varepsilon$ *est engendré par les sous-groupes* $V_a$ , $a \in \Phi_K$ *qu'il contient.*

Application : Le système de Coxeter $\Sigma_K$ associé à $(W_K,S_K)$ a ses chambres qui correspondent bijectivement aux K-chambres du K-appartement positif $CT^+(\mathfrak{t})$ (3.10); il résulte du c) que l'ensemble de ses racines est en bijection avec l'ensemble $\Phi_K$ des K-demi-appartements de $CT^+(\mathfrak{t})$.

Démonstration : D'après la remarque 3.12 on peut selon les cas supposer $\varepsilon = \pm 1$ . Les assertions a) et b) résultent aussitôt de la proposition 3.12 comme on l'a déjà signalé en 2.7 . La première équivalence de c) est claire ( cf. prop. 3.8) et la seconde résulte de [KP1 ; lemma 3.2] . Enfin l'assertiòn d) est prouvée en [KP1 ; prop. 3.4] .

Théorème 3.14 : *Le groupe* $G_K$ *muni de ses sous-groupes* $V_a$ , $a \in \Phi_K$ *est une donnée radicielle jumelée.*

Démonstration : On vient de voir que $\Phi_K$ est l'ensemble des racines de $\Sigma_K$ et il est clair que $\Phi_K{}^0$ en est l'ensemble des racines fondamentales. D'après 3.13c,d les groupes $V^+$ et $V^-$ sont les groupes $U^+$ et $U^-$ de 2.2 . Le groupe $L= M_K(a)$ normalise $V_a$ ; réciproquement si $g \in G_K$ normalise chaque $V_a$ , $a \in \Phi_K$ , alors il normalise $V^+$ et $V^-$ , il est donc dans $LV^+ \cap LV^- = L$ d'après [KP1 ; cor 3.1] et l'axiome (RT3) ; ainsi L est le groupe H de 2.2

Le groupe engendré par L et les $V_a$ contient $N_K$ (3.9 et 3.11) et $V^+$ (3.13d) c'est donc $G_K$ (axiome (RT1)) d'où l'axiome (DRJ1) . Les axiomes (DRJ2) , (DRJ3) et (DRJ4) sont prouvés respectivement en 3.7.2b , 3.9 et 3.13c . Il reste donc à vérifier l'axiome (DRJ5).

Si $\{a,b\} \subset \Phi_K$ est une paire prénilpotente de racines distinctes, il existe des K-chambres positive $D_1{}^+$ et négative $D_1{}^-$ contenues dans a et b . Tout $c \in [a,b]$ contient donc $D_1{}^+$ et $D_1{}^-$ .Soient $C^+$ et $C^-$ des chambres de $A(\mathfrak{h})$ contenant respectivement $D_1{}^+$ et $D_1{}^-$ . Si $\gamma \in \Delta^{re}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est dans $\Psi_c$ , on a $c = R(\gamma')$ , donc $R(\gamma)$ contient $D_1{}^+$ et $D_1{}^-$ ; mais $\partial R(\gamma)$ ne contient ni $D_1{}^+$ ni $D_1{}^-$ , donc $R(\gamma)$ contient $C^+$ et $C^-$ . Notons $\Psi(a,b)$ (resp. $\Psi'(a,b)$ ) la réunion des $\Psi_c$ pour $c \in [a,b]$ (resp. $c \in ]a,b[$) ; on vient de montrer que $\Psi(a,b)$ (et donc aussi $\Psi'(a,b)$) est un ensemble prénilpotent de racines (donc fini : [KP1 ; lemma 4.5]). Notons aussi $U(a,b)$ (resp. $U'(a,b)$ ) le sous-groupe de G engendré par les $U_\gamma$ pour $\gamma \in \Psi(a,b)$ (resp. $\gamma \in \Psi'(a,b)$ ).

$U'(a,b)$ est un sous-groupe distingué de $U(a,b)$ qui contient $[U(a),U(b)]$ : Quitte à permuter a et b , il suffit de montrer que si $\alpha \in \Psi_a$ et $\gamma \in \Psi'(a,b) \cup \Psi_b$ alors $[U_\alpha,U_\gamma] \subset U'(a,b)$ . Or $[U_\alpha,U_\gamma]$ est contenu dans le groupe engendré par les $U_\delta$ pour $\delta \in (\Delta_+{}^{re}) \cap (\mathbb{N}^*\alpha+\mathbb{N}^*\gamma)$ ; montrons que ces groupes sont dans $U'(a,b)$ . Mais si $\delta$ est une telle racine on a $\delta' = n_1\alpha' + n_2\gamma'$ avec $n_1 , n_2 \in \mathbb{N}$ , $n_1 , n_2 \neq 0$ et donc $R(\delta') \supseteq a \cap b$ . Comme $c = R(\gamma') \neq R(\alpha') = a$ , $\alpha'$ et $\gamma'$ ne sont pas colinéaires donc $\delta'$ n'est pas colinéaire à $\alpha'$ : $\delta \notin \Psi_a$ . D'autre part $\gamma'$ est positive sur $a \cap b$ donc $\delta'$ est strictement positive sur l'intersection de b avec l'intérieur de a ; donc $\delta'$ n'est pas colinéaire à $\beta'$ : $\delta \notin \Psi_b$ . Enfin $R(\delta')$ ne contient pas b (qui est l'enveloppe de ses chambres), il existe donc une K-chambre (par exemple positive) $D_2{}^+$ qui est dans b mais pas dans $R(\delta')$ ; comme $R(\delta') \supseteq a \cap b \supseteq D^+$ , $d = R(\delta')$ est dans $\Phi_K$ (3.11.2). On a clairement $d \in ]a,b[$ , donc $\delta \in \Psi'(a,b)$ et $U_\delta \subset U'(a,b)$ .

L'application produit $\prod V_c \to U'(a,b)^\Gamma$ est bijective pour n'importe quel ordre sur les $c \in ]a,b[$ : En effet l'application produit $\prod U(c) \to U'(a,b)$ est bijective d'après 3.7.2a , [KP1 ; prop. 4.8] et ce qui précède; mais cette application est clairement compatible aux actions de $\Gamma$ , d'où le résultat puisque $V_c = U(c)^\Gamma$ .

Il résulte des deux alinéas précédents que $[V_a, V_b]$ est contenu dans le groupe engendré par les $V_c$ pour $c \in ]a,b[$ , d'où l'axiome (DRJ5) et le théorème.

**3.15** Remarque : A cette donnée radicielle jumelée est associé un immeuble jumelé $\mathcal{J}_K' = \mathcal{J}_K'^{+} \cup \mathcal{J}_K'^{-}$ sur lequel $G_K$ opère. D'après 3.13a et 3.5.3 ses appartements (resp. ses chambres) sont en bijection avec les appartements (resp. les chambres) de $\mathcal{J}_K$ . Les facettes de $\mathcal{J}_K'$ sont les conjugués par $G_K$ des facettes dans $\mathcal{J}_K'$ de la chambre standard qui sont déterminées exactement par les $a \in \Phi_K^0$ qui les contiennent. Mais d'après 3.6 la K-chambre standard D de $\mathcal{J}_K$ est un cône simplicial; ses facettes sont donc elles aussi déterminées par les cloisons de D qui les contiennent. Il résulte alors aussitôt des définitions adoptées que les facettes de $\mathcal{J}_K'$ correspondent bijectivement aux K-facettes réelles de $\mathcal{J}_K$ .

## §4 EXEMPLES :

**4.1** On va regarder certains exemples de formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody affines (en un sens légèrement généralisé).

Soient K un corps (de caractéristique 0) et L une extension finie de K . On considère un algèbre de Lie réductive déployée $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ sur L que l'on munit d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $(.|.)$ invariante pour la structure d'algèbre de Lie (et invariante par le groupe fini $\Xi$ que l'on va considérer) par exemple la forme de Killing si $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ est semi-simple.

On pose $\mathfrak{l}'' = \mathfrak{l}''(\mathring{\mathfrak{g}}_L) = \mathring{\mathfrak{g}}_L \otimes L[t,t^{-1}] = \oplus_{j\in \mathbb{Z}}\ \mathring{\mathfrak{g}}_L t^j$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\mathring{\mathfrak{g}}_L) = \mathfrak{l}'' \oplus Lc \oplus LD$ où c et D sont deux symboles. Alors $\mathfrak{l}$ est une L-algèbre de Lie pour le crochet défini par :

$[\,Xt^j+\lambda c+\mu D\,,\,Yt^k+\lambda' c+\mu' D] = [X,Y]t^{j+k} + \mu k Y t^k - \mu' j X t^j + j\delta_{j,-k}(X\,|\,Y)c$

Ainsi $\mathfrak{c}_L = Lc$ est le centre de $\mathfrak{l}$ , $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'' \oplus Lc$ est l'algèbre dérivée de $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'' = \mathfrak{l}'/\mathfrak{c}_L$ est une algèbre de Lie sous-quotient de $\mathfrak{l}$ . Si $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ est simple on sait (cf [K] , [R1] et [R3]) que $\mathfrak{l}$ est une algèbre de Kac-Moody affine (déployée)sur L .

**4.2** Le moyen a priori le plus simple de construire des automorphismes K-linéaires d'algèbre de Lie de $\mathfrak{l}''$ ou $\mathfrak{l}$ est d'agir séparément sur $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ et sur $L[t,t^{-1}]$ :

Le groupe $\mathrm{Aut}_K(\mathring{\mathfrak{g}}_L)$ des automorphismes K-linéaires d'algèbre de Lie de $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ s'envoie par un homomorphisme $\pi_1$ sur le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Aut}_K(L)$ .

Le groupe $\mathrm{Aut}_K(L[t,t^{-1}])$ des automorphismes K-linéaires d'algèbre associative de $L[t,t^{-1}]$ s'envoie par un homorphisme $\pi_2$ sur $\Gamma$ . Si $\tau \in \mathrm{Aut}_K(L[t,t^{-1}])$ , on a $\tau(t) = at^{\pm 1}$

avec $a \in L^*$ ; on considèrera le sous-groupe $Aut_K^+(L[t,t^{-1}])$ formé des $\tau$ tels que $\tau(t) = at$ avec $a \in L^*$ (cf [R3]).

On considère un groupe fini $\Xi$ et deux homomorphismes $\phi_1 : \Xi \rightarrow Aut_K(\mathring{\mathfrak{g}}_L)$ et $\phi_2 : \Xi \rightarrow Aut_K^+(L[t,t^{-1}])$ tels que $\pi_1\phi_1$ et $\pi_2\phi_2$ déterminent le même homomorphisme $\phi$ de $\Xi$ dans $\Gamma$ . On note $\Xi_0 = \mathrm{Ker}\ \phi$ qui agit donc par des automorphismes L-linéaires. Le sous-groupe $\Gamma' = \mathrm{Im}\ \phi \cong \Xi/\Xi_0$ de $\Gamma$ est le groupe de Galois Gal(L/K') où K' est un corps $K \subset K' \subset L$ .

Le groupe $\Xi$ agit sur $\dot{\mathfrak{l}}$ par des automorphismes de K-algèbre de Lie donnés par la formule : $\xi( Xt^j + \lambda c + \mu D ) = \phi_1(\xi)X(\phi_2(\xi)t)^j + (\phi(\xi)\lambda)c + (\phi(\xi)\mu)D$ .

On note $\mathfrak{g}_K = \dot{\mathfrak{l}}(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\Xi) = \dot{\mathfrak{l}}(\mathring{\mathfrak{g}}_L)^{\Xi}$ l'ensemble des points fixes de $\Xi$ ; c'est une algèbre de Lie sur K (et même sur K').

**4.3** Il est clair que $\dot{\mathfrak{l}}(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\mathrm{Ker}\phi_2) = \dot{\mathfrak{l}}(\mathring{\mathfrak{g}}'')$ si $\mathring{\mathfrak{g}}''$ est l'algèbre des points fixes sous $\phi_1(\mathrm{Ker}\phi_2)$ dans $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ .Comme $\phi_1(\mathrm{Ker}\phi_2)$ est formé de L-automorphismes $\mathring{\mathfrak{g}}''$ est une algèbre réductive sur L et donc, quitte à changer $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ , on peut supposer (et on suppose dans la suite) que $\mathrm{Ker}\phi_2 = \{1\}$ .

Alors $\Xi_0$ est isomorphe à un sous-groupe fini de $Aut_L^+(L[t,t^{-1}]) \cong L^*$ , il est donc cyclique; on note p son ordre et $\tau$ un de ses générateurs. Ainsi $\phi_2(\tau).t = \varepsilon^{-1}t$ où $\varepsilon$ est une racine primitive $p^{ième}$ de l'unité (contenue dans L). En particulier $\phi_2(\tau).t^p = t^p$ et l'action de $\Gamma'$ sur $Lt^p$ est bien définie; d'après le théorème 90 de Hilbert on peut supposer (quitte à changer t en bt avec b dans $L^*$) que $\gamma(t^p) = t^p$ pour tous $\gamma$ dans $\Gamma'$ .

Comme $\Xi_0$ est commutatif l'expression $\gamma\tau\gamma^{-1}$ est bien définie pour $\gamma$ dans $\Gamma$ et en regardant les images par $\phi_2$ on voit que $\gamma\tau\gamma^{-1} = \tau^{n(\gamma)}$ si $\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^{n(\gamma)}$ où $n(\gamma)$ est un entier modulo p .

On note $\theta = \phi_1(\tau) \in Aut_L(\mathring{\mathfrak{g}}_L)$ , c'est un automorphisme de $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ d'ordre divisant p . Pour $j \in \mathbb{Z}$ on note $\mathring{\mathfrak{g}}_L(j)$ l'espace propre de $\theta$ dans $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ correspondant à la valeur propre $\varepsilon^j$ . Il est clair que la L-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_L = \dot{\mathfrak{l}}(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\Xi_0)$ est $(\oplus_{j\in\mathbb{Z}}\, \mathring{\mathfrak{g}}_L(j)t^j) \oplus Lc \oplus LD$ . L'action de $\Gamma'$ sur $\dot{\mathfrak{l}}(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\Xi_0)$ et donc sur $\dot{\mathfrak{l}}''(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\Xi_0)$ est bien déterminée et graduée. Or on voit facilement [R3] que $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ est isomorphe au quotient de $\dot{\mathfrak{l}}''(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\Xi_0)$ par l'action de multiplication par $t^p$ . On a donc une action bien déterminée de $\Gamma'$ sur $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ ce qui équivaut à se donner une K'-forme $\mathring{\mathfrak{g}}_{K'}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ .

**4.4** Ainsi la donnée de $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ et $\Xi$ équivaut à la donnée d'une K'-algèbre réductive $\mathring{\mathfrak{g}}_{K'}$ , d'une extension galoisienne L de K contenant les racines $p^{ièmes}$ de l'unité et d'un automorphisme L-linéaire $\theta$ de $\mathring{\mathfrak{g}}_L = \mathring{\mathfrak{g}}_{K'} \otimes_{K'} L$ d'ordre divisant p tel que $\gamma\theta\gamma^{-1} = \theta^{n(\gamma)}$ pour tous $\gamma$ dans $\Gamma'$ .

Alors la L-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_L = (\oplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathring{\mathfrak{g}}_L(j)t^j) \oplus Lc \oplus LD$ est construite comme les $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\theta)$ de [R3] ou [R1] , si ce n'est que $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ n'est pas forcément simple. Ainsi $\mathfrak{g}_L$ est <u>réductive-affine</u> au sens de [R1 ; 2.12] c'est à dire que c'est le quotient par un sous-espace vectoriel du centre d'une sous-algèbre contenant l'algèbre dérivée d'un produit d'algèbres de Kac-Moody affines et d'une algèbre "de Heisenberg infinie" $\mathfrak{I}(V)$ où V est une algèbre commutative de dimension finie.

La K-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K$ est l'ensemble des points de $\mathfrak{g}_L$ fixes sous $\Gamma'$=Gal(L/K') ; on a donc $\mathfrak{g}_K \otimes_K L \cong (\mathfrak{g}_L)^{[K':K]}$ et $\mathfrak{g}_K$ est une K-forme d'algèbre réductive-affine.

La sous-algèbre $\mathfrak{p} = (\oplus_{j\in\mathbb{N}} \mathring{\mathfrak{g}}_L(j)t^j) \oplus Lc \oplus LD$ est une sous-algèbre parabolique de type fini de $\mathfrak{g}_L$ stable par $\Gamma'$ ; donc $\mathfrak{g}_K$ est une forme presque déployée. On a $\mathfrak{g}_K = (\oplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathring{\mathfrak{g}}_L(j)^{\Gamma'}t^j) \oplus Kc \oplus KD$ puisque la condition sur $\theta$ montre que $\Gamma'$ stabilise chaque espace propre $\mathring{\mathfrak{g}}_L(j)$ .

**4.5** On retrouve ainsi tous les exemples de [R3] qui correspondent à $K = \mathbb{R}$ et $\mathring{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ simple. On y a prouvé qu'on trouve ainsi toutes les formes réelles presque-déployées des algèbres de Kac-Moody affines.

L'exemple le plus simple s'obtient pour p=1 et K'=K , alors, si $\mathring{\mathfrak{g}}_K$ est une K-algèbre de Lie absolument simple, $\mathfrak{g}_K = (\oplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathring{\mathfrak{g}}_K t^j) \oplus Kc \oplus KD$ est une K-forme presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody affine.

**4.6** Notons $\mathfrak{k}$ la K-algèbre de Lie $\mathring{\mathfrak{g}}_L(0)^{\Gamma'} = (\mathring{\mathfrak{g}}_L)^{\Xi}$ , $\mathfrak{k}'$ son algèbre dérivée et $\mathring{\mathfrak{c}}$ son centre. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathring{\mathfrak{g}}_L$ contenant $\mathring{\mathfrak{c}}$ ; on note $\mathring{\mathfrak{c}}_1$ la sous-algèbre de $\mathring{\mathfrak{c}}$ formée des $X \in \mathring{\mathfrak{c}}$ tels que $\alpha(X) \in K$ pour tous $\alpha \in \Delta(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\mathfrak{h})$ . Il est clair que $\mathring{\mathfrak{c}}_1$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{h}$ .

<u>Proposition</u> : $Kc \oplus KD$ *est une sous-algèbre torique déployée de* $\mathfrak{g}_K$ . *Toute sous-algèbre torique déployée maximale de* $\mathfrak{g}_K$ *contenant* $Kc \oplus KD$ *est de la forme* $\mathfrak{t} = \mathring{\mathfrak{t}} \oplus \mathring{\mathfrak{c}}_1 \oplus Kc \oplus KD$ *où* $\mathring{\mathfrak{t}}$ *est une sous-algèbre torique déployée maximale de* $\mathfrak{k}'$ .

<u>Démonstration</u> : La première assertion est claire. Mais le centralisateur de D dans $\mathfrak{g}_K$ est $Kc \oplus KD \oplus \mathfrak{k}$ , donc la SATDM cherchée est de la forme $\mathfrak{t} = Kc \oplus KD \oplus \mathring{\mathfrak{t}}_1$ où $\mathring{\mathfrak{t}}_1 \subset \mathfrak{k}$ est diagonalisable dans la représentation adjointe sur chaque $\mathring{\mathfrak{g}}_L(j)^{\Gamma'}$ c'est à dire sur $(\mathring{\mathfrak{g}}_L)^{\Gamma'}$ et maximale pour cette propriété. Ainsi $\mathring{\mathfrak{t}}_1 \subset \mathring{\mathfrak{t}} \oplus \mathring{\mathfrak{c}}_1$ pour un certain choix de $\mathring{\mathfrak{t}}$ . Mais l'action adjointe de $\mathring{\mathfrak{t}}$ est diagonalisable non seulement sur $\mathfrak{k}$ mais aussi sur $(\mathring{\mathfrak{g}}_L)^{\Gamma'}$ en effet les restrictions non nulles à $\mathring{\mathfrak{t}}$ des racines de $\Delta(\mathring{\mathfrak{g}}_L,\mathfrak{h})$ sont des combinaisons linéaires de

racines de $\mathring{\mathfrak{g}}_L(0) = (\mathring{\mathfrak{g}}_L)^{(\theta)}$ , cf [K ; §8] , [H ; X§5] ou [R1 ; §2] . On en déduit aussitôt que $\mathring{\mathfrak{t}}_1 = \mathring{\mathfrak{t}} \oplus \mathring{\mathfrak{c}}_1$ .

**4.7** Le groupe $\Xi$ agit sur le corps L((t)) des séries formelles en t qui est la complétion en l'uniformisante t du corps des fractions L(t) de $L[t,t^{-1}]$. L'ensemble des points fixes de $\Xi$

[K ; theorem 5.11]), la plus petite $\mathfrak{g}(A)^{min}$ est celle utilisée dans [K], c'est un quotient de la précédente par le plus grand idéal ne rencontrant pas la sous-algèbre de Cartan standard.

On choisit ici de travailler avec $\mathfrak{g}(A)^{min}$ . En effet les résultats de [PK] sont vrais dans ce cadre. Cependant pour pouvoir utiliser les résultats de [R2] et donc [R4] on doit prouver le résultat suivant (démontré en [R2 ; 1.2.2] pour le cas symétrisable et suggéré dans le cas général par O. Mathieu).

Proposition A.2 : *L'algèbre* $\mathfrak{m}(J)$ *(cf. 1.2) est engendrée par* $\mathfrak{h}$ *et les* $e_i, f_i$ *pour* $i$ *dans* $J$ *; elle est isomorphe au produit d'une sous-algèbre (commutative) de* $\mathfrak{h}$ *et de l'algèbre de Kac-Moody* $\mathfrak{g}(A_J)^{min}$ *associée à la matrice* $A_J$ .

Démonstration : La première assertion est claire. Notons $\mathfrak{m}^1$ la sous-algèbre image dans $\mathfrak{m}(J)$ de $\tilde{\mathfrak{g}}(A_J)$ (notations de [K ; 1.2]) ou de $\mathfrak{g}(A_J)^{max}$ . D'après [R2 ; 1.2.2] il suffit de montrer que $\mathfrak{m}^1$ est isomorphe à $\mathfrak{g}(A_J)^{min}$. On a $\mathfrak{g}(A_J)^{min}$ ...

que les sous-algèbres toriques génériques rationnelles de $\mathfrak{h}$ sont maintenant en bijection avec les sous-espaces génériques rationnels (i.e. définis par une équation dans $X(\mathfrak{h})$ ) , cf. [R4 ; 3.6] .

## BIBLIOGRAPHIE


[B] Bausch J. , Etude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines , Revue de l'Institut Elie Cartan 11 , Nancy (1988) , 5-124.

[B'] Bausch J. , Automorphismes des algèbres de Kac-Moody affines , C.R. Acad. Sci. Paris 302 (1986), 409-412 .

[BR] Bausch J. et Rousseau G. , Involutions de première espèce des algèbres affines , Revue de l'Institut Elie Cartan 11 , Nancy (1988) , 125-139 .

[BBK] Bourbaki N. , Groupes et algèbres de Lie , chapitres I à IX , Paris .

[BoT] Borel A. et Tits J. , Groupes réductifs , Publ. Math. I.H.E.S. , 27 (1965) , 55-150.

[BrT1] Bruhat F. et Tits J. , Groupes réductifs sur un corps local,I. Données radicielles valuées, Publ. Math. I.H.E.S. , 41 (1972) , 5-252.

[BrT2] Bruhat F. et Tits J. ,Groupes réductifs sur un corps local,II. Schémas en groupes; existence d'une donnée radicielle valuée , Publ. Math. I.H.E.S. , 60 (1984) , 5-184 .

[BrT3] Bruhat F. et Tits J. , Groupes algébriques sur un corps local : III Compléments et applications à la cohomologie galoisienne . J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 34 (1987) , 671-698 .

[H] Helgason S. , Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press (1978) .

[K] Kac V. G. , Infinite dimensional Lie algebras , Cambridge University Press (1985) .

[KP1] Kac V. G. et Peterson D. H. , Defining relations of certain infinite dimensional groups , in " Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui " Lyon 1984 , Astérisque n° hors série (1985) , 165-208 .

[KP2] Kac V. G. et Peterson D. H. , On geometric invariant theory for infinite dimensional groups , in "Algebraïc groups" Utrecht 1986 , Springer lecture note in math. 1271 (1987) , 109-142 .

[L] Levstein F. , A classification of involutive automorphisms of an affine Kac-Moody algebra , J. of algebra 114 (1988) , 489-518 .

[PK] Peterson D. H. et Kac V. G. , Infinite flag varieties and conjugacy theorems , Proc. Natl. Acad. Sci. USA 80 (1983) , 1778-1782 .

[Ro] Ronan M. , Lectures on Buildings , Academic Press (1989) .

[R1] Rousseau G. , Espaces affines symétriques et algèbres affines ,Revue de l' Institut Elie Cartan 11 , Nancy (1988) , 141-174 .

[R2] Rousseau G. , Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines , Revue de l' Institut Elie Cartan 11 , Nancy (1988) , 175-205 .

[R3] Rousseau G. , Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines , in " Harmonic Analysis " Luxembourg 1987 , Springer Lecture note in Math. 1359 (1988) , 252-264 .

[R4] Rousseau G. , Almost split K-forms of Kac-Moody algebras , in " Infinite dimensional Lie Algebras and Groups " Marseille 1988 , World Scientific (1989) , 70-85 .

[R5] Rousseau G. , Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux , thèse Université de Paris-Orsay (1977) .

[R6] Rousseau G. , Immeubles et groupes réductifs , en préparation .

[T1] Tits J. , Groups and group functors attached to Kac-Moody data, in "Arbeitstagung Bonn 1984" , Springer Lecture note 1111 (1985) , 193-223 .

[T2] Tits J. , Uniqueness and presentation of Kac-Moody Groups over fields , J. of Algebra 105 (1987) , 542-573.

[T3] Tits J. , Immeubles jumelés , cours au Collège de France 1988/1989 , résumé in Annuaire du collège de France, 89ème année , sous presse .

[T4] Tits J. , Cours au Collège de France 1989/1990 (suite du précédent).

Unité associée au C.N.R.S. n°750
Département de mathématiques
de l'Université de Nancy 1
B.P.239
54506 Vandoeuvre lès Nancy Cedex
FRANCE