Revue de l'Institut Elie Cartan n°11

Nancy ; 1988/89

FORMES RÉELLES PRESQUE-COMPACTES DES ALGÈBRES DE KAC-MOODY AFFINES

par Guy ROUSSEAU

On va étudier les formes réelles des algèbres de Kac-Moody, c'est-à-dire les semi-involutions de ces algèbres ; il y en a deux sortes : presque-déployées ou presque-compactes (3.7).

On se concentrera au paragraphe 4 sur ces dernières et, dans le cas des algèbres affines, on donnera la classification des couples formés d'une forme réelle presque-compacte et d'une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte : elle est équivalente à celle des involutions de première espèce décrite dans [B] ou [B-R]. Avant cela les paragraphes 1 et 2 sont consacrés à la mise au point de résultats sans doute connus ou conséquence assez simple de l'article fondamental de Peterson et Kac [P-K].

Certaines formes presque-compactes des algèbres affines ont déjà été introduites par Goodman et Wallach [G-W ; 6.8] par un autre procédé, cf. [R3]. D'autre part des résultats analogues sur la classification des formes réelles ont été obtenus par Berman [Be], mais en remplaçant l'algèbre de Kac-Moody par l'algèbre "universelle" dont elle est le quotient (avec les relations 1.2.1 mais pas les relations 1.2.2 de [B ; I]) et en excluant le cas affine[1].

Conventions :

On considère une matrice de Cartan généralisée A et l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ associée (selon la convention de [K]). Sauf indication expresse du contraire les notations sont celles de [K], [P-K] ou [B].

On suppose $\mathfrak{g}$ symétrisable,[2] cependant les résultats n'impliquant pas explicitement de forme invariante peuvent sans doute s'étendre au cas non symétrisable, cf. [P-K]. On suppose aussi $\mathfrak{g}$ indécomposable de dimension infinie sauf dans quelques remarques.

On indiquera quand on se restreint au cas affine.

Le corps de base est $\mathbb{C}$ mais, dans les paragraphes 1 et 2 et sauf remarque particulière, les résultats sont encore valables pour un corps algébriquement clos de caractéristique 0 .

§ 1.- Sous-algèbres paraboliques et immeubles :

Conformément à [K] l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ est engendrée par l'algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ et des éléments e_i , f_i , $i \in I$. On note $\Pi = \{\alpha_i / i \in I\}$ la base (standard) correspondante du système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. L'épinglage standard de $\mathfrak{g}$ est le triplet $(\mathfrak{h},\Pi,(e_i,f_i) i \in I)$ formé de cette algèbre de Cartan, cette base et ces éléments $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. On note ω l'involution de Cartan (ou Chevalley) définie par : $\omega^2 = \mathrm{Id}$; $\omega|_{\mathfrak{h}} = -\mathrm{Id}$; $\omega(e_i) = -f_i$, $i \in I$.

1.1.- Sous-algèbres standards :

Si X est une partie de Π (que l'on identifiera souvent à une partie de I) , on pose :

$$\mathfrak{m}_X = \mathfrak{h} \oplus (\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta_X^s = \Delta \cap (\bigoplus_{\alpha \in X} \mathbb{Z}\alpha)$$

$$\mathfrak{u}_X = \mathfrak{u}_X^+ = \oplus\, \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta_X^u = \Delta^+ - (\Delta^+ \cap \Delta_X^s)$$

$$\mathfrak{p}_X = \mathfrak{p}_X^+ = \mathfrak{h} \oplus (\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta_X = \Delta_X^p = \Delta_X^s \amalg \Delta_X^u = \Delta^+ \cup \Delta_X^s .$$

Ce sont respectivement les sous-algèbre "réductive" (resp. unipotente (positive), parabolique (positive)) standard de $\mathfrak{g}$ associées à X . On note aussi $\mathfrak{u}_X^- = \omega(\mathfrak{u}_X^+)$ et $\mathfrak{p}_X^- = \omega(\mathfrak{p}_X^+)$ les sous-algèbre unipotente (négative) et parabolique (négative) standard.

Propriétés :

a) $\mathfrak{p}_X = \mathfrak{m}_X \oplus \mathfrak{u}_X$; $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_X^- \oplus \mathfrak{m}_X \oplus \mathfrak{u}_X$; $\mathfrak{m}_X = \mathfrak{p}_X \cap \mathfrak{p}_X^- = \omega(\mathfrak{m}_X)$.

b) Si $Y \subset X$ on a $\mathfrak{p}_Y \subset \mathfrak{p}_X$, $\mathfrak{m}_Y \subset \mathfrak{m}_X$ et $\mathfrak{u}_Y \supset \mathfrak{u}_X$.

Si $X = \emptyset$ on retrouve les sous-algèbres de Borel standard $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{p}_\emptyset^+$ et $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{p}_\emptyset^-$ ainsi que $\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{u}_\emptyset^+$, $\mathfrak{n}^- = \mathfrak{u}_\emptyset^-$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}_\emptyset$.

Si $X = \Pi$ on a $\mathfrak{m}_X = \mathfrak{p}_X = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{u}_X = \{0\}$.

c) Si $X \neq \Pi$ (cas propre) les algèbres $\mathfrak{p}_X^\pm$ et $\mathfrak{u}_X^\pm$ sont de dimension et de codimension infinies dans $\mathfrak{g}$ (voir aussi 1.8.c).

d) $\mathfrak{u}_X$ est un idéal de $\mathfrak{p}_X$ et $\mathfrak{p}_X/\mathfrak{u}_X$ est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{m}_X$.

Proposition 1.2 :

1) *Toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b}^+$ est de la forme $\mathfrak{p}_X$.*

2) *L'algèbre $\mathfrak{m}_X$ est engendrée par $\mathfrak{h}$ et les e_i , f_i pour $i \in X$, elle est isomorphe au produit d'une sous-algèbre (commutative) de $\mathfrak{h}$ et de l'algèbre de Kac-Moody associée à la matrice A_X extraite de A en conservant les lignes et colonnes de X .*

Conséquences :

a) Le normalisateur de $\mathfrak{u}_X$ ou $\mathfrak{p}_X$ dans $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{p}_X$.

b) Si la matrice A_X est de type fini, auquel cas on dit que X et $\mathfrak{p}_X$ sont de type fini, alors $\mathfrak{m}_X$ est de dimension finie donc les codimensions de $\mathfrak{u}_X$, $\mathfrak{n}^+$ et $\mathfrak{b}^+$ dans $\mathfrak{p}_X$ sont finies.

Lemme :

Soient α une racine réelle, et γ une racine. On note e_α (resp. $e_{-\alpha}$) un élément non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha}$) , si x est dans $\mathfrak{g}_\gamma$ on a

$$[e_{-\alpha},[x,e_\alpha]] \in [[x,\mathfrak{g}_{-\gamma-\alpha}],\mathfrak{g}_{\gamma+\alpha}] .$$

Si $[x,e_\alpha] \neq 0$, alors $\beta = \gamma+\alpha$ est encore une racine et on a

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} = [x,\mathfrak{g}_{-\gamma-\alpha}] \neq 0 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g}_{-\alpha},\mathfrak{g}_{\gamma+\alpha}] \neq 0 .$$

Démonstration du lemme :

Comme $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $\mathfrak{g}_\alpha$ sont de dimension 1 , la première relation résulte de [K ; 2.4.3]. Si $[x,e_\alpha] \neq 0$, on a $[e_{-\alpha},[x,e_\alpha]] \neq 0$ d'après la théorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2$, d'où les derniers résultats. □

Démonstration de la proposition :

1) Soit $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre contenant $\mathfrak{b}^+$; posons $X = \{i/f_i \in \mathfrak{q}\}$. On a $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}_X$, montrons l'égalité. Soit γ une racine négative telle que $\mathfrak{g}_\gamma \cap \mathfrak{q}$ contienne $x \neq 0$ et montrons par récurrence sur la hauteur de $-\gamma$ que $\gamma \in \Delta_X$; c'est clair pour la hauteur 1 . D'après [K ; 1.5] il existe i tel que $[x,e_i] \neq 0$ et par récurrence $\gamma+\alpha_i \in \Delta_X$. D'après le lemme, comme $\mathfrak{g}_{-\gamma-\alpha_i} \subset \mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{q}$ on a $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = [x,\mathfrak{g}_{-\gamma-\alpha_i}] \subset \mathfrak{q}$ donc $i \in X$ et $\gamma \in \Delta_X$.

2) Il est clair que l'algèbre $\mathfrak{m}^1$ engendrée par $\mathfrak{h}$ et les e_i, f_i pour $i \in X$ a la structure décrite dans l'énoncé [K ; 9.11]. Montrons $\mathfrak{m}^1 = \mathfrak{m}_X$.

L'orthogonal $\mathfrak{m}^2$ de $\mathfrak{m}^1$ dans $\mathfrak{m}_X$, pour une forme invariante, est stable par $\mathrm{ad}\,\mathfrak{m}^1$. Soit $\gamma \in \Delta_X^S$ une racine (par exemple négative), on a $\mathfrak{g}_\gamma = (\mathfrak{m}^2 \cap \mathfrak{g}_\gamma) \oplus (\mathfrak{m}^1 \cap \mathfrak{g}_\gamma)$ car $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{m}^1$ sont des algèbres de Kac-Moody donc les dualités entre $\mathfrak{g}_\gamma$ et $\mathfrak{g}_{-\gamma}$ ou $\mathfrak{g}_\gamma \cap \mathfrak{m}^1$ et $\mathfrak{g}_{-\gamma} \cap \mathfrak{m}^1$ induites par la forme invariante sont non dégénérées. Montrons par récurrence sur la hauteur de $-\gamma$ que $\mathfrak{m}^2 \cap \mathfrak{g}_\gamma = \{0\}$. Sinon soit x non nul dans $\mathfrak{m}^2 \cap \mathfrak{g}_\gamma$, d'après [K ; 1.5] il existe i tel que $[x,e_i] \neq 0$. Comme $\gamma + \alpha_i$ est une racine, on a $i \in X$, donc $[x,e_i] \in \mathfrak{m}^2$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. □

Corollaire 1.3 :

Soit $\mathfrak{c}_X$ le centre (contenu dans $\mathfrak{h}$) de $\mathfrak{m}_X$. Alors $\mathfrak{u}_X \oplus \mathfrak{c}_X$ est le plus grand idéal pronilpotent de $\mathfrak{p}_X$ et $\mathfrak{u}_X = [\mathfrak{p}_X, \mathfrak{u}_X \oplus \mathfrak{c}_X]$.

Remarques :

1) L'idéal $\mathfrak{u}_X$ est donc invariant par tout automorphisme de $\mathfrak{p}_X$.

2) Une algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est dite pronilpotente si pour tout sous-espace vectoriel de codimension finie V de $\mathfrak{s}$ et tout $x \in \mathfrak{s}$ il existe un entier n tel que $(\mathrm{ad}\,x)^n \mathfrak{s} \subset V$.

Démonstration :

Il est clair que $\mathfrak{u}_X \oplus \mathfrak{c}_X$ est pronilpotent et que $\mathfrak{u}_X = [\mathfrak{p}_X, \mathfrak{u}_X \oplus \mathfrak{c}_X]$. Soit maintenant $\mathfrak{J}$ un idéal pronilpotent de $\mathfrak{p}_X$, son image dans $\mathfrak{p}_X/(\mathfrak{c}_X \oplus \mathfrak{u}_X)$ est un idéal pronilpotent de $\mathfrak{m}_X/\mathfrak{c}_X$. Mais on connaît tous les idéaux de cette algèbre [K ; 1.7, 1.4 et exercice 1.1] et on en conclut que cette image est nulle. □

1.4.- Le système de Tits de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\Pi)$, d'après [P-K] ou [K-P] :

On définit un groupe G associé à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, des sous-groupes $N, H, B^\pm$, $U^\pm$ et une partie $S = \{r_i / i \in I\}$ de N/H. Ces groupes nous intéressent ici via la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ dont le noyau est le centre C de G et l'image le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$.

Si α est une racine réelle, on définit un sous-groupe U_α de G tel que $\mathrm{Ad}\,U_\alpha = \exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_\alpha$, alors G (resp. U^+, U^-) est engendré par les U_α pour $\alpha \in \Delta_{re}$ (resp. $\Delta^+_{re}, \Delta^-_{re}$). Le groupe $B^+ = HU^+$ (resp. $B^- = HU^-$) est le sous-groupe de Borel positif (resp. négatif) standard. On a

$\mathrm{Ad}\,r_i = \exp \mathrm{ad}\,f_i \,.\, \exp \mathrm{ad}\,{-e_i} \,.\, \exp \mathrm{ad}\,f_i$.

Propriétés :

1) H centralise $\mathfrak{h}$; N normalise $\mathfrak{h}$; N (resp. H) est le normalisateur (resp. centralisateur) de H dans G et N/H est le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

2) Le quadruplet (G,B^+,N,S) est un système de Tits saturé de groupe de Weyl W et $H = B^+ \cap N = \bigcap_{w \in W} {}^wB^+$.

3) On a les décompositions de Bruhat $G = B^+WB^+ = B^-WB^-$.

4) On a la décomposition de Birkhoff $G = B^+WB^- = B^-WB^+$.

5) G est engendré par les U_α pour $\alpha \in \pm\Pi$.

1.5.- Les sous-groupes paraboliques standards :

Pour $X \in \Pi$, on définit les sous-groupes suivants de G :

M_X engendré par H et les U_α pour $\alpha \in \pm X$,

$U_X = U_X^+$ (noté U^X dans [P-K]) sous-groupe normal de U^+ engendré par les U_α pour $\alpha \in (\Delta_X^u)_{re}$,

$P_X = P_X^+ = M_X \ltimes U_X = B^+ W_X B^+$ si W_X est le sous-groupe de W engendré par les réflexions fondamentales r_i pour $i \in X$

$$P_X^- = \omega(P_X^+) \quad ; \quad U_X^- = \omega(U_X^+) .$$

Le sous-groupe P_X (resp. P_X^-) est le sous-groupe parabolique standard positif (resp. négatif) de G associé à X. Le groupe H est le sous-groupe de Cartan standard de G.

De [P-K] ou de la théorie des systèmes de Tits on déduit les résultats suivants :

1) Les sous-groupes P_X^+ sont tous les sous-groupes de G contenant B^+.

2) P_X est le normalisateur dans G de $\mathfrak{p}_X$ ou $\mathfrak{u}_X$.

3) Les sous-groupes $P_X^\pm$ sont leurs propres normalisateurs dans G.

4) Les sous-groupes P_X^+ ne sont pas conjugués entre eux par G.

5) $M_X = P_X \cap P_X^-$ normalise $\mathfrak{m}_X$ et induit dans $\mathfrak{m}_X \simeq \mathfrak{p}_X/\mathfrak{u}_X$ un groupe d'automorphismes engendré par H et le groupe adjoint de $\mathfrak{g}(A_X)$.

1.6.- Les sous-algèbres remarquables, cf. [P-K] :

1) Une sous-algèbre de Cartan (en abrégé S.A.C.) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre $ad_{\mathfrak{s}}$-diagonalisable maximale. D'après [P-K ; theorem 2] les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par $Ad(G)$ à la sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$; et le résultat analogue est vrai pour $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$. En particulier le groupe G ne dépend que de $\mathfrak{g}$ (pas de $\mathfrak{h}$) et $Ad(G)$ est distingué dans $Aut(\mathfrak{g})$.

2) Si une sous-algèbre de dimension finie $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$ et cette notion de sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$ coïncide avec celle de sous-algèbre de Cartan au sens classique (en abrégé S.A.C.C.) de [BBK ; VII] : en effet $\mathfrak{h}_1$ est une S.A.C.C. [l.c. 2.1, prop. 4], ainsi toute S.A.C.C. de $\mathfrak{s}$ est conjuguée de $\mathfrak{h}_1$ par un groupe E d'automorphismes de $\mathfrak{s}$ [l.c. 3.2] donc est une S.A.C. de $\mathfrak{s}$; de plus toute S.A.C. de $\mathfrak{s}$ est contenue dans une S.A.C.C. [l.c. 2.3, prop. 10] donc lui est égale par maximalité.

Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{s}$ sont alors souvent les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenues dans $\mathfrak{s}$: c'est le cas si $\mathfrak{s}$ ne contient aucun espace propre imaginaire de $\mathfrak{h}_1$ (car alors tout automorphisme dans E est restriction à $\mathfrak{s}$ d'un automorphisme dans $Ad\ G$, plus précisément dans le groupe engendré par les $Ad\ U_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{h}_1)$) en particulier si $\Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{h}_1)$ est clos, (1.11) (car, si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{h}_1)_{im}$, $\mathbb{N}^*\alpha \in \Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{h}_1)$ et $\mathfrak{s}$ est de dimension infinie).

3) Une sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre complètement résoluble maximale de $\mathfrak{s}$ (voir la définition précise, inutile ici, dans [P-K] ou [B ; I.3.1]). D'après [P-K ; theorem 3] les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par $Ad(G)$ à l'une des sous-algèbres de Borel standard $\mathfrak{b}^+$ et $\mathfrak{b}^-$.

4) On appelle sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre contenant une sous-algèbre de Borel, autrement dit la conjuguée par $Ad(G)$ d'une sous-algèbre parabolique standard.

De 1.5 il résulte qu'il existe une correspondance bijective entre sous-groupes paraboliques et sous-algèbres paraboliques .

5) Le centralisateur dans G de $\mathfrak{h}$ doit stabiliser tous les $\mathfrak{p}_X^\pm$, il est donc dans $B^+ \cap B^- = H$; ainsi H est le centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans G et, d'après 1.4.1, N est le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G .

Il en résulte une correspondance bijective entre sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ et sous-groupes de Cartan de G .

Proposition 1.7 :

Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{p}_X$ (resp. $\mathfrak{m}_X$) sont les conjuguées par P_X (resp. M_X) de la sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$.

Conséquence :

Tout couple formé d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$ et d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_1$ contenant $\mathfrak{h}_1$ est conjugué par G d'un couple standard $(\mathfrak{h},\mathfrak{p}_X^\pm)$. Si de plus $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$, alors $\mathfrak{p}_1$ est conjugué de $\mathfrak{p}_X^\pm$ par N (i. e. par W) .

Démonstration :

D'après 1.2.2, 1.5.5 et [P-K ; cor. 8] les sous-algèbres $ad_{\mathfrak{m}_X}$-diagonalisables de $\mathfrak{m}_X$ sont conjuguées par M_X à des sous-algèbres de $\mathfrak{h}$; d'où l'un des résultats. Soit maintenant $\mathfrak{h}_1$ une sous-algèbre $ad_{\mathfrak{p}_X}$-diagonalisable de $\mathfrak{p}_X$. Son image dans $\mathfrak{p}_X/\mathfrak{u}_X \simeq \mathfrak{m}_X$ est $ad_{\mathfrak{m}_X}$-diagonalisable et en la conjuguant par un élément de M_X elle est contenue dans $\mathfrak{h}$. En conjuguant par $M_X \subset P_X$ on peut donc supposer $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}.\mathfrak{u}_X \subset \mathfrak{b}^+$. En reconjuguant par U^+ on amène $\mathfrak{h}_1$ dans $\mathfrak{h}$ [P-K ; theorem 3] ; d'où l'autre résultat recherché. □

Proposition 1.8 :

Soient $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ deux sous-algèbres paraboliques propres de $\mathfrak{g}$.

a) Il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$.

b) Il existe un élément de G qui conjugue $\mathfrak{h}_1$ sur $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}_1$ sur $\mathfrak{p}_X^\varepsilon$ avec $\varepsilon = \pm 1$, $X \subset \Pi$ et $\mathfrak{p}_2$ sur $w\,\mathfrak{p}_Y^\eta$ avec $\eta = \pm 1$, $w \in W$ et $Y \subset \Pi$. Pour un tel élément g on a ${}^g(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{h} \oplus (\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha)$ où α parcourt $(\varepsilon\, \Delta_X) \cap w(\eta\, \Delta_Y)$.

c) $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ est de codimension finie dans $\mathfrak{g}$ si et seulement si $\varepsilon = -\eta$.

d) Supposons que $\varepsilon = \eta$ et que $\mathfrak{p}_1$ est une sous-algèbre parabolique de type fini (par exemple une sous-algèbre de Borel), alors $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ est de codimension finie dans $\mathfrak{p}_1$.

e) Supposons que $\varepsilon = -\eta$ et que $\mathfrak{p}_1$ comme $\mathfrak{p}_2$ sont des sous-algèbres paraboliques de type fini (par exemple des sous-algèbres de Borel), alors $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ est de dimension finie.

Démonstration :

a) Traitons le cas où $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont tous deux conjugués de paraboliques standards positifs (les autres cas se traitent avec l'autre décomposition de Bruhat ou la décomposition de Birkhoff). Par conjugaison par G on peut supposer

$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_X$ et $\mathfrak{p}_2 = g\,\mathfrak{p}_Y$. La décomposition de Bruhat donne $g = p.n.q$ avec $n \in N$, $p,q \in B$ qui stabilisent $\mathfrak{p}_X$ et $\mathfrak{p}_Y$. Ainsi $\mathfrak{p}_2 = p\,n\,\mathfrak{p}_Y \supset p\,\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}_1 = p\,\mathfrak{p}_1 \supset p\,\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$.

b) Ce second résultat est une reformulation de 1.7.

d) et e) Une sous-algèbre parabolique de type fini contient une sous-algèbre de Borel de codimension finie d'après 1.2. Ces deux dernières assertions résultent donc de ce que $\{\alpha > 0 / w(\alpha) < 0\}$ est un ensemble fini [K ; ex. 3.6].

c) Ce même résultat prouve que si $\varepsilon = -\eta$ $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ est de codimension finie. Supposons maintenant $\varepsilon = \eta$ (= +1 par exemple). Dans le cas affine, la plus grande racine imaginaire négative $-\delta$ est invariante par W et n'appartient ni à Δ_X ni à Δ_Y , car X et Y sont différents de Π ; ainsi $\Delta_X \cup w(\Delta_Y)$ ne contient aucune des racines de $-\mathbb{N}^*\delta$ et $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ est de codimension infinie. Dans le cas indéfini, considérons la racine imaginaire négative $-\alpha$ de [K ; 5.6.c] ; d'après [K ; ex. 5.10] $-\alpha$ et $-w\alpha$ sont strictement imaginaires négatives, ainsi que $-\alpha - w\alpha$; pour des raisons de support $-\alpha - w\alpha$ n'est ni dans Δ_X ni dans $w\Delta_Y$, ainsi $\Delta_X \cup w\Delta_Y$ ne contient aucune des racines de $-\mathbb{N}^*(\alpha + w\alpha)$ et $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ est de codimension infinie. □

1.9.- Type des paraboliques, automorphismes de n$^{\underline{e}}$ espèce :

Il résulte de 1.8.c que $\mathfrak{p}^+_X$ et $\mathfrak{p}^-_Y$ ne peuvent être conjugués par G , si X ou Y est différent de Π . De plus, d'après 1.5.4, P^+_X et P^+_Y (resp. P^-_X et P^-_Y) ne peuvent être conjugués par G que si $X = Y$. Enfin d'après 1.6 il revient au même de conjuguer les sous-algèbres ou les sous-groupes paraboliques. La définition suivante est donc licite :

La sous-algèbre parabolique impropre $\mathfrak{g}$ (resp. le sous-groupe parabolique impropre G) a pour type Π (ou I) . La sous-algèbre parabolique propre $g\mathfrak{p}^\varepsilon_X$ (resp. le sous-groupe parabolique propre ${}^gP^\varepsilon_X$) avec $\varepsilon = \pm 1$, $g \in G$, $X \subset I$ a pour type (ε, X) ; son signe est ε .

Un automorphisme de $\mathfrak{g}$ transforme une sous-algèbre de Borel en une sous-algèbre de Borel (et donc une sous-algèbre parabolique en une sous-algèbre parabolique). On dit qu'il est de première espèce s'il transforme une sous-algèbre de Borel positive en une sous-algèbre de Borel positive, il transforme alors toute sous-algèbre parabolique en une sous-algèbre parabolique de même signe. Dans le cas contraire l'automorphisme est dit de seconde espèce, il transforme une sous-algèbre parabolique en une sous-algèbre parabolique de signe opposé. Les deux définitions de cet alinéa sont indépendantes des choix faits

dans $\mathfrak{g}$ (de $\mathfrak{h}, \Pi, \ldots$) ; elles sont encore valables pour des automorphismes semi-linéaires (c'est-à-dire compatibles avec des automorphismes du corps de base).

1.10.- Remarque dans le cas décomposable :

Dans ce cas l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le groupe G et les autres algèbres ou groupes définis comme précédemment sont les produits des algèbres ou groupes définis ci-dessus pour chacune des "composantes connexes" de I .

En particulier une sous-algèbre parabolique standard est associée à une partie X de I et une fonction $\varepsilon = I \to \{\pm 1\}$ constante sur les composantes connexes de I (i. e. $a_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \varepsilon(i) = \varepsilon(j)$, cf. [K ; ex. 1.1]) : $\mathfrak{p}^\varepsilon_X$ est construite comme en 1.1 en remplaçant dans Π α_i par $\varepsilon(\alpha_i)\alpha_i$.

De même l'espèce d'un automorphisme est une fonction de I dans $\{1,2\}$ constante sur les composantes connexes de I et égale à 1 sur les composantes connexes de type fini.

Proposition 1.11 :

Les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ contenant la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ sont de la forme $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha)$ où α parcourt un système parabolique de racines, c'est-à-dire une partie $\mathcal{P}$ de Δ telle que :

a) $\mathcal{P} \cup -\mathcal{P} = \Delta$.

b) $\mathcal{P}$ est clos : Si $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$ et $\alpha + \beta \in \Delta$ alors $\alpha + \beta \in \mathcal{P}$.

c) $\mathcal{P}$ contient presque Δ^+ ou Δ^- : $\Delta^+ - \mathcal{P}$ ou $\Delta^- - \mathcal{P}$ est fini.

Remarque :

L'hypothèse c) est indépendante du choix de la base ; car toutes les bases sont de la forme $\pm w\Pi$ [K ; 5.9] et deux systèmes de racines positives correspondant au même signe sont commensurables [K ; ex. 3.6]. Cette hypothèse est nécessaire comme le montre le cas d'une algèbre affine non tordue : $\Delta = \{j\delta + \alpha / \alpha \in \mathring{\Delta}, j \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{Z}^*\delta$; $\Delta^+ = \{j\delta + \alpha / j > 0$ ou $j = 0$ et $\alpha > 0\} \cup \mathbb{N}^*\delta$; l'ensemble $\mathcal{P} = \{j\delta + \alpha / \alpha \in \mathring{\Delta}^+, j \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{N}^*\delta$ vérifie a) et b) mais pas c) : les matrices triangulaires ne forment pas une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$.

Démonstration :

On peut supposer que $\mathfrak{h}$ est la sous-algèbre de Cartan canonique. D'après 1.7 toute algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ est comme décrite ci-dessus. Réciproquement soit $\mathcal{P}$ un système parabolique, l'espace vectoriel $\mathfrak{p}$ associé est une algèbre et, d'après 1.2.1, il suffit de montrer que $\mathcal{P}$ contient $\Delta^+(\Pi)$ pour une certaine base Π. Choisissons une base telle que $\Delta^+(\Pi) - \mathcal{P}$ soit de cardinal minimum, il suffit de montrer que $\mathcal{P}$ contient Π. Si $\alpha \in \Pi$ n'est pas dans $\mathcal{P}$, alors pour tout β dans $\Delta^+(\Pi) \cap \mathcal{P}$, $r_\alpha(\beta)$ est dans $\Delta^+(\Pi)$ [K ; 3.7] donc $\beta = r_\alpha(r_\alpha(\beta))$ est dans $\mathcal{P} \cap \Delta^+(r_\alpha\Pi)$; de plus $-\alpha \in \mathcal{P} \cap r_\alpha\Pi$ donc $\mathcal{P} \cap \Delta^+(r_\alpha\Pi)$ est strictement plus grand que $\mathcal{P} \cap \Delta^+(\Pi)$ ce qui contredit le choix de Π. □

Proposition 1.12 :

Soient $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ deux sous-algèbres paraboliques de type fini et de signes opposés et P_1, P_2 les sous-groupes paraboliques correspondants. On note $\mathfrak{s}$ l'algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$.

a) Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{s}$ sont les sous-algèbres de Cartan au sens classique (1.6.2).

b) Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{s}$ sont les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenues dans $\mathfrak{s}$; elles sont conjuguées par $P_1 \cap P_2$.

c) Si $\mathfrak{p}_1$ ou $\mathfrak{p}_2$ est une sous-algèbre de Borel alors $\mathfrak{s}$ est résoluble.

Remarque :

Si on remplace $\mathfrak{s}$ par une sous-algèbre de $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ contenant une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, ces résultats restent vrais en remplaçant $P_1 \cap P_2$ par un certain sous-groupe qui stabilise $\mathfrak{s}$: cela résulte de la démonstration ci-dessous.

Démonstration :

D'après 1.8 l'algèbre $\mathfrak{s}$ est de dimension finie et contient une sous-algèbre de Cartan que l'on peut supposer être $\mathfrak{h}$. L'assertion c) est claire ; la proposition résulte donc de 1.6.2 car $\Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{h})$ est clos. □

1.13.- L'immeuble de $\mathfrak{g}$, cf. [B-T] et [K ; chap. 6] :

On suppose $\mathfrak{g}$ affine[3]. Alors W est un groupe de Weyl affine irréductible et (G,B^+,N,S) un système de Tits saturé de type affine. On peut donc construire l'immeuble (positif) de $\mathfrak{g}$: c'est le complexe simplicial $\mathfrak{J}^+$ associé à ce système. Ses facettes sont en correspondance bijective et strictement décroissante avec les sous-groupes paraboliques propres de G ou les sous-algèbres paraboliques propres de $\mathfrak{g}$. Ses appartements correspondent bijectivement aux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ ou aux sous-groupes de Cartan de G [B-T ; 2.2.5].

Plus précisément si on considère $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{h \in \mathfrak{h} / \alpha(h) \in \mathbb{R} \ \forall \alpha \in \Delta\}$, et δ la plus petite racine imaginaire positive, l'appartement $A(\mathfrak{h}) = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{c}$ tq $\delta(h) = 1\}$ est un espace affine sous $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}/\mathfrak{c} = (\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{h}')/\mathfrak{c}$. Le groupe de Weyl W est engendré par les réflexions par rapport aux murs $M_\alpha = \operatorname{Ker} \alpha \cap A(\mathfrak{h})$ pour $\alpha \in \Delta_{re}$. La facette de $\mathfrak{p}_X$ ou P_X est $\{x \in A(\mathfrak{h}) / \alpha(x) \geq 0 \ \forall \alpha \in \Delta_X\}$.

Soit $\operatorname{Aut}_1^{s\ell}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ semi-linéaires et de première espèce (1.9). La représentation adjointe $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut}_1^{s\ell}(\mathfrak{g})$ est un homomorphisme B - N adapté (car un φ dans $\operatorname{Aut}_1^{s\ell}(\mathfrak{g})$ transforme le couple $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+$ en le couple d'une sous-algèbre de Cartan contenue dans une sous-algèbre de Borel positive qui est donc transformé de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+$ par un g dans G et ainsi $\operatorname{Ad}(gB^+g^{-1}) = \varphi \operatorname{Ad} B^+ \varphi^{-1}$ et $\operatorname{Ad}(gNg^{-1}) = \varphi \operatorname{Ad} N \varphi^{-1}$). On a donc une action simpliciale de $\operatorname{Aut}_1^{s\ell}(\mathfrak{g})$ sur l'immeuble $\mathfrak{J}^+$, compatible avec son action sur G et qui transforme appartements en appartements.

On définit de la même façon l'immeuble négatif $\mathfrak{J}^-$ de $\mathfrak{g}$ associé au système (G,B^-,N,S). Ses appartements sont en correspondance bijective avec ceux de $\mathfrak{J}^+$. Le groupe $\operatorname{Aut}_1^{s\ell}(\mathfrak{g})$ agit également dessus.

§ 2.- Automorphismes (linéaires) :

2.1.- Automorphismes intérieurs :

Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan standard. On définit dans [P-K] un groupe $\widetilde{H}$ qui agit sur G et $\mathfrak{g}$; en fait $\widehat{H} := \operatorname{Ad}(\widetilde{H})$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^I$ et si l'élément h de $\widehat{H}$ correspond à $(h_i)_{i\in I}$, il agit sur $\mathfrak{g}_\alpha$ par multiplication par le scalaire $h^\alpha = \Pi\, h_i^{n_i}$ si $\alpha = \Sigma\, n_i\, \alpha_i$. On définit ainsi un homomorphisme α de $\widehat{H}$ dans $\mathbb{C}^*$ indépendant du choix de la base Π.

Le groupe $\operatorname{Int}(\mathfrak{g}) := \operatorname{Ad}(\widetilde{H} \ltimes G)$ des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ est l'image du produit semi-direct de $\widetilde{H}$ et G. Il est donc engendré par $\widetilde{H}$ et le groupe adjoint $\operatorname{Ad}(G)$. En fait $\widehat{H} \cap \operatorname{Ad}(G)$ est le fixateur de $\mathfrak{h}$ dans $\operatorname{Ad}(G)$ c'est-à-dire $H' := \operatorname{Ad}(H)$. Ce groupe H' est l'ensemble des h dans $\widehat{H}$ tels que $h^\alpha = 1$ si $\alpha \in \mathbb{Z}.\Delta$ s'annule sur $\mathfrak{h}'$, cf. [K-P ; 2.2].

Si $\mathfrak{h}''$ est un supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{h}'' \oplus \mathfrak{c}$ soit défini par des équations dans $\mathbb{Z}\Delta$, ces équations définissent un sous-groupe H'' de $\widehat{H}$ tel que $H = H'' \times H'$ et $\operatorname{Int}(\mathfrak{g}) = H'' \ltimes \operatorname{Ad}(G)$. En particulier le groupe dérivé de $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ est le groupe adjoint $\operatorname{Ad}(G)$ (noté aussi $\operatorname{Int}'(\mathfrak{g})$ ou $\operatorname{Int}(\mathfrak{g}')$) ou groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}'$. Si $\mathfrak{g}$ est affine, la plus petite racine imaginaire positive δ fournit un homomorphisme de $\widehat{H}$ sur $\mathbb{C}^*$ de noyau H' et qui identifie H'' à $\mathbb{C}^*$.

Comme G est transitif sur les sous-algèbres de Cartan, le groupe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ est intrinsèquement défini par $\mathfrak{g}$, i. e. ne dépend pas du choix de $\mathfrak{h}$. En particulier $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

On a en fait $\hat{H} = \exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$, $H' = \exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{h}'$ et $H'' = \exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{h}''$ (pour tout supplémentaire $\mathfrak{h}''$). De plus il résulte facilement de [P-K ; cor. 10 et lemma 2] que si $X \in \mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}$) est tel que $\exp \mathrm{ad}\, X$ est défini, alors $\exp \mathrm{ad}\, X$ est dans $\mathrm{Ad}(G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$ (resp. $\mathrm{Ad}(\widetilde{H} \ltimes G) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$). Cet alinéa n'est pas valable pour un corps algébriquement clos de caractéristique 0 quelconque.

2.2.- Automorphismes de diagramme :

On considère le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des permutations ρ de I telles que $a_{\rho i \rho j} = a_{ij}$ pour $i,j \in I$, [P-K ; § 1] ou [B ; II.2.1]. On en déduit une action fidèle de $\mathrm{Aut}(A)$ sur $\mathfrak{g}'$ en posant $\rho(e_i) = e_{\rho i}$ et $\rho(f_i) = f_{\rho i}$; on a alors $\rho(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$ plus précisément $\rho(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\rho i}^\vee$.

Le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ stabilise le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}'$ (ou de $\mathfrak{g}$) donc stabilise un supplémentaire $\mathfrak{h}_1'$ de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{h}'$. Choisissons un supplémentaire quelconque $\mathfrak{h}_1''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_1' \oplus \mathfrak{h}_1''$ est un supplémentaire de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{h}$; son dual est donc $\oplus \mathbb{C}\alpha_i$ et l'action de $\mathrm{Aut}(A)$ sur ce dual par $\rho(\alpha_i) = \alpha_{\rho i}$ induit une action sur $\mathfrak{h}_1$ qui stabilise $\mathfrak{h}_1'$ (car $a_{\rho i \rho j} = a_{ij}$). On note $\mathfrak{h}''$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}_1'$ dans $\mathfrak{h}_1$ stable par $\mathrm{Aut}(A)$.

On a ainsi construit une action de $\mathrm{Aut}(A)$ sur $\mathfrak{h}$ compatible avec ses actions évidentes sur $\mathfrak{h}'$ et sur $\oplus \mathbb{C}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$ qui stabilisent Π et $\Pi^\vee$. Ainsi $\mathrm{Aut}(A)$ agit sur $\mathfrak{g}$ en stabilisant les décompositions $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}'' \oplus \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'' \oplus \mathfrak{h}'$.

Remarques :

1) Le choix de $\mathfrak{h}''$ n'est évidemment pas unique, donc $\mathrm{Aut}(A)$ n'est pas forcément bien déterminé par l'épinglage $(\mathfrak{h},\Pi,(e_i,f_i))$, il faut considérer l'épinglage étendu $(\mathfrak{h},\mathfrak{h}'',\Pi,(e_i,f_i))$.

2) On peut évidemment supposer $\mathfrak{h}'' \oplus \mathfrak{c}$ défini par des équations dans $\mathbb{Z}\Delta$ ce qui permet de définir H''.

3) Si $\mathfrak{g}$ est affine, $\mathrm{Aut}(A)$ est bien déterminé par l'épinglage [B ; II § 2]. Par contre $\mathfrak{h}''$ peut être différent de celui de [K ; § 6] qui est engendré par $d = p_0$; nous choisirons $\mathfrak{h}''$ engendré par $\Sigma\, p_{\rho 0}$.

2.3.- Automorphismes extérieurs :

L'involution de Cartan ω commute à $\mathrm{Aut}(A)$. On note $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ext}(A) = \{1,\omega\} \times \mathrm{Aut}(A)$ le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathfrak{g}$.

2.4.- Transvections :

On note $\mathrm{Tr}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}',\mathfrak{c})$ ou Tr l'ensemble des transvections de $\mathfrak{g}$ c'est-à-dire des applications linéaires de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ de la forme $\varphi = \exp \psi$ où ψ est une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{c}$ nulle sur $\mathfrak{g}'$; on a donc $\varphi(X) = X + \psi(X)$.

Lemme :

1) Tr *est un groupe d'automorphismes de* $\mathfrak{g}$ *isomorphe au groupe additif* $L(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}',\mathfrak{c})$ *des applications linéaires de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ *dans* $\mathfrak{c}$.

2) Tr *est l'ensemble des automorphismes de* $\mathfrak{g}$ *qui induisent l'identité sur* $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ *ou* $\mathfrak{g}'$ *ou* $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

Démonstration :

Le centre $\mathfrak{c}$ est contenu dans l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$, ce lemme est donc évident si on prouve qu'un automorphisme φ de $\mathfrak{g}$ qui induit l'identité sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ est dans Tr. Dans ce cas, comme $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']$, φ induit l'identité sur $\mathfrak{g}'$; alors pour $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{g}'$ on a $[\varphi X,Y] = [\varphi X,\varphi Y] = \varphi([X,Y]) = [X,Y]$ donc $\varphi X - X$ est dans le commutant de $\mathfrak{g}'$ qui est $\mathfrak{c}$ [K ; démonstration de 1.6] ; d'où le résultat. □

Proposition 2.5 :

On a la décomposition suivante du groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = [\mathrm{Ext}(A) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})] \ltimes \mathrm{Tr}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}',\mathfrak{c}) .$$

Démonstration :

D'après [P-K ; theorem 2.c] $\mathrm{Ext}(A) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ s'envoie isomorphiquement sur le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$, la proposition résulte donc du lemme ci-dessus. □

Définitions 2.6 :

On note $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}) = (\mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Int}(\mathfrak{g})) \ltimes \mathrm{Tr}$, *il est clair que c'est le groupe des automorphismes de première espèce de* $\mathfrak{g}$ *(1.9).*

On note $\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ext}(A) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *(cf. 2.7.1), c'est le groupe des automorphismes de* $\mathfrak{g}'$, *de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ *ou de* $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

On note $\mathrm{Aut}_1^f(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(A) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.
On dira parfois $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ *ou* $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ *au lieu de* $\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g})$ *ou* $\mathrm{Aut}_1^f(\mathfrak{g})$ *et on parlera d'automorphismes de* $\mathfrak{g}'$.

Proposition 2.7 :

Le groupe Tr *commute à* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *et* ω *. Si* $\mathfrak{g}$ *est affine il commute à tout* $\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g})$ *donc* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Tr}$.

Remarques :

1) Dans le cas affine (ou plus généralement commutatif) tout automorphisme d'ordre fini de $\mathfrak{g}$ est dans $\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g})$, d'où le nom de ce groupe. Il en résulte qu'il est alors équivalent pour les automorphismes $\mathbb{C}$-linéaires d'ordre fini de regarder les classes de conjugaison dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ou $\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$.

2) Il n'y a pas toujours commutativité. C'est facile à voir dans le cas décomposable du produit de deux algèbres affines isomorphes : Aut(A) contient la permutation des deux facteurs et ne commute donc pas à Tr .

Démonstration :

Pour $\varphi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ et $Y \in \mathfrak{g}$ on a $\varphi(Y) - Y \in \mathfrak{g}'$ et $\varphi|_{\mathfrak{c}} = \mathrm{Id}$ car il suffit de le vérifier pour $\varphi \in \hat{H}$ et $\varphi = \exp \mathrm{ad}\, X$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ donc φ (et $\mathrm{Int}\, \mathfrak{g}$) commute à Tr . De même Tr commute à ω car il suffit de le voir sur $\mathfrak{h}$. Pour le cas affine la proposition résulte maintenant du lemme suivant. □

Lemme 2.8 :

Supposons $\mathfrak{g}$ *affine. Si l'automorphisme* φ *de* $\mathfrak{g}$ *est de première (resp. seconde) espèce, il induit l'identité (resp. moins l'identité) sur* $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ *et sur* $\mathfrak{c}$.

Démonstration :

D'après le calcul précédent pour $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ et les résultats évidents pour ω et Tr il suffit de le voir quand φ est dans Aut(A) . Mais alors la plus petite racine imaginaire positive δ est fixe par φ , donc φ est l'identité sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ et $\varphi(\Sigma a_i^\vee \alpha_i^\vee) = \Sigma a_i^\vee \alpha_{\varphi i}^\vee = \Sigma a_{\varphi i}^\vee \alpha_{\varphi i}^\vee = \Sigma a_i^\vee \alpha_i^\vee$ donc φ est l'identité sur $\mathfrak{c}$. □

2.9.- Formes bilinéaires invariantes :

On appelle forme standard et on note B(-,-) la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique invariante non dégénérée définie, comme dans [K ; chap. 2], à partir du supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$ choisi en 2.2. Dans le cas affine cette forme n'est donc pas toujours celle de [K ; chap. 6].

Proposition :

1) Les formes $\mathbb{C}$*-bilinéaires invariantes symétriques non dégénérées sur* $\mathfrak{g}$ *forment, à proportionnalité près, une orbite de* Tr.

2) Le groupe $\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g})$ *stabilise la forme standard, c'est-à-dire que* $B(\varphi X, \varphi Y) = B(X,Y)$ *pour* X,Y *dans* $\mathfrak{g}$ *et* φ *dans* $\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g})$.

3) Le stabilisateur dans Tr *d'une forme invariante symétrique non dégénérée* $(-|-)$ *est l'ensemble des* $\exp \psi$ *tels que* $(X|\psi X) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Remarque :

Le premier résultat n'est plus valable sous cette forme pour A décomposable.

Démonstration :

Le premier résultat est l'exercice 2.5 de [K]. Comme B est invariante, elle est stable par G . Puisque $\mathfrak{h}''$ est stable par H , $\{1,\omega\}$ et Aut(A) , ces groupes stabilisent B sur $\mathfrak{h}$ et donc aussi sur $\mathfrak{g}$ [K ; ex. 2.2] ; d'où le second résultat. D'après le premier résultat ou l'exercice 2.3 de [K], la forme $(-|-)$ est telle que décrite en [K ; 2.1] pour un certain supplémentaire $\mathfrak{h}_1''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$. Comme $\varphi = \exp \psi \in \mathrm{Tr}$ fixe les α_i et $\alpha_i^\vee$, il fixe $(-|-)$ si et seulement si $(\varphi h'|\varphi h'') = 0$ pour h',h'' dans $\mathfrak{h}_1''$. Or $(\mathfrak{h}_1''|\mathfrak{h}_1'') = (\mathfrak{c}|\mathfrak{c}) = 0$, cette condition équivaut donc à $(h'|\psi h'') + (h''|\psi h') = 0$ pour h',h'' dans $\mathfrak{h}_1''$ ou à $(h|\psi h) = 0$ pour h dans $\mathfrak{h}''$. Mais $(\mathfrak{g}'|\mathfrak{c}) = 0$ et cette condition équivaut finalement à $(X|\psi X) = 0$ pour X dans $\mathfrak{g}$. □

Corollaire 2.10 :

Supposons $\mathfrak{g}$ *affine ; le stabilisateur dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *d'une forme bilinéaire symétrique invariante non dégénérée quelconque* $(-|-)$ *est* $\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g})$.

Démonstration :

$\mathrm{Aut}^f(\mathfrak{g})$ stabilise $(-|-)$ d'après 2.9.1, 2.9.2 et 2.7. Par contre $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{c}$ sont de dimension 1 et $(\mathfrak{g}|\mathfrak{c}) \neq 0$ donc, d'après 2.9.3, le stabilisateur de $(-|-)$ dans Tr est trivial, d'où le corollaire. □

2.11.- Automorphismes et $\mathbb{C}[t^k,t^{-k}]$-linéarité dans le cas affine :

Si l'algèbre $\mathfrak{g}$ est affine de type (Aff k) , k = 1 , 2 ou 3 , alors il existe une algèbre de Lie simple de dimension finie $\mathring{\mathfrak{g}}$ telle que $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de Lie de $\mathring{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ stable par $\mathcal{A} = \mathbb{C}[t^k,t^{-k}]$, c'est-à-dire une $\mathcal{A}$-algèbre de Lie.

Le comportement des automorphismes de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ vis-à-vis de $\mathcal{A}$ est comme suit :

- Le groupe Tr agit trivialement.
- L'action de $Ad(G) = Int(\mathfrak{g}')$ est $\mathcal{A}$-linéaire car $\mathfrak{g}'$ est une $\mathcal{A}$-algèbre de Lie.
- L'action de $Aut(A)$ est $\mathcal{A}$-linéaire d'après [B ; III.1.2] sauf dans le cas $A^{(1)}_{2\ell}$ où l'unique (à conjugaison près) automorphisme de diagramme d'ordre deux ρ_1 vérifie $\rho_1(t^n X) = (-1)^n t^n \rho_1(X)$ et est donc $\mathbb{C}[t^2,t^{-2}]$-linéaire.
- Un élément φ de $\hat{H}$ vérifie $\varphi(t^n X) = \delta(\varphi)^n t^n \varphi(X)$ où δ est la plus petite racine imaginaire positive de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\Pi)$.
- L'involution de Cartan ω vérifie $\omega(t^n X) = t^{-n} \omega(X)$.

Ainsi l'action de $Aut(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ est $\mathcal{A}$-semi-linéaire, à l'automorphisme $\omega^{\varepsilon}.\rho.h''.g.\varphi$ de $\mathfrak{g}$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1 , $g \in G$, $h'' \in H''$, $\varphi \in Tr$ et $\rho \in Aut(A)$ (si ce n'est que, si $\mathfrak{g} = A^{(1)}_{2\ell}$ et si ρ est l'involution non triviale fixant $i \in I$, on remplace ρ par $\rho \exp ad \sqrt{-1}\,\pi p_i)$ correspond l'automorphisme de $\mathcal{A}$ donné par $t^k \mapsto (\delta(h'')t^{\eta})^k$ où $\eta = 1 - 2\varepsilon$.

§ 3.- Automorphismes semi-linéaires ; formes réelles :

A partir de 3.8 on suppose $\mathfrak{g}$ affine [4]).

3.1.- Définitions :

On note $Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont soit $(\mathbb{C})$-linéaires, soit semi-linéaires (ou antilinéaires i. e. $\varphi(\lambda X) = \bar{\lambda}\, \varphi(X)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathfrak{g}$) . Le groupe $Aut(\mathfrak{g})$ est distingué dans $Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ et d'indice deux.

On appelle semi-involution de $\mathfrak{g}$ un automorphisme semi-linéaire d'ordre 2. Pour toute semi-involution σ' on a la décomposition en produit semi-direct $Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1,\sigma'\} \ltimes Aut(\mathfrak{g})$.

3.2.- La semi-involution normale :

L'espace $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \oplus\, \mathbb{R}\, \alpha_i^{\vee}$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}'$. Si $\mathfrak{h}''$ est un supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}''_{\mathbb{R}} = \{h \in \mathfrak{h}''/\alpha(h) \in \mathbb{R} \ \ \forall \alpha \in \Delta\}$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}''$. Ainsi $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{h}''_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{c}$ une forme réelle de $\mathfrak{c}$ (égale à $\mathbb{R}c$ dans le cas affine). Dans la suite on suppose que $\mathfrak{h}''$ est choisi comme en 2.2.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ engendrée par $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ et les $\mathbb{R}e_i$, $\mathbb{R}f_i$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$: la forme normale ou déployée standard.

On note σ'_n la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est la semi-involution normale standard. Elle commute à ω et $Aut(A)$; elle normalise $Int(\mathfrak{g})$ et $Tr(\mathfrak{g},\mathfrak{g}',\mathfrak{c})$ mais ne commute pas avec eux : par exemple la conjugaison par σ'_n induit dans $L(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}',\mathfrak{c})$ isomorphe à $Tr(\mathfrak{g},\mathfrak{g}',\mathfrak{c})$ la conjugaison par rapport à la forme réelle $L_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}},\mathfrak{c}_{\mathbb{R}})$.

3.3.- Le sous-groupe de $Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ formé des automorphismes de première espèce est le produit semi-direct $Aut_{1\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1,\sigma'_n\} \ltimes Aut_1(\mathfrak{g})$.

On note aussi $Aut^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1,\sigma'_n\} \ltimes Aut^f(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes linéaires ou semi-linéaires de $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

Enfin $Aut^f_{1\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = Aut^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \cap Aut_{1\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1,\sigma'_n\} \ltimes Aut^f_1(\mathfrak{g})$.

Proposition :

Soit φ' un automorphisme semi-linéaire de l'algèbre affine $\mathfrak{g}$. Si φ' est de première espèce (resp. de seconde espèce) alors φ' (resp. $-\varphi'$) induit sur $\mathfrak{c}$ la conjugaison par rapport à $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ et sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{h}''$ la conjugaison par rapport à $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$.

Démonstration :

Cela résulte de 2.8 et de la nature de σ'_n . □

3.4.- On note encore B la forme bilinéaire de 2.9.

Proposition :

Soit φ' un automorphisme semi-linéaire. Si φ' est dans $Aut^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ alors φ' stabilise B (i. e. $B(\varphi'X,\varphi'Y) = \overline{B(X,Y)}$ pour $X,Y \in \mathfrak{g}$) et la réciproque est vraie si $\mathfrak{g}$ est affine.

Démonstration :

Cela résulte de 2.9, 2.10 et d'un calcul direct pour σ'_n . □

Proposition 3.5 :

Soit τ un automorphisme linéaire ou semi-linéaire de première espèce de $\mathfrak{g}$, qui stabilise deux sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ et des bases Π et Π_1 des systèmes de racines correspondants. Alors il existe un élément g dans G fixe par τ qui conjugue $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}_1$.

Remarque :

L'existence de telles sous-algèbres ou de telles bases n'est pas toujours assurée, voir certains cas ci-dessous.

Démonstration :

Il existe g_1 dans G qui transforme $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}_1$ et Π en Π_1 (quitte à changer Π_1 en $-\Pi_1$: 1.7) ; mais $\tau(g_1)$ a la même propriété donc $\tau(g_1)$ et g_1 sont égaux modulo le stabilisateur H de $(\mathfrak{h},\Pi)$. D'après la décomposition de Bruhat on peut écrire $g_1 = u.n.u'$ avec $u \in U^+$, $n \in N$ et $u' \in U^+ \cap nU^-n^{-1}$; on a donc $\tau(g_1) = \tau(u).\tau(n).\tau(u') = u.n.u'.h = u.nh.h^{-1}u'h$ avec $\tau(u), \tau(u'), h^{-1}u'h \in U^+$, $\tau(n) \in N$ et $h \in H$. De l'unicité dans la décomposition de Bruhat [P-K ; cor. 2 et cor. 5] on déduit que $\tau(n)$ et n définissent la même classe dans W, donc $\tau(u') \in nU^-n^{-1}$ et ainsi $\tau(u) = u$, $\tau(n) = nh$ et $\tau(u') = h^{-1}u'h$. Alors $\tau(nu'n^{-1}) = nu'n^{-1}$ et $g = g_1n^{-1}$ commute à τ tout en transformant $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{h}_1$. □

Proposition 3.6 :

Ecrivons un automorphisme semi-linéaire sous la forme $\sigma' = \sigma'_n.(\tau.t)$ *avec* $\tau \in Aut^f(\mathfrak{g})$ *et* $t \in Tr$. *Alors* σ' *est une semi-involution si et seulement si* $\sigma'_n\tau$ *en est une et si* $t \in \exp(\sqrt{-1}\,\mathcal{L})$ *où* $\mathcal{L}$ *est la forme réelle de* $L(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}',\mathfrak{c})$ *correspondant aux formes réelles de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ *et* $\mathfrak{c}$ *associées à* $\sigma'_n\tau$. *Dans ce cas* σ' *est conjugué de* $\sigma'_n\tau$ *par un élément de* Tr.

Remarques :

1) A conjugaison près par Tr, toute semi-involution est donc dans $Aut^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. Ainsi les classes de conjugaison de semi-involutions de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ sont les mêmes.

2) Supposons $\mathfrak{g}$ affine, alors τ induit le même automorphisme $\pm Id$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{c}$ (2.8), donc $\mathcal{L}$ est la forme réelle habituelle $L_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}},\mathfrak{c}_{\mathbb{R}})$. Si de plus σ' stabilise B, on a $\sigma' \in Aut^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ donc $t = Id$.

Démonstration :

On a $\sigma'^2 = (\sigma'_n\tau)^2(\tau^{-1}\sigma'_n t\,\sigma'_n\tau t)$ où le premier terme est dans $Aut^f(\mathfrak{g})$ et le second dans Tr ; donc si $\sigma'^2 = Id$, on a $(\sigma'_n\tau)^2 = Id$. Supposons maintenant que $(\sigma'_n\tau)^2 = Id$, que $t = \exp\psi$ avec $\psi \in L(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}',\mathfrak{c})$ et notons par une barre la conjugaison par $\sigma'_n\tau = \tau^{-1}\sigma'_n$. On a alors $\sigma'_n\tau t\,\sigma'_n\tau t = \exp(\bar\psi+\psi)$ et $\sigma'^2 = Id$ si et seulement si $\psi \in \sqrt{-1}\,\mathcal{L}$. Pour la seconde assertion, soit $t_1 = \exp\psi_1 \in Tr$, on a alors $t_1\sigma'_n\tau t_1^{-1} = \sigma'_n\tau(\sigma'_n\tau,t_1) = \sigma'_n\tau\exp(\bar\psi_1-\psi_1)$ et, pour conjuguer $\sigma'_n\tau$ en σ' par t_1, il suffit de choisir ψ_1 tel que $\bar\psi_1-\psi_1 = \psi$. □

Définitions 3.7 :

Une semi-involution de première espèce (en abrégé S.I.1) σ' de $\mathfrak{g}$ détermine une forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}$ que nous qualifierons de presque normale ou presque déployée puisque la forme normale (ou déployée) standard (qui correspond à σ'_n) rentre dans cette catégorie. Cette forme n'est pas forcément quasi-déployée puisque σ' ne stabilise pas forcément de sous-algèbre de Borel. On trouvera un début de classification de ces formes dans [R3][5].

Une semi-involution de deuxième espèce (en abrégé S.I.2) σ' de $\mathfrak{g}$ détermine une forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}$ que nous qualifierons de presque compacte puisque toute forme "compacte" rentre dans cette catégorie (4.3). Cela correspond d'ailleurs à la définition de presque anisotrope de [B-T2 ; 1.7] puisque (au moins dans le cas affine d'après 3.11) la forme est presque compacte si et seulement si il n'existe pas de sous-algèbre parabolique propre définie sur $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas une semi- involution σ' de $\mathfrak{g}$ (ou ce qui revient au même la formeréelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ associée) détermine un automorphisme d'ordre 2, encore noté σ', du groupe G (resp. $Aut(\mathfrak{g})$, $Aut_1(\mathfrak{g})$, $Int(\mathfrak{g})$) et donc un sous-groupe de points fixes noté $G_{\mathbb{R}}$ (resp. $Aut(\mathfrak{g})_{\mathbb{R}}$, $Aut_1(\mathfrak{g})_{\mathbb{R}}$, $Int(\mathfrak{g})_{\mathbb{R}}$).

Théorème 3.8 : (cf. [L ; III.1.1])

On suppose l'algèbre $\mathfrak{g}$ *affine*[4].

Soient Γ *un sous-groupe fini de* $Aut_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, Γ_1 *le sous-groupe des automorphismes de première espèce,* Γ^0 *le sous-groupe des automorphismes linéaires et* $\Gamma_1^0 = \Gamma^0 \cap \Gamma_1$.

a) Il existe un couple de sous-algèbres paraboliques propres $\mathfrak{p}^+$ *(positive) et* $\mathfrak{p}^-$ *(négative) de* $\mathfrak{g}$ *qui est stable par* Γ. *Le groupe* Γ_1 *stabilise chacun de ces paraboliques.*

b) Si Γ_1^0 *est cyclique (resp. et si* $\Gamma_1^0 = \Gamma_1$*), ce groupe stabilise des sous-algèbres de Borel* $\mathfrak{b}^+$ *de* $\mathfrak{p}^+$ *et* $\mathfrak{b}^-$ *de* $\mathfrak{p}^-$ *; alors* Γ^0 *(resp.* Γ*) stabilise le couple* $(\mathfrak{b}^+,\mathfrak{b}^-)$.

c) On suppose que Γ^0 *est hyperrésoluble et que* Γ *est produit de* Γ^0 *et d'un groupe d'ordre 1 ou 2, alors* Γ *stabilise une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *contenue dans* $\mathfrak{p}^+$ *et* $\mathfrak{p}^-$.

d) Supposons Γ_1^0 cyclique. Si $\Gamma = \Gamma_1^0$ ou s'il existe une semi-involution de seconde espèce σ' telle que $\Gamma = \{1,\sigma'\} \times \Gamma_1^0$, alors Γ stabilise une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{b}^+$ et $\mathfrak{b}^-$.

Remarques :

1) Γ^0 est hyperrésoluble s'il existe une suite $\Gamma_1^0 \supset \Gamma_2^0 \supset \ldots \supset \Gamma_n^0 = \{1\}$ de sous-groupes distingués de Γ^0 tels que $\Gamma_i^0/\Gamma_{i+1}^0$ est cyclique. Cette hypothèse est inutile pour le c) si on sait par hasard que $\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{p}^-$ est résoluble : il suffit alors d'utiliser [M ; 5.2].

2) Une algèbre semi-simple réelle n'est pas toujours quasi-déployée, l'hypothèse Γ_1^0 cyclique ne permet donc pas d'obtenir les résultats de b) et d) pour Γ ou Γ_1.

Démonstration :

On considère les immeubles $\mathcal{J}^+$ et $\mathcal{J}^-$ de $\mathfrak{g}$ définis en 1.13.

a) Le groupe fini Γ_1 agit sur $\mathcal{J}^+$ et $\mathcal{J}^-$; d'après le lemme du point fixe [B-T ; 3.2.4] il fixe une facette de chacun d'eux, c'est-à-dire des paraboliques propres P^+ et P^-. D'après 1.6.4 Γ_1 fixe aussi les algèbres de Lie correspondantes $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$. Si $\Gamma \neq \Gamma_1$ et $\sigma \in \Gamma - \Gamma_1$, il suffit de remplacer $\mathfrak{p}^-$ par $\sigma\mathfrak{p}^+$ pour achever la démonstration de a).

b) Il suffit de voir que Γ_1^0 stabilise une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{p}_X$. Mais Γ_1^0 induit un groupe cyclique d'automorphismes (linéaires) de $\mathfrak{p}_X/\mathfrak{u}_X \simeq \mathfrak{m}_X$ qui est une algèbre réductive de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et donc fixe une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{p}_X/\mathfrak{u}_X$ [B-M ; 4.5]. L'image réciproque de cette algèbre dans $\mathfrak{p}^+$ est une sous-algèbre de Borel (conjuguée de la standard par M_X) stable par Γ_1^0.

c) Si $\Gamma \neq \Gamma^0$, on a $\Gamma = \{1,\sigma'\} \times \Gamma^0$ où σ' est une semi-involution. Notons $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{p}^-)^{\sigma'}$ la forme réelle correspondante de l'algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{s} = (\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{p}^-)$ (1.8.e). Comme Γ^0 commute à σ', il induit un groupe fini hyperrésoluble d'automorphismes de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ et donc stabilise une S.A.C. de $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$ [B-M ; 7.6]. D'après 1.12 le complexifié de cette S.A.C. est une S.A.C. de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{p}^-$, stable par σ' et Γ^0 donc par Γ.

Si $\Gamma = \Gamma^0$ on raisonne directement avec $\mathfrak{s}$ sans $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}$.

d) Dans ce cas $\Gamma_1^0 = \Gamma_1 = \Gamma^0$ et il suffit d'appliquer c) au couple $\mathfrak{b}^+, \mathfrak{b}^-$ $(= \sigma'(\mathfrak{b}^+))$ fourni par b). □

Corollaire 3.9 : [L ; III.1.1]

Un automorphisme (linéaire) d'ordre fini et de première espèce τ de $\mathfrak{g}$ stabilise un couple $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+$ d'une sous-algèbre de Cartan contenue dans une sous-algèbre de Borel positive.

Remarque :

Une telle sous-algèbre de Cartan sera dite maximalement fixée par τ ; d'après 3.5 deux sous-algèbres de Cartan maximalement fixées par τ sont conjuguées par un automorphisme intérieur (et même adjoint) qui commute à τ. Ce résultat est en fait l'ingrédient principal de [B ; V.1.1], démontré par une autre voie.

Corollaire 3.10 : [L]

Un automorphisme (linéaire) d'ordre fini et de seconde espèce de $\mathfrak{g}$ stabilise une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et un couple de sous-algèbres de Borel de signes opposés contenant $\mathfrak{h}$.

Corollaire 3.11 :

Une semi-involution de première espèce stabilise une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et deux sous-algèbres paraboliques propres de signes opposés contenant $\mathfrak{h}$.

Corollaire 3.12 :

Une semi-involution de seconde espèce stabilise une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ (et un couple de sous-algèbres de Borel de signes opposés contenant $\mathfrak{h}$).

Corollaire 3.13 :

a) Deux semi-involutions de deuxième espèce σ_1' et σ_2' qui commutent stabilisent une même sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$; de plus l'involution de première espèce $\sigma = \sigma_1'\sigma_2'$ stabilise une sous-algèbre de Borel positive $\mathfrak{b}^+$ contenant $\mathfrak{h}$.

b) Une semi-involution de deuxième espèce σ_1' et une involution de première espèce σ qui commutent stabilisent une même sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$; de plus σ stabilise une sous-algèbre de Borel positive $\mathfrak{b}^+$ contenant $\mathfrak{h}$.

Corollaire 3.14 :

Considérons le groupe Γ formé des automorphismes ci-après : l'identité Id , *une involution de deuxième espèce* σ_2 , *une semi-involution de première espèce* σ_1' *et une semi-involution de seconde espèce* σ_2' *qui commutent (et vérifient* $\sigma_2 \sigma_2' \sigma_1 = \mathrm{Id}$) . *Ce groupe* Γ *stabilise une sous-algèbre de Cartan* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *et une paire de sous-algèbres paraboliques propres de signes opposés contenant* $\mathfrak{h}$; *de plus* σ_1' *stabilise chacune de ces sous-algèbres.*

§ 4.- Formes "compactes" et presque compactes :

Sauf indication contraire on suppose les semi-involutions dans $\mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ à partir de 4.2 et $\mathfrak{g}$ affine à partir de 4.7 $^{*)}$.

4.1.- Formes sesquilinéaires :

Soit τ' une semi-involution. Pour $X,Y \in \mathfrak{g}$ on pose $B_{\tau'}(X,Y) = -B(X,\tau'Y)$, où B est la forme bilinéaire standard. On obtient ainsi une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Le centre $\mathfrak{c}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{g}'$ pour B d'après [K ; 2.1.a et 2.2.c] et donc pour $B_{\tau'}$ puisque τ' stabilise $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{g}'$. Ainsi $B_{\tau'}$ induit une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

Si τ' stabilise B (par exemple si $\tau' \in \mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$) alors $B_{\tau'}$ est hermitienne et réciproquement.

Si σ' est une autre semi-involution qui stabilise B , alors l'automorphisme linéaire $\sigma = \sigma'\tau'$ est autoadjoint pour $B_{\tau'}$ puisque :
$B_{\tau'}(\sigma X,Y) = -B(\sigma'\tau'X,\tau'Y) = -B(X,\tau'\sigma'\tau'Y) = B_{\tau'}(X,\sigma Y)$.

4.2.- Convention :

Sauf mention explicite du contraire on suppose dorénavant que les semi-involutions utilisées sont dans $\mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$. On sait que l'on peut s'y ramener par conjugaison par des transvections (3.6).

Avec cette convention une semi-involution τ' stabilise la forme B (la réciproque est d'ailleurs vraie dans le cas affine d'après 3.4) et donc $B_{\tau'}$ est une forme hermitienne non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

Pour une semi-involution non dans $\mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ le même résultat est vrai à condition de remplacer B par une autre forme (qui lui est conjuguée par une transvection).

4.3.- Semi-involutions de Cartan et formes "compactes" :

La semi-involution de Cartan standard est $\omega_s' = \sigma_n'\omega = \omega\sigma_n'$. C'est une semi-involution de seconde espèce (contenue dans $\mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$) . La forme réelle de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ associée est dite "compacte standard" (ou unitaire standard) et notée $\mathfrak{k}(A)$ ou $\mathfrak{k}$ [K ; 2.7]. De même on note par K le sous-groupe $G^{\omega'}$ de G .

Plus généralement nous appellerons semi-involution de Cartan (en abrégé S.I.C.) de $\mathfrak{g}$ une semi-involution ω' conjuguée de ω_s' par un élément de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ (pourvu que $\omega' \in \mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$) ; alors ω' est une semi-involution de seconde espèce et la forme réelle associée est dite "compacte" ou unitaire.

D'après la proposition 4.4 tout couple formé d'une semi-involution de Cartan ω' de $\mathfrak{g}$ et d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$ stable par ω' est conjugué du couple standard $(\omega_s',\mathfrak{h})$. L'alinéa suivant est donc une conséquence de [K ; 11.7, theorem and warning].

La décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus (\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha)$ pour α parcourant $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_1)$ est directe orthogonale pour $B_{\omega'}$. La restriction de $B_{\omega'}$ est définie positive sur chaque $\mathfrak{g}_\alpha$ et donc sur $\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha$. Par contre $\mathfrak{g}'$ est l'orthogonal du centre $\mathfrak{c}$ contenu dans $\mathfrak{h}'$ et $B_{\omega'}$ est définie positive sur $\mathfrak{h}'/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ si et seulement si l'algèbre $\mathfrak{g}$ est affine.

Proposition 4.4 :

Toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ *stable par* ω_s' *est conjuguée de* $\mathfrak{h}$ *par le groupe* K .

Remarques :

1) Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{k}$ (en un sens évident) sont donc conjuguées par K .

2) Mutatis mutandis, ceci s'étend à toute semi-involution de Cartan.

3) Les couples formés d'une sous-algèbre de Cartan stable par une semi-involution de Cartan sont donc conjugués par $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ (et même par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$: 4.6.a).

Démonstration :

Soit $\mathfrak{h}_1$ une S.A.C. stable par ω_s' . Il existe g dans G tel que $\mathfrak{h}_1 = g\mathfrak{h}$, alors $\omega_s'(g).\mathfrak{h} = \omega_s'(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_1 = g\mathfrak{h}$, donc $g^{-1}\omega_s'(g) \in N$. Utilisons la décomposition d'Iwasawa [P-K ; cor. 4.b], on a $g = khu$ avec $k \in K$, $h \in H$ et $u \in U^+$. Alors $g^{-1}\omega_s'(g) = u^{-1}h^{-1}\omega_s'(h)\,\omega_s'(u)$ avec $u^{-1} \in U^+$, $h^{-1}\omega_s'(h) \in H$ et $\omega_s'(u) \in U^-$. L'unicité dans la décomposition de Birkhoff [K-P ; prop. 3.3] prouve que $u = 1$ donc $\mathfrak{h}_1 = kh\mathfrak{h} = k\mathfrak{h}$. □

Proposition 4.5 : [2]

Si une semi-involution σ' et une semi-involution de Cartan ω' stabilisent une même sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, alors il existe un automorphisme intérieur φ dans $\hat{H}$ tel que σ' et $\varphi\omega'\varphi^{-1}$ commutent. De plus φ commute à tout automorphisme linéaire ou semi-linéaire de $\mathfrak{g}$ commutant avec l'automorphisme linéaire $\sigma'\omega' = \sigma$.

Démonstration : cf [H ; III.7.1]

On peut d'après 4.4.3 supposer que $(\omega',\mathfrak{h})$ est le couple standard.

Comme ω' est moins l'identité sur $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, σ est une involution sur Δ. En particulier $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-espaces vectoriels de dimension finie $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{\sigma\alpha}$ stables par σ. Or σ est auto-adjoint pour $B_{\omega'}$ (4.1), donc σ est diagonalisable avec valeurs propres réelles sur $\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha$ et stabilise $\mathfrak{h}$. Ainsi $P = \sigma^2$ est diagonalisable à valeurs propres réelles positives sur $\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha$. Mais P est dans $\mathrm{Aut}_1^f(\mathfrak{g})$ et stabilise $\mathfrak{h}$; plus précisément σ est une involution sur les racines donc P est l'identité sur Δ. Comme $P \in \mathrm{Aut}_1^f(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Stab}(\mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}(A) \ltimes \hat{H}$ on a $P \in \hat{H}$ en particulier P est l'identité sur $\mathfrak{h}$. Dans l'identification de $\hat{H}$ avec $\mathbb{C}^{*I}$, P correspond à un élément dans $]0,+\infty[^I$, on peut donc définir $P^t \in \hat{H}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Soit ψ un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de $\mathfrak{g}$ commutant à σ ; il stabilise les sous-espaces primaires de σ et donc de $P = \sigma^2$. Mais P est diagonalisable donc ψ commute à P et à P^t.

Comme $\omega'\sigma\omega' = \omega'\sigma' = \sigma^{-1}$, on a $\omega' P^t \omega' = P^{-t}$. Posons $\omega'_t = P^t \omega' P^{-t}$; on a $\sigma'\omega'_t = \sigma' P^t \omega' P^{-t} = \sigma P^{-2t} = \sigma^{-1} P^{1-2t}$ et $\omega'_t \sigma' = (\sigma'\omega'_t)^{-1} = P^{2t}\sigma^{-1} = \sigma^{-1} P^{2t}$. Si on prend $t = \frac{1}{4}$ et $\varphi = P^t$ on obtient que σ' commute à $\omega'_t = \varphi\omega'\varphi^{-1}$. □

Théorème 4.6 :

a) Deux semi-involutions de Cartan sont conjuguées par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

b) Deux semi-involutions de Cartan qui commutent et stabilisent une même sous-algèbre de Cartan sont égales.

c) Une semi-involution σ' est une semi-involution de Cartan si et seulement si il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ stable par σ' et telle que $B_{\sigma'}$ soit définie positive sur la somme $\oplus\, \mathfrak{g}_\alpha$ des espaces radiciels correspondants.

Remarque :

Si on considère des semi-involutions non dans $\mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, deux S.I.C. sont conjuguées non pas par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ mais par le sous-groupe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \ltimes \mathrm{Tr}$ de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Démonstration :

D'après 4.3 une S.I.C. σ' vérifie la condition de c) pour n'importe quelle S.A.C. stable par σ'.

Soient σ' une semi-involution vérifiant la condition du c) pour une certaine S.A.C. $\mathfrak{h}$ et ω' une S.I.C. Quitte à conjuguer par G puis par $\hat{H}$ (donc par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$) on peut supposer que $\mathfrak{h}$ est l'algèbre standard, que ω' stabilise $\mathfrak{h}$ et que ω' commute à σ'. Le théorème sera achevé si on prouve qu'alors forcément $\sigma' = \omega'$.

Comme $\mathfrak{g}_\alpha$ est orthogonal pour B à $\mathfrak{g}_\alpha$ si $\alpha+\beta \neq 0$ et comme $B_{\sigma'}(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha) \neq 0$, on a $\sigma'(\alpha) = -\alpha$ pour tout α dans Δ. En particulier $\sigma'(e_i) = \lambda_i f_i$; $\sigma'(f_i) = \mu_i e_i$ avec $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$. Mais σ' est une semi-involution donc $\overline{\lambda}_i.\mu_i = 1$. D'autre part $0 < B_{\sigma'}(e_i,e_i) = -B(\sigma' e_i,e_i) = -\lambda_i B(f_i,e_i)$ et $0 < B_{\omega'}(e_i,e_i) = -B(\omega' e_i,e_i) = B(f_i,e_i)$. Ainsi λ_i est un réel négatif et $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$. On a $\sigma'\omega'(e_i) = \sigma'(-f_i) = -\mu_i e_i$ et $\omega'\sigma'(e_i) = \omega'(\lambda_i f_i) = -\overline{\lambda}_i e_i$. Comme σ' et ω' commutent on a $\overline{\lambda}_i = \mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$ réel négatif, donc $\lambda_i = \mu_i = -1$. Ainsi $\sigma'(e_i) = \omega'(e_i)$ et $\sigma'(f_i) = \omega'(f_i)$; il reste à montrer que $\sigma' = \omega'$ sur $\mathfrak{h}$. Or $\sigma'\omega'$ stabilise $\mathfrak{h}$ donc $\sigma'\omega' \in \mathrm{Aut}_1^f(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Stab}(\mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}(A) \ltimes \hat{H}$. Mais σ' et ω' induisent moins l'identité sur Δ donc $\sigma'\omega'$ est l'identité sur Δ et appartient en fait à $\hat{H}$. Ainsi $\sigma'\omega'$ est l'identité sur $\mathfrak{h}$ et $\sigma' = \omega'$ sur $\mathfrak{h}$. □

4.7.- On suppose dorénavant $\mathfrak{g}$ affine[4].

Corollaire :

a) Une semi-involution σ' est de Cartan si et seulement si la forme $B_{\sigma'}$ est définie positive sur $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

b) Deux semi-involutions de Cartan qui commutent sont égales.

Démonstration :

Cela résulte de 4.6, 4.3, 3.11, 3.12 et 3.13.a). □

4.8.- Définitions :

Soient σ' une semi-involution de seconde espèce de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ la forme réelle presque compacte correspondante :

1) Une semi-involution de Cartan ω' qui commute à σ' est dite semi-involution de Cartan pour σ' ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. L'involution $\sigma = \sigma'\omega'$ (resp. sa restriction $\omega'_{\mathbb{R}}$ à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ou $\sigma'_{\mathbb{R}}$ à $\mathfrak{k}$) est dite involution de Cartan de σ'

(resp. de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ou de $\mathfrak{k}$) . L'algèbre de points fixes $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{k}^{\sigma} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{k}$ est dite <u>sous-algèbre "compacte maximale"</u> de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; c'est une "forme compacte" de l'algèbre $\mathfrak{g}^{\sigma}$ qui, d'après [B ; IV] ou [B-R] est presque un produit d'algèbres affines.

2) On a les <u>décompositions de Cartan</u> $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathcal{P}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \sqrt{-1}\,\mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est l'espace propre de $\omega'_{\mathbb{R}}$ pour la valeur propre -1 . Comme $B_{\omega'}$ est définie positive sur $\mathfrak{g}'/\mathbb{C}$ et σ autoadjoint pour $B_{\omega'}$, on sait que B est définie négative sur $(\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{g}')/\mathbb{R}\sqrt{-1}\,c$ et définie positive sur $(\mathcal{P} \cap \mathfrak{g}')/\mathbb{R}c$ et que ces deux espaces sont orthogonaux pour $B_{\omega'}$, donc pour B . Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathfrak{g}'$ est l'orthogonal pour B de $\mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{k}_0$ détermine la restriction de $\omega'_{\mathbb{R}}$ à $\mathfrak{g}'_{\mathbb{R}}$. Finalement comme ω' est dans $\mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, le couple $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}},\mathfrak{k}_0)$ détermine ω' et σ .

3) Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est dite <u>"maximalement compacte"</u> pour σ' (ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$) si elle est stable par σ' et si $-\sigma'$ stabilise une base de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

<u>*Proposition 4.9*</u> :

Soit σ' une semi-involution de seconde espèce.

a) Il existe des semi-involutions de Cartan ω' et des sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ maximalement compactes pour σ' .

b) Pour toute sous-algèbre de Cartan maximalement compacte, il existe une semi-involution de Cartan ω' pour σ' qui stabilise $\mathfrak{h}$, et celle-ci est unique à un automorphisme intérieur stabilisant $\mathfrak{h}$ et commutant à σ' près.

c) Pour toute semi-involution de Cartan ω' pour σ' , il existe une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte stable par ω' et celle-ci est unique à un automorphisme intérieur commutant à σ' et ω' près.

<u>Remarque</u> :

Les classes de conjugaison sous $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ de sous-algèbres de Cartan maximalement compactes pour σ' ou de semi-involutions de Cartan pour σ' ou de sous-algèbres compactes maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont donc en bijection.

<u>Démonstration</u> :

D'après 3.12, la conjugaison des S.A.C. et 4.5, il existe une S.I.C. ' qui commute à σ' et stabilise n'importe quelle S.A.C. stable par σ' . Alors d'après 3.13.a), il existe une S.A.C. $\mathfrak{h}$ stable par σ' et ω' telle que

$\sigma = \sigma'\omega'$ et donc $-\sigma'$ stabilise une base de $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$; d'où a) et les premières parties de b) et c).

Si ω'_1 et ω'_2 commutent à σ' et stabilisent une même S.A.C. $\mathfrak{h}$, alors d'après 4.5 et 4.7 elles sont conjuguées par un élément de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ qui stabilise $\mathfrak{h}$ et commute à σ' ; d'où b).

Si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ sont des S.A.C. maximalement compactes pour σ' stabilisées par ω' qui commute à σ' , alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ sont des S.A.C. maximalement fixées par l'involution $\sigma = \sigma'\omega'$, elles sont donc conjuguées par $g \in G^{\sigma}$ (3.5) et par $k \in K$ (4.4). Ainsi $g \in kN \subset KN$ qui est égal à KH_+ d'après la démonstration de [K-P ; prop. 5.1]. Si on écrit $g = k_1 h$ avec $k_1 \in K$ et $h \in H_+$, alors $g = \sigma(g) = \sigma(k_1)\,\sigma(h)$ avec $\sigma(k_1) \in K$ et $\sigma(h) \in H_+$, d'après l'unicité dans la décomposition d'Iwasawa on a $\sigma(k_1) = k_1$ et $k_1 \in K^{\sigma}$. L'algèbre $\mathfrak{h}_1$ est conjuguée de $\mathfrak{h}$ par k_1 qui commute à ω' et σ donc à σ' ; d'où c). □

<u>*Théorème 4.10*</u> :

On considère :

1) Les involutions de première espèce σ de $\mathfrak{g}$.

2) Les couples $(\sigma',\mathfrak{h})$ formés d'une semi-involution de seconde espèce et d'une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte.

3) La relation $(\sigma',\mathfrak{h}) \sim \sigma$ si et seulement si σ commute à σ' , stabilise $\mathfrak{h}$ et $\sigma\sigma'$ est une semi-involution de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Cette relation induit une bijection entre les classes de conjugaison sous $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (ou $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$) des involutions de première espèce et des couples $(\sigma',\mathfrak{h})$.

<u>Démonstration</u> :

1) A $(\sigma',\mathfrak{h})$ doit correspondre une σ unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$ commutant à σ' et stabilisant $\mathfrak{h}$; mais se donner σ revient à se donner $\omega' = \sigma\sigma'$ et cela résulte donc de 4.9.b).

2) A σ doit correspondre un couple $(\sigma',\mathfrak{h})$ unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$ commutant à σ près. La S.A.C. $\mathfrak{h}$ doit être maximalement fixée par σ ; d'après 3.9, il en existe et elles sont toutes conjuguées par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\sigma}$. Fixons donc $\mathfrak{h}$ et une base $\Pi = \{\alpha_i / i \in I\}$ stabilisée par σ . Choisissons des générateurs (e_i,f_i) $i \in I$ de $\mathfrak{g}$ qui soient permutés par σ . La semi-involution de Cartan correspondante ω' commute à σ dans $\mathfrak{g}'$, donc dans $\mathfrak{g}$ puisque ω' et σ sont dans $\mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$; il suffit alors de choisir $\sigma' = \sigma\omega'$. Deux choix pour σ' correspondent à deux choix

pour ω' . Mais alors ω_1' et ω_2' stabilisent $\mathfrak{h}$ et commutent à σ ; ils sont donc conjugués par un $\varphi \in \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ qui commute à σ et stabilise $\mathfrak{h}$ (4.5 et 4.7) ; d'où le résultat annoncé. □

4.11.- Conclusion : classification :

La classification des involutions de première espèce des algèbres affines décrite dans [B] ou [B-R] fournit donc une classification, à conjugaison près, des couples formés d'une forme réelle presque compacte de $\mathfrak{g}$ et d'une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte. De plus, d'après 3.6, cette classification est la même pour $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

Plus précisément : la classification à conjugaison par des automorphismes quelconques (resp. de première espèce, ou dans $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$) près des involutions de première espèce fournit la classification des couples constitués d'une forme presque compacte et d'une sous-algèbre de Cartan maximalement compacte de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ à conjugaison près par des automorphismes quelconques (resp. de première espèce ou intérieurs) de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$. Cependant dans le cas de $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, ce résultat n'est vrai que pour des semi-involutions dans $\mathrm{Aut}^f_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$; si on considère toutes les semi-involutions de seconde espèce i. e. toutes les formes presque compactes, il faut les conjuguer par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Tr}$.

4.12.- Problème :

La classification des formes réelles presque compactes n'est pas achevée. Elle le serait si on apportait une réponse positive à la question suivante :

Deux sous-algèbres de Cartan maximalement compactes d'une forme réelle presque compacte $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ sont-elles conjuguées par le groupe correspondant $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$?

D'après 4.9 cette question équivaut à celle de la conjugaison des sous-algèbres compactes maximales de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ou de la conjugaison des semi-involutions de Cartan commutant à σ' .

Pour une réponse positive, il suffirait de démontrer 4.5 avec σ' de Cartan, mais sans hypothèse sur l'existence de $\mathfrak{h}$. Car malheureusement, étant donné deux S.I.C. σ' et ω' , il n'existe pas toujours de S.A.C. $\mathfrak{h}$ stable par σ' et ω' . Autrement dit il n'y a pas de décomposition de Cartan $G = KHK$ contrairement au cas classique de dimension finie. En fait, on peut exhiber facilement pour $\mathfrak{g}$ de type $A_1^{(1)}$, en travaillant dans $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c} = s\ell_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, deux S.I.C. σ' et ω' telles que $\sigma'\omega'$ ne soit pas diagonalisable (cf. la démonstration de 4.5).

BIBLIOGRAPHIE

[B] J. BAUSCH, Etude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines. Thèse de l'Université Nancy I, septembre 1985, ce volume pages 5 à 124.

[B'] J. BAUSCH, Automorphismes des algèbres de Kac-Moody affines. Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 302 (1986), pp. 409-412.

[B-R] J. BAUSCH et G. ROUSSEAU, Involutions de première espèce des algèbres affines. Ce volume pages 125 à 139.

[Be] S. BERMAN, Real forms of universal Kac-Moody Lie algebras. Algebras, groups and geometries, 2 (1985), pp. 10-25.

[B-M] A. BOREL et G.D. MOSTOW, On semi-simple automorphisms of Lie algebras. Ann. of Math. 61 (1955), pp. 389-405.

[BBK] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 1 à 9.

[B-T] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes réductifs sur un corps local : I données radicielles valuées. Pub. Math. I.H.E.S., 41 (1972), pp. 5-251.

[B-T_2] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes algébriques sur un corps local : III compléments et applications à la cohomologie galoisienne. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA, 34 (1987), pp. 671-698.

[G-W] R. GOODMAN et N.R. WALLACH, Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle. J. für Math. 347 (1984), pp. 69-133.

[H] S. HELGASON, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. Academic Press, New York, (1978).

[K] V.G. KAC, Infinite dimensional Lie algebras. Progress in Math. n° 44, Birkhäuser, Boston, (1983), Second Edition : Cambridge University Press, (1985).

[K-P] V.G. KAC et D.H. PETERSON, Defining relations of certain infinite dimensional groups.
Astérisque hors série (1985), pp. 165-208.

[L] F. LEVSTEIN, A classification of involutive automorphisms of an affine Kac-Moody Lie algebra.
Thèse M.I.T. (juin 1983), J. of Algebra 114 (1988), pp. 489-518.

[M] G.D. MOSTOW, Fully reducible subgroups of algebraic groups.
Amer. J. of Math. 78 (1956), pp. 200-221.

[P-K] D.H. PETERSON et V.G. KAC, Infinite flag varieties and conjugacy theorems.
Proc. Natl. Acad. Sci. 80 (1983), pp. 1778-1782.

[R1] G. ROUSSEAU, Espaces affines symétriques et algèbres de Lie affines.
Ce volume pages 141 à 174.

[R3] G. ROUSSEAU, Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines.
Actes du symposium international sur l'analyse harmonique, Luxembourg, (septembre 1987), Lecture Note in Math. 1359, Springer, 1988.

NOTES SUR EPREUVES :

Le fait que, sur $\mathfrak{g}'$, toute semi-involution de seconde espèce s'écrive sous la forme $\sigma' = \sigma\omega'$ où σ est une involution de première espèce et ω' une semi-involution de Cartan qui commutent entre elles et stabilisent une même sous-algèbre de Cartan est démontré, avec quelques autres des résultats précédents et sans se restreindre aux algèbres affines, par Kac et Peterson [K-P2] dans la version écrite des actes de la conférence d'Utrecht sur les groupes algébriques (avril 1986).

1) Dans [Be-P] Berman et Pianzola obtiennent des présentations par générateurs et relations de certaines formes réelles des algèbres de Kac-Moody, qui, d'après le présent article et les notes ci-dessous, comprennent, à conjugaison près, toutes les formes presque compactes des algèbres de Kac-Moody symétrisables.

2) Des résultats récents d'Olivier Mathieu [Ma] généralisant en particulier [K ; 9.11] permettent d'éliminer l'hypothèse symétrisable sauf quand la forme invariante apparaît explicitement et sauf à partir du numéro 4.5.

3) La construction de l'immeuble de $\mathfrak{g}$ dans le cas général est faite dans [R4] ; on pourra aussi se référer à des travaux en cours de Ronan et Tits (cf. cours de Tits au Collège de France en 1989 ou [Ti]).

4) La considération des résultats de [K-P2] (essentiellement le théorème $\widetilde{1}$) au lieu du théorème de point fixe dans les immeubles affines, permet d'éliminer l'hypothèse $\mathfrak{g}$ "affine" là où elle est faite à la fin des paragraphes 3 et 4. Il faut cependant modifier quelques énoncés du paragraphe 4 : essentiellement 4.7.a, 4.8.2 et 4.11 ; en particulier la classification des semi-involutions n'est actuellement connue que dans le cas affine [B].

5) L'étude (à la Borel-Tits) des formes presque déployées est abordée dans [R4].

[Be-P] S. BERMAN et A. PIANZOLA, Generators and relations for real forms of some Kac-Moody Lie algebras.
Comm. In Algebra 15 (1987), pp. 935-959.

[K-P2] V.G. KAC et D.H. PETERSON, On geometric invariant theory for infinite dimensional groups.
In Lecture Note in Math. 1271, Springer 1987.

[Ma] O. MATHIEU, Simplicity of general Kac-Moody Lie algebras.
Preprint, M.S.R.I., juin 1988.

[R4] G. ROUSSEAU, Almost split K-forms of Kac-Moody algebras.
A paraître.

[Ti] J. TITS, Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody.
Séminaire Bourbaki, novembre 1988.

P. S. : Mathieu indique qu'il subsiste encore un trou dans sa démonstration de la simplicité des algèbres de Kac-Moody non symétrisables ; il vaut donc mieux supposer $\mathfrak{g}$ symétrisable dans tout cet article.