

ESPACES AFFINES SYMÉTRIQUES ET ALGÈBRES DE LIE AFFINES

par Guy ROUSSEAU

Ce travail a pour origine des exposés de l'auteur au Séminaire Nancy-Strasbourg 1981 d'analyse harmonique sur les groupes de Lie et au Colloque organisé au Kleebach en juin 1981 ; il s'agissait d'exposer et clarifier la classification locale des espaces affines symétriques par Marcel BERGER [Ber]. La matière a été reprise et développée par Samir KABBAJ dans sa thèse [Ka] en 1986 sans encore introduire d'algèbres infinies. Le présent article expose les grands traits de ces résultats en indiquant le rapport qu'ils ont avec les involutions des algèbres affines ; ceci permet de raccourcir quelques démonstrations et d'expliquer quelques constatations.

La classification locale des espaces affines symétriques a été refaite par HELMINCK [He] ; sa méthode utilise la comparaison d'une forme réelle d'algèbre simple complexe à la forme normale (et non à la forme compacte comme ici), elle permet d'obtenir un certain nombre de résultats complémentaires.

Le premier paragraphe rappelle la théorie classique des espaces affines symétriques et indique les principes de leur classification locale par BERGER ; il montre qu'il suffit de classer les triplets $(\hat{\mathfrak{g}}, \tau, \sigma)$ formés d'une algèbre simple complexe $\hat{\mathfrak{g}}$ et de deux involutions σ et τ de $\hat{\mathfrak{g}}$ commutant entre elles. Le second paragraphe indique la classification des automorphismes d'ordre fini des algèbres réductives complexes et leur lien avec les algèbres affines, comme dans [K] mais par un procédé plus terre à terre, analogue à celui de [B]. Enfin le troisième paragraphe indique le lien entre le triplet $(\hat{\mathfrak{g}}, \tau, \sigma)$ et une involution de l'algèbre affine associée à $(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$.

On note λ le nombre complexe $\sqrt{-1}$.

§ 1.- Les espaces affines symétriques :

Les définitions et idées sont extraites de [Ber], [O-S] ou [Ka] ; c'est là ou dans [H] que l'on recherchera les quelques démonstrations manquantes. Certains passages sont inspirés d'exposés de G. SCHIFFMANN au Séminaire Nancy-Strasbourg 1981.

1.1.- Définitions :

Un espace affine symétrique est un quotient G/S d'un groupe semi-simple réel G par un sous-groupe fermé S tel que pour une certaine involution (non triviale) σ de G on ait : $(G^\sigma)^0 \subset S \subset G^\sigma$ si $(G^\sigma)^0$ est la composante connexe du groupe de points fixes G^σ .

On va en fait étudier les espaces affines symétriques de manière infinitésimale en considérant le quotient $\mathfrak{g}_\mathbb{R}/\mathfrak{s}$ des algèbres de Lie correspondantes ou plutôt le couple $(\mathfrak{g}_\mathbb{R}, \sigma)$ formé d'une algèbre de Lie réelle semi-simple $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ et d'une involution non triviale σ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$. Un tel couple sera appelé un espace local symétrique (en abrégé ELS).

Pour classifier ces ELS, on va se placer dans l'algèbre de Lie complexifiée $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$ qui est semi-simple complexe et commencer par comparer $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ à une "forme compacte".

1.2.- Semi-involutions :

La conjugaison complexe de $\hat{\mathfrak{g}}$ par rapport à $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est une semi-involution de $\hat{\mathfrak{g}}$, c'est-à-dire un automorphisme semi-linéaire d'ordre 2. Réciproquement l'algèbre des points fixes d'une semi-involution est une forme réelle de $\hat{\mathfrak{g}}$. Il y a donc bijection entre les semi-involutions et les formes réelles.

Une forme réelle \mathfrak{u} de $\hat{\mathfrak{g}}$ (ou la semi-involution ω' correspondante) est dite compacte si et seulement si la restriction de la forme de Killing à cette forme réelle est définie négative. On sait que deux semi-involutions compactes ω'_1 et ω'_2 qui commutent sont égales (il suffit de regarder le signe de la forme de Killing sur $\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{u}_2$ et $\mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{u}_2$).

Proposition 1.3 :

Soient $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et, τ'_1, \dots, τ'_n des semi-involutions commutant entre elles de $\hat{\mathfrak{g}}$. Il existe une semi-involution compacte ω' de $\hat{\mathfrak{g}}$ qui commute à τ'_1, \dots, τ'_n . De plus ω' est unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur ψ de $\hat{\mathfrak{g}}$ commutant à τ'_1, \dots, τ'_n .

Idée de la démonstration :

L'existence se démontre par récurrence sur n : le cas $n = 0$ est connu et la récurrence se calque sur la démonstration de [H ; III 7.1]. Soit ω' une semi-involution compacte qui commute à $\tau'_1, \dots, \tau'_{n-1}$. Alors $N = \tau'_n \omega'$ est un automorphisme autoadjoint pour la forme hermitienne définie positive $B_{\omega'}(X, Y) = -B(X, \omega'Y)$ associée à ω' . On montre alors que $\varphi = (N^2)^{1/4}$ est un automorphisme intérieur de $\hat{\mathfrak{g}}$ qui conjugue ω' en une semi-involution (forcément compacte) ω'_1 commutant à τ'_n . Comme φ commute par construction avec $\tau'_1, \dots, \tau'_{n-1}$, la semi-involution ω'_1 commute à τ'_1, \dots, τ'_n .

Si ω'_1 et ω'_2 sont deux solutions du problème, on prend l'automorphisme intérieur $\psi = ((\omega'_1 \omega'_2)^2)^{1/4}$ qui commute à τ'_1, \dots, τ'_n . Alors $\psi \omega'_2 \psi^{-1}$ commute à ω'_1 , donc lui est égale. \square

1.4.- Premières conséquences de la proposition (pour $n = 0, 1$) :

Deux semi-involutions compactes ou deux formes compactes sont conjuguées par un automorphisme intérieur.

Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de semi-involution τ' et si ω' est une semi-involution compacte commutant à τ' , on note τ et on appelle involution de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ la restriction de ω' (ou de $\tau' \omega'$) à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Si \mathfrak{k} (resp. \mathfrak{p}) est l'espace propre de τ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ correspondant à la valeur propre 1 (resp. -1), on a la décomposition de Cartan $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et \mathfrak{k} est une sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. L'espace vectoriel \mathfrak{p} est l'orthogonal de \mathfrak{k} dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ pour la forme de Killing, donc \mathfrak{k} détermine τ (et ω'). La forme compacte correspondant à ω' est $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$.

Deux sous-algèbres compactes maximales ou deux involutions de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont conjuguées par un automorphisme commutant à τ' .

Proposition 1.5 :

Soient $\hat{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et τ_1, \dots, τ_n des involutions (automorphismes linéaires d'ordre un ou deux) commutant entre elles de $\hat{\mathfrak{g}}$. Il existe une semi-involution compacte ω' qui commute à τ_1, \dots, τ_n . De plus ω' est unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur ψ de $\hat{\mathfrak{g}}$ commutant à τ_1, \dots, τ_n .

Idée de la démonstration :

Soient $\hat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{g}}$ considérée comme algèbre de Lie réelle et $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} = \hat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}$. On note τ'_0 la conjugaison de $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ sur $\hat{\mathfrak{g}}$ et τ'_1, \dots, τ'_n les prolongements semi-linéaires à $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ de τ_1, \dots, τ_n . Ainsi 1.5 résulte de 1.3 car les semi-involutions compactes de $\hat{\mathfrak{g}}$ sont les involutions de Cartan de $\hat{\mathfrak{g}}$, c'est-à-dire les restrictions des semi-involutions compactes de $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ commutant à τ'_0 . \square

Corollaire 1.6 :

Les classes de conjugaison, à automorphisme intérieur (resp. quelconque) de $\hat{\mathfrak{g}}$ près, de n -uplets $(\tau'_1, \dots, \tau'_n)$ de semi-involutions commutant entre elles de $\hat{\mathfrak{g}}$, correspondent bijectivement aux classes de conjugaison, à automorphisme intérieur (resp. quelconque) de $\hat{\mathfrak{g}}$ près, de n -uplets (τ_1, \dots, τ_n) d'involutions commutant entre elles de $\hat{\mathfrak{g}}$ par l'application $\tau'_1 \mapsto \tau_1 = \tau'_1 \omega'$ où ω' est une semi-involution compacte de $\hat{\mathfrak{g}}$ commutant à τ'_1, \dots, τ'_n .

1.7.- Classification des algèbres semi-simples réelles :

D'après 1.6 cette classification revient à celle des paires $(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ formées d'une algèbre semi-simple complexe et d'une involution. En décomposant $\hat{\mathfrak{g}}$ en algèbres simples on voit que toute algèbre semi-simple réelle est somme directe d'algèbres simples qui sont de trois sortes :

a) $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}}_1 \oplus \hat{\mathfrak{g}}_2$ où $\hat{\mathfrak{g}}_1$ est simple complexe et τ permute les facteurs ; alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est l'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}$ égale à $\hat{\mathfrak{g}}_1$ considérée comme algèbre réelle, on dit que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est pseudocomplexe.

b) $\hat{\mathfrak{g}}$ est simple et $\tau = \text{Id}$; alors $\tau' = \omega'$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est compacte.

c) $\hat{\mathfrak{g}}$ est simple et τ d'ordre 2 ; alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est absolument simple non compacte ; la classification de ces algèbres découle donc du paragraphe 2, particulièrement 2.11.

1.8.- Retour aux espaces locaux symétriques :

On considère une algèbre semi-simple réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et une involution non triviale σ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On note τ' la conjugaison de $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ par rapport à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et σ' le prolongement semi-linéaire de σ à $\hat{\mathfrak{g}}$. Comme les semi-involutions σ' et τ' commutent, il existe une semi-involution compacte ω'

de \hat{g} qui commute à σ' et τ' . Ainsi la restriction τ de ω' à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ commutant à σ .

L'ELS associé de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ est l'ELS $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^a, \sigma^a)$ où $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^a = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et $\sigma^a = \sigma\tau$; on a $(\sigma^a)^a = \sigma$.

On note $\tau = \tau'\omega'$ et $\sigma = \sigma'\tau'$; ce sont donc deux involutions de \hat{g} qui commutent entre elles et à ω' ; l'involution σ (resp. τ) est \mathbb{C} -linéaire et induit sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ l'involution de même nom. D'après 1.6 la classification des ELS $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ revient à la classification des tripiets $(\hat{g}, \tau', \sigma')$ ou (\hat{g}, τ, σ) ; on n'a cependant pas $\sigma = \sigma'\omega'$ comme dans les notations de 1.6 mais $\sigma = \sigma'\tau'$, $\tau = \tau'\omega'$ et $\tau\sigma = \sigma'\omega'$.

L'associé de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ correspond à $(\hat{g}, \tau', \sigma'\tau)$ ou dans la seconde description à $(\hat{g}, \tau, \sigma\tau)$.

L'ELS $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ admet un ELS dual $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^d, \sigma^d)$ correspondant à (\hat{g}, σ, τ) ou à $(\hat{g}, \sigma\omega', \sigma')$. Si la décomposition de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ en espaces propres de σ est $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{q}$, la décomposition de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^d$ en espaces propres de σ^d (qui est la restriction de τ) est $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^d = \mathfrak{s}^d \oplus \mathfrak{q}^d$ où $\mathfrak{s}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{i}(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})$ et $\mathfrak{q}^d = \mathfrak{i}(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{s}) + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$. L'involution σ induit sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^d$ l'involution de Cartan. L'ELS bidual de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ lui est isomorphe.

Si l'algèbre $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est compacte ou si σ est une involution de Cartan, alors l'ELS $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ est dit riemanien et la classification en est connue: cf. [H]; c'est en fait une conséquence de la classification de 2.11 ci-après.

1.9.- Début de la classification des espaces locaux symétriques :

On décrira les ELS soit sous la forme $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ soit sous la forme (\hat{g}, τ, σ) .

En décomposant $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ en somme directe d'algèbres simples on voit que l'ELS $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \sigma)$ est somme directe d'ELS irréductibles. On va considérer ceux-ci maintenant en éliminant successivement des cas particuliers.

1er cas particulier : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1 \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1$ avec $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1$ simple et $\sigma(X, Y) = (Y, X)$. C'est le cas bien connu de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1 \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1) / (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1 \text{ diagonal})$. Si l'algèbre $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1$ est compacte, on retrouve les ELS riemaniens (compacts) de type II. Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^1$ est non compacte et pseudocomplexe (resp. absolument simple) on dira que l'ELS est de type II' (resp. II''). La classification des ELS de type II ou II' (resp. II'') est équivalente à celle des algèbres simples complexes (resp. des algèbres réelles absolument simples non compactes, cf. 1.7 et 2.11).

On est maintenant réduit au cas où $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est simple.

2ème cas particulier : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est compacte donc $\tau = \text{Id}$ et σ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On trouve un ELS riemanien compact de type I dont la classification équivaut à celle des algèbres absolument simples réelles non compactes : [H].

3ème cas particulier : σ' est une semi-involution compacte, elle est donc égale à ω' et $\sigma = \tau$ est une involution de Cartan. On obtient un ELS riemanien non compact irréductible. Cet ELS est donc de type IV ou III dont la classification équivaut, respectivement, à celle des algèbres simples complexes ou à celle des algèbres absolument simples réelles non compactes : [H].

Après élimination de ces trois cas particuliers, on peut supposer que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est simple non compacte et que σ et τ sont des involutions distinctes, non triviales. La sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\tau}$ correspondant à ω' est stable par toutes ces applications; on note ρ la restriction de σ à \mathfrak{k} .

Lemme :

ρ est une involution non triviale.

Démonstration [Ber ; 11.1] :

Si ρ est triviale, on montre facilement, avec les notations de 1.8 que $[\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}, \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}] + \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ est un idéal de l'algèbre simple $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Selon que cet idéal est 0 ou $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ on trouve $\sigma = \text{Id}$ ou $\sigma = \tau$. \square

4ème cas particulier : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est pseudo-complexe, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \hat{\mathfrak{g}}_1$ où \mathfrak{g}_1 est une algèbre simple complexe. Comme τ est une involution de Cartan de $\hat{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\tau} = \mathfrak{g}_{1, u}$ forme compacte de \mathfrak{g}_1 et τ est la conjugaison complexe de \mathfrak{g}_1 sur $\mathfrak{g}_{1, u}$. Mais σ commute à τ et prolonge ρ qui est une involution de Cartan de $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{1, u}$, donc σ est le prolongement \mathbb{C} -linéaire σ_1 ou \mathbb{C} -semi-linéaire $\sigma_2 = \sigma_1\tau$ de ρ à $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{1, u} \oplus \mathbb{C}$. On a donc deux ELS associés possibles :

(i) $\sigma = \sigma_1$: alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ est le complexifié de $(\mathfrak{g}_{1, u})^{\sigma}$ et l'ELS $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ est le complexifié $\mathfrak{g}_{1, u} \otimes \mathbb{C} / \mathfrak{g}_{1, u} \otimes \mathbb{C}$ de l'ELS riemanien compact (de type I) $\mathfrak{g}_{1, u} / \mathfrak{g}_{1, u}^{\sigma}$. Un tel ELS sera dit de type V, la classification de ceux-ci équivaut à la classification des algèbres absolument simples réelles non compactes. On peut noter que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ est aussi le complexifié d'un ELS riemanien non compact de type III (qualifié classiquement de "dual", sans que cette notion ait de rapport avec celle de 1.8).

(ii) $\sigma = \sigma_2$: alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ est la forme réelle non compacte de \mathfrak{g}_1 correspondant à l'involution ρ de $\mathfrak{g}_{1,u} : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}/\mathfrak{g}_{1,u}^{\rho}$ est l'ELS riemannien "dual" (au sens classique) de $\mathfrak{g}_{1,u}/\mathfrak{g}_{1,u}^{\rho}$. L'ELS obtenu est de la forme $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma} \otimes \mathbb{C}}/\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ où $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ est une algèbre absolument simple réelle non compacte. De tels ELS seront dits de type IV' ; leur classification équivaut à celle des algèbres absolument simples réelles non compactes.

Cas général : On peut donc maintenant supposer que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une algèbre de Lie absolument simple réelle non compacte et que σ est une involution non triviale et non de Cartan. Autrement dit \mathfrak{g} est une algèbre simple complexe et (τ, σ) est un couple d'involutions distinctes, non triviales et commutant entre elles de \mathfrak{g} .

Un tel ELS sera dit de type VI. Il est clair que son associé et son dual sont encore de type VI.

1.10.- Principes de classification des espaces locaux symétriques de type VI :

On se donne donc $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ absolument simple non compacte et on cherche les involutions σ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ qui ne sont ni triviales ni de Cartan. On peut supposer que σ commute à une involution de Cartan donnée τ . On trouve ces involutions par paires σ et $\sigma\tau$ correspondant à des ELS associés. On pose $\rho = \sigma|_k$ où $k = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\tau}$.

Comme τ est déterminé à conjugaison près par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, l'espace symétrique compact (k, ρ) est déterminé à conjugaison près par un automorphisme intérieur de k . De même si σ_1 et σ_2 se correspondent par un automorphisme intérieur (resp. extérieur) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, les espaces symétriques compacts (k, ρ_1) et (k, ρ_2) correspondants sont déterminés à conjugaison près par un automorphisme intérieur de k (resp. un automorphisme extérieur de k prolongeable en un automorphisme extérieur de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (ou de la forme compacte $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{g}^{\sigma\tau}$)).

On a la réciproque (voir 1.11) :

Proposition [Ber ; 15.2] :

Soient σ_1 et σ_2 deux involutions de \mathfrak{g} commutant à τ , si les deux restrictions ρ_1 et ρ_2 de σ_1 et σ_2 à $k \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^{\tau}$ se correspondent par un automorphisme intérieur de $k \otimes \mathbb{C}$ (resp. un automorphisme extérieur de $k \otimes \mathbb{C}$ se prolongeant à \mathfrak{g}) ; alors σ_1 et σ_2 ou σ_1 et $\sigma_2\tau$ se correspondent par un automorphisme intérieur (resp. extérieur) de \mathfrak{g} commutant à τ .

Autrement dit : on sait classiquement que l'espace symétrique compact \mathfrak{g}_u/k détermine $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, on sait maintenant que l'espace symétrique compact $k/1$ (où $1 = k^{\rho}$) détermine σ à l'association près.

On a cependant trois problèmes :

a) Des espaces symétriques $k/1$ isomorphes par un automorphisme extérieur de k non prolongeable à \mathfrak{g}_u :

Berger prétend [Ber ; § 16] que son étude cas par cas prouve l'impossibilité de ce cas. C'est cependant faux pour (au moins ?) trois exemples d'algèbres $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$: $\mathfrak{su}(2,8)$, $\mathfrak{so}(8,8)$ et $\mathfrak{sl}(8, \mathbb{R})$.

Ainsi si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(8,8)$, $k = \mathfrak{su}(8) + \mathfrak{su}(8)$ et $1 = (\mathfrak{su}(4)+\mathfrak{t}) + (\mathfrak{su}(4)+\mathfrak{t}) = \mathfrak{su}(6) + \mathfrak{su}(6) + \mathfrak{su}(2) + \mathfrak{su}(2)$. On trouve trois ELS non isomorphes avec pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$: $\mathfrak{su}(4,4) + \mathfrak{t}$ (isomorphe à son associé), $\mathfrak{su}(6,6) + \mathfrak{su}(2,2)$ associé de $\mathfrak{su}(6,2) + \mathfrak{su}(6,2)$ qui figurent d'ailleurs tous trois dans la liste de Berger (page 126) comme cas particulier de séries générales.

b) Chercher des triplets $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, k, 1)$ correspondant à des ELS :

Berger procède cas par cas après avoir réduit fortement les possibilités grâce à la condition nécessaire suivante :

Soient $s_u/1$ et $s'_u/1$ les deux espaces riemanniens symétriques compacts "duals" des espaces riemanniens symétriques non compacts $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}/1$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\tau\sigma}/1$, on a alors les relations suivantes :

\mathfrak{g}_u/s_u , \mathfrak{g}_u/s'_u , $s_u/1$ et $s'_u/1$ sont des espaces riemanniens symétriques compacts et $\dim(s_u) + \dim(s'_u) = \dim(\mathfrak{g}_u) - \dim(k) + 2 \dim(1)$.

c) Décider si deux ELS associés sont isomorphes :

On procède cas par cas.

1.11.- Programme :

Nous allons au paragraphe trois indiquer le principe d'une description d'un ELS $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ par rapport à une sous-algèbre de Cartan et une base de Chevalley. Cette description améliore la solution des problèmes a) et b) de 1.10 et permet de donner une démonstration plus satisfaisante de la proposition de Berger citée en 1.10.

Nous allons d'abord, au paragraphe deux, établir le lien entre les algèbres réelles, c'est-à-dire les involutions des algèbres complexes et les algèbres de Kac-Moody affines ; ceci permettra d'obtenir une classification des algèbres réelles à automorphisme intérieur près (ce qui est important au vu du problème a) de 1.10).

§ 2.- Algèbres (réductives-) affines et classification des automorphismes d'ordre fini des algèbres réductives :

On considère une algèbre de Lie réductive complexe \mathfrak{g} et un automorphisme τ d'ordre fini divisant m .

2.1.- La sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} :

On sait d'après [B-M ; 4.5] que τ fixe un élément régulier H de \mathfrak{g} ; on note \mathfrak{h} le centralisateur dans \mathfrak{g} de H qui est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Le système de racines Δ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est stable par τ et possède un système de racines positives Δ_+ (égal à l'ensemble des racines α telles que $\alpha(H) > 0$ pour l'ordre lexicographique sur \mathbb{C}) et donc une base $\tilde{\pi}$ stable par τ . On sait d'ailleurs que les sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} possédant de telles bases sont conjuguées par $\text{Int}(\mathfrak{g})^\tau$ (voir par exemple [R2 ; 3.5] encore valable dans ce cas) ; on peut donc fixer l'algèbre de Cartan \mathfrak{h} sans nuire à la classification de τ .

Si \mathfrak{h}' est l'algèbre dérivée de \mathfrak{h} , alors \mathfrak{h} est somme directe de $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$ et du centre \mathfrak{z} .

2.2.- Le système de racines $\bar{\Delta}$:

On note $\bar{\mathfrak{h}}$ ou \mathfrak{h}_τ l'espace \mathfrak{h}^τ , $\bar{\mathfrak{h}}' = \bar{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{h}'$ et $\bar{\alpha}$ ou $\bar{\alpha}$ la restriction à $\bar{\mathfrak{h}}$ de $\alpha \in \Delta$. On sait que $\bar{\Delta} = \{\bar{\alpha}/\alpha \in \Delta\}$ est un système de racines (éventuellement non réduit) et que le centralisateur de $\bar{\mathfrak{h}}$ dans \mathfrak{g} est \mathfrak{h} .

Soient n le rang semi-simple de \mathfrak{g} , $\bar{I} = \{1, \dots, n\}$ et $\tilde{\pi}$ une base de $\bar{\Delta}$ stable par τ . On numérote $\tilde{\pi}$ par \bar{I} , c'est-à-dire que $\tilde{\pi} = \{\alpha_i / i \in \bar{I}\}$ et on note \bar{p}_i , $i \in \bar{I}$ la base duale de $\tilde{\pi}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}$. L'automorphisme τ induit donc une permutation notée f d'ordre k ($= 1, 2$ ou 3 si \mathfrak{g} est simple) de $\bar{\Delta}$, de $\tilde{\pi}$ et donc de \bar{I} . On choisit la numérotation de $\tilde{\pi}$ de manière que $\bar{I} = \{1, \dots, k\}$ soit un système de représentants des orbites de f dans \bar{I} . Alors $\bar{\pi} = \{\bar{\alpha}_i / i \in \bar{I}\}$ est une base de $\bar{\Delta}$, dont la base duale dans $\bar{\mathfrak{h}}$ est formée des \bar{p}_i , $i \in \bar{I}$, où \bar{p}_i est la moyenne des \bar{p}_j pour j dans l'orbite de i sous f .

Attention : \bar{p}_i est noté \dot{p}_i dans [B] et les présentes notations diffèrent notablement de celles de [K].

2.3.- Le système de racines $\tilde{\Delta}$:

Pour $\alpha \in \Delta$, on note $\tilde{\alpha} = \lambda n_\alpha \bar{\alpha}$ où n_α est le cardinal de l'orbite de α sous f , et où λ vaut 1 sauf si $\frac{\alpha}{2} \in \Delta$ auquel cas $\lambda = 2$.

On démontre (en se ramenant à un nombre limité de constatations cas par cas comme dans [B ; V 2.2 ou A 1.4]), que $\tilde{\Delta} = \{\tilde{\alpha}/\alpha \in \Delta\}$ est un système de racines. Sa base est l'ensemble $\tilde{\pi}$ des $\tilde{\gamma}_i = \tilde{\alpha}_i = n_i \bar{\alpha}_i$ pour $i \in \bar{I}$ où $n_i = n_{\alpha_i}$. La base duale de $\tilde{\pi}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}$ est formée des éléments $\frac{1}{n_i} \bar{p}_i$ pour $i \in \bar{I}$.

2.4.- L'automorphisme de diagramme ξ :

Choisissons pour $i \in \bar{I}$ un générateur \dot{e}_i de \mathfrak{g}_{α_i} ; on obtient ainsi un épinglage $(\dot{\pi}; \dot{e}_i, i \in \bar{I})$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (on dira aussi que $(\mathfrak{h}; \dot{\pi}; \dot{e}_i, i \in \bar{I})$ est un épinglage de \mathfrak{g}) et une base de Chevalley $(\dot{e}_\alpha, \alpha \in \Delta)$ de \mathfrak{g} , cf. [BBK ; VIII § 4] ; par définition on a $\dot{e}_\alpha = \dot{e}_i$ et on note $\dot{f}_i = \dot{e}_{-\alpha_i}$, les autres \dot{e}_α sont déterminés au signe près. L'involution de Cartan (ou de Chevalley) $\dot{\omega}$ est telle que $\dot{\omega}|_{\mathfrak{h}} = -\text{Id}$ et $\dot{\omega}(\dot{e}_\alpha) = -\dot{e}_{-\alpha}$. Dans le cas semi-simple on a aussi une semi-involution de Cartan $\dot{\omega}'$ qui vérifie les mêmes propriétés sauf $\dot{\omega}'|_{\mathfrak{h}_\mathbb{R}} = -\text{Id}$ si $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \bigoplus \mathbb{R} \dot{p}_i$.

L'automorphisme ξ de \mathfrak{h} et de Δ détermine un automorphisme dit de diagramme, encore noté ξ , de \mathfrak{g}' par les formules :

$$\xi(\dot{p}_i) = \dot{p}_{\xi i}, \quad \xi(\dot{e}_i) = \dot{e}_{\xi i} \quad \text{et} \quad \xi(\dot{f}_i) = \dot{f}_{\xi i}.$$

On pose $\xi|_{\mathfrak{z}} = \tau|_{\mathfrak{z}}$; l'automorphisme ξ est alors défini sur \mathfrak{g} et vérifie $\xi|_{\mathfrak{h}} = \tau|_{\mathfrak{h}}$ et $\xi(\dot{e}_\alpha) = \pm \dot{e}_{\xi \alpha}$ pour tout α dans Δ .

L'ordre de ξ sur \mathfrak{g} est donc l'ordre k' de τ sur \mathfrak{h} (avec $k' = k$ si \mathfrak{g} est semi-simple). Les valeurs propres de ξ sont donc ϵ_k^j , où $\epsilon_k = \exp(2\pi i/k')$ et on note \mathfrak{g}'_j l'espace propre correspondant (j est un entier modulo k').

2.5.- Le diagramme de Dynkin étendu de (π, ξ) (\mathfrak{g} simple) :

Supposons l'algèbre \mathfrak{g} simple, elle est donc munie d'une forme $(\cdot | \cdot)$ \mathbb{C} -bilinéaire symétrique invariante et non dégénérée qui est unique à une constante près.

Pour une racine $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$, on note $\mathfrak{g}'_{\bar{\alpha}}$ l'espace propre de $\bar{\mathfrak{h}}$ correspondant ;

seuls deux cas se présentent (et s'excluent si $k \neq 1$) :

1) $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$ et $\overset{\circ}{\eta}_{\tilde{\alpha}} \subset \overset{\circ}{\eta}_{\bar{\alpha}}$

2) $\tilde{\alpha} = k \cdot \bar{\alpha}$ et $\overset{\circ}{\eta}_{\tilde{\alpha}}$ rencontre $\overset{\circ}{\eta}_{\bar{\alpha}}$;

en effet ceci est clair sauf dans le cas $\frac{\bar{\alpha}}{2} \in \bar{\Delta}$ que l'on regarde directement.

Or le groupe de Weyl de $\bar{\Delta}$ agit en respectant les multiplicités des $\overset{\circ}{\eta}_{\bar{\alpha}}$ et transitivement sur les différentes catégories de racines (courtes, longues, très longues = double des racines courtes). On constate donc facilement que les racines de type 2) sont des racines courtes (ou toutes les racines dans le cas $A_{2\ell}^{(2)}$) et que si $-\gamma_0$ est la plus grande racine de $\tilde{\Delta}$ alors $\bar{\nu} = -\frac{\gamma_0}{k}$ est la plus grande racine de type 2) de $\bar{\Delta}$.

On note ν une racine de $\tilde{\Delta}$ dont la restriction est $\bar{\nu}$. Si $k = 1$, ν est tout simplement la plus grande racine $\mu = \sum \overset{\circ}{a}_i \overset{\circ}{\alpha}_i$ de $\tilde{\Delta}$. Si $k = 2$ ou 3 et $\overset{\circ}{\eta}$ non de type $A_{2\ell}$, ν est l'une des k racines de $\tilde{\Delta}$ maximales pour la relation $\varepsilon \nu \neq \nu$. Si $k = 2$ et $\overset{\circ}{\eta}$ de type $A_{2\ell}$ alors ν est la plus grande racine μ (car $\varepsilon(e_{\mu}) = -e_{\mu}$) sa restriction $\bar{\nu}$ est une racine divisible.

On note $I = \bar{I} \cup \{0\}$, $\bar{\alpha}_0 = -\bar{\nu}$ et $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_i / i \in I\}$. Ce système est contenu dans $\bar{\Delta}$ et on peut donc parler des longueurs et angles de ses racines, ce que l'on résume de la manière habituelle (rappelée ci-dessous) par un diagramme de Dynkin dit diagramme étendu de $(\overset{\circ}{\eta}, \varepsilon)$. On porte sur ce diagramme les coefficients a_i de la (plus petite) relation de dépendance linéaire des $\bar{\alpha}_i$; c'est-à-dire que $a_0 = 1$ et $\bar{\nu} = \sum_{i \in \bar{I}} a_i \bar{\alpha}_i$.

Le tableau 1 ci-dessous permet également d'indiquer les coefficients $a_{i,j} = 2 \frac{(\bar{\alpha}_i | \bar{\alpha}_j)}{(\bar{\alpha}_i | \bar{\alpha}_i)}$ $i, j \in I$ de la matrice A associée à ce diagramme étendu.

On définit également les coefficients a_i^{ν} de la plus petite relation de dépendance linéaire des $\frac{\bar{\alpha}_i}{(\bar{\alpha}_i | \bar{\alpha}_i)}$: ils se déduisent facilement des a_i et du tableau 1 ; à une constante indépendante de i près, on a $a_i^{\nu} = a_i (\bar{\alpha}_i | \bar{\alpha}_i)$.

Tableau 1

diagramme	a_{ij}	a_{ij}	$(\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i) / (\bar{\alpha}_j \bar{\alpha}_j)$	angle
$i \bullet \quad \bullet j$	0	0	?	$\pi/2$
$i \text{---} j$	-1	-1	1	$2\pi/3$
$i \text{---} \Rightarrow j$	-1	-2	2	$3\pi/4$
$i \text{---} \Rightarrow \Rightarrow j$	-1	-3	3	$5\pi/6$
$i \text{---} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow j$	-1	-4	4	π
$i \text{---} \Leftarrow j$	-2	-2	1	π

Si $k = 1$, on a $\bar{\Delta} = \tilde{\Delta}$, $\nu = \mu$ et $I = \bar{I} \cup \{0\}$; le diagramme étendu de $(\overset{\circ}{\eta}, Id)$ est donc le diagramme de Dynkin complété habituel avec les coefficients $a_0 = 1$ et $a_i = \overset{\circ}{a}_i$. On ne reproduira pas ici ce diagramme, voir [BBK ; VI].

2.6.- Tableau des diagrammes de Dynkin étendus pour $\overset{\circ}{\eta}$ simple et $k > 1$:

On indique ci-dessous dans le tableau 2 :

a) Dans la première colonne le type et le diagramme de $\tilde{\Delta}$ et l'action de ε , avec des notations évidentes. On a $k = 2$ sauf indication contraire.

b) Dans la seconde colonne le type et le diagramme complété de $\bar{\Delta}$. Les coefficients sont les \bar{a}_i tels que $\bar{\mu} = \sum_{i \in \bar{I}} \bar{a}_i \bar{\alpha}_i$ soit la plus grande racine. On affuble d'une croix (resp. d'une barre oblique) la racine $\bar{\alpha}_i$ multipliable

Tableau 2

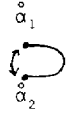
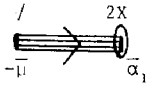
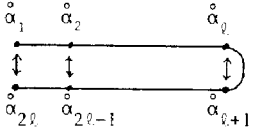
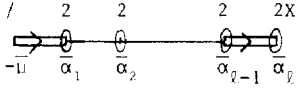
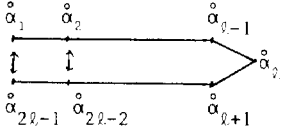
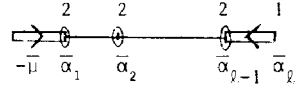
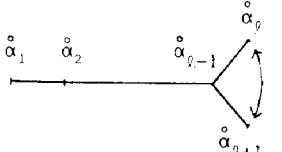
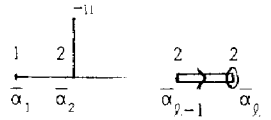
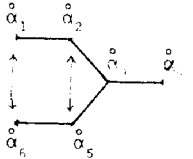
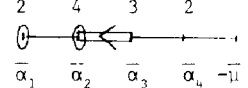
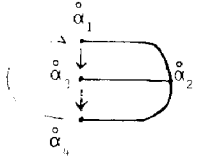
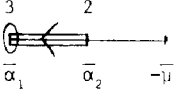
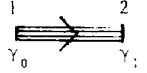
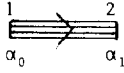
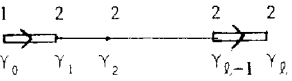
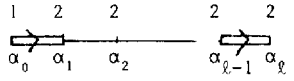
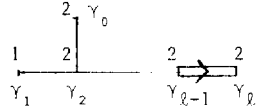
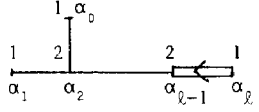
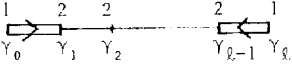
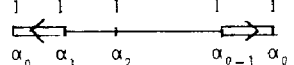
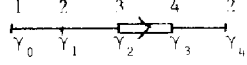
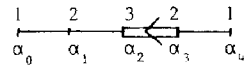
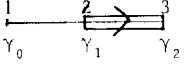
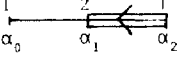
$\Delta, \bar{\Delta}$	$\bar{\Delta}$
A_2 	BC_1 
$A_{2\ell}$ $\ell \geq 2$ 	BC_ℓ 
$A_{2\ell-1}$ $\ell \geq 3$ 	C_ℓ 
$(*)$ $D_{\ell+1}$ $\ell \geq 2$ 	$(**)$ B_ℓ 
F_6 	F_4 
$(*)$ D_k $k = 3$ 	G_2 

Tableau 2 (suite)

$\tilde{\Delta}$	Δ (diagramme étendu)
BC_1 	$A_2^{(2)}$ 
BC_ℓ 	$A_{2\ell}^{(2)}$ 
B_ℓ 	$A_{2\ell-1}^{(2)}$ 
C_ℓ 	$D_{\ell+1}^{(2)}$ 
F_4 	$E_6^{(2)}$ 
G_2 	$D_4^{(1)}$ 

(resp. $-\bar{n}$ divisible) éventuelle. On entoure d'un rond les sommets du diagramme correspondant à une racine $\bar{\alpha}_1$ dans $\bar{\Delta}$ dont l'espace propre dans $\hat{\mathfrak{g}}$ est de dimension supérieure à 1, c'est-à-dire égale à k ; on a alors $\gamma_i = k \bar{\alpha}_i$ (sinon $\gamma_i = \bar{\alpha}_i$).

c) Dans la troisième colonne le type et le diagramme complété du système de racines $\tilde{\Delta}$. Les coefficients \tilde{a}_i tels que $\sum \tilde{a}_i \gamma_i = 0$ figurent sur le diagramme, on a $\tilde{a}_0 = 1$.

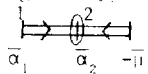
d) Dans la quatrième colonne le diagramme de Dynkin étendu de $(\hat{\mathfrak{h}}, \xi)$ avec son nom. Pour des raisons qui deviendront claires en 2.14, ce diagramme est dit aussi de Δ et la numérotation des sommets se fait en indiquant le symbole α_i (et non $\bar{\alpha}_i$). Les coefficients a_i indiqués sont tels que $\sum a_i \bar{\alpha}_i = 0$ et $a_0 = 1$. On a $k a_i = n_i \tilde{a}_i$ pour $i \in \bar{I}$, cette formule est aussi valable pour $i = 0$ si on pose $n_0 = k$ (qui est, sauf dans le cas $A_{2\ell}^{(2)}$, le cardinal de l'orbite de ν sous ξ).

La numérotation respecte la convention de 2.2. Pour $\hat{\Delta}$ et $\bar{\Delta}$ elle coïncide avec celle de Bourbaki [BBK ; VI] et de Kac [K] sauf pour E_6 . Pour le diagramme étendu elle coïncide avec celle de Kac [K] sauf dans le cas de $A_{2\ell}$.

Remarques relatives au tableau 2 :

(*) Pour $\hat{\mathfrak{g}}$ de type D_n , il y a trois choix possibles pour une involution ξ de $\hat{\mathfrak{h}}$ et deux choix pour un automorphisme τ d'ordre 3 de $\hat{\mathfrak{h}}$. Ces choix sont conjugués par automorphisme extérieur, mais pas par automorphisme intérieur.

(**) Pour $\hat{\mathfrak{g}}$ de type $D_3 (= A_3)$, $\bar{\Delta}$ est de type $C_2 = B_2$ et son diagramme complété est



2.7.- Classification des automorphismes τ :

L'automorphisme $\xi^{-1} \tau$ fixe point par point $\hat{\mathfrak{h}}$ et est donc de la forme $\exp \text{ad } h'$ avec $h' \in \hat{\mathfrak{h}}$. En conjuguant τ par un automorphisme intérieur de la forme $\exp \text{ad } h''$ (ou, ce qui revient au même, quitte à changer la base de Chevalley et donc ξ par $\exp \text{ad } -h''$), on peut supposer que h' est fixe par ξ (et τ), cf. [B ; II 3.5]. Ainsi τ est le produit commutatif de ξ et $\exp \text{ad } h'$.

Plus précisément si τ est d'ordre divisant m (et multiple de k'), il s'écrit comme un produit commutatif $\tau = \xi \exp \text{ad}(2\pi/m)h$ où $h \in \hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}} = \{h \in \hat{\mathfrak{h}} / \xi h = h \text{ et } \alpha(h) \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in \hat{\Delta}\}$.

Mais h n'est pas bien déterminé par ces conditions : quitte à changer de base de racines, on peut le modifier par le groupe de Weyl de $\bar{\Delta}$; quitte à changer de base de Chevalley, on peut le modifier par $\oplus \mathbb{Z} (m/n_i) \bar{p}_i$ où, pour $i \in \bar{I}$, n_i est le cardinal de l'orbite de i sous ξ (cf. la démonstration de [B ; V 1.2]). Soit Γ le groupe engendré par ces transformations.

Pour classifier τ à automorphisme intérieur près, il suffit donc de déterminer les orbites de Γ dans $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$. Mais $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à la somme directe des $(\hat{\mathfrak{h}}_c)_{\mathbb{Z}}^{\eta}$ où c parcourt un système de représentants des orbites de ξ dans les composantes connexes du graphe de Dynkin; $\hat{\mathfrak{h}}_c$ est la sous-algèbre de Cartan correspondante et η la plus petite puissance ξ^{p_c} de ξ qui la stabilise. Le groupe Γ stabilise ces facteurs et y induit un groupe Γ_c défini de manière analogue en remplaçant m par m/p_c et les n_i par n_i/p_c . On est donc ramené au cas où $\hat{\mathfrak{h}}$ est simple.

Si $\hat{\mathfrak{h}}$ est simple, $\oplus \mathbb{Z} (1/n_i) \bar{p}_i$ est le réseau des poids du système de racines $\tilde{\Delta}$ et les groupes de Weyl de $\bar{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}$ sont identiques. On sait donc bien que Γ agissant sur $\hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^{\xi}$ contient un sous-groupe distingué Γ_0 engendré par des symétries dont un domaine fondamental est l'alcôve définie par :

$$\gamma_i(h) \geq 0 ; \dots ; \gamma_{\ell}(h) \geq 0 ; \dots ; -\gamma_0(h) \leq m .$$

On peut donc supposer (quitte à modifier l'épinglage, c'est-à-dire $\hat{\mathfrak{h}}$ et ξ) que h est dans cette alcôve, c'est-à-dire que, si l'on pose $r_i = \gamma_i(h)$, $i \in \bar{I}$, on a $r_i \in \mathbb{N}$ (et même r_i divisible par n_i) et $\sum \tilde{a}_i r_i \leq m$. On pose alors $r_0 = m - \sum \tilde{a}_i r_i$ et comme $\tilde{a}_0 = 1$, on a $m = \sum_I \tilde{a}_i r_i$. On peut retraduire ces relations avec les entiers $s_i = (r_i/n_i) = \bar{\alpha}_i(h)$ pour $i \in \bar{I}$ et $s_0 = (r_0/k)$ (car k divise m et les $\tilde{a}_i n_i$, donc r_0), on a :

$$s_i \in \mathbb{N} \text{ pour } i \in I \text{ et } \sum_I a_i s_i = (m/k).$$

Mais le groupe Γ est produit semi-direct de Γ_0 et d'un groupe qui stabilise l'alcôve et agit sur celle-ci par des automorphismes du diagramme de Dynkin de $\tilde{\Delta}$ ou du diagramme étendu ("de Δ ") c'est-à-dire des permutations de I . Ces permutations sont décrites au n° XII des planches de [BBK VI] pour $k = 1$ ou au c) de la liste I de [B ; V § 3] pour $\tilde{\Delta}$ si $k \neq 1$ (pas de permutation pour BC_2).

Si on raisonne à automorphisme extérieur près, on peut rajouter tous les automorphismes (des composantes connexes) du diagramme de Dynkin de $\tilde{\Delta}$ (ce rajout n'est effectif que si ξ est l'identité sur cette composante) et dans le cas non simple toutes les permutations de composantes connexes (ainsi que tous les automorphismes du centre \mathfrak{z} de $\hat{\mathfrak{g}}$ en ce qui concerne ξ).

Proposition 2.8 :

Soit τ un automorphisme d'ordre divisant m de l'algèbre simple $\hat{\mathfrak{g}}$, k le plus petit entier tel que τ^k soit intérieur et $\hat{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan choisie comme en 2.1.

a) Pour un bon choix de l'épinglage $(\hat{\mathfrak{h}}; \hat{e}_i, i \in \hat{I})$ il existe un automorphisme de diagramme ξ tel que $\tau = \xi \exp \text{ad}(2\pi/m)h$ où $h \in \hat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ est déterminé par des entiers positifs s_0, s_1, \dots, s_ℓ au moyen de la formule $\bar{\alpha}_i(h) = s_i$ pour $i \geq 1$. Ces entiers vérifient la formule $k(\sum_I a_i s_i) = m$ où a_i est le coefficient de $\bar{\alpha}_i$ (ou α_i) dans le diagramme étendu de $(\hat{\mathfrak{h}}, \hat{\tau})$ (i.e. de Δ).

b) τ est d'ordre m si et seulement si les s_i sont premiers entre eux.

c) La classe de conjugaison de τ à automorphismes (généraux) près est décrite par k et les entiers s_i à permutation près de I par un automorphisme du diagramme étendu.

d) La classe de conjugaison de τ à automorphismes intérieurs près est décrite par :

1) le nombre k et (si $\hat{\mathfrak{g}}$ est de type D_n avec $k \neq 1$) le choix de l'automorphisme de diagramme ξ (deux choix si $k = 3$, trois choix si $k = 2$);

2) les entiers s_i à permutation près par un automorphisme du diagramme de Dynkin étendu du type suivant :

- tous les automorphismes si $k \neq 1$ ou $\hat{\mathfrak{g}}$ non de type $A_{2\ell}$ ou $D_{2\ell}$
- pour $A_{2\ell}$, $k = 1$ seules les permutations circulaires sont autorisées
- pour $D_{2\ell}$, $k = 1$ les permutations autorisées sont celles dont la restriction à l'ensemble des quatre sommets terminaux du graphe est une permutation sans point fixe de signature $(-1)^\ell$ ou une de ses puissances.

Remarques :

1) Cette proposition résulte de 2.7 et des tables connues de diagrammes.

2) Un choix de $(\hat{\mathfrak{h}}; \hat{e}_i, i \in \hat{I})$ vérifiant les conditions ci-dessus sera dit adapté à τ .

3) Si on se donne un automorphisme ξ du diagramme de $\hat{\mathfrak{g}}$ d'ordre k et des entiers s_0, s_1, \dots, s_ℓ , il est clair que, pour n'importe quel épinglage, les formules du a) définissent un automorphisme τ d'ordre divisant $m = k(\sum_I a_i s_i)$.

4) Cette proposition précise légèrement [K ; theorem 8.6], cf. 2.10.

5) On laisse au lecteur le soin d'imaginer l'énoncé correspondant au cas $\hat{\mathfrak{g}}$ non simple.

2.9.- L'épinglage de $(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\tau})$ dans le cas $\hat{\mathfrak{g}}$ simple :

Choisissons un triplet $(\hat{\mathfrak{h}}; \hat{e}_i, i \in \hat{I})$ adapté à τ . On définit des éléments $\bar{e}_i, \bar{f}_i, \bar{\alpha}_i^v$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ (pour $i \in I$) par les formules suivantes :

Pour $i \in \bar{I}$, \bar{e}_i (resp. $\bar{f}_i, \bar{\alpha}_i^v$) est la somme des e_r (resp. f_r, α_r^v) pour r dans l'orbite de i sous $\hat{\tau}$ sauf si deux tels r sont reliés dans le diagramme de Dynkin, ce qui n'arrive que si $\hat{\mathfrak{g}}$ est de type $A_{2\ell}$ et $i = \ell$; dans ce cas on pose $\bar{e}_\ell = \sqrt{2}(e_\ell + e_{\ell+1})$, $\bar{f}_\ell = \sqrt{2}(f_\ell + f_{\ell+1})$ et $\bar{\alpha}_\ell^v = 2(\alpha_\ell^v + \alpha_{\ell+1}^v)$.

Dans tous ces cas \bar{e}_i (resp. \bar{f}_i) est une base de $\hat{\mathfrak{g}}_{\bar{\alpha}_i}^{\hat{\tau}}$ (resp. $\hat{\mathfrak{g}}_{-\bar{\alpha}_i}^{\hat{\tau}}$), $\hat{\omega}(\bar{e}_i) = -\bar{f}_i$ et $\hat{\omega}'(\bar{e}_i) = -\bar{f}_i$.

Pour $i = 0$ et $\hat{\mathfrak{g}}$ de type $A_{2\ell}$, $k = 2$ on pose $\bar{e}_0 = e_{-\ell}$, $\bar{f}_0 = e_{\ell}$ et $\bar{\alpha}_0^v = -v^v$; si $\hat{\mathfrak{g}}$ n'est pas de type $A_{2\ell}$ avec $k = 2$ on pose $\bar{e}_0 = e_{-v} + \dots + \varepsilon^{-k} \varepsilon^k(e_{-v})$, $\bar{f}_0 = e_v + \dots + \varepsilon^k \varepsilon^{-k}(e_v)$ et $\bar{\alpha}_0^v = -v^v - \dots - \varepsilon^k(v^v)$ où $\varepsilon = \exp(2\pi/k)$. Dans tous ces cas \bar{e}_0 (resp. \bar{f}_0) est une base de l'espace propre de $\hat{\tau}$ de valeur propre ε (resp. ε^{-1}) dans $\hat{\mathfrak{g}}_{\bar{\alpha}_0}^{\hat{\tau}}$ (resp. $\hat{\mathfrak{g}}_{-\bar{\alpha}_0}^{\hat{\tau}}$); de plus $\hat{\omega}(\bar{e}_0) = -\bar{f}_0$ sauf dans le cas $k = 3$ où $\hat{\omega}(\bar{e}_0) = -\eta(\bar{f}_0)$ avec η un automorphisme de diagramme d'ordre 2 de D_n tel que $\eta \varepsilon \eta = \varepsilon^{-1}$ (plus précisément

si $v = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_4$, alors $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$ et $n_4 = 3$. Par contre pour la semi-involution de Cartan on a toujours $\hat{\alpha}(\hat{e}_0) = -\hat{e}_0$.

Proposition 2.10 :

Soient τ comme en 2.9 et s_i les entiers définis en 2.8.

a) Pour $i \in I$, notons $n_i = \exp(2\pi i s_i / m)$, on a alors $\tau(\hat{e}_i) = n_i \hat{e}_i$ et $\tau(\hat{f}_i) = n_i^{-1} \hat{f}_i$.

b) La forme bilinéaire $(\cdot | \cdot)$ permet d'identifier $\hat{\alpha}_i^v$ à $(2/(\hat{\alpha}_i | \hat{\alpha}_i)) \hat{\alpha}_i$; c'est-à-dire que $\hat{\alpha}_j(\hat{\alpha}_i^v) = a_{i,j}$ mais aussi $\sum a_i^v \hat{\alpha}_i^v = 0$. On a de plus $[\hat{e}_i, \hat{f}_i] = \hat{\alpha}_i^v$.

c) L'algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ est réductive engendrée par sa sous-algèbre de Cartan $\hat{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}}^\tau$ et les \hat{e}_i, \hat{f}_i pour $i \in I_\tau = \{i \in I / s_i = 0\}$. Une base de $\Delta(\hat{\mathfrak{g}}^\tau, \hat{\mathfrak{h}})$ est $\pi_i = \{\hat{\alpha}_i / i \in I_\tau\}$ et le diagramme de Dynkin s'obtient en ne gardant dans le diagramme étendu de $(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ que les sommets dans I_τ .

Idée de démonstration :

Pour a et b il suffit de quelques calculs faciles. On sait que $\hat{\mathfrak{g}}^i$ est une algèbre réductive et contient l'algèbre proposée. De plus les valeurs propres de τ donc de τ dans chaque espace propre de $\hat{\mathfrak{h}}$ sont de multiplicité 1, il suffit donc de voir que si une racine $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}$ est telle que $\hat{\alpha}^\tau$ n'est pas nul, alors $\hat{\alpha}$ est combinaison linéaire des $\hat{\alpha}_i$ pour $i \in I_\tau$. On le fait cas par cas en utilisant la relation $\sum a_i s_i = m/k$. \square

Remarque : On voit assez facilement que les $\hat{e}_i, \hat{f}_i, \hat{\alpha}_i^v$ ci-dessus sont les E_i, F_i, H_i de [K ; 7.4 et 8.2] à trois différences près : pour $D_n^{(1)}$ Kac semble avoir oublié le problème de $\hat{\alpha}(\hat{e}_0)$; pour $A_{2l}^{(2)}$ la numérotation est différente et il faut que $(\hat{e}_0 | \hat{e}_0) = (E_0 | F_0) = \frac{1}{2}$ si on veut que la coracine correspondante soit la bonne dans [K ; 8.7].

2.11.- Cas des involutions non triviales :

On voit assez facilement qu'il y a trois possibilités pour τ à automorphisme intérieur près, cf. [Ka] :

1) $\xi = \text{Id}$, deux des entiers s_i sont égaux à 1 avec $a_i = \hat{a}_i = 1$ (les autres s_i sont nuls). On peut alors supposer que l'un des deux est s_0 et l'autre sera noté s_j . Alors $\Delta(\hat{\mathfrak{g}}^\tau, \hat{\mathfrak{h}})$ admet pour base $\pi_\tau = \hat{\mathfrak{h}} - \{\hat{\alpha}_j\}$ et $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ a un centre de dimension 1 : $\mathbb{C} \hat{\alpha}_j$.

2) $\xi = \text{Id}$, un seul entier s_j est égal à 1 avec $a_j = \hat{a}_j = 2$. Alors $\Delta(\hat{\mathfrak{g}}^\tau, \hat{\mathfrak{h}})$ admet pour base $\pi_\tau = (\hat{\mathfrak{h}} - \{\hat{\alpha}_j\}) \cup \{-\mu\} = \Omega - \{\hat{\alpha}_j\}$ et $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ n'a pas de centre.

3) $\xi = \text{Id}$, un seul entier s_j est égal à 1 avec $a_j = 1$. Alors $\Delta(\hat{\mathfrak{g}}^\tau, \hat{\mathfrak{h}})$ admet pour base $\pi_\tau = \Omega - \{\hat{\alpha}_j\} = (\hat{\mathfrak{h}} \cup \{\hat{\alpha}_0\}) - \{\hat{\alpha}_j\}$ (c'est-à-dire $\hat{\mathfrak{h}}$ si $j = 0$ autrement dit $\tau = \xi$) et $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ n'a pas de centre.

On constate que la connaissance de $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ à isomorphisme près détermine τ à automorphisme extérieur de $\hat{\mathfrak{g}}$ près.

Certaines classes de conjugaison à automorphisme extérieur près se coupent en plusieurs classes de conjugaison à automorphisme intérieur près. Nous allons les désigner par la donnée successive du type de $\hat{\mathfrak{g}}$, du type de $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ et du nom de la forme réelle correspondante ; il s'agit de :

D_{2r} ; $A_{2r-1} + \mathbb{Z}$; $\mathfrak{su}^*(4r)$, $r \geq 3$	2 classes
D_4 ; $A_3 + \mathbb{Z}$; $\mathfrak{su}^*(8) \simeq \mathfrak{so}(2,6)$	3 classes
D_4 ; B_3 ; $\mathfrak{so}(1,7)$	3 classes
D_4 ; $A_1 + B_2$; $\mathfrak{so}(3,5)$	3 classes.

Dans les deux derniers cas les trois classes sont dues aux trois choix possibles de l'involution du diagramme de D_4 .

2.12.- Construction de l'algèbre infinie $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$:

a) Il existe une forme \mathbb{C} -bilinéaire symétrique $(\cdot | \cdot)$ invariante et non dégénérée sur $\hat{\mathfrak{g}}$ que l'on suppose de plus invariante par τ : forcément le centre \mathbb{Z} et les facteurs simples $\hat{\mathfrak{g}}_q$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ sont orthogonaux deux à deux et il suffit de choisir la forme de Killing sur chaque $\hat{\mathfrak{g}}_q$ et une forme non dégénérée invariante par τ (i.e. ξ) quelconque sur \mathbb{Z} . On peut encore modifier cette forme sur \mathbb{Z} et surtout sur chaque $\hat{\mathfrak{g}}_q$ par multiplication par une constante à condition que cette constante soit la même sur tous les $\hat{\mathfrak{g}}_q$ d'une même orbite sous τ . Suivant [K ; 8.2.1] on normalise la forme de façon que sur le dual de $\hat{\mathfrak{h}}$ on ait $(\alpha | \alpha) = 2k_q$ si α est une racine longue de $\Delta(\hat{\mathfrak{g}}_q, \hat{\mathfrak{h}})$ et si on note k_q la plus petite puissance de τ qui stabilise $\hat{\mathfrak{g}}_q$ et y induit un automorphisme intérieur.

Pour $j \in \mathbb{Z}$, on note $\hat{\mathfrak{g}}_{j/m}$ l'espace propre de τ dans $\hat{\mathfrak{g}}$ correspondant à la valeur propre $\exp(2\pi i j / m)$. On notera que $\hat{\mathfrak{g}}_{j/m}$ ne dépend que du rationnel

j/m modulo un entier ; par contre les définitions que l'on va donner des algèbres de Lie $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ et $L(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ dépendent en fait de l'entier m choisi multiple de r , cf. [R3].

b) On définit les algèbres de Lie infinies suivantes :

$$L(\hat{\mathfrak{g}}) = \mathbb{C} [t, t^{-1}] \otimes \hat{\mathfrak{g}} \text{ avec le crochet tel que } [t^j X, t^k Y] = t^{j+k} [X, Y],$$

$$\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}) = L(\hat{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C} c \oplus \mathbb{C} D \text{ avec le crochet tel que}$$

$$[t^{jX+\lambda c+\mu D}, t^{kY+\lambda' c+\mu' D}] = t^{j+k} [X, Y] + \mu k t^{kY-\mu' j} t^{jX+j\delta_{j,-k}} (X|Y) c.$$

Alors $L(\hat{\mathfrak{g}}, \tau) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} t^j \hat{\mathfrak{g}}_{j/m}$ (resp. $\mathfrak{g} = \hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau) = L(\hat{\mathfrak{g}}, \tau) \oplus \mathbb{C} c \oplus \mathbb{C} D$) est une sous-algèbre de Lie de $L(\hat{\mathfrak{g}})$ (resp. $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}})$).

Ces algèbres de Lie sont graduées de la manière évidente (avec c et D de degré 0), c'est-à-dire par les valeurs propres de $\text{ad } D$.

$\mathfrak{z} \oplus \mathbb{C} c$ (resp. $\mathfrak{z} \oplus \mathbb{C} c$) est le centre de $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ (resp. $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}})$) et $\mathfrak{g}' = L(\hat{\mathfrak{g}}, \tau) \oplus \mathbb{C} c$ (resp. $L(\hat{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C} c$) en est l'algèbre dérivée. En particulier $\mathfrak{g}'/\mathbb{C} c$ est isomorphe à $L(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$.

Ces algèbres sont munies d'une forme bilinéaire symétrique $(\cdot | \cdot)$ invariante et non dégénérée par la formule :

$$(t^{jX+\lambda c+\mu D} | t^{kY+\lambda' c+\mu' D}) = \delta_{j,-k} (X|Y) + \lambda \mu' + \lambda' \mu.$$

c) Ces constructions sont évidemment fonctorielles : si η est un automorphisme de $\hat{\mathfrak{g}}$ compatible avec $(\cdot | \cdot)$ (resp. et commutant à τ) on en déduit des automorphismes gradués $L(\eta)$ et $\hat{L}(\eta)$ (resp. $L(\eta, \tau)$ et $\hat{L}(\eta, \tau)$) qui transforment $t^j X$ en $t^j \eta X$ et fixent c et D .

d) Un produit d'algèbres de Lie du type de $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ (ou plus généralement tout sous-quotient de ce produit plus grand que le sous-quotient que constitue le produit des $L(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ correspondants) est une algèbre de Lie dite réductive affine.

Les algèbres de Lie \mathfrak{g}^{η} rencontrées dans [B-R] sont de cette forme et il en est sans doute de même de toutes celles de [B].

2.13.- Sous-algèbres de Cartan, racines et endomorphisme \mathcal{C} :

On choisit la sous-algèbre de Cartan $\hat{\mathfrak{h}}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ comme en 2.1 ; on a noté $\bar{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}}^{\tau}$. Alors $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C} c \oplus \mathbb{C} D$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g} = \hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ c'est-à-dire une sous-algèbre diagonalisable maximale pour la représentation adjointe.

On note $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ l'ensemble des racines de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} . L'ensemble Δ^{im} des racines imaginaires, c'est-à-dire nulles sur $\bar{\mathfrak{h}}$ (et donc sur $\mathfrak{h}' = \bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C} c = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$), est la réunion de Δ_0 et des Δ_q^{im} où $\hat{\mathfrak{g}}_q$ parcourt les facteurs simples de $\hat{\mathfrak{g}} : \Delta_q^{\text{im}}$ est formé des multiples non nuls de la racine imaginaire δ_q caractérisée par $\delta_q(D) = m/k_q$ et Δ_0 est l'ensemble des poids non nuls de \mathfrak{h} dans $\mathfrak{g} \cap \mathbb{C} [t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{z}$.

L'ensemble Δ^{re} des racines réelles (c'est-à-dire non imaginaires) est réunion disjointe des Δ_q^{re} si $\hat{\mathfrak{g}}_q$ parcourt un système de représentants des orbites sous τ des facteurs simples de $\hat{\mathfrak{g}}$. Une racine de Δ_q^{re} est de la forme $\alpha = \bar{\beta} + j(k_q/m)\delta_q$ où $\beta \in \Delta(\hat{\mathfrak{g}}_q, \hat{\mathfrak{h}}_q)$ et $j \in \mathbb{Z}$; plus précisément son espace propre (de dimension 1) est $\mathfrak{g}_{\alpha} = t^j (\hat{\mathfrak{g}}_{\beta} \cap \hat{\mathfrak{g}}_{j/m})$ et α est une racine si et seulement si $\hat{\mathfrak{g}}_{\beta}$ rencontre $\hat{\mathfrak{g}}_{j/m}$. La périodicité en j des $\hat{\mathfrak{g}}_{j/m}$ montre que α est une racine dans Δ_q^{re} si et seulement si $\alpha + k_q \delta_q$ en est une.

L'endomorphisme \mathcal{C} de $L(\hat{\mathfrak{g}}, \tau) = \mathfrak{g}'/\mathbb{C} c$ défini par $t^j X \mapsto t^{j+m} X$ est un endomorphisme de \mathfrak{g}' -modules pour la représentation adjointe, cf. [R3 ; 3.1].

2.14.- Racines de $\mathfrak{g} = \hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ dans le cas où $\hat{\mathfrak{g}}$ est simple :

On fait le choix d'un triplet $(\hat{\mathfrak{h}}; \hat{\mathfrak{e}}_i, i \in I)$ adapté à τ et on reprend les notations et conventions de 2.8, 2.9, 2.10 et 2.12. On note évidemment k au lieu de k_q et δ au lieu de δ_q . Pour $i \in I$, on définit les éléments suivants :

$$\alpha_i = (s_i k/m)\delta + \bar{\alpha}_i \text{ dans le dual de } \mathfrak{h}$$

$$e_i = t^{s_i} \bar{e}_i \text{ et } f_i = t^{-s_i} \bar{f}_i \text{ dans } \mathfrak{g}$$

$$\alpha_i^{\vee} = \bar{\alpha}_i^{\vee} + (\bar{e}_i | \bar{f}_i) s_i c \text{ dans } \mathfrak{h}$$

$$p_0 = (k/m)(D-\mathfrak{h}) \text{ dans } \mathfrak{h} \text{ (l'élément } \mathfrak{h} \text{ est celui défini en 2.8)}$$

$$p_i = \bar{p}_i + a_i p_0 \text{ dans } \mathfrak{h} \text{ (si } i \neq 0).$$

Proposition :

a) Pour $i, j \in I$, on a $\alpha_i(p_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

b) $(\mathfrak{h}; \alpha_i, i \in I; \alpha_i^{\vee}, i \in I)$ est une réalisation de la matrice A définie en 2.5, en particulier $\alpha_i(\alpha_j^{\vee}) = a_{i,j}$. La matrice A est de type affine.

c) Avec la normalisation adoptée en 2.12.a, on a $(\bar{e}_i | \bar{f}_i) = a_i/a_i^{\vee}$ pour $i \in I$; en particulier l'élément central canonique est $c_1 = \sum a_i^{\vee} \alpha_i^{\vee} = (m/k)c$.

d) Pour $i \in I$, e_i (resp. f_i) est une base de \mathfrak{g}_{α_i} (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$) et $[e_i, f_i] = \alpha_i^\vee$; tandis que $[e_i, f_j] = 0$ si $i \neq j$. Le degré de e_i (resp. f_i) pour la graduation naturelle de $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathfrak{g}, \tau)$ est s_i (resp. $-s_i$).

e) $\Pi = \{\alpha_i / i \in I\}$ est une base du système de racines Δ .

f) L'algèbre $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathfrak{g}, \tau)$ est engendrée par h et les e_i, f_i pour $i \in I$; c'est l'algèbre $\mathfrak{g}(A)$ de [K].

Remarque : Les éléments définis ci-dessus sont les mêmes que ceux de [K] ou [B] à deux nuances près : c n'est pas l'élément central canonique c_1 et l'élément p_0 (souvent aussi noté d) vérifie $(c_1 | p_0) = 1$ ($= a_0$ avec nos conventions de numérotation); si on veut qu'il vérifie de plus $(p_0 | p_0) = 0$ comme en [K ; 6.2.1], on doit prendre la définition légèrement différente suivante (qui ne change rien au reste : [R2 ; 2.4]) $p_0 = (k/m)(D-h) - (k/2m)(h|h)c$. Quand $\tau = \bar{\tau}$ i.e. $h = 0$, ceci est vérifié et d'ailleurs $D = d$.

Idée de la démonstration :

Les parties a, b, c et d se vérifient plus ou moins facilement mais directement. Il en résulte que $\hat{L}(\mathfrak{g}, \tau)$ contient un quotient de l'algèbre universelle $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ de [K; 1.2]. La démonstration de e) et de la première partie de f) est un prolongement de celle de 2.10.c. Pour la seconde partie de f), le raisonnement est comme en [K ; 7.4].

On peut éventuellement simplifier cette démonstration en utilisant [R3 ; 1.2] qui décrit un isomorphisme de $\hat{L}(\mathfrak{g}, \tau)$ sur $\hat{L}(\mathfrak{g}, \bar{\tau})$; alors pour $\hat{L}(\mathfrak{g}, \bar{\tau})$ la démonstration est dans [K ; 7.4, 8.2 et 8.3].

§ 3.- Lien entre les deux notions précédentes :

3.1.- Comme suggéré au paragraphe 1, on va étudier des triplets $(\mathfrak{g}, \tau, \sigma)$ où \mathfrak{g} est une algèbre simple complexe, σ et τ deux automorphismes qui commutent de \mathfrak{g} . Pour généraliser un peu on suppose (jusqu'à 3.4) que τ et σ sont d'ordre fini (respectivement m et p) et non pas des involutions.

On a introduit en 2.12 l'algèbre affine $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathfrak{g}, \tau)$. Pour tout automorphisme φ de \mathfrak{g} commutant à τ , on construit fonctoriellement un automorphisme $\hat{\varphi} = \hat{L}(\varphi, \tau)$ de \mathfrak{g} (en particulier l'ordre de $\hat{\sigma}$ est p). Le groupe de ces automorphismes de \mathfrak{g} est noté $\text{Aut}_\tau(\hat{L}(\mathfrak{g}, \tau))$, il est formé des automorphismes ψ de \mathfrak{g} tels que :

$$\alpha) \psi(c) = c$$

$$\beta) \psi(D) = D \quad (\text{i.e. } \psi \text{ est gradué})$$

$$\gamma) \psi \text{ commute à } \mathcal{C}.$$

3.2.- D'après 2.8 il existe un choix adapté à τ d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} et d'un épinglage $(\mathfrak{h}; \mathfrak{e}_i, i \in I)$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Alors τ stabilise \mathfrak{h} et est associé à un automorphisme de diagramme ξ d'ordre k . On définit (2.5) dans $\bar{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ un ensemble $\Omega = \{\bar{\alpha}_i / i \in I\}$ de racines qui contient une base π_τ du système de racines de \mathfrak{g}^τ par rapport à sa sous-algèbre de Cartan $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}^\tau$. On a même un épinglage $(\pi_\tau; \bar{e}_i, i \in I_\tau)$ de $(\mathfrak{g}^\tau, \bar{\mathfrak{h}})$ explicitement construit à partir de $(\mathfrak{h}; \mathfrak{e}_i, i \in I)$ (2.10).

Proposition 3.3 :

1) Il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} stable par τ et σ et telle que τ stabilise une base \mathfrak{h} de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et σ stabilise une base de $\Delta(\mathfrak{g}^\tau, \bar{\mathfrak{h}})$. Deux tels choix de sous-algèbres de Cartan sont conjugués par un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} commutant à τ et σ .

2) Plus précisément il existe un épinglage $(\mathfrak{h}; \mathfrak{e}_i, i \in I)$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tel que :

a) $(\mathfrak{h}; \mathfrak{h}; \mathfrak{e}_i, i \in I)$ est adapté à τ .

b) σ stabilise la base π_τ de $\Delta(\mathfrak{g}^\tau, \bar{\mathfrak{h}})$ et $(\bar{\mathfrak{h}}; \pi_\tau; \bar{e}_i, i \in I_\tau)$ est adapté à l'automorphisme σ de \mathfrak{g}^τ .

De plus pour un épinglage vérifiant ces conditions (qui portent seulement sur τ et la restriction de σ à \mathfrak{g}^τ) on a :

c) σ stabilise Ω .

d) L'automorphisme $\hat{\sigma}$ de $\mathfrak{g} = \hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau)$ stabilise la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} et la base π du système de racines correspondant.

Remarque [Ka] : Sans utiliser d'algèbres infinies, on peut démontrer ce théorème (sauf 2d) à condition de faire une étude cas par cas pour 2c.

Démonstration :

Considérons le triplet $(\hat{\mathfrak{h}}; \hat{\pi}; \hat{e}_1)$ adapté à τ de 3.2 ; alors $\bar{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}}^\tau$ est une sous-algèbre de Cartan de $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ et on obtient un épinglage $(\bar{\mathfrak{h}}; \bar{\pi}_1; \bar{e}_1)$ de $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$. Comme tous les épinglages de $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ sont conjugués par un automorphisme intérieur de $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ donc par un automorphisme intérieur de $\hat{\mathfrak{g}}$ commutant à τ , on peut supposer que $(\bar{\mathfrak{h}}; \bar{\pi}_1; \bar{e}_1)$ est un épinglage fixé d'avance de $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$, en particulier que cet épinglage est adapté à σ . Comme σ stabilise $\bar{\mathfrak{h}}$, il stabilise son centralisateur $\hat{\mathfrak{h}}$.

Ainsi $\hat{\mathfrak{h}}^\sigma$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre réductive $(\hat{\mathfrak{g}}^\tau)^\sigma$ et \mathfrak{h} est le centralisateur dans $\hat{\mathfrak{g}}$ de $\bar{\mathfrak{h}}$ qui est le centralisateur dans $\hat{\mathfrak{g}}^\sigma$ de $\hat{\mathfrak{h}}^\sigma$. De la conjugaison des sous-algèbres de Cartan de $(\hat{\mathfrak{g}}^\tau)^\sigma$ on déduit que deux choix possibles de $\hat{\mathfrak{h}}$ sont conjugués par un automorphisme intérieur de $(\hat{\mathfrak{g}}^\tau)^\sigma$ donc par un automorphisme intérieur de $\hat{\mathfrak{g}}$ commutant à τ et σ .

Il reste à démontrer c et d. Il est clair que $\hat{\sigma}$ stabilise $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$; d'autre part Ω est l'ensemble des restrictions à $\bar{\mathfrak{h}}$ des racines de π , il suffit donc de montrer que $\hat{\sigma}$ stabilise π . Or σ fixe un élément H_1 de $\bar{\mathfrak{h}}$ tel que $\bar{\alpha}_1(H_1) = 1$ pour $i \in I_\tau$. Soit N plus grand que $|\bar{\alpha}(H_1)| \quad \forall \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$, alors $H_2 = (m/k)ND + H_1$ est régulier dans \mathfrak{g} , plus précisément $\alpha_1(H_2) > 0$, $\forall i \in I$. Comme $\hat{\sigma}$ fixe H_2 , il stabilise π . \square

Remarques 3.4 :

1) Pour déterminer les classes de conjugaison des paires (τ, σ) il ne reste plus (d'après 2.8) qu'à déterminer les classes de conjugaison de σ sous $\text{Aut}(\hat{\mathfrak{g}})^\tau$. Si $\varphi \in \text{Aut}(\hat{\mathfrak{g}})^\tau$, on peut considérer l'automorphisme $\hat{\varphi}$ de \mathfrak{g} ; de plus σ_1 et σ_2 sont conjugués par φ si et seulement si $\hat{\sigma}_1$ et $\hat{\sigma}_2$ sont conjugués par $\hat{\varphi}$. Il suffit donc de classier les classes de conjugaison d'automorphismes d'ordre fini de $\text{Aut}_\tau(\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau))$, ce que l'on ne fera pas ici dans le cas général.

Les résultats de Bausch [B] donnent cependant une première étape de cette classification des triplets $(\hat{\mathfrak{g}}, \tau, \sigma)$: on classifie τ comme au § 2, puis on associe à σ la classe de conjugaison de l'automorphisme de première espèce et

d'ordre p $\hat{\sigma}$ dans le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} . Cette classe de conjugaison regroupe a priori plusieurs classes de conjugaison de $\hat{\sigma}$ dans $\text{Aut}_\tau(\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}, \tau))$; mais on peut déterminer les classes de conjugaison qui interviennent :

Si ψ est un automorphisme de première espèce et d'ordre p , il peut s'écrire sous la forme $\hat{\sigma}$ s'il vérifie les conditions α, β et γ de 3.1. La condition β exprime que ψ est gradué, c'est-à-dire, une fois exprimé que ψ stabilise (\mathfrak{h}, π) , elle signifie que l'action de ψ sur le diagramme de Dynkin respecte les s_i . La condition α est automatique : [B ; II] ou [R2 ; 2.8]. Tandis que la condition γ est fondamentale : elle détermine les ψ de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\hat{\sigma}$ pour un certain choix de $(\hat{\mathfrak{g}}, \tau, \sigma)$. En effet si ψ est un automorphisme de première espèce d'ordre p de \mathfrak{g} qui commute à \mathbb{C} , il fixe l'élément $D_1 = \sum_{j=0}^{p-1} \psi^j(d) = pd + H_0$ où $H_0 \in \bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ et d'après [R3 ; 1.2] ce D_1 est l'élément D d'une certaine algèbre $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}}_1, \tau_1)$ isomorphe à \mathfrak{g} et donc ψ est de la forme $\hat{L}(\sigma_1, \tau_1)$ pour un certain choix de $(\hat{\mathfrak{g}}_1, \tau_1, \sigma_1)$.

2) Cette description du couple (τ, σ) est partielle, puisqu'elle n'indique pas ce qu'est σ en dehors de $\hat{\mathfrak{h}}^\tau$ (voir des compléments ci-dessous dans le cas des involutions). De plus elle est très dissymétrique ; la description du couple (σ, τ) est différente et il n'est pas facile de passer de l'une à l'autre. Ceci a deux inconvénients : il n'est pas facile de déterminer $\hat{\mathfrak{h}}^\sigma$ dans la description de (τ, σ) alors que c'est facile dans la description de (σ, τ) ; de plus (τ, σ) correspond à l'ELS dual qu'il est utile de connaître en même temps que l'ELS de départ.

La différence entre les descriptions de (τ, σ) et de (σ, τ) apparaît dès les sous-algèbres de Cartan : pour (τ, σ) $\hat{\mathfrak{h}}$ est le centralisateur dans $\hat{\mathfrak{g}}$ du centralisateur dans $\hat{\mathfrak{g}}^\tau$ d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{t} de $(\hat{\mathfrak{g}}^\tau)^\sigma = (\hat{\mathfrak{g}}^\sigma)^\tau$; alors que pour (σ, τ) $\hat{\mathfrak{h}}_1$ est le centralisateur dans $\hat{\mathfrak{g}}$ du centralisateur dans $\hat{\mathfrak{g}}^\sigma$ de \mathfrak{t} . On peut avoir $\hat{\mathfrak{h}}_1 \neq \hat{\mathfrak{h}}$, ce qui revient à dire que τ et σ ne stabilisent pas une même base de $\Delta(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{h}})$.

Ceci arrive en particulier pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$; $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$; $\tau(X) = -{}^t X$ et $\sigma(X) = JXJ$ avec $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $(\hat{\mathfrak{g}}^\tau)^\sigma = \mathfrak{t} = \{0\}$, $\hat{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{g}}^\tau = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{C} \right\}$ et $\hat{\mathfrak{h}}_1 = \hat{\mathfrak{g}}^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{C} \right\}$.

3.5.- On suppose dorénavant que τ et σ sont des involutions. D'après 2.11 on a alors trois cas :

1) $\xi = \text{Id}$, $\bar{\alpha}_0 = -\alpha_0$, $\eta = \exp \text{ad} : \pi \bar{p}_j$, $j \in \bar{I}$, $\Omega = \bar{\pi} \cup \{\bar{\alpha}_0\}$, $\pi_{\bar{T}} = \bar{\pi} - \{\bar{\alpha}_j\}$ et \bar{h}^{τ} a pour centre $\bar{z} = \mathbb{C} \bar{p}_j$.

2) $\xi = \text{Id}$, $\bar{\alpha}_0 = -\alpha_0$, $\eta = \exp \text{ad} : \pi \bar{p}_j$, $j \in \bar{I}$, $\Omega = \bar{\pi} \cup \{\bar{\alpha}_0\}$ et $\pi_{\bar{T}} = \bar{\Omega} - \{\bar{\alpha}_j\}$.

3) ξ d'ordre 2, $\eta = \xi$ ou $\xi \exp \text{ad} : \pi \bar{p}_j$, $j \in \bar{I}$, $\Omega = \bar{\pi} \cup \{\bar{\alpha}_0\}$ et $\pi_{\bar{T}} = \bar{\pi}$ ou $\bar{\Omega} - \{\bar{\alpha}_j\}$.

Comme σ stabilise Ω et $\pi_{\bar{T}}$, son action sur Ω (et donc sur $\bar{\Delta}$) est bien déterminée par celle sur $\pi_{\bar{T}}$, sauf dans le premier cas.

Lemme :

Praçons-nous dans le premier cas, il y a deux possibilités :

a) $\sigma(\bar{\alpha}_0) = \bar{\alpha}_0$, $\sigma(\bar{\alpha}_j) = \bar{\alpha}_j$ et $\sigma|_{\bar{z}} = \text{Id}$.

b) $\sigma(\bar{\alpha}_0) = \bar{\alpha}_j$, $\sigma(\bar{\alpha}_j) = \bar{\alpha}_0$ et $\sigma|_{\bar{z}} = -\text{Id}$.

Démonstration :

On a $\bar{\alpha}_j(\bar{p}_j) = 1$ et $\bar{\alpha}_0(\bar{p}_j) = -1(\bar{p}_j) = -1$, tandis que $\bar{z} = \mathbb{C} \bar{p}_j$. Le résultat est donc évident puisque σ est une involution qui stabilise \bar{z} et $\{\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_j\}$. \square

Proposition 3.6 :

Quitte à conjuguer par un automorphisme intérieur de $\hat{\mathfrak{h}}$ commutant à τ (de la forme $\exp \text{ad} X$ avec $X \in \bar{z}$) on peut supposer que la base de Chevalley $(\bar{e}_{\alpha}, \alpha \in \bar{\Delta})$ de $\hat{\mathfrak{h}}$ associée à l'épinglage introduit en 3.3.2 est telle que :

$$\tau(\bar{e}_{\alpha}) = \varepsilon(\alpha) \bar{e}_{\alpha} \text{ et } \sigma(\bar{e}_{\alpha}) = \eta(\alpha) \bar{e}_{\sigma\alpha} \text{ pour } \alpha \in \bar{\Delta}$$

où $\varepsilon(\alpha)$ et $\eta(\alpha)$ sont égaux à ± 1 et vérifient : $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\tau\alpha)$, $\eta(\alpha) = \eta(\sigma\alpha)$ et $\sigma(\alpha) = 1$ si $\tau(\alpha) \neq \alpha$ et $\alpha \in \bar{\pi}$.

Démonstration :

Les conditions sur τ et σ sont vérifiées sans aucune modification. La condition sur η résultera de ce que σ est une involution. Il reste donc à vérifier que $\sigma(\bar{e}_{\alpha}) = \pm \bar{e}_{\sigma\alpha}$ pour $\alpha \in \bar{\pi}$.

Si $\xi = \text{Id}$ la propriété est vérifiée pour $\alpha \in \bar{\pi} \cap \pi_{\bar{T}}$. Elle est claire pour $\bar{\alpha}_j$ si $\sigma \bar{\alpha}_j = \bar{\alpha}_j$. Si $\sigma \bar{\alpha}_j = -\bar{\alpha}_j$, on a $\sigma(\bar{e}_j) = a \bar{e}_{-\mu}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. Posons $a = \exp(2b)$ avec $b \in \mathbb{C}$ et $X = b \bar{p}_j$, alors $\exp \text{ad} bX$ ne change pas \bar{e}_i pour $i \neq j$ et il change \bar{e}_j en $\bar{e}'_j = \exp(-b) \bar{e}_j$ et $\bar{e}_{-\mu}$ en $\bar{e}'_{-\mu} = \exp(b) \bar{e}_{-\mu}$, d'où $\sigma(\bar{e}'_j) = \bar{e}'_{-\mu}$.

Supposons maintenant $\xi \neq \text{Id}$. Si $\sigma(\bar{\alpha}_i) = \bar{\alpha}_i$, alors quitte à remplacer σ par $\sigma \tau$ on a $\sigma(\bar{\alpha}_i) = \bar{\alpha}_i$ et donc $\sigma(\bar{e}_i) = \pm \bar{e}_i$ (ou $\sigma(\bar{e}_i) = \pm \bar{e}_{\tau i}$ dans la situation de départ). Si $\sigma(\bar{\alpha}_i) \neq \bar{\alpha}_i$, alors $\bar{\alpha}_i \in \pi_{\bar{T}}$ et $\sigma(\bar{e}_i) = \pm \bar{e}_{\sigma i}$. Si de plus $\tau i = i$ alors $\bar{e}_i = \bar{e}'_i$ (2.9) et $\sigma(\bar{e}_i) = \bar{e}'_{\sigma i}$. Si par contre $\tau i \neq i$, il existe λ tel que $\bar{e}_i = \lambda(\bar{e}_i + \tau \bar{e}_i)$ et $\bar{e}_{\sigma i} = \lambda(\bar{e}_{\sigma i} + \tau \bar{e}_{\sigma i})$; comme $\sigma(\bar{e}_i) = \pm \bar{e}_{\sigma i}$, on obtient $\sigma(\bar{e}_i) = \pm \bar{e}_{\sigma i}$ par identification des termes de poids $\sigma \bar{\alpha}_i$. \square

3.7.- Démonstration de la proposition 1.10 :

A un automorphisme intérieur de $\hat{\mathfrak{h}}^{\tau}$ (resp. extérieur de $\hat{\mathfrak{h}}$ commutant à τ) près, on peut supposer que les restrictions de σ_1 et σ_2 à $\hat{\mathfrak{h}}^{\tau}$ sont les mêmes ; soit ρ cette restriction. Choisissons l'épinglage comme en 3.3.2, il vérifie donc les propriétés de 3.3 pour σ_1 et σ_2 . Quitte à conjuguer σ_1 et σ_2 par des automorphismes intérieurs de $\hat{\mathfrak{h}}$ commutant à τ , on peut supposer que σ_1 et σ_2 vérifient les conditions de 3.5 avec des signes η_1 et η_2 .

a) $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $\sigma_2 \tau$ sur $\hat{\mathfrak{h}}$: par hypothèse c'est vrai sur $\hat{\mathfrak{h}}^{\tau}$, donc sur $\hat{\mathfrak{h}}$ si τ est l'identité sur $\hat{\mathfrak{h}}$. Supposons $\tau \neq \text{Id}$ sur $\hat{\mathfrak{h}}$, alors l'automorphisme $\sigma_1 \sigma_2$ fixe $\hat{\mathfrak{h}}^{\tau}$ qui contient un élément régulier ; donc $\sigma_1 \sigma_2$ stabilise la base $\bar{\pi}$ de $\hat{\mathfrak{h}}$. Cet automorphisme de $\bar{\pi}$ commute à τ qui est une involution non triviale. Un simple regard à la classification des systèmes de racines prouve que $\sigma_1 \sigma_2 = \text{Id}$ ou τ sur $\bar{\pi}$, donc $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $\sigma_2 \tau$ sur $\hat{\mathfrak{h}}$.

b) Quitte à changer σ_2 en $\sigma_2 \tau$, on peut donc supposer que σ_1 et σ_2 coïncident sur $\hat{\mathfrak{h}}$; on note σ l'involution correspondante de $\hat{\Delta}$. Alors $\sigma_1 \sigma_2(\bar{e}_{\alpha}) = \eta_2(\alpha) \sigma_1(\bar{e}_{\sigma\alpha}) = \eta_1(\sigma\alpha) \eta_2(\alpha) \bar{e}_{\alpha}$ et $\sigma_2 \sigma_1(\bar{e}_{\alpha}) = \eta_2(\sigma\alpha) \eta_1(\alpha) \bar{e}_{\alpha}$, pour $\alpha \in \hat{\Delta}$ et, d'après 3.5, on a $\sigma_1 \sigma_2(\bar{e}_{\alpha}) = \sigma_2 \sigma_1(\bar{e}_{\alpha})$, donc σ_1 et σ_2 commutent.

c) Ainsi $\varphi = \sigma_1 \sigma_2$ est une involution de $\hat{\mathfrak{h}}$ commutant à τ , dont la restriction à $\hat{\mathfrak{h}}^{\tau}$ est l'identité. D'après le lemme 1.9 on a $\varphi = \tau$ ou $\varphi = \text{Id}$, c'est-à-dire $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $\sigma_1 = \sigma_2 \tau$. \square

Remarque : Ceci est la démonstration de Berger dans [Ber ; p. 107], si ce n'est qu'il n'y est pas clairement expliqué pourquoi on peut décrire τ , σ_1 et σ_2 de manière agréable dans la même base de Chevalley.

3.8.- Description et classification des ELS :

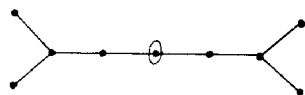
Tous les résultats précédents permettent de décrire et classier plus facilement les ELS ; c'est fait dans [Ka]. Nous allons indiquer brièvement ici cette description dans le cas (plus simple) des formes intérieures, c'est-à-dire quand τ est un automorphisme intérieur. On utilise pour cela le diagramme de Dynkin complété de \mathfrak{h} dont les sommets correspondent à $\Omega = \mathfrak{h} \cup \{-\alpha\}$ et la description se fait par rapport à la base de Chevalley de 3.5.

a) D'après 2.11 (et comme $\tau = \text{Id}$) τ est déterminé par le fait que $\tau|_{\mathfrak{h}} = \text{Id}$ et $\tau(\hat{e}_\alpha) = \pm \hat{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \Omega$. Plus précisément seuls un ou deux de ces α correspondent au signe $-$: on entoure (d'un rond) les sommets correspondants. La somme des coefficients des sommets entourés est 2. S'il y a deux sommets entourés, l'un des deux est $-\alpha$. Le diagramme de Dynkin de \mathfrak{h}^τ s'obtient en retirant de Ω les sommets entourés.

Exemple :

$\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(16, \mathbb{C})$

$\mathfrak{h}^\tau = \mathfrak{su}(8, \mathbb{C}) + \mathfrak{su}(8, \mathbb{C}) ; \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(8, 8)$



b) Pour décrire σ on procède comme suit :

On se donne une involution s de Ω , représentée par des flèches sur le diagramme de Dynkin complété et on encadre (par un carré) certains sommets de Ω . Alors σ est déterminé par :

$\sigma(\alpha^\vee) = s(\alpha^\vee)$ si $\alpha \in \Omega$

$\sigma(\hat{e}_\alpha) = \hat{e}_{s\alpha} ; \sigma(\hat{e}_{-\alpha}) = \hat{e}_{-s\alpha}$ si $\alpha \in \Omega$ n'est pas encadré

$\sigma(\hat{e}_\alpha) = -\hat{e}_{s\alpha} ; \sigma(\hat{e}_{-\alpha}) = -\hat{e}_{-s\alpha}$ si $\alpha \in \Omega$ est encadré.

Comme σ est une involution, si α est encadré $s(\alpha)$ aussi.

c) Il faut voir quelles sont les descriptions ci-dessus qui correspondent effectivement à une involution. La proposition suivante est une conséquence assez simple de [B ; III 1.2].

Proposition :

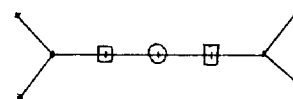
Il existe une telle involution σ si et seulement si la somme des coefficients des sommets encadrés est paire, sauf dans le cas où \mathfrak{h} est de type A_{2n} et l'involution s a un unique point fixe γ dans Ω ; alors γ doit être encadré et les autres sommets le sont éventuellement par paire (échangée par s).

Comme cette description de σ n'est pas la description normalisée de 2.8 et 2.10 le calcul de \mathfrak{h}^{σ} n'est pas toujours facile [Ka].

d) Il est clair que l'involution σ commute à τ si et seulement si l'involution s stabilise l'ensemble des sommets entourés. Alors on lit directement sur le diagramme l'action de σ sur \mathfrak{h}^{τ} (cf. 3.5) et on peut encore donner quelques règles simples pour que cette action sur \mathfrak{h}^{τ} soit normalisée c'est-à-dire adaptée à l'épinglage (3.2).

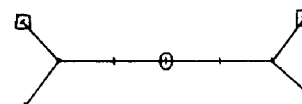
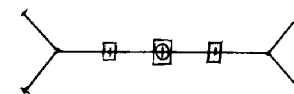
Avec ces conventions on a normalisé τ et la restriction de σ à \mathfrak{h}^{τ} . Pour la classification il suffit de décider (cas par cas) quand un ELS est isomorphe à son associé.

e) Nous terminerons par des exemples tirés de [Ka]. Ces ELS correspondent à l'exemple ci-dessus de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(8, 8)$. On indique ci-dessous successivement un ELS et son associé.



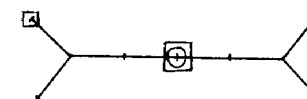
$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{su}(2, 2) + \mathfrak{su}(6, 6)$

associé de : $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{su}(2, 6) + \mathfrak{su}(2, 6)$

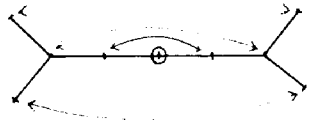


$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{su}(4, 4) + \mathfrak{u}(1)$

isomorphe à son associé :

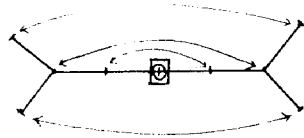


Les trois exemples précédents sont ceux de 1.10.a

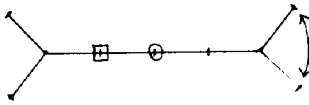


$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$$

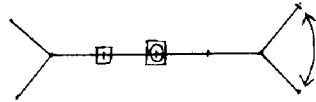
associé de : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{su}(8, \mathbb{C})$



$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{su}(1,6) + \mathfrak{su}(2,7)$$



associé de : $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma} = \mathfrak{su}(1,2) + \mathfrak{su}(6,7)$



3.9.- Remarque dans le cas où σ ne stabilise pas la base $\hat{\mathfrak{n}}$:

C'est le cas gênant déjà signalé en 3.4.2 où σ se décrit agréablement dans une autre sous-algèbre de Cartan que \mathfrak{h} .

L'algèbre $\mathfrak{t} = (\hat{\mathfrak{h}}^{\sigma})^{\sigma} = (\hat{\mathfrak{h}}^{\sigma})^1$ est une sous-algèbre de Cartan de $(\hat{\mathfrak{n}}^1)^{\sigma}$. Considérons le centralisateur \mathfrak{r} de \mathfrak{t} dans $\hat{\mathfrak{n}}^1$. On a $\mathfrak{r} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus (\oplus_{\alpha} \hat{\mathfrak{n}}_{\alpha})$ pour $\pm\alpha$ dans $\hat{\Delta}_0$ ensemble des $\alpha \in \hat{\Delta}^+$ dont la restriction à \mathfrak{t} est nulle.

L'algèbre \mathfrak{r}^1 est le centralisateur $\hat{\mathfrak{h}}^1$ de \mathfrak{t} dans $\hat{\mathfrak{n}}^1$, c'est-à-dire une sous-algèbre de Cartan de $\hat{\mathfrak{n}}^{\sigma}$. Ainsi τ est une involution de l'algèbre réductive \mathfrak{r} dont l'ensemble des points fixes est contenu dans une sous-algèbre de Cartan. Un rapide regard à la classification prouve que le semi-simplifié de \mathfrak{r} est un produit d'algèbres \mathfrak{sl}_2 , donc $\hat{\Delta}_0$ est un système de racines fortement orthogonales ; de plus on a forcément $\tau(\alpha) = -\alpha$ ou $\tau = -\text{Id}$ sur $\hat{\mathfrak{n}}_{\alpha}$ pour $\alpha \in \hat{\Delta}_0$. Puisque τ stabilise $\hat{\mathfrak{n}}$ donc $\hat{\Delta}^+$, la première possibilité est exclue, donc $\tau = -\text{Id}$ sur $\hat{\mathfrak{n}}_{\alpha}$ pour $\alpha \in \hat{\Delta}_0$.

De même \mathfrak{r}^{σ} est une sous-algèbre de Cartan de $\hat{\mathfrak{n}}^{\sigma}$, donc $\sigma(\alpha) = -\alpha$ ou $\sigma = -\text{Id}$ sur $\hat{\mathfrak{n}}_{\alpha}$ pour $\alpha \in \hat{\Delta}$. Mais pour la seconde possibilité on aurait $\tau\alpha = \sigma\alpha = \alpha$ donc $\tau\alpha^{\vee} = \sigma\alpha^{\vee} = \alpha^{\vee}$; ainsi α^{\vee} serait dans \mathfrak{t} alors que $\alpha(\alpha^{\vee}) = 2$ et $\alpha \in \hat{\Delta}_0$, ce qui est absurde. On a donc forcément $\sigma(\alpha) = -\alpha$, $\forall \alpha \in \hat{\Delta}_0$.

En particulier $\mathfrak{r}^{\sigma} = \hat{\mathfrak{h}}^{\sigma} \oplus (\oplus_{\alpha} \mathbb{C}(e_{\alpha}^{\sigma} + \sigma e_{\alpha}^{\sigma}))$ (somme étendue aux $\alpha \in \hat{\Delta}_0$) est une sous-algèbre de Cartan de $\hat{\mathfrak{n}}^{\sigma}$ dont le centralisateur dans $\hat{\mathfrak{g}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\hat{\mathfrak{n}}$ qui permet de décrire agréablement σ (i.e. σ stabilise une base de son système de racines).

Considérons maintenant $\mathfrak{n} = \hat{\mathfrak{L}}(\hat{\mathfrak{n}}, \tau)$ et son involution $\hat{\sigma} = \hat{\mathfrak{L}}(\sigma, \tau)$. Comme $(\hat{\mathfrak{g}}^{\hat{\sigma}})_{\text{im}}$ est le centralisateur dans $\hat{\mathfrak{g}}^{\hat{\sigma}}$ de $\mathfrak{h}'^{\hat{\sigma}} = (\hat{\mathfrak{h}}^{\tau})^{\sigma}$, il est contenu dans $\mathfrak{r}^{\sigma} \oplus \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Plus précisément les racines $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ telles que $\hat{\mathfrak{n}}_{\alpha} + \hat{\sigma}(\hat{\mathfrak{n}}_{\alpha})$ rencontre $(\hat{\mathfrak{g}}^{\hat{\sigma}})_{\text{im}}$ sont de la forme $\alpha = (pk/2)\delta \pm \hat{\alpha}$ avec $\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}_0$ et de plus, comme on a vu que τ est moins l'identité sur $\hat{\mathfrak{n}}_{\alpha}$, p est impair ; la restriction α' de α à \mathfrak{h}' est $(pk/2)\delta'$.

Si on regarde la description de \mathfrak{g} sous la forme $\hat{\mathfrak{L}}(\hat{\mathfrak{n}}, \xi)$ où ξ est un automorphisme de diagramme, il reste que les racines $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ telles que $\hat{\mathfrak{n}}_{\alpha} + \hat{\sigma}(\hat{\mathfrak{n}}_{\alpha})$ rencontre $(\hat{\mathfrak{n}}^{\hat{\sigma}})_{\text{im}}$ (dont la liste est indiquée dans la liste II de [B ; V] au n° c) ont pour restriction à \mathfrak{h}' des racines d'un système fortement orthogonal et que leur restriction à \mathfrak{h}' est $(pk/2)\delta'$ avec p impair. C'est ce que l'on constate dans la liste II de [B] pour les involutions sauf dans les deux derniers cas (pour $D_{2s}^{(2)}$), ce qui prouve que ces deux involutions ne peuvent s'écrire sous la forme $\hat{\mathfrak{L}}(\sigma, \tau)$ avec σ et τ des involutions de $\hat{\mathfrak{g}}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] J. BAUSCH, Etude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines.
Thèse de l'Université Nancy I, septembre 1985, ce volume pages 5 à 124.
- [B'] J. BAUSCH, Automorphismes des algèbres de Kac-Moody affines.
Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 302 (1986), pp. 409-412.
- [B-R] J. BAUSCH et G. ROUSSEAU, involutions de première espèce des algèbres affines.
Ce volume pages 125 à 139.
- [Ber] M. BERGER, Les espaces symétriques non compacts.
Annales Sci. Ec. Norm. Sup. 74 (1957), pp. 85-177.
- [BBK] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie.
Chapitres I à IX.
- [B-M] A. BOREL et G.D. MOSTOW, On semi-simple automorphisms of Lie algebras.
Ann. of Math. 61 (1955), pp. 389-405.
- [H] S. HELGASON, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.
Academic Press, New-York, 1978.
- [He] A.G. HELMINCK, Algebraic groups with a commuting pair of involutions and semi-simple symmetric spaces.
Advances in Math. 71 (1988), pp. 21-91.
- [Ka] S. KABBAJ, Classification locale des espaces affines symétriques.
Thèse de 3ème cycle, Nancy, janvier 1986.
- [K] V.G. KAC, Infinite dimensional Lie algebras.
Cambridge University Press (1985).
- [O-S] T. OSHIMA et J. SEKIGUCHI, The restricted root system of a semi-simple symmetric pair.
Advanced Studies in Pure Mathematics 4 (1984), pp. 433-497.
- [R2] G. ROUSSEAU, Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines.
Ce volume pages 175 à 205.
- [R3] G. ROUSSEAU, Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines.
Actes du symposium international sur l'analyse harmonique, Luxembourg (septembre 1987), Lecture Note in Math. 1359, Springer, 1988.