Revue de l'Institut Elie Cartan
n° 11
Nancy, 1987/89

INVOLUTIONS DE PREMIERE ESPECE DES ALGEBRES AFFINES

par Jean BAUSCH et Guy ROUSSEAU (*)

Nous allons indiquer la classification de ces involutions et réparer ainsi (définitivement, nous l'espérons) les imprécisions et omissions de la classification par Levstein [L]. Rappelons que ce dernier article contient outre les résultats fondamentaux préliminaires (cf. [B]), une première étape vers la classification des involutions de seconde espèce.

Les notations sont celles de [B] si ce n'est que l'on note par la lettre grecque iota le nombre complexe $\iota = \sqrt{-1}$.

§ 1.- Classification des involutions de première espèce :

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody affine. Nous allons déterminer les classes de conjugaison d'involutions de première espèce σ de $\mathfrak{g}$ modulo conjugaison par tous les automorphismes de $\mathfrak{g}$ (ou les seuls automorphismes de première espèce de $\mathfrak{g}$: ce sera la même chose) ou les automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$.

C'est un exercice d'application de [B ; V.§ 3 et 4].

1.1.- Involutions intérieures :

Avec les notations de [B ; V.§ 3] on a $m = 2$ donc $j = 0$ ou 1 . Le système de racines Δ_j^1 est Δ si et seulement si Δ est de type (Aff 1) ou $A_{2\ell}^{(2)}$ ou (Aff 2) avec $j = 1$. Les entiers positifs m_i vérifient $\sum_{i=o}^{\ell} b_i \cdot m_i = 2 - j$. Comme σ ne doit pas être triviale au moins un des entiers $j, m_1, \ldots, m_\ell$ doit être impair.

Toute permutation du diagramme de DYNKIN de Δ_j^1 induit une permutation des m_i qui se traduit par une conjugaison des σ correspondant par des automor-

---

(*) La plupart des résultats de cet article ont été établis par le premier auteur préliminairement à sa thèse. La rédaction dans le goût de cette thèse et quelques compléments sont dûs au second.

phismes de première espèce (et il n'y a pas d'autre conjugaison). Par contre pour la classification à automorphisme intérieur près les seuls automorphismes de diagramme autorisés sont tous les automorphismes si $\Delta_j^1 \neq \Delta$, tous les automorphismes décrits au c) de la liste I de [B ; V.§ 3] si $\Delta_j^1 = \Delta$ et $j = 0$ et tous les automorphismes du groupe $2.(\mathring{\mathfrak{h}}_o^-)_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}\mathring{W}(\theta_1^\vee)$ de l. c. si $\Delta_j^1 = \Delta$ et $j = 1$.

Soit $p_o, p_1, \dots, p_\ell$ la base duale (définie modulo le centre) de $\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, et notons $\tau_i = \exp \operatorname{ad} \imath\pi p_i$ $(0 \le i \le \ell)$. Alors σ est le produit (commutatif) des τ_i avec $i \ge 1$ pour lesquels m_i est impair et éventuellement de τ_o (si $m'_o = j - \sum_{i\geq 1} a_i m_i$ est impair). Ce produit est toujours réduit à un ou deux facteurs.

La valeur propre de σ sur $\mathfrak{g}_{r\delta}$ est $(-1)^{rj}$ $(r \in \mathbb{Z})$, celle sur $\mathfrak{g}_\alpha$ avec $\alpha = \sum_{i\in I} c_i \alpha_i$ est $\Pi(-1)^{c_i}$ où le produit est étendu aux i tels que τ_i soit un facteur de σ.

1.2.- Involutions de première espèce non intérieures :

On choisit un automorphisme de diagramme ρ d'ordre $n = 2$ dans la liste II de [B ; V.§ 4], sans oublier que, si on raisonne à automorphismes intérieurs près, il faut considérer tous les éléments des classes de conjugaison dont des représentants sont indiqués dans cette liste.

On a $n = m = 2$, donc $j = 0$ ou 1 et même $j = 0$ si $n'_o = 2$, c'est-à-dire si $\tilde\delta \neq \delta'$. Le système de racines Δ_j^1 est Δ^1 si et seulement si Δ^1 est de type (Aff 1) ou $A_{2\ell}^{(2)}$ ou (Aff 2) avec $j = 1$. Les entiers positifs m_i $(i \in I')$ vérifient $\sum_{i\in I'} b_i . m_i = 2 - j$; de plus $m'_i = \frac{m_i}{n_i} \in \mathbb{N}$ pour $i \neq 0$ et $m'_o = (j - \sum_{i\in I''} a_i m_i)/n_o \in \mathbb{Z}$; enfin on peut supposer $m_i = 0$ ou 1 pour $i \neq 0$.

Si $\Delta_j^1 \neq \Delta^1$ toute permutation du diagramme de DYNKIN Δ_j^1 induit une permutation des m_i qui se traduit par une conjugaison des σ correspondant par des automorphismes intérieurs (et il n'y a pas d'autre conjugaison). Si $\Delta_j^1 = \Delta^1$ les seules permutations autorisées pour la classification à automorphisme intérieur près sont celles provenant de $(\mathring{\mathfrak{h}}_o^{1-})_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}\mathring{W}^1(\theta_1^\vee)$ si $j = 0$ (resp. $2(\mathring{\mathfrak{h}}_o^{1-})_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}\mathring{W}^1(\theta_1^\vee)$ si $j = 1$), ces groupes étant décrits au c) de la liste I pour Δ^1 ; pour la classification à automorphismes de première espèce près on doit rajouter les permutations décrites au d) de la liste II (pour $\mathfrak{g}$ et ρ). Il se trouve qu'il n'y a pas d'autre conjugaison à automorphismes généraux près.

L'involution σ est le produit de ρ et des τ_i $(i \in I)$ pour lesquels m'_i (ou $m'_{\rho i}$ si $i \notin I'$) est impair.

Si i n'est pas dans l'orbite de 0, m'_i est impair si et seulement si $m_i = 1$ et alors forcément $n_i = 1$, c'est-à-dire que ρ fixe i. Par contre il peut se produire que l'on ait m'_o impair et $\rho o \neq 0$ (on a alors $m'_o = -1$, $j = 0$, $\sum_{i\in I''} a_i m_i = \sum_{i\in I''} b_i m_i = 2$, $m_o = 0$ et $n_o = 2$) ce qui est gênant. Dans ce cas on préfère changer σ en une autre involution σ qui lui est conjuguée par automorphisme intérieur ([B ; V.1.2.c] avec $h_o = \imath\pi\tilde{p}_o$) : on garde les mêmes m'_i pour $i \in I'$ et m'_o devient 0, ce qui est préférable ; cependant j devient alors égal à 2 (contrairement aux choix initiaux).

Avec cette modification éventuelle σ est, dans tous les cas, le produit commutatif de ρ et de certains τ_i ; les $i \in I'$ qui interviennent sont en nombre au plus égal à 2, ils vérifient tous $\rho i = i$ et ce sont ceux tels que $m'_i = 1$.

§ 2.- Indications sur le calcul de $\mathfrak{g}^\sigma$:

2.1.- Le calcul du système de racines $\Delta^\sigma = \Delta(\mathfrak{g}^\sigma, \mathfrak{h}^\rho)$ est toujours faisable cas par cas à partir de la description de σ ; il a d'ailleurs déjà été fait dans [B] quand $\sigma = \rho$ est un automorphisme de diagramme. On peut aussi calculer les dimensions des espaces radiciels imaginaires et en déduire le système Δ_o des racines imaginaires supplémentaires, cf. [B ; A.2.7.b].

2.2.- Nous allons utiliser une méthode différente, souvent plus rapide et en tout cas plus précise puisqu'elle décrit entièrement $\mathfrak{g}^\sigma$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'écrit sous la forme $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi) = \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \oplus (\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} t^r \mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{r}})$ où $\mathring{\mathfrak{g}}$ est une algèbre simple de dimension finie et ξ est un automorphisme de diagramme (trivial ou non) de $\mathring{\mathfrak{g}}$, cf. [B ; I.§ 5]. D'après [K ; § 8] on peut aussi changer ξ en $\xi\theta$ où θ est l'automorphisme intérieur d'ordre fini $\exp \operatorname{ad}(\imath\pi h/m)$ avec $h \in (\mathring{\mathfrak{h}}_o^-)_{\mathbb{Z}} = (\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}})^\rho$ et $m \in \mathbb{N}^*$; on notera cependant qu'alors l'élément d de la définition de $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi)$ n'est plus l'élément d "canonique" défini par exemple dans [B] (confer. [R1 ; 2.12 et 2.14]).

On décrira $\mathfrak{g}^\sigma$ sous la forme $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^\tau,\pi)$ où τ est une involution de $\mathring{\mathfrak{g}}$ et π un automorphisme d'ordre fini de $\mathring{\mathfrak{g}}^\tau$. En fait la forme de Killing (convenablement normalisée) sur $\mathring{\mathfrak{g}}$ qui a servi à définir $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi)$ (ou $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi\theta)$) induit sur l'algèbre réductive $\mathring{\mathfrak{g}}^\tau$ une forme invariante et non dégénérée ; c'est en utilisant cette forme que les formules de [B ; I.5.1] décrivent la structure d'algèbre de Lie de $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\tau},\pi) = \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \oplus (\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} (\mathring{\mathfrak{g}}^{\tau})_{\bar r})$ comme sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

L'algèbre de Lie réductive $\mathring{\mathfrak{g}}^{\tau}$ s'écrit $\mathfrak{z} \oplus \mathring{\mathfrak{g}}_1 \oplus \dots \oplus \mathring{\mathfrak{g}}_s$ où $\mathfrak{z}$ est un centre de dimension 0 ou 1 et $\mathring{\mathfrak{g}}_1, \dots, \mathring{\mathfrak{g}}_s$ des algèbres simples ; il est alors clair que $\mathring{\mathfrak{g}}^{\tau}$ est un produit semi-direct $\mathfrak{g}^{1} \ltimes \mathbb{C}d$ et que $\mathfrak{g}'^{\sigma}/\mathbb{C}c = \mathfrak{g}^{1}/\mathbb{C}c$ est le produit direct des algèbres $\mathfrak{g}_i^{1}/\mathbb{C}c = L(\mathring{\mathfrak{g}}_i,\pi^{q_i})$ (le produit est étendu à un système de représentants des orbites de π dans $\{1,\dots,s\}$ et π^{q_i} est la plus petite puissance de π stabilisant $\mathring{\mathfrak{g}}_i$) et de l'algèbre commutative $(\mathfrak{g}_o + \mathbb{C}c)/\mathbb{C}c = L(\mathfrak{z},\pi) = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} t^r \mathfrak{z}_{\bar r}$.

On obtient ainsi directement la description de $\Delta(\mathfrak{g}^{\sigma},\mathfrak{h}^{\rho})$ y compris les racines imaginaires supplémentaires (ce sont les $n\delta$ avec $n \neq 0$ si $\pi = \mathrm{Id}$ sur $\mathfrak{z}$, avec n impair si $\pi = -\mathrm{Id}$ sur $\mathfrak{z}$) . On constate aussi que dans ce cas les multiplicités (supplémentaires : c'est-à-dire dans $\mathfrak{g}_o$) des racines imaginaires supplémentaires sont toutes 1 , c'est-à-dire que $\mathfrak{g}'^{\sigma}/\mathbb{C}c$ est en fait décrit par $\Delta^{\sigma} + \Delta_o$.

On va maintenant indiquer, catégorie par catégorie, comment obtenir la description de $\mathfrak{g}^{\sigma}$ sous la forme $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\tau},\pi)$. Dans les tables, pour ne pas alourdir les notations, on ne déterminera π que modulo les automorphismes intérieurs de $\mathring{\mathfrak{g}}^{\tau}$, ce qui permet de déterminer $\Delta^{\sigma} + \Delta_o$ (et même aussi $\mathfrak{g}^{\sigma}$) .

2.3.- σ <u>intérieure et</u> $j = 0$:

On a $\sigma = \exp \mathrm{ad}\, \iota\pi h$ avec $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ et $0 = j = \delta(h)$. Ainsi $h \in (\mathring{\mathfrak{h}}_{\bar o})_{\mathbb{Z}}$, donc σ est induit par une involution encore notée σ de $\mathring{\mathfrak{g}}$.

Notons, comme en [B ; I.5.3], $(\mathring{p}_i)$ $i \in [1,\ell]$ la base de $\mathring{\mathfrak{h}}_{\bar o}$ duale de la base (α_i) $i \in [1,\ell]$. Alors $\mathring{\tau}_i = \exp \mathrm{ad}\, \iota\pi \mathring{p}_i$ est une involution de $\mathring{\mathfrak{g}}$ commutant à ξ et donc aussi une involution de $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi)$.

Il se trouve que σ est toujours de la forme $\mathring{\tau}_i$ pour un $i \in [1,\ell]$ et donc $\mathfrak{g}^{\sigma} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\mathring{\tau}_i},\xi)$ que l'on calcule facilement.

2.4.- σ <u>intérieure et</u> $j = 1$:

On a presque toujours $\sigma = \tau_o$ qui est l'identité en degrés pairs et moins l'identité en degrés impairs pour la graduation naturelle de $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi)$. On a donc $\mathfrak{g}^{\tau_o} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\xi})$ sauf si $k = 3$ auquel cas $\mathfrak{g}^{\tau_o} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi^2) \simeq \mathring{\mathfrak{g}}$.

Pour certaines algèbres de type (Aff 2) on peut avoir $\sigma = \tau_i = \tau_o \mathring{\tau}_i$ avec $i \geq 1$ et α_i provenant d'une racine de $(\mathring{\mathfrak{g}},\mathring{\mathfrak{h}})$ fixe par ξ (ces cas avaient

été oubliés par Levstein). Alors σ induit sur $\mathring{\mathfrak{g}}$ l'automorphisme $\xi\mathring{\tau}_i$ et on a $\mathfrak{g}^{\sigma} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\xi\mathring{\tau}_i},\xi) = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\xi\mathring{\tau}_i},\mathring{\tau}_i)$ que l'on calcule facilement.

2.5.- σ <u>extérieure et</u> $\rho o = 0$:

Dans ce cas forcément $\mathfrak{g}$ est de type (Aff 1) et on la décrit sous la forme $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$. L'automorphisme de diagramme ρ est $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ linéaire, sauf dans le cas de $A_{2r}^{(2)}$ où $\rho = \rho_1$ est antilinéaire.

Si $\mathfrak{g} = A_{2r}^{(1)}$, $\rho = \rho_1$ et $j = 1$ alors $\sigma = \rho_1 \tau_o$ est $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ linéaire et induit sur A_{2r} l'unique automorphisme de diagramme ξ donc $\mathfrak{g}^{\sigma} = \hat{L}(A_{2r}^{\xi}) = \hat{L}(B_r) = B_r^{(1)}$.

Si $\mathfrak{g} = A_{2r}^{(1)}$, $\rho = \rho_1$ et $j = 0$ alors $\sigma = \rho_1 = (\rho_1\tau_o)\tau_o$ et $\mathfrak{g}^{\sigma} = \hat{L}(A_{2r},\xi) = A_{2r}^{(2)}$.

Dans les autres cas où $j = 0$, l'automorphisme σ est de la forme ρ ou $\rho\mathring{\tau}_i$ et est $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ linéaire. Si ξ est l'automorphisme de diagramme de $\mathring{\mathfrak{g}}$ induit par ρ , on a $\mathfrak{g}^{\sigma} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\xi})$ ou $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\xi\mathring{\tau}_i})$ que l'on calcule facilement.

Dans les autres cas où $j = 1$, on a $\sigma = \rho\tau_o$ et, si ξ est l'automorphisme de diagramme de $\mathring{\mathfrak{g}}$ induit par ρ , on a $\mathfrak{g}^{\sigma} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi)$ que l'on calcule facilement.

2.6.- σ <u>extérieure,</u> $\rho o \neq 0$ <u>et</u> $\mathfrak{g}$ <u>de type (Aff 1)</u> :

On a forcément $n'_o = n_o = 2$, donc $j = 0$ (ou éventuellement 2) .

Soit $r = \rho o$. On sait que $\mathfrak{g}$ peut se réaliser sous la forme $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\theta)$ où θ est l'involution $\mathring{\tau}_r = \exp \mathrm{ad}\, \iota\pi\mathring{p}_r$. Dans cette réalisation e_o et e_r sont de degrés 1 , f_o et f_r de degrés -1 et les autres e_i , f_i de degré 0 ; ainsi σ et ρ sont des automorphismes gradués de $\mathfrak{g}$ (fixant c et d) . Par ailleurs ρ et σ sont toujours $\mathbb{C}[t^2,t^{-2}]$ linéaires.

Si on note encore σ l'involution, commutant à θ , induite par σ sur $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathring{\mathfrak{g}}_{\bar o} \oplus \mathring{\mathfrak{g}}_{\bar 1}$ on a $\mathfrak{g}^{\sigma} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\theta)^{\sigma} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma},\theta)$. Il s'agit alors de calculer l'algèbre réductive $\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma}$ et l'involution θ sur $\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma}$. Le problème est que σ n'est pas décrite de manière canonique.

On sait que $(\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma})^{\theta} = (\mathring{\mathfrak{g}}^{\theta})^{\sigma}$ et le calcul de $\mathring{\mathfrak{g}}^{\theta}$ et $(\mathring{\mathfrak{g}}^{\theta})^{\sigma}$ est sans problème, en utilisant par exemple [H ; X.§ 5]. Ceci permet de déterminer θ sur $\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma}$ (ou plutôt sa classe de conjugaison dans $\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma}$) quand on connaît $\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma}$. En fait pour ne pas alourdir les notations, on ne déterminera que la classe de θ dans $\mathrm{Aut}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma})/\mathrm{Int}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma})$, ce qui suffit pour déterminer $\Delta^{\sigma} + \Delta^{o}$ et même $\mathfrak{g}^{\sigma}$.

Pour déterminer $\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma}$ on peut utiliser les résultats de [Ka] où tous ces calculs sont faits. On peut aussi utiliser les résultats de calculs du type décrit en 2.1 (déjà faits dans [B] si $\sigma = \rho$) : la connaissance de Δ^{σ} (même si on ne connaît pas Δ_o) permet de trouver laquelle des sous-algèbres de points fixes d'une involution de $\mathring{\mathfrak{g}}$ a priori possibles est la bonne (on prendra garde cependant à ce que l'on peut avoir $\Delta^{\sigma} = X_N^{(1)}$ avec $\mathring{\mathfrak{g}}^{\sigma} = X_N \oplus X_N$) .

2.7.- σ <u>extérieure et</u> $\mathfrak{g}$ <u>de type (Aff 2)</u> :

a) $A^{(2)}_{2\ell-1}$: On a intérêt à utiliser la réalisation $\mathfrak{g} = \hat{L}(A_{2\ell-1},\theta)$ où θ est l'involution $\xi\mathring{\tau}_{\ell}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$. En effet cette réalisation attribue le degré 1 à e_{ℓ} , -1 à f_{ℓ} et 0 aux autres e_i , f_i ; ainsi σ et ρ sont des automorphismes gradués de $\mathfrak{g}$ et on termine comme en 2.6 ci-dessus si $j = 0$.

Cependant $n'_o = 1$, on peut donc avoir $j = 1$. Mais cela n'empêche pas ρ et σ d'être $\mathbb{C}\,[t^2,t^{-2}]$ linéaires, on peut donc, encore dans ce cas, raisonner comme en 2.6.

b) $D^{(2)}_{2r+1}$: On utilise la réalisation $\mathfrak{g} = \hat{L}(D_{2r-1},\xi\mathring{\tau}_r)$ et on raisonne comme pour le a).

c) $D^{(2)}_{2r}$: Pour obtenir sur $\mathfrak{g}$ une graduation invariante par ρ on est obligé d'utiliser une réalisation $\mathfrak{g} = \hat{L}(D_{2r},\xi\theta)$ où θ est un automorphisme intérieur de $\mathring{\mathfrak{g}} = D_{2r}$, commutant à ξ , d'ordre au moins 4, par exemple $\theta = \operatorname{expad} i\frac{\pi}{2}\,\mathring{p}_{2r-1}$. Pour cette réalisation le degré de e_o et e_{2r-1} est 1 , celui de f_o et f_{2r-1} est -1 et le degré des autres e_i , f_i est 0 .

Comme en 2.6 ci-dessus, on obtient $\mathfrak{g}^{\rho} = \hat{L}(D^{\rho}_{2r},\xi\theta)$ et $(D^{\rho}_{2r})^{\xi\theta} = (D^{\xi\theta}_{2r})^{\rho} = (A_{2r-2})^{\rho} = B_{r-1}$.

Malheureusement D^{ρ}_{2r} n'est pas calculé par Kabbaj. Cependant ρ est une involution de D_{2r} et $\xi\theta$ est un automorphisme d'ordre 4 de D^{ρ}_{2r} . En examinant toutes les possibilités pour D^{ρ}_{2r} et ensuite pour le rang de $(D_{2r})^{\xi\theta}$, on sait qu'il n'y en a qu'une compatible avec le résultat précédent : $D^{\rho}_{2r} = D_r + D_r$ et $\zeta = \xi\theta$ est un automorphisme d'ordre 4 qui permute les deux facteurs D_r et tel que ζ^2 soit extérieur sur chacun des facteurs D_r .

<u>Remarque</u> : La nécessité pour $\xi\theta$ d'être d'ordre 4 explique que ce cas n'intervient pas dans [Ka]. Cet exemple a en fait deux particularités : c'est le seul automorphisme de diagramme d'ordre 2 incompatible avec toute réalisation $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\zeta)$ avec ζ une involution ; c'est aussi le seul pour lequel il existe des racines réelles positives de hauteurs non congrues modulo la hauteur de δ dont les restrictions à $\mathfrak{h}^{\rho}$ sont imaginaires. Ces deux particularités sont liées : cf. [R1 ; 3.9].

§ 3.- <u>Tables</u> :

3.1.- Les tables suivantes donnent toutes les classes de conjugaison à automorphisme (de première espèce ou général) près d'involutions de première espèce d'une algèbre affine $\mathfrak{g}$.

3.2.- <u>Contenu</u> :

Dans la première colonne figurent le nom de $\mathfrak{g}$, le nom selon [B] de l'éventuel automorphisme de diagramme ρ (si l'involution n'est pas intérieure) et les restrictions sur le paramètre éventuel. Le graphe de DYNKIN de $\mathfrak{g}$ y est également indiqué avec la numérotation de ses sommets. L'action de ρ est décrite par des flèches.

Dans la seconde colonne on trouve la désignation de σ (les notations τ_i et $\mathring{\tau}_i$ ont été introduites en 1.1 et 2.3) et les restrictions sur le paramètre éventuel. Enfin on indique le cas échéant si $j = 1$ ou $j = 2$ et le nombre (s'il est différent de 1) de classes de conjugaison à automorphisme intérieur près que contient la classe de conjugaison de σ considérée.

Dans la troisième colonne, on décrit $\mathfrak{g}^{\sigma}$ comme indiqué en 2.2 en particulier l'automorphisme de l'algèbre réductive n'est déterminé qu'à un automorphisme intérieur près. On emploie les conventions suivantes : $\mathfrak{z}$ est un centre de dimension 1, ξ (resp. ξ_3) est l'automorphisme de diagramme d'ordre 2 (resp. 3) du facteur simple considéré, η permute circulairement les deux (ou trois) facteurs simples considérés et enfin ζ est l'automorphisme d'ordre 4 de $D_r + D_r$ décrit en 2.7.c.

Dans la quatrième colonne, on indique le système de racines Δ^{σ} , y compris le système Δ_o de racines imaginaires supplémentaires, selon les conventions de [B ; A.2.7].

3.3.- <u>Remarques</u> :

a) On constate que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^{\sigma}$ (ou Δ , Δ^{σ} et Δ_o) déterminent σ (à conjugaison près) : c'est un des ingrédients de la classification par Levstein.

b) Il ne semble pas y avoir de moyen aussi simple que dans le cas fini (cf. [H ; X.§ 5] ou [K ; § 8]) de déduire le diagramme de $\mathfrak{g}^{\sigma}$ d'un diagramme associé à $\mathfrak{g}$ et ρ .

3.4.- Isomorphismes de systèmes de racines :

Afin de ne pas multiplier les cas particuliers, on se permettra dans les tableaux qui vont suivre d'utiliser les désignations de systèmes de racine (finis ou affines) avec des paramètres en dehors des limitations normales. On se rappellera pour cela des isomorphismes suivants entre systèmes de racines ou algèbres de Lie (réductives ou affines) :

$$D_3 = A_3 \qquad D_3^{(1)} = A_3^{(1)} \qquad A_3^{(2)} = D_3^{(2)}$$

$$D_2 = A_1 + A_1 \qquad D_2^{(1)} = A_1^{(1)} + A_1^{(1)} \qquad D_2^{(2)} = A_1^{(1)}$$

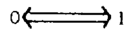
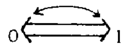
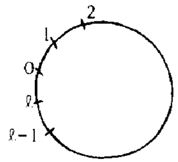
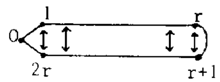
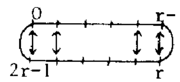
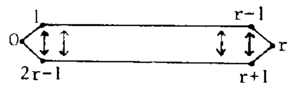
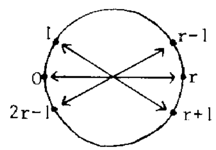
$$B_2 = C_2 \qquad B_2^{(1)} = C_2^{(1)}$$

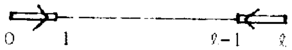
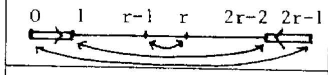
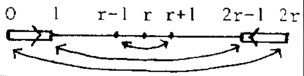
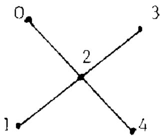
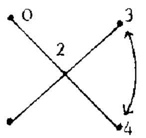
$$C_1 = B_1 = A_1 \qquad C_1^{(1)} = B_1^{(1)} = A_1^{(1)}$$

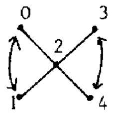
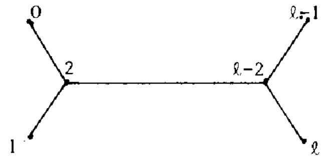
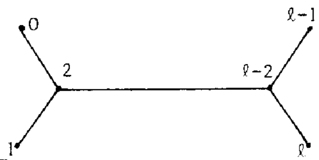
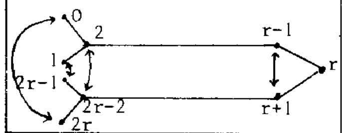
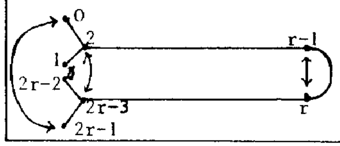
$$A_1^{(2)} = A_1^{(1)}$$

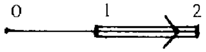
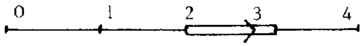
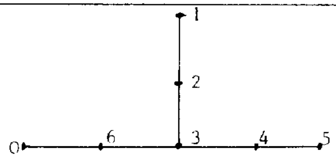
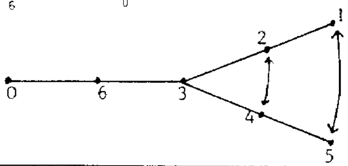
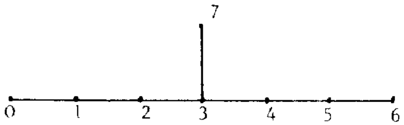
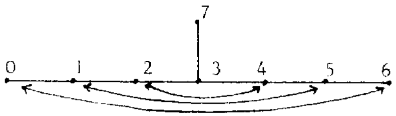
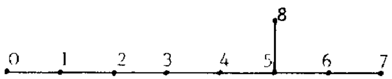
$$D_1 = \mathfrak{z} \qquad D_1^{(1)} = Z_o^{(1)} \qquad D_1^{(2)} = Z_o^{(2)}$$

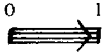
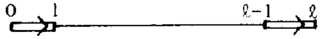
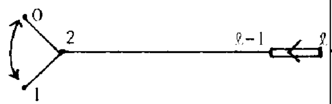
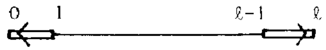
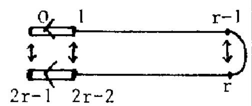
$$A_o = B_o = C_o = D_o = \emptyset = A_o^{(1)} = B_o^{(1)} = C_o^{(1)} = D_o^{(1)} = A_o^{(2)} = D_o^{(2)} .$$

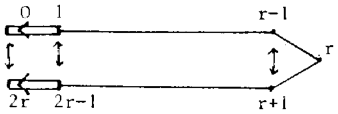
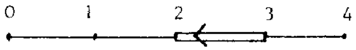
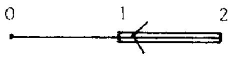
$\mathfrak{g}$ ρ	σ	$\mathfrak{g}^\sigma$	$\Delta^\sigma + \Delta_o$
$A_1^{(1)}$ 	$\tau_o\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(\mathfrak{z})$	$Z_o^{(1)}$
	τ_o $j = 1$ $\mathrm{int} = 2$	$\hat{L}(A_1) = A_1^{(1)}$	$A_1^{(1)}$
$A_1^{(1)}$ ρ 	ρ	$\hat{L}(\mathfrak{z},-\mathrm{Id})$	$Z_o^{(2)}$
$A_\ell^{(1)}$ $\ell \geq 2$ 	$\tau_o\tau_i = \mathring{\tau}_i$ $1 \leq i \leq \frac{\ell+1}{2}$	$\hat{L}(\mathfrak{g}+A_{i-1}+A_{\ell-i})$	$A_{i-1}^{(1)}+A_{\ell-i}^{(1)}+Z_o^{(1)}$
	τ_o $j = 1$ $\begin{cases}\mathrm{int} = 2 \\ \text{si } \ell \\ \text{impair}\end{cases}$	$\hat{L}(A_\ell) = A_\ell^{(1)}$	$A_\ell^{(1)}$
$A_{2r}^{(1)}$ ρ_1 $r \geq 1$ 	ρ_1 $\mathrm{int} = 2r+1$	$\hat{L}(A_{2r},\xi) = A_{2r}^{(2)}$	$A_{2r}^{(2)}$
	$\rho_1\tau_o$ $j = 1$ $\mathrm{int} = 2r+1$	$\hat{L}(B_r) = B_r^{(1)}$	$B_r^{(1)}$
$A_{2r-1}^{(1)}$ ρ_1 $r \geq 2$ 	ρ_1 $\mathrm{int} = r$	$\hat{L}(D_r,\xi) = D_r^{(2)}$	$D_r^{(2)}$
$A_{2r-1}^{(1)}$ $r \geq 2$ $\rho_2 = \rho_o\rho_1$ 	ρ_2 $\mathrm{int} = r$	$\hat{L}(C_r) = C_r^{(1)}$	$C_r^{(1)}$
	$\rho_2\tau_o\tau_r = \rho_2\mathring{\tau}_r$ $\mathrm{int} = r$	$\hat{L}(D_r) = D_r^{(1)}$	$D_r^{(1)}$
	$\rho_2\tau_o$ $j = 1$ $\mathrm{int} = 2r$	$\hat{L}(A_{2r-1},\xi) = A_{2r-1}^{(2)}$	$A_{2r-1}^{(2)}$
$A_{2r-1}^{(1)}$ $r \geq 2$ $\rho_3 = \rho_o^r$ 	ρ_3	$\hat{L}((A_{r-1}+A_{r-1})\times\mathfrak{z},\eta\times-\mathrm{Id})$	$A_{r-1}^{(1)} + Z_o^{(2)}$

$\mathcal{G}$	ρ	σ	$\mathcal{G}^{\sigma}$	$\Delta^{\sigma}+\Delta_0$
$B_{\ell}^{(1)}$ $\ell \geq 3$ 		$\tau_0\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+B_{\ell-1})$	$B^{(1)}_{\ell-1}+Z^{(1)}_0$
		$\tau_i = \mathring{\tau}_i$ $2 \leq i \leq \ell-1$	$\hat{L}(D_i+B_{\ell-i})$	$D_i^{(1)}+B^{(1)}_{\ell-i}$
		$\tau_{\ell} = \mathring{\tau}_{\ell}$	$\hat{L}(D_{\ell})$	$D_{\ell}^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0 int $= 2$	$\hat{L}(B_{\ell}) = B_{\ell}^{(1)}$	$B_{\ell}^{(1)}$
$B_{\ell}^{(1)}$ $\ell \geq 3$ 	ρ	ρ	$\hat{L}(D_{\ell},\xi)$	$D_{\ell}^{(2)}$
		$\rho\tau_i = \rho\mathring{\tau}_i$ $j = 2$ $2 \leq i \leq \ell-1$	$\hat{L}(D_{\ell-i+1}+B_{i-1},\xi\times \mathrm{Id})$	$D^{(2)}_{\ell-i+1}+B^{(1)}_{i-1}$
		$\rho\tau_{\ell} = \rho\mathring{\tau}_{\ell}$ $j = 2$	$\hat{L}(B_{\ell-1}+\mathfrak{z},\mathrm{Id}\times(-\mathrm{Id}))$	$B^{(1)}_{\ell-1}+Z^{(2)}_0$
$C_{\ell}^{(1)}$ $\ell \geq 2$ 		$\tau_0\tau_{\ell} = \mathring{\tau}_{\ell}$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+A_{\ell-1})$	$A^{(1)}_{\ell-1}+Z^{(1)}_0$
		$\tau_i = \mathring{\tau}_i$ $1 \leq i \leq \frac{\ell}{2}$	$\hat{L}(C_i+C_{\ell-i})$	$C_i^{(1)}+C^{(1)}_{\ell-i}$
		$j = 1$ τ_0 int $= 2$	$\hat{L}(C_{\ell}) = C_{\ell}^{(1)}$	$C_{\ell}^{(1)}$
$C^{(1)}_{2r-1}$ $r \geq 2$ 	ρ	ρ	$\hat{L}(A_{2r-2}+\mathfrak{z},\xi\times -\mathrm{Id})$	$A^{(2)}_{2r-2}+Z^{(2)}_0$
$C^{(1)}_{2r}$ $r \geq 1$ 	ρ	ρ	$\hat{L}(C_r+C_r,\eta) = C_r^{(1)}$	$C_r^{(1)}$
		$\rho\tau_r = \rho\mathring{\tau}_r$ $j = 2$	$\hat{L}(A_{2r-1}+\mathfrak{z},\xi\times -\mathrm{Id})$	$A^{(2)}_{2r-1}+Z^{(2)}_0$
$D_4^{(1)}$ 		$\tau_0\tau_1 = \mathring{\tau}_1$ int $= 3$	$\hat{L}(A_3+\mathfrak{z})$	$A_3^{(1)}+Z_0^{(1)}$
		$\tau_2 = \mathring{\tau}_2$	$\hat{L}(A_1+A_1+A_1+A_1)$	$A_1^{(1)}+A_1^{(1)}+A_1^{(1)}+A_1^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0 int $= 4$	$\hat{L}(D_4) = D_4^{(1)}$	$D_4^{(1)}$
$D_4^{(1)}$ 	ρ_0	ρ_0 int $= 6$	$\hat{L}(B_3) = B_3^{(1)}$	$B_3^{(1)}$
		$\rho_0\tau_0\tau_1 = \rho_0\mathring{\tau}_1$ int $= 6$	$\hat{L}(C_2+A_1)$	$C_2^{(1)}+A_1^{(1)}$
		$\rho_0\tau_0$ $j = 1$ int $= 6$	$\hat{L}(D_4,\xi) = D_4^{(2)}$	$D_4^{(2)}$

$\mathcal{G}$	ρ	σ	$\mathcal{G}^{\sigma}$	$\Delta^{\sigma}+\Delta_0$
$D_4^{(1)}$ 	ρ_2	ρ_2 int $= 3$	$\hat{L}(A_3+\mathfrak{z},\xi\times -\mathrm{Id})$	$D_3^{(2)}+Z_0^{(2)}$
		$\rho_2\tau_2 = \rho_2\mathring{\tau}_2$ $j = 2$ int $= 3$	$\hat{L}((A_1+A_1)+(A_1+A_1),\eta\times\eta)$	$A_1^{(1)}+A_1^{(1)}$
$D_{\ell}^{(1)}$ $\ell \geq 5$ 		$\tau_0\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+D_{\ell-1})$	$D^{(1)}_{\ell-1}+Z_0^{(1)}$
		$\tau_i = \mathring{\tau}_i$ $2 \leq i \leq \frac{\ell}{2}$	$\hat{L}(D_i+D_{\ell-i})$	$D_i^{(1)}+D^{(1)}_{\ell-i}$
		$\tau_0\tau_{\ell} = \mathring{\tau}_{\ell}$ int $= 2$ si ℓ pair	$\hat{L}(\mathfrak{z}+A_{\ell-1})$	$A^{(1)}_{\ell-1}+Z_0^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0 $\begin{cases}\text{int} = 2\\ (4 \text{ si } \ell \text{ pair})\end{cases}$	$\hat{L}(D_{\ell}) = D_{\ell}^{(1)}$	$D_{\ell}^{(1)}$
$D_{\ell}^{(1)}$ $\ell \geq 5$ 	ρ_0	ρ_0 int $= 2$	$\hat{L}(B_{\ell-1}) = B^{(1)}_{\ell-1}$	$B^{(1)}_{\ell-1}$
		$\rho_0\tau_0\tau_1 = \rho_0\mathring{\tau}_1$ int $= 2$	$\hat{L}(A_1+B_{\ell-2})$	$A_1^{(1)}+B^{(1)}_{\ell-2}$
		$\rho_0\tau_i = \rho_0\mathring{\tau}_i$ $2 \leq i \leq \frac{\ell-1}{2}$ int $= 2$	$\hat{L}(B_i+B_{\ell-i-1})$	$B_i^{(1)}+B^{(1)}_{\ell-i-1}$
		$\rho_0\tau_0$ $j = 1$ int $= 2$ (4 si ℓ impair)	$\hat{L}(D_{\ell},\xi) = D_{\ell}^{(2)}$	$D_{\ell}^{(2)}$
$D_{\ell}^{(1)}$ $\ell \geq 5$ 	ρ_2	ρ_2	$\hat{L}(\mathfrak{z}+D_{\ell-1},-\mathrm{Id}\times\xi)$	$D^{(2)}_{\ell-1}+Z_0^{(2)}$
		$\rho_2\tau_i = \rho_2\mathring{\tau}_i$ $j = 2$ $2 \leq i \leq \frac{\ell}{2}$	$\hat{L}(D_i+D_{\ell-i},\xi\times\xi)$	$D_i^{(2)}+D^{(2)}_{\ell-i}$
$D^{(1)}_{2r}$ $r \geq 3$ 	ρ_1	ρ_1 int $= 2$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+A_{2r-1},-\mathrm{Id}\times\xi)$	$A^{(2)}_{2r-1}+Z_0^{(2)}$
		$\rho_1\tau_r = \rho_1\mathring{\tau}_r$ $j = 2$ int $= 2$	$\hat{L}(D_r+D_r,\eta) = D_r^{(1)}$	$D_r^{(1)}$
$D^{(1)}_{2r-1}$ $r \geq 3$ 	ρ_1	ρ_1 int $= 2$	$\hat{L}(B_{r-1}+B_{r-1},\eta) = B^{(1)}_{r-1}$	$B^{(1)}_{r-1}$

$\mathfrak{g}$	ρ	σ	$\mathfrak{g}^\sigma$	$\Delta^\sigma + \Delta_0$
$G_2^{(1)}$		$\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(A_1+A_1)$	$A_1^{(1)} + A_1^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0	$\hat{L}(G_2) = G_2^{(1)}$	$G_2^{(1)}$
$F_4^{(1)}$		$\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(A_1+C_3)$	$A_1^{(1)} + C_3^{(1)}$
		$\tau_4 = \mathring{\tau}_4$	$\hat{L}(B_4) = B_4^{(1)}$	$B_4^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0	$\hat{L}(F_4) = F_4^{(1)}$	$F_4^{(1)}$
$E_6^{(1)}$		$\tau_0\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+D_5)$	$D_5^{(1)} + Z_0^{(1)}$
		$\tau_6 = \mathring{\tau}_6$	$\hat{L}(A_1+A_5)$	$A_1^{(1)} + A_5^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0	$\hat{L}(E_6) = E_6^{(1)}$	$E_6^{(1)}$
$E_6^{(1)}$	ρ_0 	ρ_0 int = 3	$\hat{L}(F_4) = F_4^{(1)}$	$F_4^{(1)}$
		$\rho_0\tau_6 = \rho_0\mathring{\tau}_6$ int = 3	$\hat{L}(C_4) = C_4^{(1)}$	$C_4^{(1)}$
		$j = 1$ $\rho_0\tau_0$ int = 3	$\hat{L}(E_6,\xi) = E_6^{(2)}$	$E_6^{(2)}$
$E_7^{(1)}$		$\tau_0\tau_6 = \mathring{\tau}_6$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+E_6)$	$E_6^{(1)} + Z_0^{(1)}$
		$\tau_7 = \mathring{\tau}_7$	$\hat{L}(A_7) = A_7^{(1)}$	$A_7^{(1)}$
		$\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(A_1+D_6)$	$A_1^{(1)} + D_6^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0 int = 2	$\hat{L}(E_7) = E_7^{(1)}$	$E_7^{(1)}$
$E_7^{(1)}$	ρ 	ρ	$\hat{L}(\mathfrak{z}+E_6,-\mathrm{Id}\times\xi)$	$E_6^{(2)} + Z_0^{(2)}$
		$j = 2$ $\rho\tau_7 = \rho\mathring{\tau}_7$	$\hat{L}(A_7,\xi) = A_7^{(2)}$	$A_7^{(2)}$
$E_8^{(1)}$		$\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(A_1+E_7)$	$A_1^{(1)} + E_7^{(1)}$
		$\tau_7 = \mathring{\tau}_7$	$\hat{L}(D_8) = D_8^{(1)}$	$D_8^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0	$\hat{L}(E_8) = E_8^{(1)}$	$E_8^{(1)}$

$\mathfrak{g}$	ρ	σ	$\mathfrak{g}^\sigma$	$\Delta^\sigma + \Delta_0$
$A_2^{(2)}$		$\tau_1 = \mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+A_1,-\mathrm{Id}\times\mathrm{Id})$	$A_1^{(1)} + Z_0^{(2)}$
		$j = 1$ τ_0	$\hat{L}(A_1) = A_1^{(1)}$	$A_1^{(1)}$
$A_{2\ell}^{(2)}$	$\ell \geq 2$ 	$\tau_i = \mathring{\tau}_i$, $1 \leq i \leq \ell$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+A_{2i-1}+A_{2\ell-2i}, -\mathrm{Id}\times\xi\times\xi)$	$A_{2i-1}^{(2)} + A_{2\ell-2i}^{(2)} + Z_0^{(2)}$
		$j = 1$ τ_0	$\hat{L}(B_\ell) = B_\ell^{(1)}$	$B_\ell^{(1)}$
$A_{2\ell-1}^{(2)}$	$\ell \geq 3$ 	$\mathring{\tau}_i = \begin{cases} \tau_0\tau_1 & \text{si } i = 1 \\ \tau_i & \text{si } i > 1 \end{cases}$ $1 \leq i \leq \frac{\ell}{2}$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+A_{2i-1}+A_{2\ell-2i-1}, -\mathrm{Id}\times\xi\times\xi)$	$A_{2i-1}^{(2)} + A_{2\ell-2i-1}^{(2)} + Z_0^{(2)}$
		$\mathring{\tau}_\ell = \tau_\ell\tau_0$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+A_{\ell-1}+A_{\ell-1}, \mathrm{Id}\times\eta)$	$A_{\ell-1}^{(1)} + Z_0^{(1)}$
		$j = 1$ τ_0 int = 2 si ℓ pair	$\hat{L}(C_\ell) = C_\ell^{(1)}$	$C_\ell^{(1)}$
		$j = 1$ $\tau_\ell = \tau_0\mathring{\tau}_\ell$	$\hat{L}(D_\ell) = D_\ell^{(1)}$	$D_\ell^{(1)}$
$A_{2\ell-1}^{(2)}$	$\ell \geq 3$ ρ 	ρ	$\hat{L}(A_{2\ell-2}+\mathfrak{z}, \xi\times-\mathrm{Id})$	$A_{2\ell-2}^{(2)} + Z_0^{(2)}$
		$\rho\tau_i = \rho\mathring{\tau}_i$ $j = 2$ $2 \leq i \leq \frac{\ell+1}{2}$	$\hat{L}(A_{2\ell-2i}+A_{2i-2}+\mathfrak{z}, \xi\times\xi\times-\mathrm{Id})$	$A_{2\ell-2i}^{(2)}$ $A_{2i-2}^{(2)} + Z_0^{(2)}$
		$j = 1$ $\rho\tau_\ell$	$\hat{L}(D_\ell,\xi) = D_\ell^{(2)}$	$D_\ell^{(2)}$
$D_{\ell+1}^{(2)}$	$\ell \geq 2$ 	$\mathring{\tau}_1 = \tau_0\tau_1$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+D_\ell, \mathrm{Id}\times\xi)$	$D_\ell^{(2)} + Z_0^{(1)}$
		$\mathring{\tau}_i = \tau_0\tau_i$ $2 \leq i \leq \ell-1$	$\hat{L}(D_i+D_{\ell-i+1}, \mathrm{Id}\times\xi)$	$D_i^{(1)} + D_{\ell-i+1}^{(2)}$
		$\mathring{\tau}_\ell = \tau_0\tau_\ell$	$\hat{L}(D_\ell+\mathfrak{z}, \mathrm{Id}\times-\mathrm{Id})$	$D_\ell^{(1)} + Z_0^{(2)}$
		$j = 1$ τ_0 int = 2	$\hat{L}(B_\ell) = B_\ell^{(1)}$	$B_\ell^{(1)}$
		$j = 1$ τ_i $1 \leq i \leq \frac{\ell}{2}$ int = 2 (sauf $i = \frac{\ell}{2}$: int = 1)	$\hat{L}(B_i+B_{\ell-i})$	$B_i^{(1)} + B_{\ell-i}^{(1)}$
$D_{2r}^{(2)}$ ρ $r \geq 2$		ρ	$\hat{L}(D_r+D_r, \zeta)$	$D_r^{(2)}$

$\mathfrak{g}$	ρ	σ	$\mathfrak{g}^{\sigma}$	$\Delta^{\sigma}+\Delta_0$
$D^{(2)}_{r+1}$	ρ $\quad r \geq 1$	ρ	$\hat{L}(A_{2r}+\mathfrak{z}, \xi\times(-Id))$	$A^{(2)}_{2r}+Z^{(2)}_0$
		$\rho\tau_r$ $j=1$	$\hat{L}(B_r+B_r,\eta)$	$B^{(1)}_r$
$E^{(2)}_6$		$\tau_1=\mathring{\tau}_1$	$\hat{L}(\mathfrak{z}+D_5,(-Id)\times\xi)$	$D^{(2)}_5+Z^{(2)}_0$
		$\tau_0\tau_4=\mathring{\tau}_4$	$\hat{L}(A_1+A_5, Id\times\xi)$	$A^{(1)}_1+A^{(2)}_5$
		τ_0 $j=1$	$\hat{L}(F_4)=F^{(1)}_4$	$F^{(1)}_4$
		$\tau_4=\tau_0\mathring{\tau}_4$ $j=1$	$\hat{L}(C_4)=C^{(1)}_4$	$C^{(1)}_4$
$D^{(3)}_4$		$\tau_0\tau_2=\mathring{\tau}_2$	$\hat{L}(A_1+(A_1+A_1+A_1), Id\times\eta)$	$A^{(1)}_1+A^{(1)}_1$
		τ_0 $j=1$	$\hat{L}(D_4,\xi_3^2)=D^{(3)}_4$	$D^{(3)}_4$

B I B L I O G R A P H I E

[B] J. BAUSCH, Etude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines.
Thèse de l'Université Nancy I, septembre 1985, ce volume pages 5 à 124.

[B'] J. BAUSCH, Automorphismes des algèbres de Kac-Moody affines.
Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 302, 1986, p. 409-412.

[H] S. HELGASON, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.
Academic Press, New York, 1978.

[Ka] S. KABBAJ, Classification locale des espaces affines symétriques.
Thèse de 3ème cycle, Université Nancy I, janvier 1986.

[K] V.G. KAC, Infinite dimensional Lie algebras.
Progress in Math. n° 44, Birkhäuser, Boston, 1983.
Seconde édition : Cambridge University Press, 1985.

[L] F. LEVSTEIN, A classification of involutive automorphisms of an affine Kac-Moody Lie algebra.
Thèse M.I.T., juin 1983, J. of algebra 114 (1988), p. 489-518.

[R1] G. ROUSSEAU, Espaces affines symétriques et algèbres de Lie affines.
Ce volume, pages 141 à 174.

P.S. : La classification des automorphismes d'ordre premier (de première ou de seconde espèce) de l'algèbre affine $A^{(1)}_{\ell}$ est donnée dans :

[Ko] Z. KOBAYASHI, Automorphisms of finite order of the affine Lie algebra $A^{(1)}_{\ell}$.
Tsukuba J. Math. 10 (1986), p. 269-283.