Formes réelles presque déployées
des algèbres de Kac-Moody affines

Guy ROUSSEAU

§ 1. Introduction

1.1. Les <u>algèbres</u> (de Kac-Moody) <u>affines</u> qui nous préoccupent sont construites comme suit, cf [K] ou [R1] :

Soient $\mathring{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie simple complexe et θ un automorphisme de $\mathring{\mathfrak{g}}$ d'ordre fini $m \geq 1$; on note $\mathring{\mathfrak{g}}_j$ l'espace propre de θ dans $\mathring{\mathfrak{g}}$ correspondant à la valeur propre $\exp(2ij\pi/m)$.

$L(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} t^j \mathring{\mathfrak{g}}_j$ est une algèbre de Lie de dimension infinie pour le crochet tel que $[t^jX, t^\ell Y] = t^{j+\ell}[X,Y]$.

On lui rajoute un centre de dimension 1 pour obtenir l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}' = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta) \oplus \mathbb{C}c$ avec le crochet tel que :

$$[t^jX + \lambda c, t^\ell Y + \mu c] = t^{j+\ell}[X,Y] + j\,\delta_{j,-\ell}(X|Y)c$$

où $\delta_{j,-\ell}$ est le symbole de Kronecker et $(\cdot|\cdot)$ la forme de Killing.

On plonge enfin $\mathfrak{g}'$ comme idéal de codimension 1 dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta) = \mathbb{C}D \oplus \mathfrak{g}'$ avec le crochet tel que $[D,c] = 0$ et $[D, t^jX] = j\,t^jX$.

Ainsi $\mathfrak{g}'$ est l'algèbre dérivée, $\mathbb{C}c$ le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'/\mathbb{C}c$ est isomorphe à $L(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta)$.

Si on remplace m par un multiple $m'm$ dans la construction précédente on obtient une algèbre $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta, m'm)$ qui est isomorphe à $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta)$: il suffit de changer D en $m'D$, t en $t^{m'}$ et c en c/m' .

PROPOSITION 1.2. <u>Soient</u> h <u>un élément semi-simple de</u> $\mathring{\mathfrak{g}}$ <u>fixe par</u> θ <u>dont toutes les valeurs propres sont entières et</u> $p \geq 1$ <u>un entier</u> ; <u>posons</u> $\sigma = \exp \operatorname{ad}(2i\pi h/mp)$. <u>Alors</u> σ <u>commute à</u> θ <u>et</u> $\theta\sigma$ <u>est un automorphisme de</u> $\mathring{\mathfrak{g}}$ <u>d'ordre divisant</u> mp

<u>Considérons l'application linéaire</u> φ <u>de</u> $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta)$ <u>dans</u> $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta\sigma, mp)$ <u>définie par</u> :

$$\varphi(D) = (D-h)/p \qquad \varphi(c) = pc$$

$$\varphi(t^jX) = t^{pj+N}X + \delta_{j,0}(h|X)c \quad \underline{\text{si}}\ X\ \underline{\text{dans}}\ \mathring{\mathfrak{g}}_j$$

<u>vérifie</u> $[h,X] = NX$.

<u>Alors</u> φ <u>est un isomorphisme d'algèbres de Lie</u>.

Démonstration : Soit $\varepsilon = \exp(2i\pi/mp)$. Si $X \in \mathring{\mathfrak{g}}_j$ et $[h,X] = NX$ on a $\sigma(X) = \varepsilon^{pj}X$ et $\theta X = \varepsilon^N X$; comme, de plus, ad h et θ commutent donc sont simultanément diagonalisables, φ est bien définie. Elle est clairement bijective. Montrons qu'elle est compatible aux crochets. On a $(h|X) = 0$ si $N \neq 0$ puisque $(\cdot|\cdot)$ est invariante ; on en déduit facilement que $\varphi([D,x]) = [\varphi D, \varphi x]$ pour x dans $\mathfrak{g}$. Si $X \in \mathring{\mathfrak{g}}_j$, $[h,X] = NX$, $Y \in \mathring{\mathfrak{g}}_\ell$, $[h,Y] = MY$ on a :

$$[\varphi(t^jX + \lambda c), \varphi(t^\ell Y + \mu c)] = [t^{pj+N}X + ac, t^{p\ell+M}Y + bc]$$

$$= t^{pj+p\ell+N+M}[X,Y] + (pj+N)\delta_{pj+N,-p\ell-M}(X|Y)c \quad .$$

Or $\varphi([t^jX+\lambda c, t^\ell Y+\mu c]) = \varphi(t^{j+\ell}[X,Y] + j\,\delta_{j,-\ell}(X|Y)c)$

$$= t^{pj+p\ell+N+M}[X,Y] + \delta_{j,-\ell}\,(pj(X|Y) + (h|[X,Y]))c \ .$$

Mais $(h|[X,Y]) = ([h,X]|Y) = N(X|Y)$ et $(X|Y)$ est nul si $N+M \neq 0$; d'où l'égalité cherchée. □

1.3. Il en résulte qu'à isomorphisme près $\mathfrak{g}$ ne dépend que de $\mathring{\mathfrak{g}}$ et de l'entier k (= 1,2 ou 3) le plus petit tel que θ^k soit un automorphisme intérieur. Si le type de $\mathring{\mathfrak{g}}$ est X_n , on dit que <u>le type</u> de $\mathfrak{g}$ est $X_n^{(k)}$. Si $k > 1$ (resp. $k = 1$) on dit que $\mathfrak{g}$ est <u>tordue</u> (resp. <u>non tordue</u>).

1.4. On sait que les <u>formes réelles</u> de $\mathfrak{g}$ correspondent aux <u>semi-involutions</u> de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire aux automorphismes τ' de $\mathfrak{g}$ tels que $\tau'^2 = \mathrm{Id}$ et $\tau'(\lambda X) = \bar{\lambda}\,\tau'(X)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ (semi-linéarité). Il y a deux manières assez simples de construire des semi-involutions de $\mathfrak{g}$:

Si $\mathring{\tau}'$ est une semi-involution de $\mathring{\mathfrak{g}}$ satisfaisant $\mathring{\tau}'\theta\mathring{\tau}' = \theta^{-1}$ on a alors $\mathring{\tau}'(\mathring{\mathfrak{g}}_j) = \mathring{\mathfrak{g}}_j$ puisque $\mathring{\tau}'$ est semi-linéaire et $\tau_1' = \hat{L}_1(\mathring{\tau}',\theta)$ est la semi-involution définie par $\tau_1'(D) = D$, $\tau_1'(c) = c$ et $\tau_1'(t^jX) = t^j\mathring{\tau}'(X)$ pour $X \in \mathring{\mathfrak{g}}_j$.

Si $\mathring{\tau}'$ est une semi-involution de $\mathfrak{g}$ satisfaisant $\mathring{\tau}'\theta\mathring{\tau}' = \theta$, on a alors $\mathring{\tau}'(\mathring{\mathfrak{g}}_j) = \mathring{\mathfrak{g}}_{-j}$ puisque $\mathring{\tau}'$ est semi-linéaire et $\tau_2' = \hat{L}(\mathring{\tau}',\theta)$ est la semi-involution définie par $\tau_2'(D) = -D$, $\tau_2'(c) = -c$ et $\tau_2'(t^jX) = t^{-j}\mathring{\tau}'(X)$ pour $X \in \mathring{\mathfrak{g}}_j$.

1.5. <u>Exemples</u> : Goodman et Wallach [G-W] ont introduit les semi-involutions $\hat{L}_2(\mathring{\tau}', \mathrm{Id})$ des algèbres affines non tordues.

Le cas où θ est une involution non triviale commutant à $\mathring{\tau}'$ correspond aux espaces affines symétriques, cf [R1] . On peut alors construire τ_1' et τ_2' .

Si $\mathring{\omega}'$ est une semi-involution de Cartan de $\mathring{\mathfrak{g}}$ (correspondant à une forme compacte de $\mathring{\mathfrak{g}}$) et commutant à θ (il en existe), alors on dit que $\omega' = \omega_2'$ est une <u>semi-involution de Cartan</u> de $\mathfrak{g}$ correspondant à une <u>forme "compacte"</u> de $\mathfrak{g}$.

1.6. Pour une même algèbre $\mathfrak{g}$ les différents choix de $\mathring{\mathfrak{g}}$ et θ tels que $\mathfrak{g}$ soit isomorphe à $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta)$ et de $\mathring{\tau}'$ satisfaisant à l'une des deux relations ci-dessus permettent de construire beaucoup de formes réelles de $\mathfrak{g}$.

On va en fait montrer qu'on obtient ainsi presque toutes les formes réelles, cf. 2.6 et 2.7.

Sauf mention du contraire on reprend les notations de [K], [B], [R1] ou [R2].

§ 2. <u>Structure de $\mathfrak{g}$ et de ses automorphismes</u>.

2.1. L'automorphisme θ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ fixe un élément régulier X de $\mathring{\mathfrak{g}}$. Soit $\mathring{\mathfrak{h}} = C_{\mathring{\mathfrak{g}}}(X)$ la sous algèbre de Cartan (en abrégé SAC) correspondante et $\mathring{\mathfrak{h}}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathring{\mathfrak{g}}_0$. Alors $\mathfrak{h} = \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}D \oplus \mathring{\mathfrak{h}}_0$ est une <u>sous-algèbre de Cartan</u> de $\mathfrak{g}$; c'est-à-dire une sous-algèbre $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable maximale de $\mathfrak{g}$, cf [P-K], [K] ou [R1].

2.2. Si maintenant $\mathfrak{h}$ est une SAC quelconque de $\mathfrak{g}$, l'ensemble $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ des poids non triviaux de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est un <u>système de racines</u> infini mais dont les espaces propres sont de dimension finie : On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$.

Il existe une base Π de Δ et un système Δ^+ de racines positives, on pose $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha)$ et $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha<0} \mathfrak{g}_\alpha)$.

Si $\mathfrak{h}$ est construit comme en 2.1, on peut prendre pour Δ^+ l'ensemble des racines α telles que $(\alpha(D), \alpha(X))$ soit positif pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$.

2.3. Le groupe $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$) des <u>automorphismes intérieurs</u> de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) est engendré par les $\exp \mathrm{ad}\, X$ pour X dans $\mathfrak{h}$ ou dans $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. X dans $\mathfrak{g}_\alpha$) avec $\pm\alpha$ dans Π, cf [P-K] ou [R2].

THEOREME 2.4. [P-K] :

1) <u>Deux sous algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par</u> $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$

2) <u>Une sous algèbre de Borel</u> <u>(i.e. une sous algèbre complètement résoluble maximale</u>, cf [P-K]) <u>de $\mathfrak{g}$ est conjuguée de $\mathfrak{b}^+$ ou de $\mathfrak{b}^-$ par</u> $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$

3) $\mathfrak{b}^+$ <u>et</u> $\mathfrak{b}^-$ <u>ne sont pas conjuguées par</u> $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

2.5. Il y a donc deux classes de conjugaison sous $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ de sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$. Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de $\mathfrak{g}$ est dit de première espèce s'il stabilise chaque classe de conjugaison, de seconde espèce dans le cas contraire, [L] .

Levstein [L] a étudié et classifié les involutions (linéaires) de première espèce (résultats améliorés et corrigés par Baush : [B] et [B-R]) et de seconde espèce (dans ce cas la liste produite est exhaustive mais peut-être redondante).

Une semi-involution de première (resp. seconde) espèce, par exemple τ'_1 (resp. τ'_2) de 1.4, donne naissance à une forme réelle dite presque déployée (resp. presque compacte) car les formes déployées (resp. "compactes") en sont des exemples ; cf [R2].

2.6. D'après [R2] si τ' est une semi-involution de seconde espèce, il existe une (conjuguée de la) semi-involution de Cartan ω' qui commute à τ' ; alors $\tau'\omega'$ est une involution de premère espèce et l'on obtient ainsi une bijection entre les classes de conjugaison d'involution de première espèce et les classes de conjugaison des couples formés d'une semi-involution de seconde espèce τ' et d'une SAC "maximalement compacte" ou des couples formés d'une forme réelle presque compacte et d'une sous algèbre "compacte" maximale. Malheureusement les SAC maximalement compactes de $(\mathfrak{g}, \tau')$ pourraient ne pas être toujours conjuguées par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\tau'}$ et l'on n'a donc pas forcément la classification des semi-involutions de seconde espèce.

D'autre part la classification de [B-R] et [R1] montrent que quelques involutions de première espèce de $\mathfrak{g}$ ne peuvent provenir d'une involution de $\mathring{\mathfrak{g}}$. Il y a donc quelques semi-involutions de seconde espèce de $\mathfrak{g}$ qui ne sont pas de la forme τ'_2 . On pourrait cependant les mettre sous cette forme à condition d'étendre la construction du paragraphe 1 au cas où $\mathring{\mathfrak{g}}$ est semi- simple (somme directe de 2 algèbres simples isomorphes).

THEOREME 2.7 : Toute semi-involution de première espèce τ' de l'algèbre affine $\mathfrak{g}$ de type $X_n^{(k)}$ s'écrit sous la forme $\tau' = \hat{L}_1(\mathring{\tau}', \theta)$ pour un certain choix d'une algèbre simple $\mathring{\mathfrak{g}}$ de type X_n , d'une semi-involution $\mathring{\tau}'$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$, d'un automorphisme θ d'ordre k ou $2k$ vérifiant $\mathring{\tau}'\theta\mathring{\tau}' = \theta^{-1}$ et d'un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\theta)$.

2.8. Ce théorème sera démontré dans la suite de cet article dont il constitue le but. Il permet de connaître toutes les formes presque déployées de $\mathfrak{g}$. La démonstration peut en fait donner la classification à isomorphisme près des paires formées d'une semi-involution de première espèce τ' et d'une sous algèbre de Cartan "maximalement compacte", (cf § 4). Malheureusement deux SAC maximalement compactes de $(\mathfrak{g}, \tau')$

ne sont certainement pas toujours conjuguées par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\tau'}$, et l'on n'a sans doute pas la classification des semi-involutions de première espèce ou des formes presque déployées de $\mathfrak{g}$.

2.9. Considérons donc une algèbre affine $\mathfrak{g}$ et une semi-involution de première espèce τ' de $\mathfrak{g}$. D'après [R2 ; § 3] il y a bijection entre les classes de conjugaison à isomorphisme près des semi-involutions de première espèce de $\mathfrak{g}$ ou de $\mathfrak{g}/\mathbb{C}c$.

Dans toute la suite de cet article on remplacera donc $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}/\mathbb{C}c$ (sans changer le nom).

On va construire dans les paragraphes suivants $\mathring{\mathfrak{g}}'$, $\mathring{\tau}'$ puis θ. Pour cela on utilisera éventuellement un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ avec $\hat{L}({}_1\mathring{\mathfrak{g}}, \xi)/\mathbb{C}c$ où ξ est un "automorphisme de diagramme" (d'ordre k) de l'algèbre simple ${}_1\mathring{\mathfrak{g}}$, cf [K; § 8] ou [R1]. L'élément D est alors noté d, c'est le poids fondamental p_0 correspondant à une certaine base numérotée $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ des racines.

§ 3. Construction de $\mathring{\mathfrak{g}}$ et $\mathring{\tau}'$:

3.1. L'application de translation $\mathcal{T}$:

Choisissons un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\hat{L}({}_2\mathring{\mathfrak{g}}, \theta_2)/\mathbb{C}c$ pour un certain choix de ${}_2\mathring{\mathfrak{g}}$ et θ_2 d'ordre m. On a alors un isomorphisme de $\mathfrak{g}'$ sur $L({}_2\mathring{\mathfrak{g}}, \theta)$ et l'on construit donc un isomorphisme de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ -modules $\mathcal{T} : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}'$, $t^j X \longmapsto t^{j+m} X$ pour X dans ${}_2\mathring{\mathfrak{g}}_j$.

En fait $(\mathrm{Id}-\mathcal{T})\mathfrak{g}'$ est un idéal maximal de $\mathfrak{g}'$ puisque le quotient est l'algèbre simple ${}_2\mathring{\mathfrak{g}}$. Or d'après [K; 8.6] tout idéal maximal de $\mathfrak{g}'$ est de la forme $(1-at^k)\mathfrak{g}'$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ pour l'identification de $\mathfrak{g}$ avec $\hat{L}({}_1\mathring{\mathfrak{g}}, \xi)$ de 2.9. On en déduit facilement que tout isomorphisme de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}'$-module $\mathcal{T}_1 : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}'$ tel que $(\mathrm{Id}-\mathcal{T}_1)\mathfrak{g}'$ soit un idéal maximal est la multiplication par at^k ou at^{-k} avec $a \in \mathbb{C}$, dans cette identification.

En particulier l'application $\mathcal{T}$ est canoniquement déterminée par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ au changement près de $\mathcal{T}$ en $a\mathcal{T}^{\pm 1}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

Un isomorphisme du type de la proposition 1.2 échange les applications $\mathcal{T}$.

3.2. $\mathcal{T}$ et $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$: Reprenons les constructions du premier alinéa de 3.1. : Dans l'algèbre de Lie $\mathrm{End}(\mathfrak{g}')$, $\mathcal{T}$ commute à $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}'$ puisque c'est un isomorphisme de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}'$ modules. Par contre on déduit aussitôt des formules que $[\mathrm{ad}\, D, \mathcal{T}] = m\mathcal{T}$.

3.3. $\mathcal{T}$ et τ' : D'après 3.1 on a $\tau'\mathcal{T}\tau' = a\mathcal{T}^{\pm 1}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. Mais τ' est de première espèce donc, d'après [R2; § 3], elle induit sur

$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' \simeq \mathbb{C}D$ la conjugaison par rapport à $\mathbb{R}D$, en particulier $\tau'D \in D+\mathfrak{g}'$, et, d'après 3.2, $[\mathrm{ad}\,\tau'D, \mathfrak{C}] = m\,\mathfrak{C}$. Ainsi $[\mathrm{ad}\,D, \tau'\mathfrak{C}\tau'] = m\,\tau'\mathfrak{C}\tau'$ et $\tau'\mathfrak{C}\tau'$ ne peut être que de la forme $\tau'\mathfrak{C}\tau' = a\,\mathfrak{C}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

Comme $\tau'^2 = \mathrm{Id}$, on a $\mathfrak{C} = \tau'(a\mathfrak{C})\tau' = \bar{a}\,\tau'\mathfrak{C}\tau' = a\,\bar{a}\,\mathfrak{C}$, donc $a\bar{a} = 1$. D'autre part si $b \in \mathbb{C}^*$ on a $\tau'(b\mathfrak{C})\tau' = \bar{b}a\,\mathfrak{C} = (a\bar{b}/b)b\,\mathfrak{C}$. Il existe donc $b \in \mathbb{C}^*$ tel que $\tau'(b\mathfrak{C})\tau' = b\,\mathfrak{C}$. Enfin un simple calcul montre que $b\,\mathfrak{C}$ est conjugué de $\mathfrak{C}$ par $\exp \mathrm{ad}((\log b)\ D/m)$.

<u>Ainsi, à conjugaison près par une automorphisme intérieur de</u> $\mathfrak{g}$, <u>on peut supposer que</u> τ' <u>commute à</u> $\mathfrak{C}$.

Ce résultat est un point clef de la démonstration : dans le cas des semi-involutions de seconde espèce, on a $\tau'\mathfrak{C}\tau' = a\,\mathfrak{C}^{-1}$ et on ne peut pas toujours supposer $\tau'\mathfrak{C}\tau' = \mathfrak{C}^{-1}$ (il peut y avoir un signe). Ceci explique les exceptions, indiquées en 2.6, au résultat annoncé en 1.6.

3.4. $\mathring{\mathfrak{g}}$ <u>et</u> $\mathring{\tau}'$: Le quotient $\mathring{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}'$ par $(\mathrm{Id}-\mathfrak{C})\mathfrak{g}'$ est une algèbre simple. On note $\pi : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathring{\mathfrak{g}}$ l'application quotient. La semi-involution τ' commute à $\mathfrak{C}$, donc stabilise $(\mathrm{Id}-\mathfrak{C})\,\mathfrak{g}' = \mathrm{Ker}\,\pi$ et passe au quotient en une semi-involution $\mathring{\tau}'$ de $\mathfrak{g}'$.

3.5. <u>Unicité</u> : Le $\mathfrak{C}$ qui commute à $\mathring{\tau}'$ est unique à une constante réelle près. Or multiplier $\mathfrak{C}$ par une constante b réelle positive c'est le conjuguer par $\exp \mathrm{ad}\, aD$ avec $a = \log b/m$ dans $\mathbb{R}$ ou par $\exp \mathrm{ad}\, a(D+x)$ pour n'importe quel $x \in \mathfrak{g}'$, (cf 3.2). De plus $\frac{1}{2}(D+\tau'D)$ est dans $D + \mathfrak{g}'$ (voir le début de 3.3), et est fixe par τ' . Donc à conjugaison près par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\tau'}$, il n'y a que $\mathfrak{C}$ et $-\mathfrak{C}$ qui commutent à τ' .

Dans l'écriture $\mathfrak{g}' = L({}_2\mathring{\mathfrak{g}}, \theta_2)$ on voit bien que les différents choix de $\mathfrak{C}$ donnent des algèbres $\mathring{\mathfrak{g}}$ isomorphes, entre elles et à ${}_2\mathring{\mathfrak{g}}$. Comme on verra en 5.7 et 6.3 que l'on peut supposer τ' gradué pour la graduation naturelle de $L({}_2\mathring{\mathfrak{g}}, \theta_2)$ ces isomorphismes entre algèbres échangent les semi-involutions $\mathring{\tau}'$.

Pour le moment on choisit $\mathfrak{C}$ (ou $-\mathfrak{C}$) et alors $\mathring{\mathfrak{g}}$, $\mathring{\tau}'$ et π sont bien déterminés.

§ 4. <u>Sous algèbres de Cartan maximalement compactes</u>.

4.1. Soit $\mathfrak{h}$ une SAC de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ détermine $\mathfrak{h}$, car $\mathfrak{h} = \{X \in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{g}_{im} / \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ diagonalisable$\}$, cf [B; IV 5.1] . La projection π induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}'$ sur la sous-algèbre $\pi(\mathfrak{h}')$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ qui est contenue dans une unique SAC de $\mathring{\mathfrak{g}}$ $\pi(\mathfrak{h}')_c = C_{\mathring{\mathfrak{g}}}(\pi(\mathfrak{h}'))$: en effet si $\mathfrak{h}$ est la SAC de 2.1, on a $\pi(\mathfrak{h}') = \mathring{\mathfrak{h}}_0$ et le résultat général s'en déduit par conjugaison par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$.

4.2. L'ensemble $\bar{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ des racines de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}'$ est un système de racines fini (éventuellement non réduit) : en effet par π il est isomorphe à $\Delta(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\mathfrak{h}}_0)$.

L'ensemble des restrictions à $\mathfrak{h}'$ des racines de Δ est $\bar{\Delta} \cup \{0\}$. Les racines de Δ dont la restriction à $\mathfrak{h}'$ est nulle sont dites <u>imaginaires</u> : ce sont les multiples entiers non nuls de l'une d'elles δ dite <u>plus petite racine imaginaire positive</u>. On a $\delta(d) = 0$ et δ est fixe par tout automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de première espèce de $\mathfrak{g}$ stabilisant $\mathfrak{h}$. L'application $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{g}'$ sur $\mathfrak{g}'$ transforme $\mathfrak{g}_\alpha$ en $\mathfrak{g}_{\alpha+k\delta}$: elle induit une translation sur Δ .

4.3. <u>Définition</u> : On dit que la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est <u>maximalement compacte</u> si τ' stabilise $\mathfrak{h}$ (et donc $\mathfrak{h}'$) et si $-\tau'$ stabilise une base du système de racines $\bar{\Delta}$.

Il est équivalent d'exiger que $\mathfrak{h}'$ soit stable par τ' et que $-\mathring{\tau}'$ stabilise une base de $\Delta(\mathring{\mathfrak{g}}, \pi(\mathfrak{h}')_c)$. Ceci signifie que $\pi(\mathfrak{h}')_c$ est maximalement compacte (ou fondamentale, cf [W]).

La terminologie vient de ce que $-\tau'$ ne peut pas stabiliser de base de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ puisque τ' conserve le signe des sous-algèbres de Borel ; la condition ci-dessus exprime donc que τ' est le plus proche possible de $-\mathrm{Id}$ sur Δ .

PROPOSITION 4.4. <u>Il existe une sous algèbre de Cartan maximalement compacte pour</u> τ' .

<u>Remarque</u> : Malheureusement deux telles SAC ne sont sans doute pas toujours conjuguées par $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})^{\tau'}$.

<u>Démonstration</u> : La semi-involution de première espèce τ' agit, par une involution, sur l'immeuble $\mathcal{J}^+$ des sous algèbres paraboliques (propres) positives de $\mathfrak{g}$, cf [R2 ; § 1] . De plus d'après [R2 ; § 2] τ' stabilise une SAC $\mathfrak{h}$ et une sous algèbre parabolique positive $\mathfrak{p}$ contenant $\mathfrak{h}$. Ainsi τ' stabilise l'appartement $A(\mathfrak{h})$ de $\mathcal{J}^+$ et la facette $\mathfrak{F}(\mathfrak{p})$ de cet appartement. Quitte à changer $\mathfrak{p}$ on peut supposer que τ' ne stabilise pas de facette de $\mathfrak{F}(\mathfrak{p})$.

L'appartement $A(\mathfrak{h})$ est $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{R}} = \{h \in \mathfrak{h} / \alpha(h) \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \Delta , \delta(h) = 1\}$; il contient d et est affine sous $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} = \{h \in \mathfrak{h} / \alpha(h) \in \mathbb{R} , \forall \alpha \in \Delta\}$. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ engendré par $\mathfrak{F}(\mathfrak{p})$; comme $\mathfrak{F}(\mathfrak{p})$ est un simplexe de V et ne contient pas de facette stable par τ'(qui est involutif), forcément $-\tau'$ induit l'identité sur V . Soit <u>s</u> l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{h}$ et les $\mathfrak{g}_\alpha$ tels que $\alpha(\mathfrak{F}(\mathfrak{p})) = 0$ (et donc $\alpha(V) = 0$) . C'est l'algèbre de Lie réductive intersection de $\mathfrak{p}$

et de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^-$ opposée à $\mathfrak{p}$ par rapport à $\mathfrak{h}$; elle est stable par τ' , son centre $\mathfrak{z}$ est inclus dans $\mathfrak{h}$ et $\mathbb{C}\otimes V = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{z}$ est un sous-espace de codimension 1 de $\mathfrak{z}$. De plus si X est un élément de $\mathfrak{h}'$ régulier pour $\underline{s}$, il existe un élément Y de $X+V$ dont le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ est $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{g}_{im}$.

D'après la théorie générale des algèbres de Lie semi-simples, il existe une SAC $\mathfrak{h}_1$ de $\underline{s}$ (donc de $\mathfrak{g}$: [R2 ; § 1]) qui est maximalement compacte pour $(\underline{s}, \tau')$ c'est-à-dire que τ' stabilise $\mathfrak{h}_1$ et $-\tau'$ fixe un élément X_1 de $\mathfrak{h}_1'$ régulier pour $\underline{s}$. Mais $\mathfrak{h}_1$ contient $\mathfrak{z}$, donc $-\tau'$ fixe X_1+V qui contient, d'après l'alinéa précédent et par conjugaison cf [R2 ; § 1] , un élément Y_1 dont le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ est $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1')$. Ainsi Y_1 détermine une base de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1')$ stable par $-\tau'$ et $\mathfrak{h}_1$ est une SAC maximalement compacte pour τ' . □

§ 5. Cas non tordus : $k = 1$.

PROPOSITION 5.1. Il y a correspondance bijective entre les classes d'isomorphismes de

1) certains triplets $(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\tau}', \theta)$ formés d'une algèbre simple complexe $\mathring{\mathfrak{g}}$, d'une semi-involution $\mathring{\tau}'$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ et d'une involution intérieure θ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ commutant à $\mathring{\tau}'$, qui doit plus précisément être de la forme $\theta = \exp \operatorname{ad} i\pi H$ où H appartient à uen sous-algèbre de Cartan maximalement compacte de $(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\tau}')$

2) les quadruplets $(\mathfrak{g}, \tau', \mathfrak{h}, +)$ formés d'une algèbre affine non tordue $\mathfrak{g}$, d'une semi-involution de première espèce τ' de $\mathfrak{g}$, d'une sous algèbre de Cartan maximalement compacte $\mathfrak{h}$ de $(\mathfrak{g}, \tau')$ et d'une classe de conjugaison de sous algèbres de Borel $+$ de $\mathfrak{g}$.

Remarques 5.2. a) Cette proposition précise le théorème 2.7 si $k = 1$.

b) Si l'on fixe $\mathfrak{g}$ et donc $\mathring{\mathfrak{g}}$, on obtient une bijection entre les classes de conjugaison sous $\operatorname{Aut}(\mathring{\mathfrak{g}})$ de certaines paires $(\mathring{\tau}', \theta)$ et les classes de conjugaison sous le groupe $\operatorname{Aut}^1(\mathfrak{g})$ des automorphismes de première espèce de $\mathfrak{g}$ des paires $(\tau', \mathfrak{h})$.

c) La démonstration qui va suivre dans le reste de ce paragraphe 5, et plus particulièrement le 3ème alinéa de 5.6 permettraient en fait de donner une classification explicite de ces quadruplets ou d'indiquer quels sont les triplets qui interviennent effectivement. En particulier H doit être fixe par $-\mathring{\tau}'$.

5.3. Description de l'application $(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\tau}', \theta) \longmapsto (\mathfrak{g}, \tau', \mathfrak{h}, +)$.

On pose évidemment $\mathfrak{g} = L(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta)/\mathbb{C}c$ et $\tau' = \hat{L}_1(\mathring{\tau}, \theta)$. Soit $\mathring{\mathfrak{h}}$ une SAC maximalement compacte de $(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\tau}')$ telle que $\theta = \exp \operatorname{ad} i\pi H$ avec

$H \in \mathring{\mathfrak{h}}$; on pose alors $\mathfrak{h} = \mathbb{C}D \oplus \mathring{\mathfrak{h}}$ et + est la classe de conjugaison de la sous-algèbre de Borel correspondant au système de racines positives Δ^+ formé des $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ tels que $(\alpha(D), \alpha|_{\mathring{\mathfrak{h}}})$ soit positif dans $\mathbb{Z} \times \Delta(\mathring{\mathfrak{g}},\mathring{\mathfrak{h}})$ ordonné par l'ordre lexicographique, le système de racines positives Δ^+ sur $\Delta(\mathring{\mathfrak{g}},\mathring{\mathfrak{h}})$ étant quelconque (cela n'influe pas sur la classe de conjugaison de Δ^+).

Cette construction est fonctorielle donc une conjugaison de $(\mathring{\mathfrak{g}},\mathring{\tau}', \theta,\mathring{\mathfrak{h}})$ par un isomorphisme se traduit par une conjugaison de $(\mathfrak{g},\tau',\mathfrak{h},+)$ par un isomorphisme. D'autre part on a fait un choix pour $\mathring{\mathfrak{h}}$, mais un tel choix est bon si et seulement si $\mathring{\mathfrak{h}}$ est maximalement compacte pour $(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\tau}')$ et fixée par θ , ce qui implique que $\mathring{\mathfrak{h}}$ est une SAC maximalement compacte de $(\mathring{\mathfrak{g}}^{\theta},\mathring{\tau}')$; deux tels choix sont donc conjugués par $\mathrm{Int}(\mathring{\mathfrak{g}}^{\theta})^{\mathring{\tau}'} \subset \mathrm{Int}(\mathring{\mathfrak{g}})^{\theta,\mathring{\tau}'}$. Il en résulte que l'on a bien construit l'application annoncée entre les classes de conjugaison.

5.4. Les numéros suivants sont consacrés à la réciproque. On se donne donc $\mathfrak{g}$, τ', $\mathfrak{h}$ et + . On a construit $\mathring{\mathfrak{g}}$ et $\mathring{\tau}'$ au paragraphe 3 et d'après 4.3 $\mathring{\mathfrak{h}} = \pi(\mathfrak{h}')$ est une SAC maximalement compacte de $(\mathring{\mathfrak{g}},\mathring{\tau}')$.

5.5. <u>Le réseau</u> $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{Z}}$: La plus petite racine imaginaire positive $\delta = \Sigma\, a_i\alpha_i$ de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est associée à $\mathfrak{h}$ et + . Alors $\mathfrak{h}^1 = \{h \in \mathfrak{h} / \delta(h) = 1$ et $\alpha(h) \in \mathbb{Z}\ \forall \alpha \in \Delta\}$ est un réseau de l'appartement $A(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}^1_{\mathbb{R}}$. C'est un espace affine sous $\mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}} = \{h \in \mathfrak{h}'/\alpha(h) \in \mathbb{Z}\ \forall\, \alpha \in \Delta\}$ qui contient d .

LEMME : <u>$\mathfrak{h}^1_{\mathbb{Z}}$ est l'orbite de d dans $\mathfrak{h}$ sous le groupe $\mathrm{Aut}^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ des automorphismes (linéaires ou semi-linéaires) de première espèce de $\mathfrak{g}$ qui stabilisent $\mathfrak{h}$. Tout élément H de $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{Z}}$ peut être identifié à d en changeant la base de Δ par un élément du groupe de Weyl et la numérotation de cette base par un automorphisme de diagramme</u>.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{Z}}$ est stable par $\mathrm{Aut}^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, il suffit donc de démontrer la seconde assertion. Par le groupe de Weyl on peut ramener H dans l'alcove fondamentale, alors H est un poids fondamental p_i avec coefficient $a_i = 1$ et, grâce à un automorphisme de diagramme on peut ramener H sur $d = p_0$ □ .

5.6. <u>Construction de</u> θ .

D'après le lemme on a $\tau'(d) = d + h'$ où h' est dans $\mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}$ identifié à $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$. Comme τ' est involutif, on voit facilement que $h' \in \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}(-\mathring{\tau}')$ c'est-à-dire que $\mathring{\tau}'(h') = -h'$.

Mais d n'étant pas canoniquement déterminé, on peut (quitte à changer de base et de numérotation, cf 5.5) remplacer d par d+h avec $h \in \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ alors $\tau'(d+h) = (d+h) + h' + \mathring{\tau}'(h) - h$. Ainsi h' est bien déterminé dans le groupe (de cohomologie) $\mathring{h}_{\mathbb{Z}}(-\mathring{\tau}')/(\mathring{\tau}' - \mathrm{Id})\mathring{h}_{\mathbb{Z}}$.

D'autre part h est maximalement compacte donc $-\mathring{\tau}'$ stabilise une base $\mathring{\Pi} = \{\mathring{\alpha}_1, \dots, \mathring{\alpha}_\ell\}$ de $\Delta(\mathfrak{g}, h') = \Delta(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{h})$ et $\eta = -\mathring{\tau}'|_{\mathring{\Pi}}$ en est un automorphisme de diagramme. Si $\mathring{p}_1, \dots, \mathring{p}_\ell$ est le système correspondant de poids fondamentaux on a $\mathring{h}_{\mathbb{Z}} = \oplus\, \mathbb{Z}\mathring{p}_i$ et $-\mathring{\tau}'(\mathring{p}_i) = \mathring{p}_{\eta i}$. Ainsi $\mathring{h}_{\mathbb{Z}}(-\mathring{\tau}') = (\underset{\eta i = i}{\oplus} \mathbb{Z}\, \mathring{p}_i) \oplus (\underset{i<\eta i}{\oplus} \mathbb{Z}(\mathring{p}_i + \mathring{p}_{\eta i}))$ et $-(-\mathring{\tau}' - \mathrm{Id})\mathring{h}_{\mathbb{Z}} = (\underset{\eta i = i}{\oplus} 2\mathbb{Z}\, \mathring{p}_i) \oplus (\underset{i<\eta i}{\oplus} \mathbb{Z}(\mathring{p}_i + \mathring{p}_{\eta i}))$ donc $\mathring{h}_{\mathbb{Z}}(-\mathring{\tau}')/(\mathring{\tau}' - \mathrm{Id})\mathring{h}_{\mathbb{Z}} = \underset{\eta i = i}{\oplus} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\mathring{p}_i$.

L'automorphisme $\theta = \exp \operatorname{ad} i\pi h'$ est une involution (triviale ou non) de $\mathring{\mathfrak{g}}$ commutant à $\mathring{\tau}'$ et de la forme prescrite. De plus θ est bien déterminé par $(\mathfrak{g}, \tau', h, +)$.

5.7. <u>Conclusion</u>

On sait qu'à isomorphisme près on peut supposer que $\mathfrak{g} = \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})/\mathbb{C}c$ et $h = \mathbb{C}d \oplus \mathring{h}$, les classes de sous algèbres de Borel positives se correspondant également, cf § 3. Mais d'après 1.2 il existe un isomorphisme de $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})/\mathbb{C}c$ sur $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta, 2)/\mathbb{C}c$ qui est l'identité sur $\mathring{h}$, échange les applications $\mathcal{C}$ (3.1) et transforme $2d+h'$ en D . Or τ' fixe $2d+h'$ donc la semi-involution τ' sur $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta, 2)/\mathbb{C}c$ fixe D , i.e. est graduée. Comme d'autre part τ' commute à $\mathcal{C}$ et induit sur $\mathring{\mathfrak{g}}$ la semi-involution $\mathring{\tau}'$, τ' ne peut être que $\hat{L}_1(\mathring{\tau}', \theta)$.

On a donc construit un inverse à gauche à l'application décrite en 5.3. entre les classes de conjugaison ; ce qui achève les démonstrations de 5.1 et de 2.7 si $k = 1$.

§ 6. <u>Cas tordus</u> : $k = 2$ <u>ou</u> 3 .

6.1. Dans ces cas nous allons donner un résultat moins précis que la proposition 5.1 et nous limiter à la démonstration du théorème 2.7.

On se donne donc une algèbre affine $\mathfrak{g}$ (quotientée par son centre), une semi-involution de première espèce τ' de $\mathfrak{g}$ et une SAC maximalement compacte h . On a déjà construit en 3.4 une algèbre simple $\mathring{\mathfrak{g}}$ et une semi-involution $\mathring{\tau}'$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$; il reste à construire θ et un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta)$ qui transforme τ' en $\hat{L}_1(\mathring{\tau}', \theta)$.

Soient $\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_\ell\}$ une base stable par $-\mathring{\tau}'$ de $\bar{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}, h') = \Delta(\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{h}_0)$ et $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_\ell$ la base duale de $h' = \mathring{h}_0$. Pour $i = 1, \dots, \ell$ on note n_i la dimension de l'espace propre $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}_i}$ de h' .

L'orbite de d dans h sous $\mathrm{Aut}^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, h)$ n'est plus $h^1_{\mathbb{Z}}$. Il faut le remplacer par l'ensemble des "sommets spéciaux".

LEMME 6.2. <u>Soit</u> $\mathfrak{h}_s^1$ <u>l'ensemble des</u> $h \in \mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}$ <u>tels que pour tout</u> α <u>dans</u> Δ $\alpha - \alpha(h)\delta$ <u>est dans</u> Δ <u>ou</u> 2Δ .

1) $\mathfrak{h}_s^1$ <u>est un espace affine sous le sous-groupe</u> $\mathfrak{h}'_s$ <u>de</u> $\mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}$ <u>formé des</u> $h \in \mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}$ <u>tels que</u> $\bar{\alpha}(h) \in k\mathbb{Z}$ <u>si</u> $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ <u>a un espace propre</u> $\mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{\alpha}}$ <u>de dimension 1</u>.

2) $\mathfrak{h}'_s = \bigoplus_{i=1,\ell} \frac{k}{n_i} \mathbb{Z}\bar{p}_i$

3) $\mathfrak{h}_s^1$ <u>est l'orbite de</u> d <u>dans</u> $\mathfrak{h}$ <u>sous</u> $\mathrm{Aut}^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. <u>Tout élément</u> H <u>de</u> $\mathfrak{h}_s^1$ <u>peut être identifié à</u> d <u>en changeant la base de</u> Δ <u>par un élément du groupe de Weyl et la numérotation de cette base par un automorphisme de diagramme</u>.

<u>Remarques</u> : a) L'ensemble 2Δ de la définition de $\mathfrak{h}_s^1$ n'est utile que pour $\mathfrak{g}$ de type $A_{2\ell}^{(2)}$. Dans ce cas on a d'ailleurs $\mathfrak{h}_s^1 = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^1$ et $\mathfrak{h}'_s = \mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}$ comme dans les cas non tordus.

b) Dans [B; I § 6] on indique dans tous les cas le groupe $\mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}\,\mathring{W}_0\theta^\vee_{\bar{I}}$. Il se trouve que $\mathfrak{h}'_s$ contient $\mathbb{Z}\mathring{W}_0\theta^\vee_{\bar{I}}$ et que les tables de [B] permettent de déterminer $\mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}/\mathfrak{h}'_s$ et $\mathfrak{h}'_s/\mathbb{Z}\mathring{W}_0\theta^\vee_{\bar{I}}$. En effet ce dernier groupe est en fait isomorphe au groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes de diagramme. Ce problème est déjà apparu dans [B] : cf la remarque à la fin de la liste I du chapitre V.

c) Dans la réalisation de $\mathfrak{g}$ décrite ci-dessous, la formule 2) ci-dessus montre que $\mathfrak{h}'_s = (\xi^\circ + \ldots + \xi^{k-1})\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}$ qui est bien contenu dans $(\mathring{\mathfrak{h}}^{\xi})_{\mathbb{Z}} = (\mathring{\mathfrak{h}}_0)_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}$.

<u>Démonstration</u> : On utilise la description de $\mathfrak{g}$ sous la forme $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}},\xi)/\mathbb{C}c$ où ξ est un automorphisme de diagramme (d'ordre k) de $\mathring{\mathfrak{g}}$; Ceci signifie en particulier qu'il existe une SAC $\mathring{\mathfrak{h}}$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ stable (ainsi qu'une base $\mathring{\Pi} = \{\mathring{\alpha}_i\}$ de son système de racines $\mathring{\Delta}$) par ξ . Alors $\mathfrak{h} = \mathbb{C}d \oplus \mathring{\mathfrak{h}}_0$, $\mathfrak{h}' = \mathring{\mathfrak{h}}_0 = \mathring{\mathfrak{h}}^{\xi}$ et $\bar{\Delta}$ est l'ensemble des restrictions $\bar{\mathring{\alpha}} = \mathring{\alpha}|_{\mathring{\mathfrak{h}}^{\xi}}$ des racines $\mathring{\alpha}$ de $\mathring{\Delta}$. Pour $0 \le j \le k-1$ on note $\bar{\Delta}_j$ l'ensemble des racines $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ telles que ξ admette la valeur propre $\exp(2i\pi j/k)$ sur $\mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{\alpha}}$. Alors Δ qui est contenue dans le dual de $\mathbb{C}d \oplus \mathfrak{h}'$ est formé, à une identification évidente près, des éléments de la forme $(j+kn)\delta + \bar{\alpha}$ pour $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_j$ et $n \in \mathbb{Z}$. On constate que $\bar{\Delta} = \mathring{\Delta}_0$ sauf dans le cas $A_{2\ell}^{(2)}$ où $\bar{\Delta} \subset \bar{\Delta}_0 \cup 2\bar{\Delta}_0$.

1) Posons $\mathfrak{h}'_s = \{h \in \mathfrak{h}'/h+d \in \mathfrak{h}_s^1\}$. Alors $\mathfrak{h}'_s$ est formé des $h \in \mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}$ tels que $\alpha - \alpha(h+d)\delta \in \Delta \cup 2\Delta$, pour $\alpha \in \Delta$ c'est-à-dire tels que $\bar{\alpha} - \alpha(h)\delta \in \Delta \cup 2\Delta$, pour $\alpha = \alpha(d)\delta + \bar{\alpha} \in \Delta$.

Si $k = 2$, cette dernière condition équivaut à $\bar{\alpha}(h) \in 2\mathbb{Z}$

quand $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ mais $\bar{\alpha} \notin (\bar{\Delta}_0 \cup 2\bar{\Delta}_0) \cap \bar{\Delta}_1$ autrement dit quand $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} - \bar{\Delta}_1$ ou encore quand $\bar{\alpha}$ est de la forme $\bar{\mathring{\alpha}}$ avec $\xi(\mathring{\alpha}) = \mathring{\alpha}$ et $\bar{\mathring{\alpha}}$ non divisible. Cette dernière restriction est inutile car si $\bar{\alpha}$ est divisible, $\bar{\alpha}(h) \in 2\mathbb{Z}$. Ainsi $\mathfrak{h}'_s$ est formé des $h \in \mathfrak{h}'_{\mathbb{Z}}$ tels que $\bar{\alpha}(h) \in 2\mathbb{Z}$ si $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ est de la forme $\bar{\alpha} = \bar{\mathring{\alpha}}$ avec $\xi\mathring{\alpha} = \mathring{\alpha}$ autrement dit si $\dim \mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{\alpha}} = 1$.

Si $k = 3$, la condition équivaut à $\bar{\alpha}(h) \in 3\mathbb{Z}$ si $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$ mais $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}_2 = \bar{\Delta}_0 \cap \bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2$, c'est-à-dire si $\dim \mathring{\mathfrak{g}}_{\bar{\alpha}} = 1$.

2) Comme ξ stabilise $\mathring{\Pi}$, si une racine $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$ est fixe par ξ, on peut l'écrire sous la forme $\mathring{\alpha} = \sum_{\xi\alpha_i = \alpha_i} \lambda_i \alpha_i + \sum_{\mathring{\alpha}_i \neq \xi\mathring{\alpha}_i} \lambda_i (\mathring{\alpha}_i + \ldots + \xi^{k-1}\mathring{\alpha}_i)$.

Autrement dit $\bar{\alpha} = \sum_{=} \lambda_i \bar{\alpha}_i + \sum_{\neq} k \lambda_i \bar{\alpha}_i$; on en déduit immédiatement que $\mathfrak{h}'_s = \bigoplus_{i=1,\ell} \frac{k}{n_i} \mathbb{Z}\, \bar{p}_i$.

3) Il est clair que $\mathfrak{h}^1_s$ est stable par $\mathrm{Aut}^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ il suffit donc de démontrer la seconde assertion. Par le groupe de Weyl W on peut ramener H dans l'alcove fondamentale, alors H est un poids fondamental p_i avec $a_i = 1$ et $n_i = k$. Mais alors la classification montre que H est transformé de $d = p_0$ par un automorphisme de diagramme. □

6.3. <u>Conclusion</u> :

Comme en 5.6 on montre que $\tau'(d) = d+h'$ où $h' \in \mathfrak{h}'_s$ est fixé par $-\mathring{\tau}'$ mais n'est déterminé que modulo $(\mathring{\tau}' - \mathrm{Id})\mathfrak{h}'_s$.

Or $-\tau'$ ou encore $-\mathring{\tau}'$ stabilise la base $\{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_\ell\}$ de $\bar{\Delta}$: $-\mathring{\tau}'(\bar{\alpha}_i) = \bar{\alpha}_{\eta i}$ et d'après le lemme précédent h' est bien déterminé dans le groupe quotient $\bigoplus_{\eta i = i} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \frac{k}{n_i} \bar{p}_i$.

L'automorphisme $\theta = \xi \exp \mathrm{ad}(i\pi h'/k)$ de $\mathring{\mathfrak{g}}$ est d'ordre k ou $2k$.

D'après 1.2 il existe un isomorphisme de $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \xi)/\mathbb{C}c$ sur $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta, 2k)/\mathbb{C}c$ qui est l'identité sur $\mathfrak{h}^{\xi}$, échange les applications $\mathscr{C}$ et transforme $2d+h'$ en D. Or τ' fixe $2d+h'$, c'est-à-dire qu'elle est graduée pour la graduation naturelle de $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}, \theta, 2k)$. Comme d'autre part τ' commute à $\mathscr{C}$ et induit sur $\mathring{\mathfrak{g}}$ la semi-involution $\mathring{\tau}'$, on ne peut qu'avoir $\tau' = \hat{L}_1(\mathring{\tau}', \theta)$; ce qui achève la démonstration du théorème 2.7.

<u>Remarque 6.4.</u> Ainsi $\mathring{\tau}'$ stabilise les espaces propres de θ, donc $\mathring{\tau}'\theta\mathring{\tau}' = \theta^{-1}$. Par contre si l'on cherche, en vue d'une classification, à construire $\tau' = \hat{L}_1(\mathring{\tau}', \theta)$, c'est-à-dire θ, à partir de $\mathring{\mathfrak{g}}$, $\mathring{\tau}'$, ξ et h' choisi dans le groupe du second alinéa de 6.3, il faut démontrer que $\mathring{\tau}'\theta\mathring{\tau}' = \theta^{-1}$ et cela demande une étude plus approfondie (par exemple cas par cas).

REFERENCES :

[B] J. BAUSCH, Etude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines, thèse de l'Université de Nancy 1, Septembre 1985. in Revue de l'Institut Elie Cartan, n° 11, Nancy, 1988.

[B'] J. BAUSCH, Automorphismes des algèbres de Kac-Moody affines, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 302 (1986), pp 409-412.

[B-R] J. BAUSCH et G. ROUSSEAU : Involutions de première espèce des algèbres affines, Revue de l'Institut Elie Cartan, n° 11, Nancy, 1988.

[G-W] R. GOODMAN et N.R. WALLACH : Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle, J. für Math. 347 (1984), pp 69-133.

[K] V.G. KAC : Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, 1985.

[L] F. LEVSTEIN : A classification of involutive automorphisms of an affine Kac-Moody algebra, thèse M.I.T., Juin 1983.

[P-K] D.H. PETERSON et V.G. KAC : Infinite flag varieties and conjugacy theorems, Proc. Natl. Acad. Sci. 80 (1983), pp 1778-1782.

[R1] G. ROUSSEAU : Espaces affines symétriques et algèbres de Lie affines, Revue de l'Institut Elie Cartan, n° 11, Nancy, 1988.

[R2] G. ROUSSEAU : Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines, Revue de l'Institut Elie Cartan, n° 11, Nancy, 1988.

[W] G. WARNER : Harmonic analysis on semi- simple Lie groups I, Springer Verlag, Berlin, 1972.

Unité Associée au CNRS n° 750, "Analyse Globale"
Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I
B.P. 239
54506 VANDOEUVRE LES NANCY CEDEX (FRANCE)